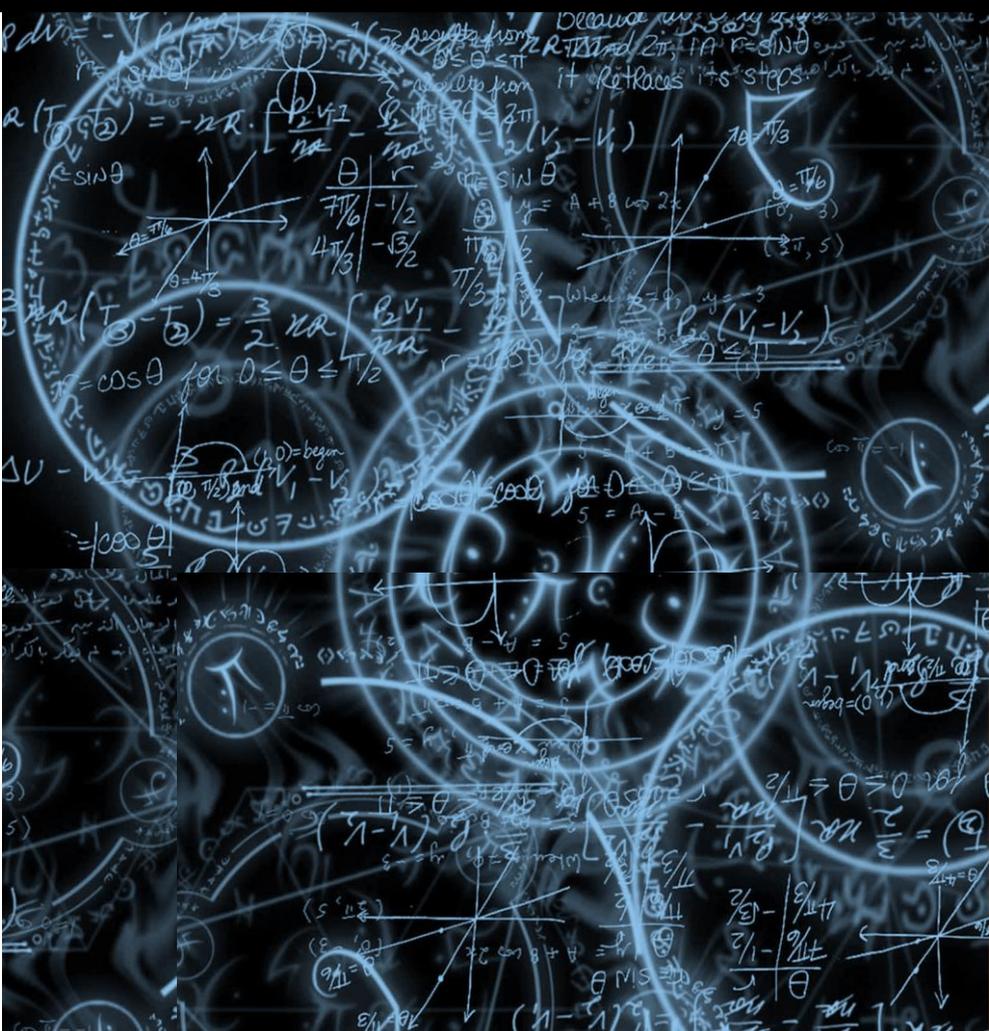


FCEFYN

# PRACTICA PROFESIONAL SUPERVISADA



AUTOR: Aarón José SOUTADET

DIRECTOR: Dr. Ing. José Antonio INAUDI

TUTOR: Ing. Pedro Agustín COVASSI

**MODELIZADO DE MECANISMOS**  
**DESARROLLO DE SOFTWARE**  
**INTERACCION FLUIDO-ESTRUCTURA**

Dedicatoria:

- A Dios: Por ser mi guía y mi maestro. Amigo fiel y Padre. Luz en mi camino. Nada pude haber hecho sin su ayuda.
- A mi familia: Por su apoyo, por su instrucción y sus enseñanzas. Fueron mi motor cada día. Cada uno de ustedes me hizo quien soy ahora. Nunca voy a olvidar lo buenos que han sido conmigo y todo lo que me han brindado.
- Al Dr. José Antonio Inaudi de quien siento orgullo de haber sido y ser su discípulo. De quien he aprendido toda esta valiosa información y quien me encamino y me ayudo a descubrir mi camino profesional.
- Al Ing. Pedro Covassi: Por su admirable predisposición y aliento durante todo este trabajo. Por haber querido ser mi tutor y pulir todas mis falencias. A ti te debo el haberme entusiasmado a seguir mi doctorado.
- A todos mis profesores de quienes he aprendido y atesorado alguna enseñanza. He reflejado tanto aquí como en mi conducta profesional una parte de cada uno de ustedes
- Al Ing. Abud: Por haberme brindado todo su apoyo no solo en este trabajo sino desde que ingrese en la catedra de mecánica analítica. Es un honor trabajar a tu lado.
- Al Ing. Mariano Nicotra: Excelente persona y maestro. Quien siempre se ha preocupado por mi bienestar y me ha bendecido con sus consejos.
- A mi amigo y compañero de aventuras Joaquín Montero. Por tu apoyo y por todos los buenos momentos vividos. La universidad no hubiera sido ese sitio tan agradable si no hubieses estudiado ingeniería.

# INDICE

CAPITULO 1: INTRODUCCION .....	1
RESUMEN .....	2
CAPITULO 2: .....	3
MODELIZADO DE MECANISMOS .....	3
MODELIZADO DE SISTEMAS DE ELEMENTOS PLANOS .....	4
ANALISIS CINEMATICO .....	4
ANALISIS DINAMICO .....	6
DINAMICA TRIDIMENSIONAL DE CUERPOS RIGIDOS.....	8
INCLUSION DE LIGADURAS EN EL MODELO .....	12
CAPITULO 3: .....	16
ECUACIONES Y CONCEPTOS DE LA DINAMICA DE LOS FLUIDOS .....	16
POSTULADOS Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL MEDIO FLUIDO.....	19
CONCEPTOS PRELIMINARES:.....	19
<i>CONSERVACION DE LA MASA</i> .....	21
<i>BALANCE DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO</i> .....	22
<i>BALANCE DEL MOMENTO CINETICO</i> .....	23
<i>BALANCE DE ENERGIA</i> .....	26
ECUACIONES CONSTITUTIVAS.....	29
DINAMICA DE FLUIDOS .....	31
CONDICIONES DE CONTORNO .....	33
CAPITULO 4: APLICACIONES .....	35
CALCULO DE PRESIONES HIDRODINAMICAS EN FLUIDOS COMPRESIBLES E INCOMPRESIBLES. SISTEMA PRESA-EMBALSE.....	35
MODELADO DEL CAMPO DE PRESIONES HIDRODINAMICAS .....	35

CONCLUSION .....	46
MODELIZADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA DE CUERPOS RIGIDOS EN EL ESPACIO MEDIANTE UN SOFTWARE PARA LA SIMULACION.....	47
METODOS DE RUNGE-KUTTA.....	51
CONCLUSIÓN .....	52
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....	53
TABLA DE FIGURAS .....	54
BIBLIOGRAFIA .....	55
APENDICE .....	56

# CAPITULO 1: INTRODUCCION

La computación se ha tornado, en los últimos años, una herramienta de suma importancia en la ingeniería. En particular los ingenieros mecánicos dedicados a la robótica necesitan, para sus diseños, de la simulación para analizar el correcto comportamiento que se espera tener de un mecanismo.

El conocimiento y utilización de las herramientas informáticas no solo permiten resolver problemas del ámbito de la robótica. En la ingeniería estructural, la aplicación del conocido método de elementos finitos sería una herramienta de muy acotado alcance sino fuera implementada en un programa de computación.

Los problemas de vibraciones que surgen de la interacción fluido – estructura son fenómenos muy importantes en el campo de conocimiento de la ingeniería y constituyen otro ejemplo de la necesidad de herramientas de computación, ya que se presentan en numerosas situaciones que van desde oscilaciones de tanques contenedores de fluidos, hasta solicitaciones sísmicas en presas. De esta forma, el cálculo de modos normales de vibración puede llevarse a cabo mediante el empleo de software, considerando diversos modelos que expliquen la interacción fluido estructura, distinguiendo entre fluidos compresibles e incompresibles para las distintas condiciones de frontera y restricciones del dominio físico.

En el presente trabajo podrá apreciarse la resolución de dos problemas complejos, que abarcan temas inherentes al modelizado de mecanismos y fenómenos de interacción fluido-estructura, empleando el software de programación Matlab como ayuda al cálculo.

# RESUMEN

En el presente trabajo se abordaran tres temas de suma importancia en la ingeniería

- MODELIZADO DE MECANISMOS
- DESARROLLO DE SOFTWARE PARA SIMULACIÓN
- INTERACCIÓN FLUIDO –ESTRUCTURA

Como paso preliminar nos introduciremos al estudio tanto de los principios físicos que rigen el comportamiento de los sistemas de solidos rígidos como en los conceptos fundamentales de la mecánica de los fluidos. Posteriormente, emplearemos dichos conceptos para resolver dos problemas de ingeniería:

1. Desarrollo de un software para el modelizado de sistema de cuerpos rígidos sometidos a la acción de diversos tipos fuerzas (según su origen), tales como fuerzas elásticas, amortiguadoras o disipadoras y gravitatorias, etc. El algoritmo propuesto admite la introducción de un número cualquiera de cuerpos sujetos a un número dado de restricciones. Por el momento se permite una sola clase de vinculo (Rotula ó articulación) dejando el software abierto para en un futuro incluir más tipologías.
2. Desarrollo de un modelo para el cálculo de presiones hidrodinámicas de interacción en un sistema presa-reservorio sometido a aceleraciones sísmicas. Se analiza el comportamiento del fluido en el dominio de la frecuencia y se plantea una metodología para la definición de la matriz de rigidez hidrodinámica del modelo que permite incorporar la interacción del fluido con la presa de manera simple.

