EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XV JORNADAS
VOLUMEN 11 (2005)
TOMO I

Horacio Faas
Aarón Saal
Marisa Velasco
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Mecánica cuántica y cantidad

*Federico Holik**

1. Introducción

La definición cantoriana de conjunto dice que: "Un conjunto es una reunión en un todo de objetos distinguibles y definidos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, que serán llamados los elementos del conjunto" [1]. Esta noción de conjunto asume explícitamente que sus elementos son entidades bien definidas y distinguibles. Asunciones de este tipo son razonables porque en general, los "objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento" cumplen estos requisitos. Sin embargo, el estudio de los fenómenos que ocurren a escala de los átomos, revela que no es posible extrapolar a esta escala ideas tan arraigadas en nuestra intuición como las de distinguibilidad o identidad, en el mismo sentido en que lo hacemos con los objetos de nuestra experiencia cotidiana. Dicho de otro modo: hacer extrapolaciones de este tipo lleva a predicciones que difieren notablemente de los resultados experimentales. Es por este motivo que estudiar los presupuestos intuitivos que usamos cuando razonamos se vuelve una cuestión de primer orden si se quiere interpretar la microfísica, y en este contexto cobra renovada importancia el problema filosófico de la indistinguibilidad o identidad de los indiscernibles [2].

En 1974, la Sociedad Americana de Matemática organizó una reunión para evaluar las consecuencias y el alcance de una serie de veintitrés problemas de la matemática planteados por David Hilbert en el año 1900 [3], quien creía que en su solución debían orientarse los esfuerzos de los matemáticos en el siglo por venir. Uno de los resultados de este congreso fue la creación de una nueva lista de problemas, llamada Problemas de la Matemática de Hoy. El primer problema de esta lista es acerca de los fundamentos de la matemática, y fue planteado por el matemático Y. Manin. En el planteo del problema se encuentra el siguiente pasaje:

> Deberíamos considerar la posibilidad de desarrollar un lenguaje completamente nuevo para hablar del infinito. (...) Me gustaría subrayar que éste [el concepto de conjunto] es más bien una extrapolación de la física de nuestra experiencia diaria, donde podemos distinguir cosas, contarlas, ponerlas en algún orden, etc. La nueva física cuántica nos ha mostrado modelos de entidades con un comportamiento completamente diferente. Incluso los 'conjuntos' de fotones en una caja reflectante, o los electrones de una muestra de níquel son mucho menos cantorianos que el "conjunto" de los granos de arena. En general, una infinidad física altamente probabilística parece considerablemente más complicada e interesante que una simple infinidad de 'cosas' [4]

En nuestro caso trabajamos en incorporar la idea de indistinguibilidad cuántica a una teoría de conjuntos tipo ZFU (Zermelo-Fraenkel más urelementos) y en dar una definición satisfactoria de cardinal, o de alguna propiedad adecuada que permita dar cuenta del "tamaño" de las colecciones de indistinguibles.

* Universidad de Buenos Aires.

Epistemología e Historia de la Ciencia, Volumen 11 (2005)

Es importante señalar que la formulación actualmente aceptada de la mecánica cuántica se las arregla para dar el resultado correcto (deducir las distribuciones estadísticas observadas experimentalmente) recurriendo a lo que Krause dio en llamar "la estrategia de Weyl" [5]. Esta estrategia consiste en etiquetar a los indistinguibles primero (y para ello se asume momentáneamente que son distinguibles) y después imponer postulados, como por ejemplo el postulado de simetrización, que lleven al resultado deseado. Varios autores señalaron la importancia de desarrollar formas de llegar a los resultados estadísticos correctos suponiendo en todo momento del razonamiento que las partículas son indistinguibles, evitando el método de Weyl. Es con este espíritu que se desarrollaron dos teorías de cuasiconjuntos, "*Quasi set theory*" y "*Quaset theory*" (ver [6]). Estas teorías contienen dentro de sí mismas una copia de ZF pero permiten a la vez la existencia de cuasiconjuntos con la propiedad de que sus elementos sean indistinguibles entre sí. La indistinguiblidad se consigue -por ejemplo, en la teoría de Krause et. al. [7]- con una relación primitiva "≡" (indistinguibilidad) y una nueva clase de átomos, llamados m-átomos, los cuales representarían dentro de la teoría a los cuantos. Acerca de los m-átomos de una misma clase, sólo tiene sentido afirmar (dentro de la teoría) que son indistinguibles entre sí, y expresiones del tipo $x=y$ no están bien formadas para estos elementos. Es importante señalar que en esta teoría, indistinguiblidad no implica que dos m-átomos sean el mismo, y así, es posible que aun siendo indistinguibles, pertenezcan a distintos cuasiconjuntos. Se obtiene de esta forma una teoría en donde existen cuasiconjuntos cuyos elementos pueden ser indistinguibles, y como consecuencia, no pueden ser etiquetados (se puede probar que no se pueden definir relaciones de orden) y por ello no se puede definir cardinal en el mismo sentido que en ZF. Pero un físico sabe que aun siendo indistinguibles, es posible afirmar, por ejemplo, que los electrones en un átomo de litio son tres. Es por ello que la teoría de cuasiconjuntos debería permitir que los agregados de indistinguibles tengan alguna suerte de cardinal.

