EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XV JORNADAS

VOLUMEN 11 (2005)

TOMO I

Horacio Faas
Aarón Saal
Marisa Velasco
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Reductionismo y universalidad en los fundamentos de la matemática a finales del siglo XIX[1]

*Javier Legris**

Existe la creencia de que las investigaciones acerca de los fundamentos de la matemática consisten en *reducir* todos los conceptos y principios de los matemáticos a aquellos que son tomados como "fundamentales". Esta creencia encuentra su justificación en las más típicas corrientes de los fundamentos de la matemática aparecidas a fines del siglo XIX y comienzos del XX, como son el logicismo y el intuicionismo. Esta apreciación se refuerza aun más al considerar las últimas dos décadas del siglo XIX, que es el período que examinaré en este trabajo. De todos modos, la idea de que toda fundamentación sea una reducción ha recibido críticas por parte de los matemáticos. Por esta razón, quisiera comenzar haciendo una cita breve de una obra reciente sobre el tema:

> El estudio de los fundamentos ha recibido una mala reputación entre los matemáticos, debido a la tesis reduccionista comparable a decir que la química atómica del carbón, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno es suficiente para comprender la biología. (Taylor 1999, intr.)

Por este motivo, algunos sugieren hoy en día que la auténtica tarea de los fundamentos de la matemática consiste, por ejemplo, en dar rigor a las demostraciones matemáticas informales mediante sistemas formales o en encontrar, con una visión más pragmática, un conjunto de estructuras básicas que sirvan para caracterizar las diferentes teorías matemáticas.

En lo que sigue voy a mostrar que además del reduccionismo tradicional, se han sostenido otras formas alternativas de reduccionismo, más afines con la idea de una "fundamentación práctica" de la matemática. Se ejemplificará con las investigaciones de Ernst Schröder sobre el álgebra de la lógica y su aplicación a la teoría de conjuntos. En este caso, el álgebra no funciona como una teoría a la cual reducir la teoría de conjuntos, sino como una estructura abstracta en la cual representarla. Por esta razón, la posición de Schröder se podrá caracterizar como una forma de estructuralismo respecto de los fundamentos de la matemática.

I

El caso más claro y tal vez más conocido de reduccionismo en fundamentos de la matemática, es, sin duda, el del logicismo de Gottlob Frege (1848-1925), si bien limitado al caso de la aritmética. Frege puso de manifiesto sus ideas desde 1879 con la publicación de *Begriffsschrift*, donde desarrolló su notación conceptual para tal fin, defendió en los *Fundamentos de la aritmética* de 1884 y que con modificaciones desarrolló en las *Leyes fundamentales de la aritmética* de 1893.

Como es sabido, Frege sostenía que la aritmética debía fundarse en conceptos puramente lógicos. Esto quería decir que las leyes de la aritmética debían derivar-

* Universidad de Buenos Aires. CONICET

jlegris@mail.retina.ar

se de principios lógicos con el auxilio de definiciones. De este modo, Frege pretendía responder a preguntas como "¿qué es un número?", la cual en su opinión carecía de una respuesta satisfactoria en la matemática de sus contemporáneos. Una respuesta semejante era indispensable para arribar a una idea clara de los números negativos, fraccionarios y complejos (véase 1884, p. XIV). Como resultado de sus investigaciones, llegó finalmente a un predicado "ser el número de", caracterizado sobre la base de la idea de equinumerocidad, tal como aparece en el célebre parágrafo 69 de los *Fundamentos de la aritmética*. Así, para Frege no existía una frontera nítida entre lógica y aritmética; ambas constituían una única ciencia ("eine einheitliche Wissenschaft", véase Frege 1885/6, p. 95), de modo que la praxis aritmética no era otra cosa que praxis lógica.