## CAPITULO 2: MODELIZADO DE MECANISMOS

El análisis de los mecanismos conformados por cuerpos rígidos puede ser dividido en dos partes principales: por un lado, el estudio cinemático, el cual permite conocer los movimientos factibles de los cuerpos que componen el sistema, independientemente de las fuerzas que actúan sobre el mismo; y por otra parte, el análisis dinámico que nos permitirá simular la operación del mecanismo en relación a las fuerzas actuantes, tomando como base que el campo de movimiento resultante deberá ser compatible con alguno de los posibles encontrados en el análisis cinemático.

# MODELIZADO DE SISTEMAS DE ELEMENTOS PLANOS

## ANALISIS CINEMATICO

Supongamos un mecanismo formado por tres cuerpos planos que se esquematizan en la figura 1 modelados de acuerdo a coordenadas naturales y cuyas variables se encuentran ligadas por un conjunto de ecuaciones de restricción  $Z_h$ .

Se entiende que tanto la posición como la velocidad y aceleración de los grados de libertad son los datos del análisis.

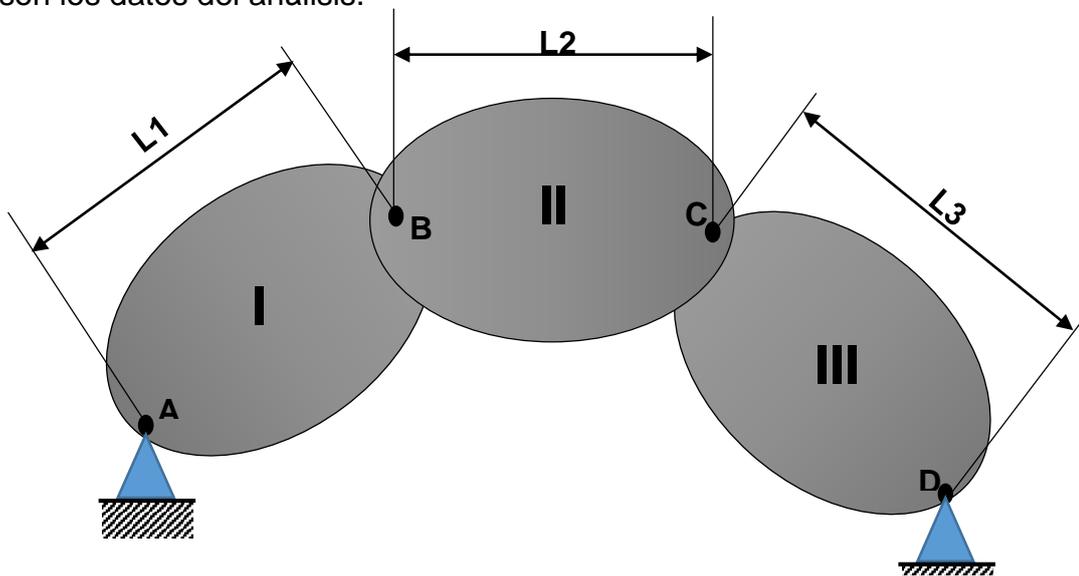


Figura 1: Esquema representativo de un mecanismo plano modelado de acuerdo a coordenadas naturales.

Se muestra que los cuerpos se encuentran vinculados en los puntos B y C, los cuales corresponden a articulaciones consideradas como puntos básicos de las coordenadas naturales (otra opción sería adoptar puntos básicos distintos y plantear la igualdad de las coordenadas  $(x,y)$  en B y C).

Para describir computacionalmente la posición de los cuerpos, a través de sus coordenadas naturales, se recurre a la linealización del sistema de restricciones mediante series de Taylor. Luego, para una determinada posición del mecanismo se pueden encontrar los campos de velocidades y aceleración efectuando las derivadas primera y segunda del sistema de restricciones. Finalmente, si se desea encontrar la posición

absoluta de cualquier punto P perteneciente a alguno de los cuerpos del sistema (ver figura 2), se empieza por encontrar, para el cuerpo en cuestión, la matriz de rotación  $\Gamma$  que permite pasar del sistema local al global.

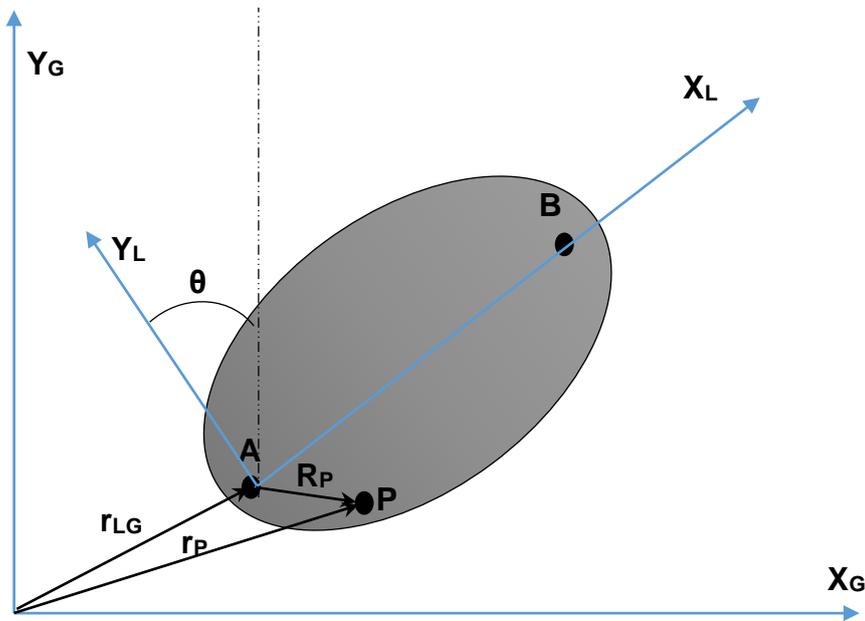


Figura 2: Esquema representativo de la relación entre coordenadas locales y globales.

Para este caso la matriz  $\Gamma$  será

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{|AB|} \begin{bmatrix} x_B - x_A & y_A - y_B \\ y_B - y_A & x_B - x_A \end{bmatrix}$$

Luego, la posición absoluta de P estará determinada por la siguiente expresión:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{LG} + \Gamma \vec{R}_P$$

Es posible es incluir la información de rotación y traslación en una sola matriz  $\mathbf{T}$  llamada matriz de transformación de manera que se puede escribir:

$$\vec{r}_P^H = \mathbf{T} \vec{R}_P^H$$

Donde los superíndices "H" indican coordenadas homogéneas. Por otro lado, la matriz de transformación estará dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} & \vec{r}_{LG} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

## ANALISIS DINAMICO

Los problemas dinámicos pueden ser discriminados en dos tipos. El primer tipo consiste en determinar el movimiento de un sistema si se conocen las fuerzas actuantes sobre el mismo; y el segundo tipo (el inverso del primero) intenta hallar las fuerzas partiendo de un movimiento determinado.

En el presente informe se estudia el primer enfoque, el cual, desde un punto de vista computacional, es mucho más complejo que el primero ya que requiere la integración de sistemas de ecuaciones diferenciales.

El paquete de ecuaciones requerido para resolver el problema estará dado, según un planteo newtoniano, por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \lambda \mathbf{Z}_h = \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{Z}} = 0 \end{cases}$$

En donde:

$\mathbf{M}$ : Matriz de masa del sistema

$\ddot{\mathbf{q}}$ : Segunda derivada del vector de variables dependientes

$\lambda \mathbf{Z}_h$ : Fuerzas de restricción ( $\lambda$ : multiplicador)

$\mathbf{F}$ : Vector de fuerzas generalizadas

El segundo grupo de ecuaciones ( $\dot{\mathbf{Z}} = 0$ ) representan las relaciones de aceleraciones basadas en las distintas restricciones que ligan las variables dependientes.

Sin entrar en detalles de la formulación, la matriz de masas  $\mathbf{M}$  de un elemento plano estará dada por:

$$\begin{bmatrix} m - 2m \frac{X_G}{|\vec{AB}|} + \frac{I_A}{|\vec{AB}|} & 0 & m \frac{X_G}{|\vec{AB}|} - \frac{I_A}{|\vec{AB}|^2} & -m \frac{Y_G}{|\vec{AB}|} \\ 0 & m - 2m \frac{X_G}{|\vec{AB}|} + \frac{I_A}{|\vec{AB}|} & m \frac{Y_G}{|\vec{AB}|} & m \frac{X_G}{|\vec{AB}|} - \frac{I_A}{|\vec{AB}|^2} \\ m \frac{X_G}{|\vec{AB}|} - \frac{I_A}{|\vec{AB}|^2} & m \frac{Y_G}{|\vec{AB}|} & \frac{I_A}{|\vec{AB}|^2} & 0 \\ -m \frac{Y_G}{|\vec{AB}|} & m \frac{X_G}{|\vec{AB}|} - \frac{I_A}{|\vec{AB}|^2} & 0 & \frac{I_A}{|\vec{AB}|^2} \end{bmatrix}$$

# DINAMICA TRIDIMENSIONAL DE CUERPOS RIGIDOS

Se sabe de los cursos básicos de física que la suma de los momentos respecto al centro de masas G equivale a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo respecto de G.

$$\sum \vec{M}_G = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Siendo el momento angular total:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Donde I es el tensor de inercia dado por:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Y  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema de referencia global o primario.

Introduciendo ahora un sistema coordenado secundario que se mueve con velocidad angular  $\vec{\Omega}$  respecto del marco de referencia primario, escribiremos la velocidad angular  $\vec{\omega}$  según sus componentes en el sistema secundario:

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

Luego, reemplazando en la expresión de momento angular en la ecuación de momentos se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

Ahora bien, como es sabido, en el movimiento en tres dimensiones se necesitan especificar tres ángulos. Existen en la actualidad numerosas formas de orientar un cuerpo en el espacio. Aquí se empleará la formulación clásica conocida como Ángulos de Euler.

