EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIV JORNADAS

VOLUMEN 10 (2004), Nº10

Pío García
Patricia Morey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Una semántica de Kripke para lógicas cuánticas

Graciela Domenech / Hector Freytes†*

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en la pregunta por la posibilidad de considerar los datos empíricos acerca de los sistemas cuánticos como las propiedades de un objeto en la teoría y, en caso de que esto fuera posible, por las características de un objeto tal[1]. En mecánica cuántica, las partículas elementales (subatómicas y subnucleares) parecen los candidatos naturales a ocupar el lugar de objeto. Sin embargo no es para nada inmediato que esto pueda ocurrir: la "observación" de las partículas es mucho más mediada por la teoría que en el caso de pequeños sistemas clásicos[2] e incluso pueden ser inobservables por razones de principio como sucede con las partículas libres o con los *quarks*, siempre ellos en estados ligados[3]. Pero aún si ponemos entre paréntesis los ejemplos más problemáticos y consideramos las propiedades en los más simples, la complementariedad entre descripción espacio-temporal y causalidad impide -o por lo menos cuestiona- la aplicabilidad de las categorías de sustancia y causalidad en la síntesis de dichas determinaciones. Se pierde así la noción clásica de objeto con identidad temporal bien definida[4].

2. La lógica intrínseca

La noción de objeto -en el caso que nos interesa, la de objeto en la mecánica cuántica- adquiere su sentido en relación a la teoría que prescribe las leyes a las que el objeto responde. En el ámbito de la mecánica podemos distinguir por una parte, las notas que provienen de la exigencia de que los resultados de observaciones realizadas por diferentes sujetos sean consistentes y por otra, las propiedades relacionadas a la definición del sistema físico por la especificación de las magnitudes observables de interés. Las primeras relacionan la objetividad de la experiencia en este ámbito con las propiedades de simetría de la teoría[5] y no permiten determinar un objeto particular sino que delimitan una clase de objetos[6]. Son notas necesarias (en el sentido de que un electrón, por ejemplo, no sería tal si no tuviera cierta masa, carga y *spin*[7]) e independientes del estado en el que el sistema se encuentre. Con las segundas, propiedades que dependen del estado del sistema, pretendemos distinguir un individuo dentro de la clase. En su formulación standard, la mecánica cuántica establece una correspondencia entre las magnitudes físicas y ciertos objetos matemáticos llamados "observables"[8]. Los posibles resultados de la medición de una magnitud son un conjunto de números reales asociados con el observable (su espectro). Los observables pueden descomponerse de tal forma de efectuar una partición exhaustiva y exclusiva de las posibles alternativas para los valores de las propiedades que el sistema puede exhibir en cada instante de tiempo[9]. Las proposiciones atómicas acerca de los valores particulares de las magnitudes se corresponden con cada elemento de esta partición, lo que garantiza la consistencia entre el retículo de las proposiciones y la estructura ma-

* Insituto de Astronomía y Física del Espacio. CONICET domenech@iafe.uba.ar

† Universidad Nacional de Rosario. hfreytes@dm.uba.ar

Epistemología e Historia de la Ciencia, Volumen 10 (2004), N° 10

temática de la teoría[10]. Técnicamente, es un retículo ortocomplementado cuasi-modular completo $\mathcal{P}$ que es el álgebra de la lógica cuántica introducida por G. Birkhoff y J. von Neumann [1936].

3. El problema de la valuación

En caso en que la construcción que hemos descripto se realizara en el ámbito de la mecánica clásica sería posible definir una valuación booleana de todas las proposiciones. Es decir, sería posible dar un valor a todas las propiedades de tal forma de satisfacer el requerimiento natural de que el valor dado a una función de la propiedad es la función de su valor[11]. Esta posibilidad -que la estructura matemática subyacente habilita para la mecánica clásica- se pierde en el caso cuántico[12]. La imposibilidad de asignar valores a las propiedades de forma tal que se satisfagan las relaciones funcionales entre ellos -es decir, la posibilidad de que las propiedades del sistema físico "tengan un valor" independiente del contexto en el que puede ser determinado, está prohibido por el formalismo matemático mismo y no por tal o cual posición frente a la teoría, y es un duro obstáculo para casi cualquier interpretación de ese formalismo como algo más que un mero instrumento[13].