Esto se resuelve en la formulación de Krause et. al. (así como en la de Dalla Chiara et al.) postulando que a cada cuasiconjunto le corresponde un número cardinal, y se postulan también algunas propiedades elementales del cardinal que en ZF son teoremas. Estos postulados le dan contenido a lo que en esta teoría se llama cuasicardinalidad.

De este modo, al postular una regla de asignación de cardinales, el cuasicardinal termina siendo un concepto primitivo, al contrario de lo que ocurre en ZF en donde la propiedad de que a cada conjunto se le pueda asignar un cardinal se deduce de los axiomas.

En el actual estado de nuestro trabajo pudimos dar una axiomática de cuasiconjuntos finitos, reemplazando los axiomas de cuasicardinalidad de Krause por dos axiomas que permiten deducir los de Krause como teoremas. Estos axiomas (que están formulados con un lenguaje de primer orden), se apoyan en el hecho de que es posible definir (sin los axiomas de cuasicardinalidad) una suerte de conjunto minimal, que en algún sentido se parece al singulete de la teoría ZF. Para ello se hace lo siguiente. Sea X un cuasiconjunto no vacío ($X \neq \emptyset$). Entonces tiene algún elemento, y sea x uno de esos elementos. Sea A_x el cuasiconjunto

$A_x=\{a\in P(X)/\ x\in a\}$ Entonces el singulete de x (el cual se nota <x>) es la intersección de A_x, o sea $<x>=\cap A_x$.

La definición de cuasicardinal finito que damos se apoya en que es posible, dado un cuasiconjunto X no vacío, extraerle (restarle) un singulete. Es decir, dado X no vacío, es posible construir el cuasiconjunto $X^-=X\setminus<x>$. A X^- lo llamamos un descendiente directo de X. Si X^- no es vacío, se construye $(X^-)^-$, y así sucesivamente, hasta que eventualmente se llega al vacío. Se obtiene de esta forma, una colección de conjuntos descendiente $X\supseteq X^-\supseteq(X^-)^-\supseteq((X^-)^-)^-\supseteq\ldots\supseteq\emptyset$. Si este proceso concluye (se llega al vacío) en un número finito de pasos, decimos entonces que el cuasiconjunto es finito, y definimos el cuasicardinal como el número de pasos que se necesitaron. Para deducir como teoremas los axiomas de cuasicardinal de Krause, es necesario postular que todo cuasiconjunto admite al menos una sucesión de cuasiconjuntos encajados del tipo: $X\supseteq X^-\supseteq(X^-)^-\supseteq((X^-)^-)^-\supseteq\ldots$ (sin necesariamente llegar al vacío). Otra cosa que se necesita postular es que si X es finito, entonces $\neg(X\equiv X^-)$, es decir, si X es finito, entonces no es indidistinguible de sus descendientes directos.

Es importante hacer notar que, con esta construcción, en ningún momento (en ningún paso del proceso) se hace referencia dentro de la teoría a la identidad de los elementos del cuasiconjunto. De esta forma, se respeta el hecho de que los elementos son indistinguibles.

2. ¿Qué es contar?

