EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIV JORNADAS

VOLUMEN 10 (2004), Nº10

Pío García
Patricia Morey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

La Contracción como Substracción Lógica

Diego Letzen *

Introducción

Una de las principales ventajas de un modelo de cambio de creencias del tipo AGM[1] es que dentro de la definición formal de las operaciones de cambio nos brinda elementos para el estudio de algunos problemas lógicos y filosóficos de difícil abordaje. En esa línea de trabajo, de las tres operaciones principales (expansión, contracción y revisión), la que resulta más rica de analizar es sin duda la operación de contracción. Expandir un conjunto de creencias puede definirse mediante la operación de unión de conjuntos, y en el otro extremo, la revisión se reduce mediante la identidad de Levy a una sucesión de contracción y expansión.

$$K * a = (K \div \sim a) + a$$

Así como la expansión corresponde a un caso de la unión de conjuntos, la operación de contracción podría ser vista como la operación inversa de la unión de conjuntos, pero su estudio nos muestra que esta operación es heredera de los problemas que plantearía la existencia de una operación lógica de substracción que invierta el efecto de la conjunción, caracterizable satisfactoriamente en términos de ninguna conectiva veritativo funcional, ni la primera a partir de la mera diferencia de conjuntos.

Mostraremos en este trabajo las similitudes entre estas dos operaciones (la substracción y la contracción), explorando algunas de las distintas posibilidades de operaciones que podrían cumplir esta función en relación con los requerimientos expresados mediante los postulados y la posibilidad de la caracterización de la substracción lógica como una contracción del tipo AGM.

El problema del cambio de creencias puede resumirse como el de determinar las condiciones en que se produce una modificación en el conjunto de creencias de una persona o una base de datos de una computadora (en este nivel asumiremos que son equivalentes) de forma racional.

Modelos de Revisión de Creencias como el originado a partir del trabajo conjunto de Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors y David Makinson nos permiten una representación formal del proceso de transformación de un estado de creencias, atenta a la presencia de nueva información. Nos brinda además importante información sobre las características del cambio racional de creencias.

> *Alguien observa un auto rojo que cruza velozmente una bocacalle.* Incorpora *la creencia "el conductor del auto rojo es imprudente".*
>
> *Cuando el referido auto pasa a su lado, se da cuenta que lo conduce una mujer. Cambia su estado de creencias de modo de incorporar las creencias "la mujer que conduce el auto rojo es imprudente" para ello* revisa *su estado de creencias de modo que la nueva creencia reemplace la vieja y no se produzcan inconsistencias.*

* Universidad Nacional de Córdoba. CONICET.

Finalmente observa que detrás del auto rojo venía una ambulancia pidiendo paso, que el auto rojo le dio al cruzar la bocacalle. Ante la duda de si la conductora del auto rojo cruzó por imprudente o para permitir el paso de la ambulancia, nuestro agente decide eliminar la creencia "la mujer que conduce el auto rojo es imprudente" para lo cual contrae *ese elemento de su estado de creencias.*

Modelo AGM de dinámica de creencias

Incorporar, revisar y contraer son las operaciones centrales que un agente puede realizar sobre su estado de creencias. En realidad, incluso es posible reducir este conjunto elemental a la expansión y contracción como se expresó antes, siendo esta última la operación de cambio más rica e interesante. El problema central de la definición de una operación de contracción, reside en establecer un resultado sobre los múltiples conjuntos posible que pueden resultar de un conjunto original, que no impliquen el elemento a contraer.

La contracción es la operación que debe aplicarse en caso de desear retraer un conjunto de creencias, de forma tal de obtener un conjunto del cual no se derive una fórmula (la formula a contraer). En esta situación, lo mínimo que es racional demandar de esta operación para que sea considerada una contracción es:

Éxito: que el enunciado por el que se quiere contraer no pertenezca al conjunto resultante (en caso de no tratarse de una tautología), y que puesto que se trata propiamente de una contracción,

Inclusión: no se involucre ningún elemento nuevo y el conjunto resultante sea un subconjunto del original.

Definición: Dado un conjunto K que representa el conjunto de creencias de un agente, una operación $\div$ es un operador de contracción para K si y sólo si satisface:

($\div$1) Si $\alpha \notin Cn(\varnothing)$, entonces $\alpha \notin K\div\alpha$ (***éxito***)
($\div$2) $K\div\alpha \subseteq K$ (***inclusión***)

Podría considerarse entonces que si el objetivo de la operación es que un enunciado no pueda ser inferido más de un conjunto, el resultado en cualquier caso podría ser el conjunto vacío, y de esta forma nos aseguramos que no se podrá inferir del conjunto resultante la creencia que se quería contraer. De ser así, podríamos definir en forma extrema la contracción:

$$K \div \alpha = \mathrm{Cn}(\varnothing)$$

Por supuesto que aún cuando esto es en algún sentido una contracción (radical), es posible precisar un poco más lo que se espera.