El teorema que prohibe la asignación no contextual de números reales como valores a las propiedades no impide, sin embargo, la posibilidad de valuaciones parciales booleanas contextuales-por ejemplo, para subconjuntos de ellas[14]- ni tampoco la de valuaciones generalizadas no booleanas. En particular, cabe una valuación a conjuntos variables en el marco de la teoría de topos [Goldblatt, 1986]. Un topos puede pensarse como una categoría en que se extienden nociones de la teoría de conjuntos[15]. En el caso de la valuación de las magnitudes físicas, es posible elegir algún subconjunto valuable booleanamente a los números reales -para ellas tendrá sentido una noción de "verdad total"- y asignar como sus valores a las restantes magnitudes ciertos conjuntos de funciones de ellas mismas[16] que juegan el rol de "valor semántico" o "significado", relacionado con la "verdad parcial".

Estas valuaciones[17] presentan una cantidad de ventajas respecto de otras posibles: la valuación se hace sobre cribas en el topos de prehaces, que tiene una estructura de retículo distributivo -a diferencia de las valuaciones en $\mathcal{P}$, que es cuasimodular. Por otra parte, la colección de valores de verdad parcial no es arbitraria sino que está completamente determinada por la estructura del topos y no hay ambigüedad en la "interpretación" de los conectivos lógicos[18], que pueden asociarse con los de una lógica intuicionista. Además de la semántica en el topos, esta lógica admite una semántica de Kripke que, por una parte, articula consistentemente un leguanje más "informal" y, por otra, brinda un marco adecuado para vincular los valores de las propiedades del sistema con la información del observador sin incurrir en violaciones de los teoremas "no go" propias de las formulaciones ingenuas. Es decir, si elegimos una valuación de esta clase, nos mantenemos lo más cerca posible de la semántica acerca de los objetos clásicos y cuando nos apartamos -como no puede ser de otra forma, ya que no se trata de sistemas clásicos- lo hacemos entrando en un terreno con interpretación bien definida en el ámbito de la lógica.

4. Prehaz espectral y modelos de Kripke

En los últimos años se ha comenzado a usar la teoría de categorías para abordar los problemas de la valuación de magnitudes en el ámbito cuántico. Hay propuestas en que se relacionan las proposiciones con sus consecuencias en la formulación habitual [Isham y Butterfield, 1999], otras en la formulación de historias consistentes [Isham, 1997] y otras que tratan sobre la interpretación de los conectivos (la implicación) [Smets, 2001]. Nuestra propuesta es una variante de valuación en el marco categorial que admite una interpretación de Kripke en términos de información sobre el sistema. A continuación la describimos brevemente en forma precisa:

Las magnitudes físicas $\mathcal{A}$ se representan[19] por operadores autoadjuntos acotados **A** que actúan sobre el espacio de Hilbert de los estados del sistema. Todo operador **A** de este tipo admite una descomposición espectral de la forma ($n \in N$):

$$\mathbf{A}=\Sigma\alpha_n P_n$$

donde α_n son los autovalores de **A**, P_n sus proyectores asociados y la igualdad se toma en términos de la convergencia en norma. Dados **A** y **B** operadores autoadjuntos acotados, **A** con la descomposición espectral anterior y h una función con dominio en los reales, $\mathbf{B}=h(\mathbf{A})$ designa la expresión

$$B=\Sigma h(\alpha_n)P_n$$

El conjunto W_A de los proyectores asociados al operador **A**

$$W_A=\{P_n: A=\Sigma\alpha_n P_n\}$$

con las operaciones heredadas de $\mathcal{P}$ es una subálgebra de $\mathcal{P}$ con estructura de álgebra de Boole. W_A recibe el nombre de álgebra espectral asociada a **A** y se verifica que, si $\mathbf{B}=h(\mathbf{A})$, entonces $W_B \subseteq W_A$.

Consideremos ahora la categoría $\mathcal{W}$ cuyos objetos $ob(\mathcal{W})$ son álgebras espectrales y cuyas flechas son los morfismos booleanos inclusión $W_B \hookrightarrow W_A$. Sobre $\mathcal{W}$ se construye el prehaz

$$\mathbf{D}(W_A)=\{f: W_A \to \mathbf{2}: f \text{ es morfismo booleano}\}$$

Actuando sobre la flecha $W_B \hookrightarrow W_A$, **D** es la restricción $f\,|W_B$ de f.