¿A qué nos referimos cuando decimos que un conjunto tiene por ejemplo, diez elementos? La respuesta rigurosa es que tiene cardinal diez, o sea que es equivalente al número cardinal 10. En este caso y en lo que sigue, entenderemos equivalencia por una biyección. Cuando el conjunto es cualitativamente más grande (infinito), decimos que tiene tal o cual cardinal porque podemos probar que se puede bienordenar, que es equivalente a un conjunto de ordinales y que por lo tanto existe un ordinal mínimo (su cardinal), al cual ese conjunto es equivalente. Es por esto que decimos que cualquier conjunto clásico tiene algún cardinal asociado, y este cardinal se interpreta como el representante de la cantidad de elementos del conjunto.

Se ve entonces, que la idea formalizada de cantidad de elementos reposa fuertemente en el concepto de biyección. Se ve también que toda la construcción formal de la teoría de conjuntos relacionada con la cardinalidad está en correspondencia con la idea intuitiva de cantidad que manejamos en nuestra experiencia cotidiana: dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos si sus elementos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca. Pero si las cosas se miran con mayor frialdad, podríamos decir que el poseer cardinal (poseerlo en el sentido de la asignación que se puede probar en ZF) es una propiedad de los conjuntos que se deduce de sus axiomas, y esta propiedad no tiene por qué corresponderse con nuestra intuición.

El desarrollo formal de la teoría de conjuntos nos arroja propiedades que se alejan de nuestra intuición, como el hecho de que existen varias clases de infinitos, resultado no trivial de la teoría de conjuntos. Puede verse entonces cómo el desarrollo del formalismo enriquece nuestra concepción de lo infinito. ¿Qué pasa en teoría de cuasiconjuntos? Puesto que se puede probar que los cuasiconjuntos puros no se pueden bienordenar (ver [7]), se sigue que no es posible usar el mismo truco que se usa en ZF para probar que a todo conjunto le corresponde un número cardinal. Esto es: en teoría de cuasiconjuntos no podemos usar la misma técnica que se usó es ZF para asignarle razonablemente a todo cuasiconjunto un número cardinal. ¿Existirá otra técnica que permita asignarle cardinales a cuasiconjuntos arbitrarios? Nuestra respuesta es que es posible asignar cardinales a una cierta clase de cuasiconjuntos (los cuasiconjuntos finitos), que es razonable porque si se aplica a conjuntos clásicos, la definición de conjuntos finitos coincide con la definición ordinaria de ZF. Aun más: si los conjuntos son clásicos, los axiomas que introdujimos para cuasiconjuntos no son necesarios, ya que se convierten automáticamente en propiedades deducibles de los axiomas ZF.

Pero el problema está resuelto sólo en parte, ya que como siempre, el infinito acarrea problemas. El truco de ir sacando de a uno y llegar al vacío falla para cualquier cosa que merezca llamarse infinita. Sin embargo, a partir de la discusión que presentamos hasta aquí, estamos en condiciones de formular el problema de las colecciones de indistinguibles más sistemáticamente: Es necesario generar una idea razonable de cuasiconjuntos puros e infinitos, y a partir de ahí encontrar una forma de compararlos. Este trabajo es interesante porque el intento de resolverlo nos obligará necesariamente a desarrollar otras formas (distintas a las que se usan usualmente en ZF) de pensar lo infinito, y por lo tanto aumentar nuestros conocimientos sobre este intrincado concepto. Este es el esquema de trabajo que proponemos y creemos que de obtener resultados satisfactorios se habrá dado un paso adelante en el desarrollo de una teoría ampliada de la cardinalidad.

3. Realismo y cantidad en mecánica cuántica

Al realizar una medición individual en un sistema cuántico, el resultado de esa medición no puede ser atribuido a una propiedad que el sistema posea antes de la medición (a diferencia de lo que pasa en la mecánica clásica). En efecto, si se hace esto se llega a una contradicción con las leyes de la mecánica cuántica. ¿Qué relación tiene esto con la cardinalidad?