Para entender cómo se utilizan estos ángulos nos basaremos en las Figuras 3 y 4.

En la figura 3-a se observa un cuerpo con un eje de simetría rotacional en donde se ha introducido un sistema de ejes coordenados XYZ. Se introduce además un sistema de ejes secundario xyz que en la configuración inicial coincide con el primario.

Ahora bien, para definir la orientación del cuerpo, el primer paso consiste en efectuar una rotación respecto al eje Z un ángulo  $\psi$ , tal como se aprecia en la Figura 3-b.

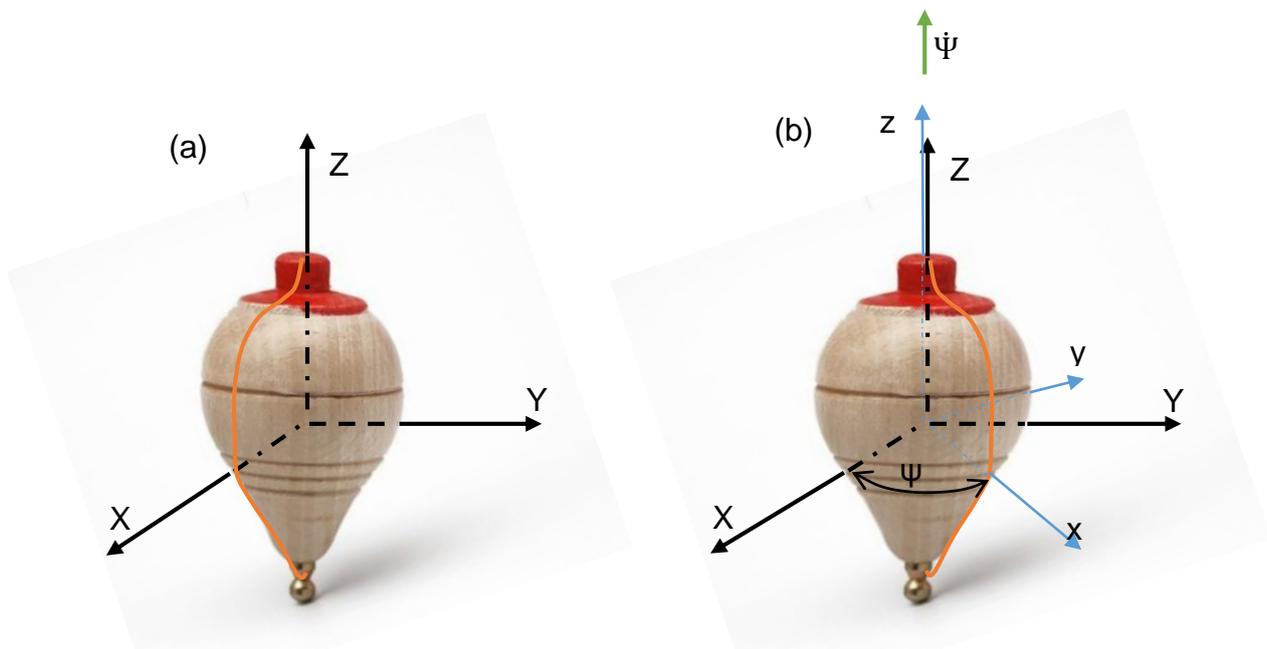


Figura 3: (a): Sistema de ejes primario. (b). Giro del cuerpo y sistema secundario respecto a Z

A continuación girar el cuerpo y el sistema de ejes secundario un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $x$  (figura 4-a). Se observa que el eje  $x$  siempre permanece en el plano  $XY$ .

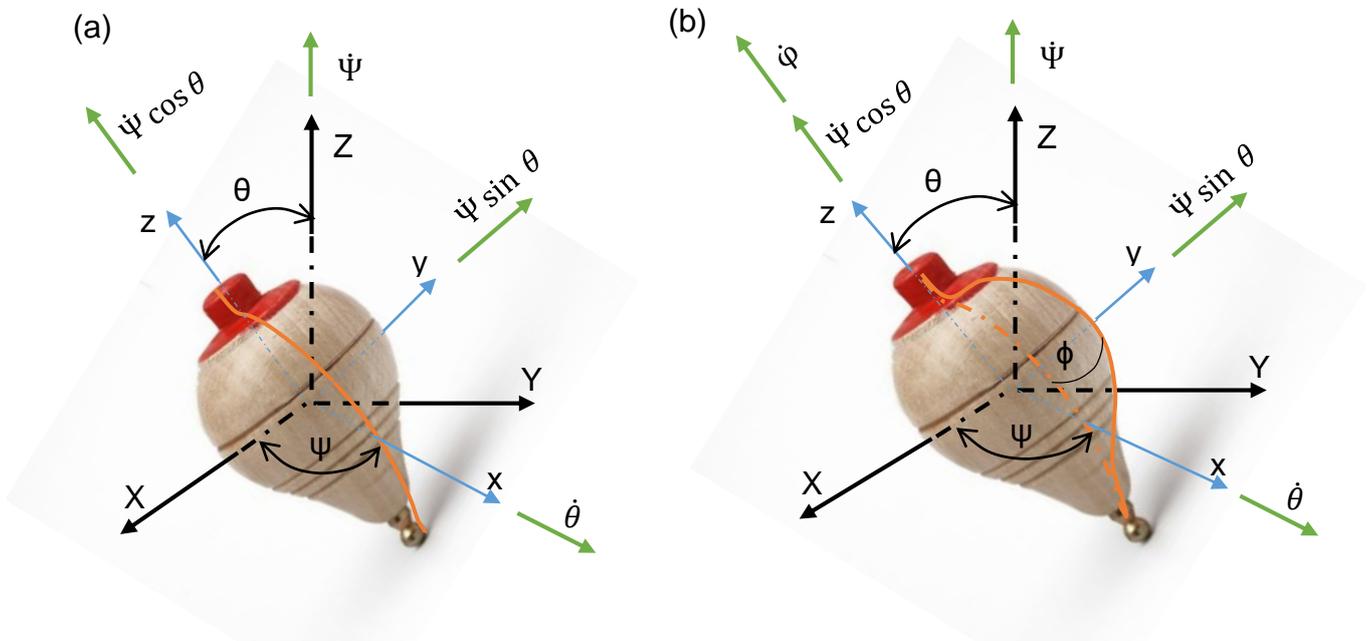


Figura 4: (a) Giro del cuerpo y sistema secundario respecto a su eje  $x$  en su posición final. (b) Giro del cuerpo respecto del sistema secundario y respecto al eje  $z$  secundario.

Por último, se gira el cuerpo un ángulo  $\phi$  respecto al sistema secundario  $xyz$  (figura 4-b). De esta forma, estos tres ángulos permiten describir cualquier orientación del cuerpo respecto al sistema  $XYZ$ . El ángulo  $\psi$  se denomina *ángulo de precesión*, el ángulo  $\theta$  *ángulo de nutación* y por último el ángulo  $\phi$ , que expresa el giro del cuerpo respecto al sistema secundario, se llama *ángulo de giro*. Estos ángulos en conjunto se los conoce como “ángulos de Euler”.

Expresaremos ahora la ecuación de movimiento angular en función de estos ángulos.

De acuerdo a las rotaciones analizadas, en las Figuras 3 y 4 se pueden observar los vectores de velocidades angulares correspondientes a cada giro. Recordar que los ángulos de precesión y nutación correspondían al movimiento del sistema coordenado

secundario, por lo cual la velocidad angular del mismo respecto del sistema coordenado primario queda descrita por el siguiente vector columna:

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la velocidad angular del cuerpo rígido respecto al sistema secundario se corresponde con la derivada primera del ángulo de giro, y según se aprecia en la figura 6, esta velocidad posee la misma dirección que  $\Omega_z$  quedando la velocidad angular del cuerpo rígido respecto del sistema primario como:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Luego, la aceleración angular del cuerpo respecto del sistema XYZ resulta de derivar el vector anterior:

$$\dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

Ya estamos en condiciones de armar la ecuación de movimiento angular en términos de los ángulos de Euler resultando:

$$\begin{pmatrix} \sum M_x \\ \sum M_y \\ \sum M_z \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \\ \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} \cos \theta & \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta & 0 & -\dot{\theta} \\ -\dot{\psi} \sin \theta & \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} I \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta ecuación junto con la de equilibrio dinámico traslacional (2da ley de Newton) conforman las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido.

## INCLUSION DE LIGADURAS EN EL MODELO

El modelizado nos permite obtener una visualización del mecanismo, lo cual se hace por variadas razones como lo son, control de los movimientos, colisiones, entrenamiento de alumnos o personal, etc. Para esto es imprescindible calcular en cada instante las matrices de rotación o transformación de los cuerpos que conforman el mecanismo. Esto nos permitirá obtener la representación gráfica en base a los puntos característicos del cuerpo que hayan sido seleccionados en la formulación, pero también nos permitirá expresar correctamente las ecuaciones de ligaduras que se quieran incluir.