Bajo esta perspectiva, el teorema de Kochen-Specker se expresa diciendo que sólo para algunos $W \in \mathcal{W}$ es posible seleccionar un $f \in \mathbf{D}(W)$ con la propiedad de compatibilidad respecto de la inclusión y las restricciones, esto es: si $f: W_B \to \mathbf{2}$ y $g: W_A \to \mathbf{2}$ son morfismos seleccionados tales que $W_B \subseteq W_A$ entonces $g|W_B=f$[20]. Llamamos valuación parcial V a esta selección de morfismos. El dominio de la valuación se define como

$$\mathrm{dom}(V)=\{(W,f): W \in \mathcal{W} \text{ y } f: W \to \mathbf{2} \text{ fue seleccionada}\}$$

Si $P \in W_A$ es un proyector que corresponde al autovalor α, $P \in \mathrm{dom}(V)$, $f: W_A \to \mathbf{2}$ fue seleccionado y $f(P)=1$, diremos que "conocemos que el valor de la magnitud $\mathcal{A}$ es α". Notaremos brevemente por "$\mathcal{A}=\alpha$" estas afirmaciones.

La idea básica que motiva la construcción de un modelo de Kripke a partir de la valuación parcial V es la siguiente: si $W_A \notin dom(V)$, es imposible una valuación clásica de la magnitud $\mathcal{A}$. Sin embargo, podemos aún considerar las magnitudes $\mathcal{B}$ con $\mathcal{B}=h(\mathcal{A})$ –correspondientemente, los operadores **B** tales que **B**$=h$(**A**)- para los que $W_B \in dom(V)$. Para ellos tiene sentido la afirmación "el sistema tiene la propiedad $h(\alpha)$". En $\mathcal{P}$, el proyector que corresponde a "$\mathcal{B}=h(\alpha)$" sigue en el orden parcial al proyector de "$\mathcal{A}=\alpha$", es decir: "$\mathcal{B}=h(\alpha)$" es una de sus consecuencias. Podemos así pensar en "información acerca del valor de una magnitud" en términos de información acerca de sus consecuencias.

Definimos entonces el siguiente conjunto:

$$v(\text{“}\mathcal{A}=\alpha\text{”})=\{W_{\mathbf{B}}: W_{\mathbf{B}} \in dom(V), \mathbf{B}=h(\mathbf{A}) \text{ y “}\mathcal{B}=h(\alpha)\text{”}\}$$

$v(\text{"}\mathcal{A}=\alpha\text{"})$ es un conjunto decreciente respecto de la relación de inclusión en el siguiente sentido: si $W_B \in v(\text{"}\mathcal{A}=\alpha\text{"})$ y $W_C \subseteq W_B$, entonces $W_C \in v(\text{"}\mathcal{A}=\alpha\text{"})$. En efecto: $W_B \in v(\text{"}\mathcal{A}=\alpha\text{"})$ indica que **B**$=h$(**A**) y que "$\mathcal{B}=h(\alpha)$". Por otro lado, $W_C \subseteq W_B$ indica que existe g con dominio en los reales **C**$=g$(**B**) a lo que corresponde "$\mathcal{C}=g(\mathcal{B})$". De "$\mathcal{B}=h(\alpha)$" se sigue que **C**$=gh$(**A**) y "$\mathcal{C}=gh(\alpha)$". De esta manera $W_C \in v(\text{"}\mathcal{A}=\alpha\text{"})$.