A diferencia de otros autores, para Frege el problema de la fundamentación de la matemática era esencialmente filosófico (véase, por ejemplo, Frege 1884, p. 3). En unas reflexiones escritas tardíamente, Frege apunta que concibió su programa logicista cuando advirtió que los enunciados sobre números eran en realidad enunciados sobre *conceptos*, y que esto lo condujo de la matemática a la lógica (véase Frege 1969, p. 273). En un sentido más estricto, las motivaciones de Frege para todo su programa tenían que ver con el rechazo del carácter sintético de la aritmética defendido por Kant y de la existencia de enunciados sintéticos *a priori*. Las leyes de la aritmética debían ser enunciados analíticos, y es en la búsqueda de una definición adecuada de analiticidad que termina desarrollando su posición logicista. La verdad analítica coincide para Frege con la verdad lógica. De este modo, establece su concepción de la matemática como una disciplina cuyas leyes son enunciados analíticos, y, tal como afirma posteriormente en los *Fundamentos de la aritmética*, la praxis matemática (en rigor, la aritmética) consiste en la búsqueda de las demostraciones que justifican las leyes aritméticas a partir de principios lógicos (véase Frege 1884 § 3, p. 4).

La situación de la geometría era para Frege muy distinta, ya que esta debía fundarse en la intuición del espacio y no en la lógica. Las leyes de la geometría eran enunciados sintéticos (y por lo tanto era concebible una geometría que, por ejemplo, no siguiera los principios de Euclides). En un trabajo tardío, Frege distingue tres fuentes para el conocimiento humano: la percepción sensible, la fuente que él llama lógica y la fuente geométrica (Frege 1924/1925). La fuente lógica era la que proporcionaba el conocimiento de las leyes de la aritmética y, en pocas palabras, se basaba en un *análisis* de la "forma lógica" de expresiones lingüísticas, de modo que el introducir un concepto matemático consiste en analizarlo hasta encontrar en él los conceptos lógicos que permitan definirlo, y el descubrimiento de las verdades aritméticas depende de su derivación a partir de leyes lógicas y definiciones. De este modo, los conceptos de la aritmética se reducen por medio de definiciones a conceptos como los de extensión de un predicado, conectivas y cuantificadores, conceptos a los que él consideraba como conceptos lógicos.

Una actitud reduccionista puede encontrarse también en Richard Dedekind (1831-1916), quien en su trabajo *¿Qué son y para qué sirven los números?*, de 1888, afirmaba que toda la aritmética descansaba en conceptos como los de conjunto y aplicación (*Abbildung*), que eran para él conceptos lógicos. En el prefacio de la primera edición, Dedekind dice ocuparse de los fundamentos de la ciencia más simple, la teoría de números. Su libro es "un intento de erigir la ciencia de los números sobre fundamentos unificadores" (Dedekind 1888, p. 338). Más abajo señala que "la extensión progresiva del concepto de número, la creación del cero, de los números negativos, quebrados, irracionales y complejos, puede llevarse a cabo mediante una reducción a nociones previas."

En el texto, Dedekind comienza con el tratamiento de la teoría de conjuntos (a los que llama "sistemas"), definiendo subconjunto (en términos de pertenencia, $\ni$ en la simbología de Dedekind, sin distinguirla de inclusión), intersección y unión. Luego introduce las ideas de aplicación y aplicación uno a uno (o "similar"). Para poder definir el concepto de número, Dedekind introduce después el concepto de cadena relativa a una aplicación φ: un conjunto K es una cadena relativa a φ si la imagen de K bajo φ es un subconjunto de K. Finalmente en la sección 6, Dedekind define número como cualquier "sistema infinito simple". Un tal sistema infinito simple se define en términos de cadenas mediante una serie de principios que resultan equivalentes con los axiomas de Peano. Cabe observar que, a diferencia de Frege, Dedekind caracteriza no lo que son los números naturales, sino la estructura que los caracteriza.

II

En las obras clásicas de historia de la lógica Ernst Schröder (1844-1902) aparece como el mayor representante del álgebra de la lógica en Alemania, y sobre todo como un sistematizador de esa disciplina que profundizó en las propiedades matemáticas del sistema de Boole y del álgebra de relativos de Charles Sanders Peirce. La obra que le dio renombre está formada por los tres volúmenes de las *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890-1895), su proyecto más ambicioso que quedó inconcluso por su muerte en 1902. Más referencias a la obra de Schröder pueden encontrarse en Legris 2003.