Para armar dicha matriz de rotación para cada cuerpo debemos armar las matrices de rotación para cada giro efectuado de acuerdo a las figuras 3 y 4. A continuación se muestran estas matrices de transformación del sistema local al global:

$$B = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente la rotación total estará representada, para cada cuerpo rígido, por la matriz:

$$A_j = B_j C_j D_j$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi_j \cos \phi_j - \sin \phi_j \sin \psi_j \cos \theta_j & \cos \psi_j \sin \phi_j + \cos \phi_j \sin \psi_j \cos \theta_j & \sin \psi_j \sin \theta_j \\ -\sin \psi_j \cos \phi_j - \sin \phi_j \cos \psi_j \cos \theta_j & -\sin \psi_j \sin \phi_j + \cos \psi_j \cos \theta_j \cos \phi_j & \cos \psi_j \sin \theta_j \\ \sin \theta_j \sin \phi_j & -\sin \theta_j \cos \phi_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}$$

De esta manera, para obtener la ecuación de vínculo por ejemplo en el caso de una rotula, se trabaja de manera similar a la vista en el caso plano:

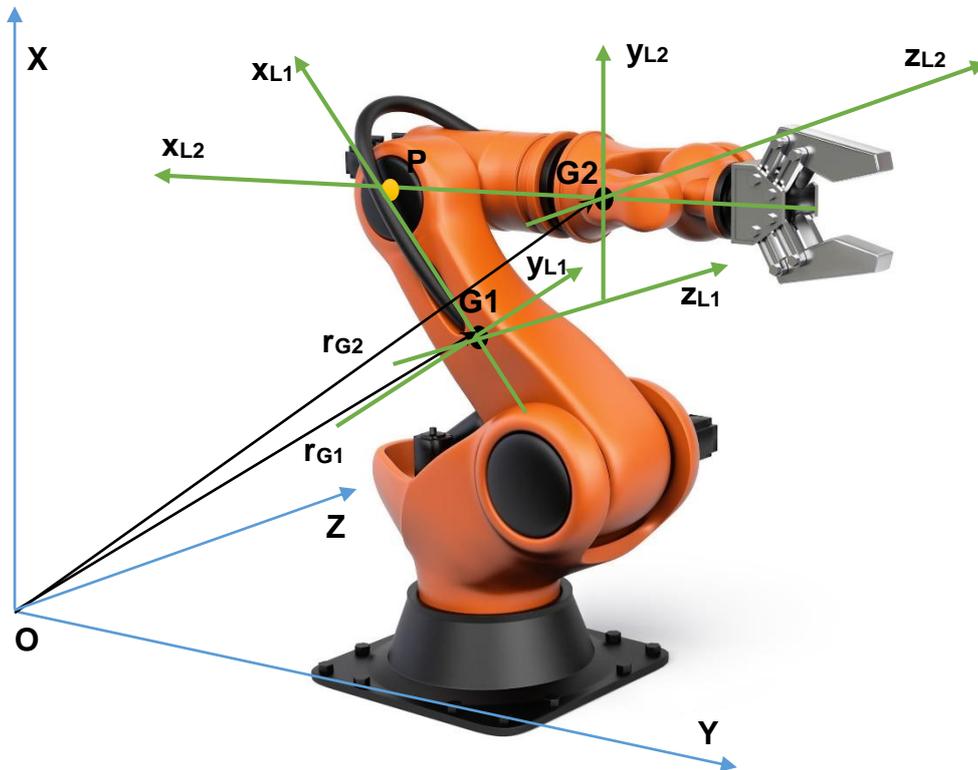


Figura 6: Esquema representativo del caso de una rótula en brazo robótico

En la figura 5 se muestra un brazo robótico. El punto P representa una articulación en el mismo. Se han introducido un sistema coordinado global XYZ y sistemas locales x<sub>L</sub>y<sub>L</sub>z<sub>L</sub> que corresponden a cada brazo involucrado en la rótula. Dichos sistemas locales tienen su origen en los respectivos centros de masas, los cuales se encuentran posicionados respecto al sistema global.

En base a esta descripción, para representar la ecuación de ligadura correspondiente, se advierte que el punto P es un punto compartido por ambos brazos, por lo que partiendo desde el brazo 1 o el brazo 2 se debe arribar en todo momento a la misma coordenada global que pertenece al punto P como punto en común. De esta forma podemos escribir:

$$\vec{r}_{G1} + A_1 \overline{(P - G1)} = \vec{r}_{G2} + A_2 \overline{(P - G2)}$$

Siendo  $A_1$  y  $A_2$  las matrices de rotación de ambos brazos. Así, la ecuación de ligadura resulta:

$$h: \vec{r}_{G1} + A_1 \overrightarrow{(P - G1)} - \vec{r}_{G2} - A_2 \overrightarrow{(P - G2)} = 0$$

Recordar que estas ligaduras se ven materializadas por fuerzas de vínculo las cuales deben incluirse en la segunda ley de Newton. Dada una ecuación de ligadura  $h$ , se puede obtener la fuerza de ligadura correspondiente  $Z_h$  haciendo:

$$Z_h = \lambda \nabla h$$

En donde  $\nabla h$  representa el gradiente de  $h$  en base a las coordenadas definidas en la formulación y nos proporciona la dirección de la fuerza  $Z_h$ .

Por otro lado,  $\lambda$  representa la única incógnita para el cálculo de la fuerza y es el multiplicador encargado de proporcionar el sentido, el modulo y las unidades de  $Z_h$ .

Estas fuerzas de vínculo además añadirán momentos respecto al centro de masa de los cuerpos involucrados en la ligadura que es necesario tener en cuenta en las ecuaciones de movimiento. Cabe aclarar aquí, que estos términos de momentos deberán calcularse, para su consideración, como el producto cruz

$$\sum_{i=1}^{Nh} \overrightarrow{(P - G_j)} \times Z_{hi}$$

Para cada cuerpo  $j$  y donde  $Nh$  representa la cantidad de ligaduras en las que  $j$  se ve involucrado. Era necesaria dicha aclaración ya que se arribaría a un error si se quisiera encontrar estos momentos a partir del gradiente de  $h$  ya que carecerían de sentido debido a que los ángulos de Euler no se encuentran asociados a ninguna dirección X Y Z. Aclarado lo anterior, para que el problema sea determinado es necesario (al igual que en el caso plano) introducir las relaciones de aceleraciones derivadas de las ecuaciones de vínculo (derivadas segundas de  $h$  respecto del tiempo):

$$\ddot{h}: \ddot{\vec{r}}_{G1} + \ddot{A}_1 \overrightarrow{(P - G1)} - \ddot{\vec{r}}_{G2} - \ddot{A}_2 \overrightarrow{(P - G2)} = 0$$

(Observe que los vectores  $\overrightarrow{(P - G_j)}$  asociados a cada cuerpo son constantes ya que corresponden al sistema local el cual se ha supuesto que esta fijo al cuerpo)

Ahora estamos en condiciones de expresar la ecuación de movimiento final:

$$\begin{bmatrix} M & H \\ \Phi & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Donde

- $M$  es la matriz de masa de todos los cuerpos que conforman el mecanismo.
- $H$  es una matriz que contiene la información de las fuerzas y momentos que las fuerzas de vínculo realizan sobre los respectivos cuerpos.
- $\Phi$  representa la matriz jacobiana de las ecuaciones de ligadura y surge de aquellos términos de  $\ddot{h}$  relacionados con las aceleraciones
- $F$  es el vector que incluye todas las otras fuerzas externas involucradas (elásticas, amortiguadoras, másicas, etc.) que obran sobre los respectivos cuerpos
- $I$  representa aquellos términos de  $\ddot{h}$  que dependen de las coordenadas y las velocidades y que no forman parte de la matriz jacobiana  $\Phi$
- $q$  representa el vector algebraico que contiene todas las incógnitas (aceleraciones y multiplicadores de todas las fuerzas de vínculo)

# CAPITULO 3:

## ECUACIONES Y CONCEPTOS DE LA DINAMICA DE LOS FLUIDOS

Antes de desarrollar el conjunto de ecuaciones que nos permitirán modelar el movimiento de un fluido, tomamos como punto de partida la definición de nuestra escala de análisis. Esto es de gran importancia ya que indirectamente estamos definiendo la naturaleza de las funciones que emplearemos a la hora de modelar. Consideramos que el fluido conforma un medio continuo por lo cual nuestro nivel de análisis no considera las discontinuidades existentes a nivel atómico. Trataremos la materia desde un punto de vista macroscópico y por consiguiente la podremos describir utilizando funciones continuas.

Cuando hablamos de describir el movimiento, haciendo referencia a un medio continuo, podemos hacerlo desde dos concepciones:

- Descripción Material (Lagrangiana)
- Descripción Espacial (Euleriana)

La descripción lagrangiana describe una propiedad mediante una función de las coordenadas materiales y el tiempo, mientras la concepción euleriana se centra en un punto del espacio dando la evolución de la propiedad en consideración para las distintas partículas que van pasando por dicho punto en el tiempo. Esta última concepción es la mayormente utilizada en el estudio de la mecánica de los fluidos.

Considerando ahora estas descripciones, podemos distinguir las derivadas temporales de la propiedad analizada en:

- Derivada Local: Derivada temporal de la propiedad según su descripción espacial en un punto fijo del espacio.

- Derivada Material: Variación de la propiedad respecto del tiempo siguiendo a una partícula específica. Descripción material.

Se puede obtener la derivada material a partir de la descripción espacial mediante:

$$\frac{d\gamma(\mathbf{x}, t)}{dx} = \frac{\partial\gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\gamma(\mathbf{x}, t)$$

Donde:

$$\frac{d\gamma(\mathbf{x}, t)}{dx} : \textit{derivada material}$$

$$\frac{\partial\gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial x} : \textit{derivada local}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\gamma(\mathbf{x}, t) : \textit{derivada convectiva}$$

Si  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$  no hay convección y la derivada local y material coinciden.

En conclusión, la velocidad queda determinada por la derivada temporal de las ecuaciones de movimiento y por otro lado derivando el campo material de velocidades se obtiene el respectivo campo de aceleraciones.