Consideremos ahora el lenguaje proposicional $<\wp, \vee, \wedge, \rightarrow, \perp>$ donde $\wp$ designa el conjunto de proposiciones atómicas sobre el sistema. Intuitivamente cada proposición p en $\wp$ representa una afirmación del tipo "$\mathcal{A}=\alpha$". Para establecer un modelo de Kripke $K(V) = < F, \Vdash>$ para este lenguaje basado en una valuación parcial V, definimos el marco F (*frame*) y la relación de forzamiento sobre proposiciones atómicas del siguiente modo:

$$F = < ob(\mathcal{W}), \subseteq>$$

$$\Vdash_W \text{“}\mathcal{A}=\alpha\text{” si y sólo si } W \in v(\text{“}\mathcal{A}=\alpha\text{”})$$

El forzamiento sobre los otros conectivos se define de manera usual. De este modo la expresión "K(V) fuerza a '$\mathcal{A}=\alpha$' en W" se traduce como "el algebra espectral W tiene información acerca del valor de la magnitud $\mathcal{A}$" Cabe destacar que en la literatura usual[21], el conjunto $v(\text{"}\mathcal{A}=\alpha\text{"})$ se toma creciente. En nuestro caso resultó decreciente debido a que el prehaz espectral es un funtor contravariante. Luego, bastaría invertir formalmente el orden dado por "$\subseteq$" para ajustarse a la manera usual. Es claro que en este modelo de Kripke recuperamos localmente el aspecto clásico dado por la valuación parcial cuando W_A fuerza a "$\mathcal{A}=\alpha$".

5. Conclusiones

Las proposiciones sobre el sistema físico se organizan en un retículo cuasimodular dado por la estructura de los proyectores sobre el espacio de Hilbert de los estados del sistema y éste no admite una valuación global o clásica. El modelo de Kripke que hemos obtenido permite, sin embargo, una semántica del lenguaje de las afirmaciones sobre los valores de todas las magnitudes formulada en términos de información sobre el sistema que mantiene localmente un aspecto clásico dado por la valuación parcial que es booleana.

Notas

1. Nos limitamos en este trabajo a la mecánica cuántica (no relativista).
2. No vamos a ocuparnos del problema de la medición, sólo estamos indicando la distancia entre las magnitudes a las que se alude en los procedimientos experimentales y los operadores matemáticos que las representan.
3. Se agrega a esto los problemas de la indistinguibilidad de las partículas idénticas y de la creación y destrucción de partículas que forman parte del tratamiento relativista.
4. The very nature of Quantum Theory thus forces us to regard the space-time coordination and the claim of causality, the union of which characterizes the classical theories, as complementary but exclusive features of the description, symbolizing the idealization of observation and definition respectively. [Bohr, 1928]
5. La invariancia frente a grupos de simetría externa (espacio-temporales), es decir: en el caso no relativista la covariancia de las ecuaciones de la teoría frente al grupo de Galileo, en relatividad especial y teoría de campos, la covariancia frente al grupo de Poincaré, determinan que las notas esenciales son la masa y el spin. La invariancia frente a los grupos de simetría propios de la teoría en cuestión (por lo general, grupos unitarios) señala por ejemplo a la carga eléctrica como nota esencial.
6. La física teórica clasifica las partículas elementales con esta herramienta proveniente de la teoría de grupos y sus representaciones: se nombra la clase (electrones, protones, neutrinos, etc.) por los valores de estas notas esenciales. Una partícula elemental se define como un sistema físico cuyos estados se transforman ajustándose a como lo hace -frente sus transformaciones- una representación irreducible definida del grupo de Poincaré.
7. Esto es muy diferente al caso clásico en que podemos hablar por ejemplo de un manzana de tal masa o de tal otra, ya que no es la masa lo que define a la clase de las manzanas. Pero en el caso de las partículas elementales, si se encontrara una partícula con masa doble que la del electrón -aunque compartiera con él las demás notas esenciales- no diríamos que es un electrón más masivo sino que lo consideraríamos de otra clase: una partícula con otro nombre.
8. Los operadores autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert de estados puros del sistema son una representación del álgebra de los observables que corresponden a las magnitudes medibles. Sólo vamos a considerar operadores acotados de espectro discreto y sistemas en estados puros, por razones de simplicidad. El espectro del operador es el conjunto de sus autovalores.
9. Esto es: se descomponen en proyectores, cada uno de los cuales tiene asociado un subespacio sobre el que proyecta. Así, el espacio de los estados puros se descompone en subespacios propios de cada observable.
10. Es decir, la lógica a la que se ajustan las proposiciones es la asociada al retículo de los proyectores. Pero la consecuencia lógica -el orden parcial en el retículo- no determina un único conectivo para la implicación [Dalla Chiara y Giuntini, 2002]. La "mejor" implicación de las ocho posibles [Hardegree, 1979] ha sido caracterizada como un condicional contrafáctico. Sin embargo, este conectivo tiene problemas con el teorema de la deducción [Malinowsky, 1990].
11. La propiedad FUNC (functional composition principle).
12. Teorema de Kochen-Specker: si la dimensión del espacio de Hilbert de los estados del sistema es mayor que dos, es imposible asociar valores 0/1 con cada proyector Pi de tal forma que, si un conjunto de operadores de proyección que conmutan son tales que suman la identidad, los correspondientes valores v(Pi) también satisfagan $\sum$ v(Pi)=1. Una discusión clásica de este teorema puede encontrarse por ejemplo en [Peres, 1993]. Una discusión en términos de teoría de topos en [Isham y Butterfield, 1998].
13. As stressed in the lecture (Bohr se está refiriendo a la conferencia de Como de 1927, en la que presentó la noción de complementariedad), an adequate tool for a complementary way of description is offered precisely by the quantum mechanical formalism which represents a purely symbolic scheme permitting only predictions, on line of the correspondence principle, as to results obtainable under conditions specified by means of classical concepts. [Bohr 1949]
14. Por ejemplo, para un conjunto completo de observables que conmutan.