En el manual de álgebra y aritmética que escribió Schröder (Schröder 1873), el álgebra formal (*formale Algebra*) se define como el estudio de las leyes sobre operaciones algebraicas que se ocupan de números generales en un ilimitado dominio de números (*Zahlgebiet*), sin hacer supuesto alguno acerca de su naturaleza (véase Schröder 1873, p. 233) Schröder no asociaba el concepto de número con el de cantidad ni presuponía que el dominio de números debía restringirse a la matemática, antes bien, este concepto quedaba abierto a posibles extensiones y desarrollos (Schröder 1873, p. 2). En un breve texto escrito al año siguiente, afirmaba que los "dominios de números" en este sentido general podían estar constituidos por nombres propios, conceptos, juicios, algoritmos, números, símbolos para dimensiones y operaciones, puntos y sistemas de puntos, cantidades de sustancias (véase Schröder 1874, p. 3), etc.

Schröder concibió su álgebra formal como un *programa de reconstrucción de la matemática*, que constaba de cuatro tareas básicas agrupables en dos partes En primer lugar, figuraban los aspectos sintácticos: se presentaban los operadores básicos y sobre la base de ellos se definían los restantes, indicando los postulados para estas operaciones, y, además, debían explicitarse las reglas que servirían para obtener conclusiones a partir de los postulados. En segundo lugar, se debían determinar los dominios de números construibles según las operaciones y se debía proporcionar un significado (geométrico, físico) de las álgebras así constituidas (véase Peckhaus 2004, p. 567). En general, Schröder llamaba *álgebra absoluta* al álgebra formal y sus aplicaciones y la consideraba como una teoría *general* acerca de conexiones. Entre las varias aplicaciones del álgebra absoluta se encuentra la lógica (una descripción más detallada se encuentra en Legris 2003, p. 253). La estructura del álgebra absoluta puede representarse mediante la figura 1.

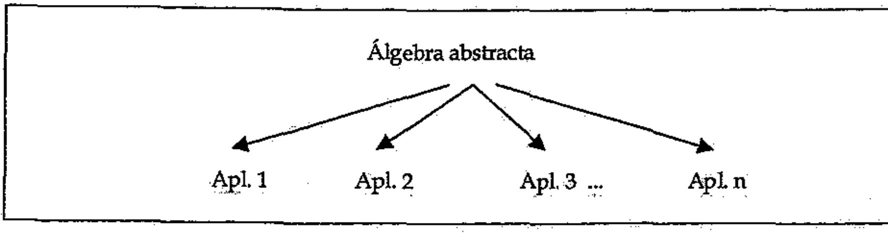

Figura 1

De este modo, al profundizar ideas existentes ya en Boole, Schröder esbozaba una concepción *estructural* de la lógica y de la matemática en general. En su breve libro *Der Operationskreis des Logikkalkuls*, de 1877, se abocó exclusivamente a la lógica, iniciando investigaciones que se extenderían en los dos primeros volúmenes de las *Lecciones sobre el álgebra de la lógica*. Allí, tanto la lógica de términos como la de enunciados (de la tradición lógica aristotélico-escolástica) fueron tratadas por él, aunque introduciendo además cuantificadores como operadores algebraicos generalizados. En el tercer volumen de las *Lecciones*, Schröder amplia su sistema con un álgebra de relativos, tomada esencialmente de Peirce, y que permite una adecuada representación algebraica de teorías matemáticas. El álgebra de relativos es considerada como un "cálculo", que se caracteriza mediante un número pequeño de estipulaciones (*Festsetzungen*) y que puede tener aplicaciones en diferentes dominios y en diferentes conceptos, tales como los de finitud, número, función, sustitución e incluso relaciones de parentesco entre seres humanos. Este sistema sirve como base para un "cómputo con letras" (*Buchstabenrechnung*) que mostrará plenamente su utilidad en las aplicaciones (véase Legris 2003, p. 254).