Si el enunciado a contraer es, por ejemplo, un enunciado tautológico, que se infiere del conjunto vacío de creencias, y por lo tanto es un caso especial, límite, debemos indicar entre los principios que guían la contracción de creencias (postulados de la contracción) el resultado que se debe obtener en caso de presentarse la contradicción por una tautología (en ese caso por ejemplo, el postulado de fracaso de la contracción determina que no hay nada que contraer).

La adición de nuevos postulados permite precisar tipos especiales de contracción que por ejemplo eviten resultados un poco sorprendentes como el recién referido. La contracción considerada como más aceptable (o al menos la más popular) es la llamada de encuentro o intersección parcial.

Definición: el operador $\div$ es un operador de contracción (*partial meet*) para K si y sólo si satisface:

1. Cierre:	$K \div \alpha$ *es un conjunto de creencias.*
2. Éxito:	Si $\alpha \notin Cn(\emptyset)$, entonces $\alpha \notin K \div \alpha$
4. Inclusión:	$K \div \alpha \subseteq K$
3. Vacuidad:	*Si* $\alpha \notin K$, *entonces* $K \div \alpha = K$
5. Extensionalidad:	*Si* $\alpha \leftrightarrow \beta \in Cn(\emptyset)$, *entonces* $K \div \alpha = K \div \beta$
6. Recuperación:	$K \subseteq (K-\alpha)+\alpha$ (*recovery*)

Una contracción va acompañada en la mayoría de los casos de una expansión, ya que aislada es una operación difícil de imaginar que correspondería al caso de la suspensión del juicio, actitud epistémica poco común. Las ocurrencias de las contracciones se producen como consecuencia de la incorporación de una creencia que contradice otra previa, motivando que la creencia previa en cuestión sea eliminada.

La operación de expansión consiste en incorporar un nuevo elemento al conjunto de creencias del agente y según lo expresado, podría equipararse a una unión entre conjuntos:

$$K + \alpha = K \cup \{ \alpha \}$$

Sin embargo, existen algunas determinaciones que se deben realizar para caracterizar la operación correctamente. Así definida permitiría por ejemplo que si yo creo que *"si estudio mejoro como persona"*, e incorporo la creencia *"estudio"*, debería tener también en mi conjunto de creencias *"mejoro como persona"*, lo que la formulación anterior no garantiza por no preservar el cierre lógico en el resultado de la operación. Al no ser solicitado el cierre del conjunto resultante, este contendrá las consecuencias de K, pero no las consecuencias de α ni de la unión de ellos. Así caracterizada sería una expansión no cerrada, pero es deseable que esto no sea así, ya que por ejemplo, si yo creo que el gato es un animal y paso a creer también que el gato es una danza, debo creer que el gato es una danza y que es un animal.

El siguiente:

Teorema [AGM 1985]: Un operador de expansión +, satisface *cierre, éxito, inclusión, vacuidad, monotonía* y *minimalidad*; si y sólo si $K + \alpha = Cn(K \cup \{ \alpha \})$.

permite caracterizar completamente la expansión en términos exclusivos de la unión de conjuntos y el operador de consecuencia, dados los postulados que corresponden a nuestras intuiciones sobre la incorporación racional de creencias (*cierre, éxito, inclusión, vacuidad, monotonía* y *minimalidad*).

Pero al intentar caracterizar la contracción en forma similar, nos encontramos con las dificultades antes esbozadas.

Revisaremos a continuación los rasgos centrales que una operación de substracción lógica debe satisfacer, para considerar en que medida es posible encontrar operaciones definidas en el lenguaje objeto que concuerden con estos, de la forma en que la unión lo hace con la expansión.

La contracción como substracción lógica

En principio es posible observar muchas situaciones distintas en las que esta operación aparece.

Un tipo de situación ocurre cuando se afirma una propiedad sobre *casi* toda una cantidad:

Todos están de acuerdo con la intervención menos el gobernador.

En este ejemplo se recurre a la combinación, por comodidad y/o precisión, de destacar una propiedad de forma que quede claro todos y cada uno de los elementos a los que le corresponden la propiedad.

Otra situación diferente se puede ver en el siguiente caso, en que se corrige en algún sentido el contenido de la proposición con la información provista por otra proposición:

Lo que hace Coni Mendez no es filosofía, es psicología popular.

Un rasgo característico de este tipo de situación es que perfectamente podríamos representarla mediante las partículas conjuntivas *"pero"*, *"aunque"*. *"es psicología pero popular"*, *"...es un buen albañil aunque incumplidor"*.

En todos estos casos existe un conflicto entre ciertos rasgos expresados por cada una de las proposiciones involucradas. Claramente una de estas proposiciones, típicamente la enunciada en segundo lugar *"corrige"* algún aspecto de lo expresado por el primer enunciado.