15. Específicamente: en una teoría clásica cuyo ingrediente básico es un retículo P de proposiciones acerca del sistema de interés, un estado ρ del sistema da lugar a una valuación sobre el retículo, es decir, un mapa (una función característica en el sentido de la teoría de conjuntos) vρ de P al {0, 1}, que es un homomorfismo entre álgebras booleanas. Nos interesa la generalización de este esquema que cabe en el topos.

16. Técnicamente: cribas.

17 En estas valuaciones se manifiesta con claridad el significado del teorema de Kochen- Specker y en ellas se generaliza naturalmente la condición FUNC

18. Las cribas forman álgebra de Heyting (un álgebra pseudo-booleana) por lo que las valuaciones a ellas admiten una interpretación como conectivos lógicos de las operaciones "join", "meet", pseudocomplemento y pseudocomplemento relativo.

19. Ésta es la representación usual, aunque son posibles otras representaciones. Nos limitamos además, como dijimos, a los operadores acotados.

20. Es decir: sólo se pueden establecer secciones locales del prehaz D.

21. Por ejemplo: [Goldblatt, 1986] cap. 8.

Bibliografía

G. Birkhoff y J. von Neumann (1936). "The logic of quantum mechanics", *Annals of mathematics* 37, 822- 843.

N. Bohr (1928): "The quantum postulate and the recent development of atomic theory", *Nature* 121, 580-590

N Bohr (1949): "Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics", *Albert Einstein, Philosopher Scientist*, P.A. Schilpp, ed., 200-241

M.L. Dalla Chiara and R. Giuntini (2002), "Quantum logic", in *Handbook of philosophical logic*, vol VI, G. Gabbay and F. Guenther (eds), Kluver, Dordrecht.

R. Goldblatt (1986). *Topoi: the categorial analysis of logic*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

G. Hardegree (1979): "The conditional in abstract and concrete quantum logic", in C.A. Hooker (ed.): *The logico-algebraic approach to quantum mechanics*, D. Reidel Publishing Co. Dordrecht, vol. 2, 49-108.

C. Isham (1997): "Topos theory and consistent histories: the internal logic of the set of all consistent sets", *International Journal of Theoretical Physics* 36, 785-814.

C. Isham and J Butterfield (1998): "A topos perspective on the Kochen-Specker theorem: I", *International Journal of Theoretical Physics* 37, 2669-2773.

C. Isham and J. Butterfield (1999): "A topos perspective on the Kochen-Specker theorem: II", *International Journal of Theoretical Physics* 38, 827-859.

J Malinowsky (1990): "The deduction theorem for quantum logic – Some negative results", *The Journal of Symbolic Logic* 55, 615-625.

A. Peres (1993): *Quantum theory: concepts and methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (cap. 7)

S. Smets (2001): "The logic of physical properties in static and dynamic perspective", *PhD tesis in Philosophy* at the Free University of Brussels.