Ahora bien, para Schröder, el álgebra de relativos debe alcanzar su coronación en las aplicaciones a problemas de diversa índole. Es en ellas donde puede exhibir todas sus capacidades en forma plena. Una aplicación especialmente destacada en las *Lecciones* y que para Schröder reviste especial importancia es la aplicación a la teoría de cadenas [*Kettentheorie*] formulada por Dedekind pocos años antes (véase Dedekind 1888). Esta aplicación a la fundamentación de la aritmética constituye la meta más importante de su obra algebraica, siendo un "test de eficiencia" (*Probe ihrer Leistungsfähigkeit*) de la teoría de relativos (Schröder 1895a, p. 346). Schröder tenía en muy alta estima la obra de Dedekind y consideraba que su teoría de cadenas proporcionaba la fundamentación más adecuada de la aritmética. A esta aplicación le dedicó una gran parte del artículo que publicó en *Mathematische Annalen* con el título "Note uber die Algebra der binären Relative"

(Schröder 1895b) el mismo año de la publicación del volumen III de las *Vorlesungen*.

En realidad, Schröder se propone simbolizar los conceptos centrales de la teoría de cadenas, como los conceptos de conjunto (*System*) o aplicación (*Abbildung*), en el contexto de su lenguaje algebraico, a fin de obtener los teoremas de la teoría de cadenas a partir de los postulados del álgebra de relativos (véase Schröder 1895a, p. 346). La idea central es traducir el concepto de aplicación al lenguaje de relativos como una relación binaria. Así, la expresión φ(S) ("la aplicación φ de S") es traducida por Schröder como el producto de dos relaciones a y b, en símbolos (a;b), que él expresa como "la imagen a de b". De manera correspondiente, el concepto de cadena también encuentra su traducción en el álgebra de relativos, permitiendo una expresión más general al poder indicar el tipo de aplicación. Sobre esta base, Schröder traduce cada uno de los teoremas de la teoría de cadenas al álgebra de relativos, incluyendo el teorema de inducción completa (véase Schröder 1895a, pp. 354 y s. y 1895b, p. 156).

Poco después, Schröder ofreció otra interpretación ligada con temas fundacionales. En 1898 se publicó en la revista *Nova Acta Leopoldina* un artículo suyo en el que el álgebra de relativos se aplicaba a los teoremas de equivalencia de conjuntos formulados por Cantor poco antes. En este trabajo, Schröder demostraba con el auxilio del álgebra de relativos un resultado que afirmaba que dos conjuntos son equivalentes respecto de su cardinalidad si el primero es equivalente con una parte propia del segundo, y el segundo lo es con una parte propia del primero (Schröder 1898 b, p. 331).

III

Con estas aplicaciones a la teoría de conjuntos, Schröder se proponía mostrar las ventajas de su álgebra de relativos en tanto herramienta formal. Estas ventajas eran pragmáticas, y se pueden resumir en las siguientes propiedades (véase Schröder 1895a, pp. 351 y ss.): (i) *mayor generalidad*, en tanto el álgebra de relativos no sirve para representar una única teoría, como la de cadenas o la de conjuntos de Cantor, sino que en ella se puede representar *prima facie* cualquier teoría, (ii) las demostraciones del álgebra de relativos son más *breves*, ya que emplea únicamente un lenguaje simbólico y pueden acortarse pasos, y (iii) la notación es más *expresiva*, en el sentido de que permite expresar un número ilimitado de conceptos. Su perspectiva es metodológica, y con el álgebra de relativos Schröder continúa su programa de un álgebra absoluta en un contexto más amplio, en el que además las nuevas teorías fundacionales son tomadas en consideración. La nueva situación puede representarse mediante la figura 2.