Se expondrán a continuación varios de los conceptos que serán empleados en el presente trabajo:

- *Estacionariedad*: La descripción espacial de la propiedad en estudio no depende del tiempo.
- *Línea de corriente*: Familia de curvas envolvente del campo de velocidades. Si este último es estacionario entonces las líneas de corriente coinciden con la trayectoria.
- *Tubo de corriente*: Superficie constituida por un haz de líneas de corriente que pasan por los puntos de una línea cerrada, fija en el espacio y que no constituye una línea de corriente. En casos no estacionarios tanto el tubo de corriente como la línea de corriente varían a lo largo del tiempo.

- *Superficie material*: Se trata de una superficie constituida por un conjunto determinado de partículas que se mueven en el espacio. La condición necesaria y suficiente para que la superficie material este conformada siempre por las mismas partículas es que su derivada material sea nula:  $\frac{df(x,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0$
- *Volumen de control*: Conjunto de puntos del espacio situados en el interior de una superficie fija, llamada superficie de control, el cual es atravesado por las partículas del medio continuo.

# POSTULADOS Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS DEL MEDIO FLUIDO

## CONCEPTOS PRELIMINARES:

Uno de los primeros conceptos a tener en cuenta es el de presión. Aquí cabe distinguir entre presión hidrostática, presión media y presión termodinámica. Al referirnos a la presión hidrostática citamos el conocido principio de Pascal el cual establece que el tensor de tensiones que caracteriza el estado del fluido en reposo tiene la forma:

$$\sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Donde  $\delta_{ij}$  es el operador de sustitución o Delta de Kronecker el cual definido como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \text{ conforma el tensor unidad } \mathbf{I} \text{ por lo cual:}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{I}$$

De esta manera el estado tensional en cualquier plano que pase por un punto de un fluido en reposo será siempre el mismo y corresponde a una tensión normal de compresión  $p_0$  llamada presión hidrostática.

Al ser el tensor de tensiones para un fluido en reposo un tensor esférico, su representación en el plano de Mohr corresponde a un punto:

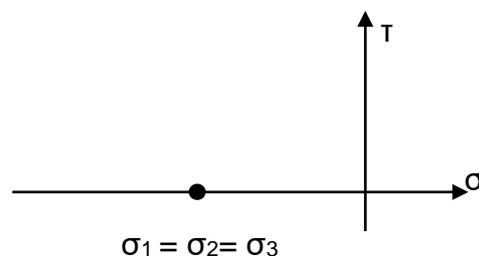


Figura 7: Representación del tensor de tensiones de un fluido en el plano de Mohr

Por otro lado, definimos la tensión media como:

$$\sigma_m = \frac{\text{Traza } (\boldsymbol{\sigma})}{3} = \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

Distinguiéndola de la presión media, la cual es la tensión media cambia de signo:

$$\bar{p} = -\sigma_m$$

Por último, cabe definir la presión termodinámica  $p$ , la cual es aquella interviniente en la ecuación cinética de estado de líquidos y gases, la cual relaciona dicha presión con la densidad y la temperatura absoluta, como por ejemplo la ley de los gases. Si en la ecuación de estado no interviene la temperatura estamos en presencia de un fluido *barotrópico*. Si además en la ecuación de estado no participa la presión, se dice que el fluido es *incompresible*.

Si estudiamos fluidos en movimiento, la presión media, presión hidrostática y presión termodinámica son diferentes entre sí. Sin embargo, si el fluido está en estado de reposo las tres presiones coinciden.

Existen además una serie de postulados referentes a la mecánica de medios continuos cuya validez es independiente del material y del rango de desplazamientos/deformaciones. Estos postulados son:

1. Conservación de la masa
2. Balance de la cantidad de movimiento
3. Balance del momento cinético
4. Balance de energía.

CONSERVACION DE LA MASA

Consideremos un volumen material  $\forall$  que ocupa volúmenes en el espacio  $\forall_t$  y  $\forall_{t+\Delta t}$  en los respectivos instantes de tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ . La masa encerrada por dicho volumen será los mencionados instantes:

$$m(t) = \left[ \int \rho(\mathbf{x}, t) d\forall \right]_{\forall_t}$$

$$m(t + \Delta t) = \left[ \int \rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) d\forall \right]_{\forall_{t+\Delta t}}$$

Donde  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad en su descripción espacial

El principio de conservación de la masa indica entonces que  $m(t) = m(t + \Delta t)$  por lo cual debe satisfacerse que:

$$m'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\int \rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) d\forall]_{\forall_{t+\Delta t}} - [\int \rho(\mathbf{x}, t) d\forall]_{\forall_t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}, t) d\forall = 0$$

Además, escribiendo la derivada material como la suma de la derivada local más la derivada convectiva:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\mathbf{x}, t) d\forall = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\forall + \int \nabla \cdot \rho \mathbf{v} d\forall = \int \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) d\forall = 0$$

La expresión anterior se verifica tanto para el volumen  $\forall$  como para todo volumen material parcial  $\Delta\forall$  y en particular para cada uno de los volúmenes elementales asociados a las diferentes partículas del medio que ocupan volúmenes diferenciales  $d\forall$ , por lo cual podemos escribir la forma local espacial de la conservación de la masa:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{Forma local de Conservacion de la Masa}$$

*BALANCE DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO*

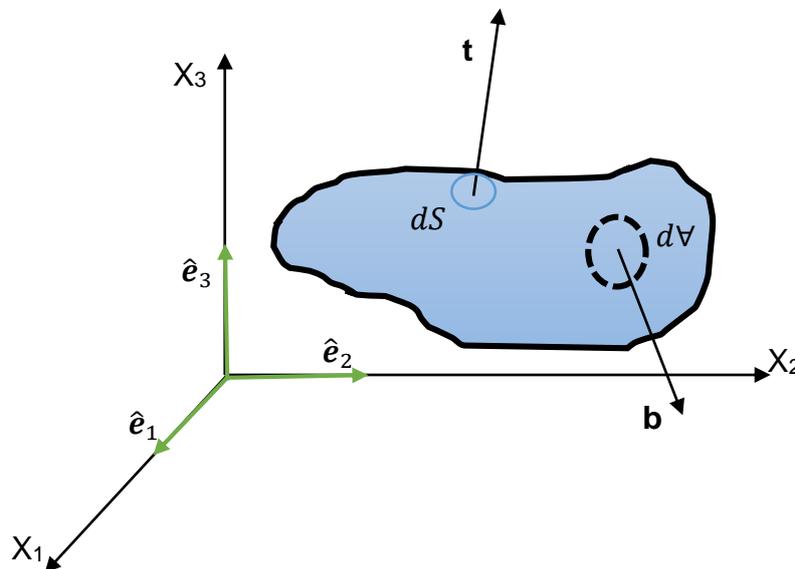
De la mecánica clásica se conoce que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema considerado equivale a la variación por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{mv}}{dt}$$

Donde  $\mathbf{F}$  denota la resultante de fuerzas actuantes en el sistema de masa  $m$  y  $\mathbf{v}$  es su velocidad.

De la anterior ecuación se desprende que cuando la resultante de fuerzas es nula la cantidad de movimiento  $m\mathbf{v}$  se conserva.

Adaptando este principio a la mecánica de medios continuos distinguiremos entre fuerzas másicas y fuerzas de superficie. Las primeras corresponden a aquellas fuerzas ejercidas a distancia sobre las partículas del interior del medio como por ejemplo fuerzas gravitatorias, inerciales o magnéticas. Por otro lado, las fuerzas de superficie están aplicadas en el contorno del volumen considerado en la Figura 7:



*Figura 8: Volumen de control considerado donde están aplicadas las fuerzas de superficie.*

De esta manera la descripción espacial de las fuerzas másicas y superficiales será respectivamente:

$$\mathbf{f}_V = \left[ \int \rho \mathbf{b} dV \right]_V$$

$$\mathbf{f}_S = \left[ \int \mathbf{t} dS \right]_S$$

Donde  $\mathbf{b}$  representa a las fuerzas másicas por unidad de masa y  $\mathbf{t}$  son las fuerzas superficiales por unidad de superficie.

Expresando ahora la derivada de la cantidad de movimiento para un medio continuo y combinando el resultado con las expresiones para las fuerzas másicas y superficiales se obtiene la expresión integral del balance de la cantidad de movimiento:

$$\left[ \int \rho \mathbf{b} dV \right]_V + \left[ \int \mathbf{t} dS \right]_S = \frac{d}{dt} \left[ \int \rho \mathbf{v} dV \right]_V$$

Podemos arribar a una forma local del balance de la cantidad de movimiento incluyendo el teorema de la divergencia y ejecutando algunos pocos pasos de algebra:

Del teorema de la divergencia tenemos que  $\left[ \int \mathbf{t} dS \right]_S = \left[ \int \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right]_S = \left[ \int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \right]_V$

Por otro lado,  $\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} dV = \int \left[ \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int \left[ \frac{d\rho}{dt} \mathbf{v} + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int \left[ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \right) \right] dV$  y recordando la forma espacial local de la conservación de la masa, al ser  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0$  resulta  $\int \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int \rho \mathbf{b} dV = \int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$  por lo que:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{a} \quad (\text{Ecuacion de Cauchy})$$

### BALANCE DEL MOMENTO CINETICO

Es sabido que el momento resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema discreto de partículas equivale a la variación en el tiempo del momento cinético (o

momento angular); de tal manera que si el sistema se encuentra en equilibrio rotacional, el momento angular se mantiene constante.

Es posible extender este principio aplicado a un sistema de discreto de partículas, a un sistema continuo:

$$\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV$$

Donde:

$\mathbf{M}_0$  Representa el momento resultante de todas las fuerzas respecto a un punto fijo;

$\mathcal{L}$  Denota el momento cinético respecto al punto "0";

$\mathbf{v}$  Velocidad del elemento diferencial de masa;

$\mathbf{r}$  Vector posición desde "0" hasta el diferencial de masa.