Consideremos como ejemplo un sistema de bosones en el siguiente estado: $\rho=(\alpha|1\rangle + \beta|2\rangle)(\alpha^*\langle 1| + \beta^*\langle 2|)$, donde $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autovectores del operador que representa el número de partículas con autovalores 1 y 2 respectivamente, y α y β son números complejos que cumplen $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ Si se realiza una medición del número de partículas que tiene este sistema, según la mecánica cuántica se obtendrá con probabilidad $|\alpha|^2$ que el sistema tiene una partícula y con probabilidad $|\beta|^2$ que tiene dos partículas. Pero en una medición individual van a ser detectadas o una o dos partículas, excluyendo cualquier otra posibilidad. Supongamos que en una medición individual se detectan dos partículas. ¿Qué derecho hay de decir que el sistema tenía dos partículas antes de realizar la medición cuando sabemos que esta clase de afirmaciones lleva a contradicciones con la mecánica cuántica? Está claro que decir que un sistema cuántico tiene cardinal bien definido sin medirlo, tiene una fuerte dosis de realismo. La afirmación de que el número de partículas varía con el tiempo porque las partículas se están creando y destruyendo constantemente es también realista, ya que asume que en cada instante el cardinal está bien definido.

En caso de que se sepa con certeza que el estado del sistema está en un autoestado del operador número de partículas, no hay problema en afirmar que antes de realizar una medición, el sistema tiene cardinal bien definido. Tampoco habría problema si se asumiera que el sistema está preparado en un estado en el que se sabe con certeza que es una mezcla estadística de estados con número de partículas bien definido. En ese caso, el estado del sistema del ejemplo anterior estaría representado por la siguiente matriz densidad:

$$\rho_m = |\alpha|^2 |1\rangle\langle 1| + |\beta|^2 |2\rangle\langle 1|$$

en donde el subíndice m indica mezcla estadística. Pero en el siguiente estado,

$$\rho = |\alpha|^2 |1\rangle\langle 1| + |\beta|^2 |2\rangle\langle 2| + \alpha\beta^* |1\rangle\langle 2| + \beta\alpha^* |2\rangle\langle 1|$$

la aparición de los términos de interferencia indica que habrá problemas en este caso con la interpretación realista. En este caso, la incapacidad de conocer el número de partículas, no proviene de nuestra ignorancia acerca del sistema, si no de que en este estado el cardinal ni siquiera está bien definido. En base a estas consideraciones vale la pena preguntarse: ¿es posible contener a las partículas de un sistema que se encuentra en el estado ρ en un cuasiconjunto? ¿Qué lugar le cabe a un sistema en ese estado dentro de la teoría? Si las partículas de un sistema así pudieran ser representadas por un cuasiconjunto, entonces debería tener algún cuasicardinal asociado, ya que todo cuasiconjunto lo tiene. Pero hemos visto que esto no es posible. Se sigue entonces que no es razonable asignar a todo cuasiconjunto un cardinal si se espera que los cuasiconjuntos representen a los sistemas cuánticos bosónicos o fermiónicos en general. En su estado actual, la teoría *quasi-sets* sólo estaría representando a las partículas que se encuentran en autoestados del operador número de partículas. Por ello, un sistema en el estado ρ no puede ser acomodado en el formalismo de Krause y tampoco en el nuestro, ya que este último es una variante axiomática que pretende ser equivalente a la de Krause.

4. Individualidad

¿En qué sentido decimos que existen sistemas formados por un solo fotón? Existen experimentos que revelan que claramente se pueden construir estados de un solo fotón. ¿Cómo se decide si el estado tiene un solo fotón o no? En última instancia, esta pregunta se contesta midiendo. Pero la medición involucra un proceso de decoherencia que en general destruye (modifica) el estado original del sistema. Y es en parte por esto que contar la cantidad de elementos de un sistema cuántico es cualitativamente distinto a contar la cantidad de elementos de un sistema clásico.

Sin embargo, el proceso de medición (que podría ser descripto en este caso como el proceso de interacción de la luz con la materia), nos permite construir una idea de individualidad que permite luego hablar del fotón como partícula. En forma análoga, y siempre a través de un proceso de interacción, es que podemos hablar de las demás partículas (electrones, protones, etc.). Se ve entonces que existe una idea de individualidad, por lo menos en algún sentido no necesariamente igual al clásico. Pero ¿qué pasa con los estados cuánticos no individuales?.