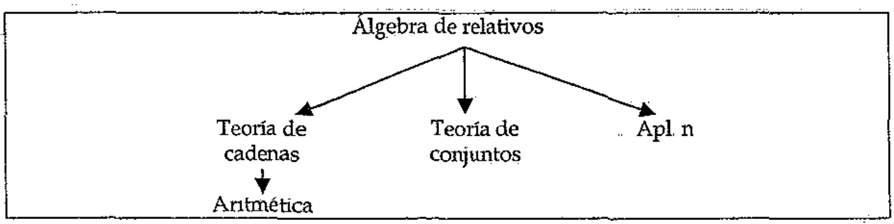

Figura 2

Schröder aspiraba a desarrollar una lógica de relativos que se aplicara a los fundamentos de las teorías matemáticas. Este programa nunca llegó a ser realizado. De todas maneras, algunas indicaciones de carácter preliminar pueden encontrarse en su trabajo sobre la "pasigrafía" (Schröder 1898a). El trabajo tiene un carácter programático: el álgebra de relativos es considerada tanto un *lenguaje científico universal* como una teoría en la cual *fundamentar* toda teoría científica. En este lenguaje se formulan los conceptos fundamentales (*Grundbegriffe*) de la "matemática pura", en particular de la lógica, la aritmética y la geometría. A su vez, esta matemática pura es parte de la "lógica general" (Schröder 1898a p. 149). La conexión entre lenguaje universal y fundamentación es clara. La tarea en cualquier disciplina científica consiste en reducir todos sus conceptos a un conjunto de conceptos básicos o "categorías" de aplicabilidad general (véase Schröder 1898a, p. 148.)

En síntesis, este programa apuntaba a una forma peculiar de reduccionismo con estos rasgos salientes:

1. Se determina un conjunto de *nociones primitivas* (o "categorías") a partir de las cuales puede definirse todo concepto científico.
2. Esta reducción se lleva a cabo por medio de *operaciones lógicas* que son de *aplicación general* y que funcionan a la manera de un cálculo.

En particular, la matemática pura es una rama de la lógica general. Tal es el caso de la aritmética, cuyos conceptos resultan de la composición de las nociones de esta lógica general, tales como multiplicidad, número, finitud, límite, función, aplicación, etc. (Schröder 1898a, p. 149). Este programa no es más que una continuación de su programa del álgebra absoluta, pero ahora con una herramienta más rica y de mayor alcance como es el álgebra de relativos.

Schröder presenta cinco "categorías" fundamentales de la "lógica general (Schröder 1898a, p. 150). Mediante un conjunto de definiciones, Schröder obtiene un total de 18 símbolos que constituyen su "sistema de designación completo de la pasigrafía general" (Schröder 1898a, p. 152). Estos símbolos le servirán para formular toda la lógica y la aritmética, y pueden recibir diferentes interpretaciones. Así los considera un "capital de denotación" para ser aplicado a la lógica y a la matemática (Schröder 1898a, pp. 153 y s.).

Una vez más, a fin de "ilustrar" la capacidad de esta lógica de relativos, lleva a cabo una "presentación pasigráfica" de los conceptos más básicos de la aritmética, dando definiciones de los conceptos numéricos, conjunto finito, infinito, conjunto ordenado, etc., interpretando los átomos del sistema como clases o conjuntos. No obstante, Schröder tiene en claro las dificultades del programa de la pasigrafía como un lenguaje científico universal, el cual deberá ser considerado más bien como un ideal (véase Schröder 1898a, p. 62).

IV

Siguiendo el desarrollo de la obra algebraica y lógica de Schröder, se pueden extraer las siguientes conclusiones. Schröder parte, a comienzos de la década de 1870, de un programa del álgebra absoluta. En este contexto se ubica su trabajo sobre el álgebra de la lógica en el que desarrolla ideas de Boole y el plan de sus *Lecciones*. La lectura de Peirce lo motiva para expandir esta álgebra abstracta a un álgebra de relativos, de carácter más general, y que permitiría expresar toda teoría matemática. Así, publica en 1895 la primera parte del tercer volumen de las *Vorlesungen*, dedicado al *álgebra* y *lógica* de relativos. Frente a este carácter universal del álgebra de relativos, surge la lógica de los relativos como una lógica general. Un paso inmediato es subrayar el carácter de esta lógica de relativos como una escritura universal, una pasigrafía. En esta pasigrafía se tiene un conjunto de unos pocos símbolos para operaciones que son para él de naturaleza *lógica* que permitirían expresar toda operación de la aritmética y de otras ramas de la matemática.