Por otro lado, el momento resultante está conformado por el momento de las fuerzas másicas y de superficie:

$$\mathbf{M}_0 = \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS$$

Donde:

$\mathbf{b}$  Representa las fuerzas másicas por unidad de masa

$\mathbf{t}$  Denota las fuerzas de superficie (por unidad de superficie)

Finalmente podemos expresar la forma global de la conservación del momento angular:

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV = \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS$$

De este modo, podemos llegar a la expresión local de este principio haciendo:

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV = \int \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

Por otro lado, empleando el teorema de la divergencia:

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \int \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} dS = \int (\mathbf{r} \times \vec{\sigma}^T) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int (\mathbf{r} \times \vec{\sigma}^T) \cdot \nabla dV$$

Además:

$$(\mathbf{r} \times \vec{\sigma}^T) \cdot \nabla = e_{ijk} r_j \sigma_{mk} \frac{\partial}{\partial r_m} \hat{\mathbf{e}}_i = e_{ijk} \overbrace{\frac{\partial r_j}{\partial r_m}}^{\delta_{jm}} \sigma_{mk} \hat{\mathbf{e}}_i + e_{ijk} r_j \frac{\partial \sigma_{mk}}{\partial r_m} \hat{\mathbf{e}}_i$$

Por lo tanto:

$$(\mathbf{r} \times \vec{\sigma}^T) \cdot \nabla = e_{ijk} \delta_{jm} \sigma_{mk} \hat{\mathbf{e}}_i + \mathbf{r} \times \nabla \cdot \vec{\sigma} = e_{ijk} \sigma_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i + \mathbf{r} \times \nabla \cdot \vec{\sigma}$$

Reemplazando lo modificado en la expresión global del principio de conservación del momento cinético obtenemos:

$$\int \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int (e_{ijk} \sigma_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i + \mathbf{r} \times \nabla \cdot \vec{\sigma}) dV$$

Después de reagrupar y recordar que de la ecuación de Cauchy se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rightarrow \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$$

Resulta:

$$\int e_{ijk} \sigma_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i dV = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{cases}$$

**$\rightarrow \vec{\sigma} = \vec{\sigma}^T$  Forma local del principio de Momento Angular**

Por lo tanto, la expresión local del principio de conservación del momento angular se traduce en la simetría del tensor de tensiones.

### BALANCE DE ENERGIA

Para abordar el estudio del balance de energía es necesario primero establecer el concepto previo de potencia.

El medio continuo absorbe potencia mecánica y/o calorífica del exterior y realiza trabajo mecánico por unidad de tiempo.

La potencia mecánica es la derivada de la acción de las fuerzas másicas y de superficie que actúan sobre el medio continuo de manera que:

$$\text{Potencia mecánica} = \frac{\text{trabajo fuerzas masicas}}{\text{tiempo}} + \frac{\text{trabajo fuerzas superficiales}}{\text{tiempo}} =$$

$$P = \int \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \int \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int \hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\sigma} \cdot \mathbf{v} dS$$

Empleando el teorema de la divergencia al último término de la expresión anterior resulta:

$$P = \int \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \nabla dV$$

Desarrollando  $(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \nabla$  tenemos:

$$(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \sigma_{mn} (\hat{\mathbf{e}}_m \otimes \hat{\mathbf{e}}_n) \cdot v_j \hat{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{mn} \delta_{im} v_j \delta_{nj}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} v_j + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} =$$

$$(\nabla \cdot \vec{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \vec{\sigma} : \vec{\mathbf{L}}$$

Donde  $\vec{\mathbf{L}}$  representa el tensor “gradiente de velocidad” =  $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$

Este tensor puede ser descompuesto en un tensor simétrico  $\vec{\mathbf{d}}$  llamado “Tensor de velocidad de deformación” más otro antisimétrico  $\vec{\mathbf{w}}$  comúnmente llamado “Spin”.

Es fácil demostrar que el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico es nulo, por lo cual obtenemos:

$$\vec{\sigma} : \vec{L} = \vec{\sigma} : \vec{d} + \vec{\sigma} : \vec{w} = \vec{\sigma} : \vec{d}$$

Reemplazando en la expresión para la potencia mecánica resulta:

$$P = \int \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int [(\nabla \cdot \vec{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \vec{\sigma} : \vec{d}] dV$$

Con  $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{L}^T)$ .

Ahora reagrupamos y empleamos la ecuación de Cauchy:

$$\begin{aligned} P &= \int [\nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \mathbf{b}] \cdot \mathbf{v} dV + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV = \int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dV + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV \\ &= \int \rho \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dV + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV \end{aligned}$$

Advirtiendo que  $\int \frac{1}{2} \rho v^2 dV$  representa la energía cinética T, se puede escribir:

$$P = \frac{dT}{dt} + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV$$

La cual es una expresión del teorema de las fuerzas vivas, es cual establece que la potencia mecánica entrante en el medio continuo se invierte en modificar la energía cinética de las partículas que lo conforman y además de crear energía potencial tensional.

En el caso particular de un sólido rígido, al no existir deformación, las tensiones no realizaran trabajo y toda la potencia entrante se emplea en modificar la energía cinética:

$$P = \frac{dT}{dt} (\text{sólido rígido})$$

Por otro lado, la potencia calorífica que ingresa en el medio continuo puede deberse a flujo de calor no convectivo, representado por un vector  $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$  que describe el flujo de

calor por unidad de tiempo (por ejemplo, ley de Fourier); y/o a la existencia de fuentes de calor en el interior del volumen que pueden representarse por una función escalar  $r(\mathbf{x},t)$  [*calor generado/tiempo*].

De esta manera podemos expresar la potencia calorífica de la siguiente manera:

$$Q = \int \rho r dV - \int \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Por lo cual, la potencia total entrante en el medio continuo será:

$$P + Q = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV + \int \rho r dV - \int \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Ahora bien, la experiencia demuestra que esta potencia total es una diferencial exacta (no las potencias por separado) lo cual nos permite definir una función de estado  $\epsilon$  que representa la energía total del sistema, tal que:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = P + Q \rightarrow \epsilon = \int_{t_0}^t (P + Q) dt + \text{constante}$$

Por otro lado, en base al primer principio de la termodinámica, se puede definir otra función de estado llamada "energía interna"  $U$ , la cual verifica que:

$$d\epsilon = dU + dT$$

Además, por ser  $U$  una propiedad extensiva, es posible definir una energía interna por unidad de masa  $u(x, t)$  tal que:

$$U = \int \rho u dV$$

Reemplazando la expresión de la potencia total en el primer principio de la termodinámica se tiene:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dT}{dt} = P + Q = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV + \int \rho r dV - \int \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Como  $\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \frac{dT}{dt}$  se tendrá que:

$$\frac{dU}{dt} = \int \vec{\sigma} : \vec{d} dV + \int \rho r dV - \int \mathbf{q} \cdot \hat{n} dS$$

Que constituye la expresión global del balance de energía interna la cual expresa que la variación de la energía interna en el tiempo está dada por una generación de potencia tensional más un cambio neto en el contenido de calor del sistema.

Aplicando el teorema de la divergencia y teniendo en cuenta que  $U = \int \rho u dV$  obtenemos la forma local del balance de energía interna:

$$\rho \frac{du}{dt} = \vec{\sigma} : \vec{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \text{ Forma local del Balance de Energía Interna}$$

Además de las ecuaciones presentadas aquí, mencionamos la existencia de restricciones impuestas por el segundo principio de la termodinámica el cual admite la existencia de una función de estado extensiva llamada entropía (S) permitiendo clasificar los procesos en factibles y no factibles.

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Para completar un problema de mecánica de fluidos es necesario incluir las llamadas ecuaciones constitutivas que exponemos a continuación:

- **Ecuaciones constitutivas termomecánicas:**

$$\vec{\sigma} = -p\vec{1} + \vec{f}(\vec{d}, \rho, T)$$

Donde las variables que se muestran representan:

$\vec{d}$  Tensor velocidad de deformación

$\rho$  Densidad

$T$  Temperatura absoluta

$p$  Presión termodinámica

$\vec{f}$  Función tensorial simétrica. Según su carácter se tendrán los diversos modelos de fluidos. Si  $\vec{f}$  es no lineal, la ecuación constitutiva representara un modelo de fluido de Stokes. Si  $\vec{f}$  es lineal entonces se hace referencia a un fluido newtoniano. Por último, si  $\vec{f}$  es nula, estamos hablando de un fluido ideal.

- **Ecuación constitutiva de la entropía**

$$s = s(\vec{d}, \rho, T)$$

Donde  $s$  se refiere a la entropía específica (por unidad de masa) tal que:

$$S = \int s \rho \, dV$$

- **Ecuaciones constitutivas termodinámicas**

Básicamente distinguimos la ecuación calórica de estado:

$$u = g(\rho, T)$$

Y también la ecuación cinética de estado:

$$F(\rho, p, T) = 0$$

- **Ecuación constitutiva de tipo térmico:**

Por ejemplo, la ley de Fourier:

$$\mathbf{q} = -\vec{k} \cdot \nabla T$$

Donde  $\vec{k}$  es un tensor simétrico de segundo orden que representa la conductividad térmica.

# DINAMICA DE FLUIDOS

Para abordar el estudio de la dinámica de fluidos recurrimos a las ecuaciones presentadas anteriormente.

Es posible desarrollar una única EDP desacoplada eliminando la velocidad del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ (Conservación de la masa)}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \text{ (Conservación de la Cantidad de Movimiento)}$$

$p = c^2 \rho$  (Ecuación Constitutiva para la Presión suponiendo que la propagación de la onda corresponde a un proceso isentropico)

Con  $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$  = velocidad de transmisión de la onda, siendo  $K = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$  el módulo de compresibilidad del fluido.

Se asume que el fluido se encuentra en un estado inicial de equilibrio y además en reposo. La onda que se propaga perturba el fluido compresible lo cual se traduce en una variación de sus propiedades en torno al estado inicial:

$$\tilde{p} = p_0 + p$$

$$\tilde{\rho} = \rho_0 + \rho$$

$$\tilde{T} = T_0 + T$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0$$

Donde las variables con subíndice 0 corresponden al estado inicial.