Sabemos que ya sea que el sistema esté formado por bosones o fermiones de una misma clase, la operación permutación de partículas no puede dar lugar a resultados observables. Las partículas se comportan como si fueran realmente indistinguibles. Es decir, que la indistinguibilidad no se debe a la ignorancia que tenemos del sistema, si no que es intrínseca. Pero en este caso, ¿qué derecho tenemos a decir que existen individuos en un sistema cuántico no individual? Claramente, un requisito mínimo para que una parte de un sistema pueda ser considerada un individuo debería ser el de poder distinguirse de las demás partes del sistema. Pero esto es justamente lo que no se puede hacer en un sistema formado por partículas idénticas. Se sigue entonces que las partículas elementales (bajo ciertas condiciones) no pueden ser consideradas individuos, (o por lo menos no son individuos en el mismo sentido que las partículas descriptas por la mecánica clásica).

Pero aun ante este problema, es posible seguir hablando de cantidad de fotones, electrones, etc. ¿Por qué? Tomemos como ejemplo el caso del campo electromagnético. Un detector fotoeléctrico consiste en su esencia de un átomo que puede ser ionizado debido a la interacción con el campo electromagnético. La señal del átomo ionizado debe ser luego amplificada para poder ser detectada. En el proceso de amplificación se produce la decoherencia. La señal amplificada es una corriente, y la intensidad de esa corriente es proporcional a "la cantidad de fotones absorbidos" en el volumen del detector (formado por muchos átomos). También es posible que el átomo ionizado se convierta en el núcleo de una mancha en una emulsión fotográfica. La cantidad de manchas que se observan *macroscópicamente* es proporcional a la cantidad de "fotones" detectados. Se ve entonces que una vez considerados los mecanismos de detección, es posible atribuir a un sistema cuántico un número asociado que representaría al número de "partículas". Pero es importante señalar que el así llamado "número de partículas" sólo aparece en general después del proceso de medición y ya hemos señalado que el proceso de medición implica necesariamente la transformación del estado original, y que el resultado de la medición no puede ser atribuido en general como una propiedad perteneciente al sistema antes de la medición.

Se sigue entonces que encontramos en la naturaleza sistemas que poseen un cardinal asociado, pero que no pueden ser considerados sencillamente como agregados de individuos en el mismo modo que sucede con los sistemas macroscópicos estudiados por la mecánica clásica. Esto es lo mismo que decir que debería existir la posibilidad de contar sin necesidad de distinguir, es decir de asignar una magnitud a un sistema que no es simplemente un agregado de individuos. El formalismo que propone Krause intenta modelar esta situación. Pero introduce el cardinal como una propiedad arbitraria (axiomática) de los cuasiconjuntos.

5. Conclusión

Del mismo modo en que la idea de individualidad sugerida por los experimentos que involucran la interacción del campo electromagnético con la materia (efecto fotoeléctrico como ejemplo) es la base para desarrollar la idea de partícula (en este caso fotón) y *posteriormente* la noción de agregado de partículas, la noción de singulete forma la base para construir la noción de cantidad de elementos y de cuasiconjuntos finitos, sin hablar necesariamente de individualidad en el sentido clásico. Es en este sentido que la variante axiomática que proponemos es más adecuada para representar al mundo físico.

Para terminar, creemos que en adelante los esfuerzos deberían estar orientados en tratar de modificar el formalismo para incluir a los estados cuánticos que no son autoestados del operador número de partículas.

Referencias:

[1] Cantor, G., *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, New York: Dover (1955).

[2] French, S., "Quantum Physics and the Identity of Indiscernibles", *British Journal of the Philosophy of Science* 39 (1988) 233-246.

[3] Browder, F. E. (ed) *Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics of the American Mathematical Society - Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems* Vol. XXVIII, Providence (1976).

[4] Manin, Yu. I., 'Mathematical Problems I. Foundations', in Browder, F. E. (ed.) (1976):, op. cit. p. 36.

[5] Krause, D., "Why quasi-sets?", *Boletín da Sociedade Paranaense de Matematica* 20 (2003) 73-92.

[6] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. and Krause, D., "Quasiset Theories for Microobjects: A Comparision", in Castellani, E. (ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics* Princeton University Press, Princeton (1998).

[7] Santorelli, A., Krause, D., Sant'Anna, A., "A Critical Study on the Concept of Identity in Zermelo-Fraenkel like Axioms", *arXiv math-LO*/0106098 (2001)