En pos de cierta precisión, debemos distinguir aquí en realidad, dos situaciones alternativas. En el primero de ellos, la segunda proposición (algo así como *"lo que hace Coni Mendez es popular"*), está en claro conflicto con la primera proposición: si es psicología, no es popular. El segundo caso se empareja con el del cuantificador, ya que se supone que existe un conjunto de atributos que caracterizan a un *buen* albañil, y lo que se aclara es que el individuo no los posee a todos. Por supuesto que ser un buen albañil puede contener un conjunto infinito de propiedades o notas, que las hagan imposible de agotar o, lo que es más probable, un conjunto difuso de propiedades en cuyo caso será muy difícil dar una descripción acabada. En un caso extremo, esta última situación se asimila a la anterior:

Es un buen compositor aunque nunca ha compuesto nada decente.

Ya que en general se conviene que resulta necesario haber compuesto algo (incluso alguna buena obra) para merecer el mote de buen compositor.

Resumiendo, lo que estamos tratando de caracterizar es una operación en el lenguaje objeto que responda a algunas de estas intuiciones.

Queremos una operación – tal que para una proposición α, $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$

Sin detenernos en el análisis de la naturaleza de estas partes del contenido de las proposiciones, en estos ejemplos se hace claro que utilizamos en el lenguaje una operación cuyo propósito es, hablando torpemente, invertir el efecto de la conjunción.

Podemos expresar la naturaleza de la operación deseada con mayor precisión si incorporamos un conjunto de condiciones que una operación de substracción – debe satisfacer según el análisis de R. Jaeger[2].

Dados dos enunciados α, β:

1) $\alpha-\beta \nvdash \beta$

2) $\alpha \vdash \alpha-\beta$

3) $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$

4) $\beta \vdash \alpha-\beta$

5) si $\alpha \leftrightarrow \alpha'$ o $\beta \leftrightarrow \beta'$ entonces $\alpha-\beta \leftrightarrow \alpha'-\beta'$

6) $\alpha-(\alpha-\beta)=\beta$

Análisis de casos

La primer opción a considerar para cubrir este papel es la diferencia de conjuntos.

Al álgebra de subconjuntos de un conjunto forma un retículo substractivo clásico (un anillo booleano con la diferencia simétrica como suma). La diferencia de conjunto satisface muchas de las propiedades de Jaeger, pero falla en la siguiente que es crucial:

$\beta+(\alpha-\beta)=0$, cuya formula correspondiente es $B\cap(A\text{-}B)=\varnothing$.

Esto es porque la diferencia es la operación inversa de la unión, y lo que nosotros buscamos es una operación que invierta el efecto de la intersección (correspondientemente de la conjunción).

Otra posibilidad es considerar la operación de substracción de un retículo substractivo:

Dado un C.P.O. $(P,\geq)$ — es una operación binaria (parcial) para $b\geq a$ si

1° $b \geq b — a$, $\quad$ $b — b — a = a$

2° $c — a \geq c — b$, $\quad$ $(c — a) — (c — b) = b — a$

Como se define por ejemplo en las estructuras ortomodulares.

Nuevamente esta opción tiene algunos aspectos favorables, pero algunas serias desventajas. Se trata de una operación parcial, mientras que la estamos tratando de representar esta completamente definida. Además, como es posible observar no corresponde totalmente con las intuiciones expresadas originalmente.

Por último, la operación de residuación como ocurre en un retículo residuado o retículo de Skolem, corresponde más bien a un cociente.

Así, dados tres elementos a, b y c y el orden parcial $\geq$, definimos el residuo $\rightarrow$

$$b \geq a.c \Leftrightarrow a \rightarrow b \geq c$$

Así, si $b = \alpha \wedge (\alpha \supset \beta)$ y $a = \beta$ y c es el resultado esperado de "quitar" a de b ($c = b-a$), interpretando (-) como residuo, $b - a = \alpha \supset \beta$, lo que coincide con un resultado deseable para la operación de contracción como fue planteada originariamente.

El resultado principal de este trabajo es sugerir un cambio de enfoque en la consideración de la operación de substracción, considerándola como un cociente en términos algebraicos.

Resta en una continuación, extender los resultado obtenidos a distintos casos, especialmente tendiendo a obtener algún resultado general de correspondencia entre la operación de contracción AGM y esta operación, y la contrastación de estos con las intuiciones presentadas previamente para la operación de substracción enunciadas por Jaeger.

Notas

1 Así llamado en referencia a su creadores: C. Alchurrón P. Gärdenfors y D. Makinson.

2 Jaeger R.A. 1973 "Action and subtraction" *Philosophical Review* 82:320-329. Citado en Fuhrmann A. 1997 *An essay on contraction*, CSLI, Stanford pág. 67.