Se asume una hipótesis de pequeñas perturbaciones en la cual las fuerzas viscosas y gravitatorias serán despreciables frente a la variación local de la cantidad de movimiento y

además se desprecian quedando finalmente las ecuaciones de conservación de la masa y cantidad de movimiento como:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla p + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

En donde se ha hecho:

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} = \nabla \cdot (-p_0 \vec{\mathbf{1}}) = -\nabla p_0$$

Y además se empleó, antes de despreciar los términos de menos importancia:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Para arribar a la ecuación de ondas para la perturbación de presión efectuamos la derivada parcial respecto al tiempo de la ecuación de conservación de la masa obteniendo:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

Luego, combinando con la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla p = 0$$

Por último, considerando  $p = c^2 \rho$  se tendrá además que:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Combinando las últimas dos expresiones llegamos finalmente a:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Expresión que gobierna las presiones dinámicas del fluido. En la misma, la forma del operador Laplaciano depende de la elección del sistema de coordenadas.

### CONDICIONES DE CONTORNO

Antes de ejemplificar el uso de nuestras ecuaciones presentadas hasta aquí, debemos conocer primero cuales son las condiciones de contorno que necesitaremos a la hora de resolver correctamente un problema de mecánica de fluidos.

Resumimos a continuación las condiciones de contorno más comunes:

### CONDICIONES DE CONTORNO EN VELOCIDADES

Aquí pueden presentarse 3 casos:

- Velocidad prescrita: Cuando la velocidad es conocida en ciertas partes del contorno del volumen de control.
- Condición de Impenetrabilidad: La velocidad relativa del fluido respecto a la pared impermeable en la dirección normal  $\hat{n}$  debe ser nula:  $(\mathbf{v}_{fluido} - \mathbf{v}_{pared\ movil}) \cdot \hat{n} = 0$
- Condición de adherencia: Empleada cuando se trata de fluidos viscosos y se impone que la velocidad relativa respecto a la pared móvil sea nula ya que, además de la condición de impermeabilidad, el fluido se adhiere a las paredes:

$$(\mathbf{v}_{fluido} - \mathbf{v}_{pared\ movil}) = \mathbf{0}$$

### CONDICIONES DE CONTORNO EN PRESIONES

En aquellas partes del contorno donde puede definirse el vector de tracciones  $\mathbf{t} = \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$

### CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS

En aquellos casos en los cuales se prescribe la presión y las componentes tangenciales de la velocidad, las cuales, por ejemplo, a la entrada o salida de tuberías se suponen nulas.

### CONDICIONES DE CONTORNO EN SUPERFICIES LIBRES

La superficie libre es una superficie material constituida siempre por las mismas partículas.

Esta superficie material no dependerá del tiempo pero su descripción espacial si lo hará confiriéndole un carácter móvil.

Se genera de este modo una condición necesaria y suficiente para que las partículas que conforman la superficie sean siempre las mismas y esta es que su derivada material sea nula:

$$\frac{df(x,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0$$

Con  $f(x, y, z, t) = z - \phi(x, y, t) = 0$

Representando  $z = \phi(x, y, t)$  la cota de la superficie libre.

De esta manera:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{df(x,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 = - \frac{\partial \phi}{\partial t} - v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\rightarrow v_z = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

De esta manera se muestra que la superficie libre establece una condición sobre la componente vertical del campo de velocidades.

Otra condición a mencionar en superficies libres es que se conoce la presión termodinámica sobre la misma y esta es precisamente la presión atmosférica:

$$p(x,t) = p_{atm} \text{ para toda } x \text{ perteneciente a la superficie libre.}$$

# CAPITULO 4: APLICACIONES

## CALCULO DE PRESIONES HIDRODINAMICAS EN FLUIDOS COMPRESIBLES E INCOMPRESIBLES. SISTEMA PRESA-EMBALSE

Se plantea como objetivo obtener las expresiones matemáticas para el cálculo de presiones hidrodinámicas en un medio semi-infinito considerando tanto fluido compresible como incompresible. Desarrollar la solución analítica de la respuesta en frecuencia del campo de presiones hidrodinámicas del fluido sometido a movimiento armónico del contorno vertical de la presa. Caracterizar el comportamiento a distintas frecuencias y formular la matriz de rigidez dinámica correspondiente a la interacción fluido-estructura.

Se emplean los postulados correspondientes a la formulación clásica de la mecánica de los fluidos. Esto es, conservación de la masa, balance de la cantidad de movimiento, balance de momento cinético y balance de energía. Posteriormente se combinan con la ecuación constitutiva para lograr una única ecuación diferencial parcial que sujeta a las condiciones de frontera correspondientes nos permite obtener, mediante la aplicación del método de separación de variables, una expresión para el cálculo de la presión hidrodinámica en fluidos compresibles. Posteriormente se particularizara dicha expresión para el caso de fluidos incompresibles haciendo tender el módulo de compresibilidad a infinito.

### MODELADO DEL CAMPO DE PRESIONES HIDRODINAMICAS

Para abordar el cálculo de las presiones hidrodinámicas recurrimos los postulados analizados en el capítulo tercero del presente trabajo. Dichos postulados se encuentran expresados en sus respectivas formas locales y su validez es independiente del rango de desplazamientos, deformaciones y del material del medio continuo que se trate (Bosch, 2002).

Conservacion de la Masa	Balance de Momentum (Ec. Cauchy)
$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
Balance del Momento Cinetico	Balance de Energia
$\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \vec{\boldsymbol{\sigma}}^T \rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$	$\rho \frac{du}{dt} = \vec{\boldsymbol{\sigma}} : \vec{\mathbf{d}} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}$

Tabla 1: Los postulados básicos de la mecánica del medio continuo.

En la Tabla 1, se definen:

- $\rho(\mathbf{x}, t)$ : la densidad en su descripción espacial
- $\boldsymbol{\sigma}$  : Tensor que caracteriza el estado tensional del fluido.
- $\mathbf{v}$  : velocidad de un elemento diferencial de masa;
- $r(\mathbf{x}, t)$ : campo escalar que representa las fuentes de calor en el interior del volumen de control [calor generado/tiempo].
- $\mathbf{b}$ : representa a las fuerzas másicas por unidad de masa. Las mismas son fuerzas de interacción a distancia tal como lo son las de origen gravitatorio, eléctricas y magnéticas. El vector  $\mathbf{b}$  es tal que la resultante de fuerzas másicas sobre el volumen material resulta ser  $\vec{F} = \iiint \rho \vec{\mathbf{b}} dV|_V$
- Designando como " $\vec{\mathbf{L}}$ " al tensor gradiente de velocidad  $= \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ , se sabe que el mismo puede ser descompuesto en un tensor antisimétrico  $\vec{\mathbf{w}}$  comúnmente llamado *spin* más otro simétrico  $\vec{\mathbf{d}}$  llamado tensor de velocidad de deformación que puede obtenerse como  $\vec{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{L}}^T)$ .
- $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ : vector que describe el flujo de calor por unidad de tiempo
- $u(\mathbf{x}, t)$ : energía interna por unidad de masa.

Para el caso de ondas hidrodinámicas en presas, es posible desarrollar una única ecuación diferencial parcial que incluye la ecuación constitutiva para la presión (Prato, 2006):

$$p = k\Delta \tag{1}$$

Donde  $k = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}$  = módulo de compresibilidad del fluido,  $\Delta = \frac{\delta_{ij}}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  = deformación volumétrica (traza del tensor de deformación), donde  $\delta_{ij}$ : es el operador de sustitución o Delta de Kronecker el cual ya había sido definido:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{Equivale al tensor unidad } \mathbf{I})$$

Además, combinando las ecuaciones de conservación de la masa y balance de la cantidad de movimiento con la ecuación constitutiva se obtiene finalmente:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2)$$

Con  $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$  = velocidad de transmisión de la onda en el fluido. Si se considera el fluido incompresible se tendrá  $k \rightarrow \infty$ ;  $c \rightarrow \infty$  y la ecuación (2) se reduce

$$\nabla^2 p = 0 \quad (3)$$

El caso de interés en este trabajo se ilustra en la siguiente figura:

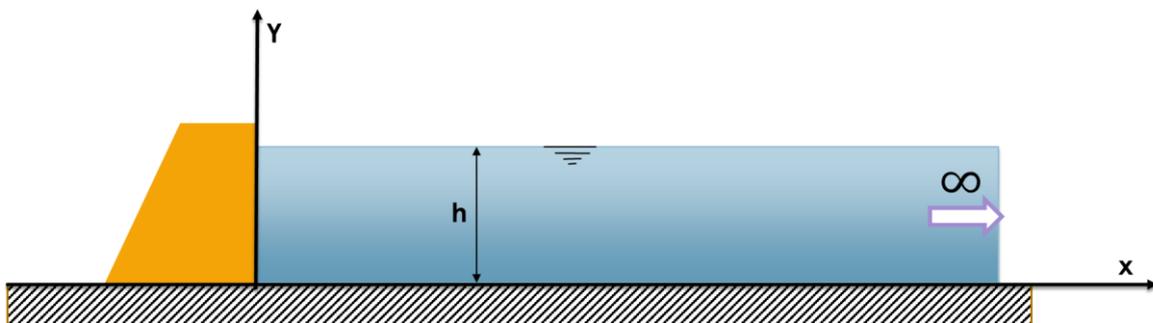


Figura 9: Modelo Presa-Reservorio

Se muestra un embalse como un medio semi-infinito de fluido compresible con movimiento impuesto armónico  $\ddot{u}(\omega, y) = \varphi(y) \exp(j\omega t)$  de la pared vertical de la presa en contacto con el agua. Se modela el campo de presiones como plano. Las condiciones de frontera del modelo son (Inaudi, 2005):