Aquí, el programa original de Schröder hace un giro y se orienta decisivamente hacia un logicismo, paralelo a los trabajos de Frege, Dedekind e incluso Peano. En su trabajo sobre la pasigrafía de 1898, Schröder ensaya un bosquejo de este programa de fundamentación y define –como se señaló– diferentes conceptos matemáticos, comenzando con el de conjunto y siguiendo por los números naturales, conjunto infinito, etc. Sin embargo, este logicismo (a diferencia del de Frege) es *estructural*. En efecto, para él la cuestión es definir lo que sea un conjunto y luego caracterizar conjuntos finitos, infinitos, ordenados, etc. No se ocupa tanto de la naturaleza del número ni de aclarar o elucidar qué se debe entender por "el número de x". Más bien, parece estar interesado en dar una teoría general en la que se caractericen todas las estructuras matemáticas. En este sentido, el proyecto, del que sólo existen esbozos muy elementales, continúa su obra precedente.

Otros interrogantes surgen aquí. Si bien Schröder está indicando únicamente la estructura de las entidades de la teoría en consideración, se puede suponer que los objetos a los que se aplican estas estructuras son únicos. En otras palabras, que el modelo de la teoría es único, de modo que la pasigrafía terminaría representando una única estructura: la estructura universal. El álgebra de relativos de Schröder plantea un sentido diferente de universalidad, en el que se entiende universalidad de un lenguaje o una teoría en términos de "generalidad". Una teoría o un lenguaje son universales cuando son *universalmente aplicables*, es decir aplicables a cualquier dominio. Esta idea de fundamentación puede aplicársele el rótulo de *mathesis universalis*, concepción metodológica que comenzó con Descartes, siguió en la Edad Moderna e influyó en la metodología de la matemática incluso en el siglo XIX.

Nota

[1] Este trabajo forma parte del proyecto de cooperación argentino-alemana "Lenguajes formales como lenguajes universales y la historia de la lógica moderna", financiado por la Fundación Antorchas y el DAAD (Nro. 14116-198).

Referencias bibliográficas

Dedekind, Richard. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, Vieweg. Reimpr. en *Gesammelte mathematische Werke*, comp. por Robert Fricke, Emmy Noether y Øystein Ore, vol. 3, Braunschweig, Vieweg, 1930-1932, pp. 335-391.

Frege, Gottlob. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, Verlag von Wilhelm Koebner. Reimpresión (edición del centenario a cargo de Christian Thiel): Hamburg, Felix Meiner, 1986.

Frege, Gottlob. 1885/1886. "Über formale Theorien der Arithmetik". En *Sitzungsberichte der Jeaneischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft* 12, pp. 94-104. Reimpreso en Frege 1990, pp. 103-111

Frege, Gottlob. 1924/1925. "Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft". En Frege 1969, pp. 286-294.

Frege, Gottlob. 1969. *Nachgelassene Schriften*. Comp. por G. Gabriel et al. Hamburg, Felix Meiner.

Frege, Gottlob. 1990. *Kleine Schriften*. 2da. ed., comp. por Ignacio Angelelli. Hildesheim-Zürich-New York, Georg Olms. (1ra. ed. 1967).

Legris, Javier. 2003. "La idea de lenguaje universal en el álgebra de la lógica de Ernst Schröder". *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 9, comp. por Víctor Rodríguez y Luis Salvatico, pp. 250-257.

Peckhaus, Volker. 2004. Schröder's Logic. In *Handbook of The History of Logic*, comp. por Dov M. Gabbay and John Woods, Vol. 3, pp. 557-609.

Schröder, Ernst. 1873. *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*. Lepizig, B. G. Teubner.

Schröder, Ernst. 1874. *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra*. Stuttgart, Schweizer-bart'sche Buchdruckerei.

Schröder, Ernst. 1890. *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik)*, vol. I. Leipzig, Teubner.

Schröder, Ernst. 1898a. "Über Pasigraphie, ihren gegenwärtige Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien". En *Verhandlungen der Ersten Internationales Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*. Comp. por Ferdinand Rudio. Leipzig, Teubner, pp. 147-162. Reedición: Nendeln, Kraus, 1967.

Schröder, Ernst. 1898b. "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze". *Nova Acta Leopoldina. Abhandlungen der Kaiserlich Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher* 71, pp. 301-362.

Taylor, Paul. *Practical Foundations of Mathematics*, Cambridge, Cambridge University Press., 1999.