Condiciones de Frontera	
$P(x, h, t) = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, y, t) = 0$
$\left. \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial y} \right _{y=0} = 0$	$\left. \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial x} \right _{x=0} = -\rho_w \left. \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right _{x=0}$

Tabla 2: Condiciones de Frontera

Resolviendo el caso compresible mediante separación de variables se tendrá:

$$P(x, y, t) = X(x)Y(y)e^{j\omega t}$$

Por lo que reemplazando en 2 obtenemos:

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} Y + \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} X = -\frac{1}{c^2} X(x)Y(y)\omega^2$$

O escrito de otra manera:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

A partir de ahora emplearemos las dobles primas para denotar las derivadas segundas:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = X'' \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = Y''$$

Resultando:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

O bien:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{\omega^2}{c^2}$$

En esta última expresión se tiene que el primer miembro depende solo de x, y el segundo miembro depende solo de y. Para que esta igualdad tenga validez deberán ser ambos miembros, necesariamente, constantes, es decir:

$$\frac{X''}{X} = \alpha, \quad \frac{Y''}{Y} = \beta$$

Aquí  $\alpha$  puede tomar distintos valores:  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha > 0 \\ \alpha < 0 \end{array} \right.$

Si  $\alpha$  vale cero entonces  $X'' = 0$  y  $X = A x + B$  lo cual se significa que para crecimientos arbitrarios de  $x$ ,  $X$  crece monótonicamente y  $\lim_{x \rightarrow \infty} P = \infty$ , cosa que es físicamente imposible.

Si  $\alpha < 0$  podemos hacer  $\alpha = -\lambda^2$  resultando la ecuación diferencial  $X'' + \lambda^2 X = 0$  cuya solución es:

$$X = A \cdot \cos[\lambda x] + B \cdot \sin[\lambda x]$$

Pero observando las condiciones de contorno, resulta que el límite de  $P$  cuando  $x$  tiende a infinito debiera ser nulo, sin embargo, para la solución encontrada para  $X$  no existe dicho límite, por lo que concluimos que  $\alpha$  no puede ser negativo.

Probemos con  $\alpha > 0$ . En este caso escribimos la constante como  $\lambda^2$ . Esto se traduce en  $X'' - \lambda^2 X = 0$  cuya solución es:

$$X = A e^{j\lambda x} + B e^{-j\lambda x}$$

Aquí podemos deducir que  $A$  debe ser necesariamente nula, pues la presión no puede crecer infinitamente con la coordenada  $x$ :

$$A = 0$$

Por otro lado, la constante  $\beta$  se encuentra vinculada con  $\lambda$  mediante:

$$\beta = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2\right)$$

Resultando para  $Y$ :

$$Y'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2\right) Y = 0$$

Cuya solución es:

$$Y = D \cdot \cos \left[ y \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2\right)} \right] + E \cdot \sin \left[ y \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2\right)} \right]$$

Resultando para la presión:

$$P(x, y, t) = \left[ C1. \cos \left( y \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) + C2. \sin \left( y \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) \right] e^{j(\omega t - \lambda x)}$$

Las constantes a determinar dependen de las condiciones de borde antes enunciadas por lo cual se tendrá:

$$1) \frac{\partial P(x, 0, t)}{\partial y} = 0$$

$$C2. \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \cos \left( y \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) = 0$$

Por lo que

$$C2 = 0$$

$$2) P(x, h, t) = 0$$

$$C1. \cos \left( h \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) + C2. \sin \left( h \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) = 0$$

$$C1. \cos \left( h \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) = 0$$

La constante C1 no puede ser cero. De ser esto cierto P seria nula en todo el dominio, por lo tanto resulta

$$\cos \left( h \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} \right) = 0$$

Y finalmente

$$h \sqrt{\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \lambda^2 \right)} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

Quedando la expresión para el campo de presión (Chopra, 1967):

$$P(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C1_n \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi y}{2h} \right] e \left[ j\omega t - x \sqrt{\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4h^2} - \frac{\omega^2}{c^2}} \right] \quad (4)$$

(La condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, y, t) = 0$  ya fue utilizada cuando se eliminó la constante A)

Las  $C1_n$  pueden ser evaluadas en base a la condición de contorno en la pared de la presa:

$$\frac{\partial P(0, y, t)}{\partial x} = -\rho_w \frac{\partial^2 u_{x=0}}{\partial t^2}$$

$$u(\omega, y) = \varphi(y) e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 u_{x=0}}{\partial t^2} = -\varphi(y) \omega^2 e^{j\omega t}$$

Y haciendo uso de la propiedad de ortogonalidad se deduce:

$$C1_n = \frac{\frac{2}{h} \rho_w}{\sqrt{\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4h^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}} \int_0^h \varphi(y) \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi y}{2h} \right] dy \quad (5)$$

Para el caso incompresible basta con hacer  $c \rightarrow \infty$  en las expresiones anteriores.

Por ejemplo, asumiendo un movimiento de la pared de la presa  $\varphi(y) = 1$ , uniforme en altura ( $\ddot{u}$  constante en altura) para el caso incompresible se obtiene (Inaudi, 2005):

$$P(x, y, t) = \ddot{u}(\omega, t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\rho_w h}{(2k-1)\pi} (-1)^{k-1} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi y}{2h} \right] e \left[ j\omega t - \frac{(2n-1)\pi x}{2h} \right] \quad (6)$$

Para calcular la matriz de rigidez dinámica asociada a una discretización del modelo estructural de la presa que permite representar el desplazamiento lateral de la presa como función de las coordenadas generalizadas de la presa,  $q_j(t)$ , como

$$u(\omega, t) = \sum_{i=1}^{N_q} q_i \exp(j\omega t) \varphi_i(y) \quad (7)$$

Podemos expresar, en el dominio de la frecuencia

$$\mathbf{Q}(\omega, t) = \mathbf{S}(\omega) \mathbf{q} \exp(j\omega t) \quad \text{donde} \quad \mathbf{S}_{ij}(\omega) = \int_0^{H_r} \omega^2 H_{p(0,y)\ddot{q}_j} \varphi_i(y) dy \quad (8)$$

y  $H_{p(0,y)\ddot{q}_j}$  es la función respuesta en frecuencia de aceleración  $\ddot{q}_j(t)$  a la presión hidrodinámica sobre la pared de la presa que se puede calcular a partir de las ecuaciones (4) y (5), definiendo la función  $\varphi(y)$  como el desplazamiento  $\varphi_j(y)$  de la pared de la presa impuesto por un desplazamiento unitario en la coordenada  $q_j$  y las otras coordenadas nulas.

Para ilustrar la aplicación de la formulación planteada se desarrolla un programa de cálculo y se considera un caso de análisis simple para los siguientes parámetros  $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ ,  $h = 100 m$  y velocidad de propagación  $c = 1493 m/s$ . Se calcula el campo de presiones para aceleraciones unitarias en el dominio de la frecuencia y se grafica el mismo sobre la pared de la presa ( $x = 0$ ). Las figuras 9, 10 y 11 muestran la función de respuesta en frecuencia de aceleración horizontal a presión y de desplazamiento horizontal a fuerza horizontal para distintos valores de frecuencias  $\omega$  en el rango  $[0, 80]$  rad/s.

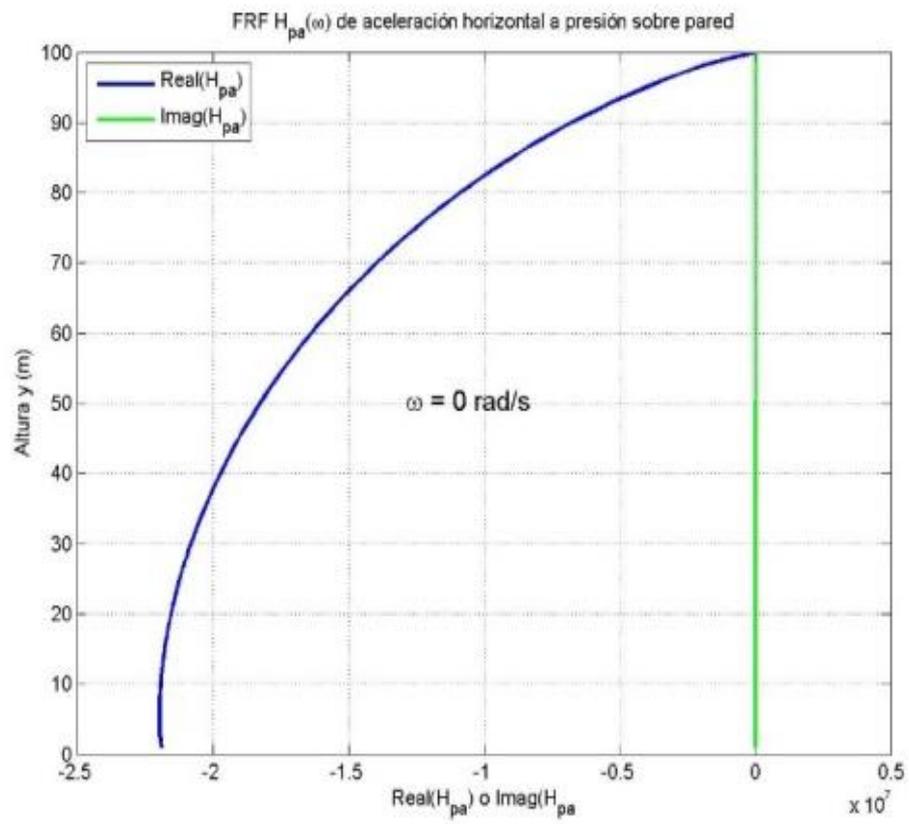


Figura 10: Función respuesta en frecuencia de aceleración a presión en la pared para desplazamiento uniforme y frecuencia  $\omega = 0 \text{ rad/s}$

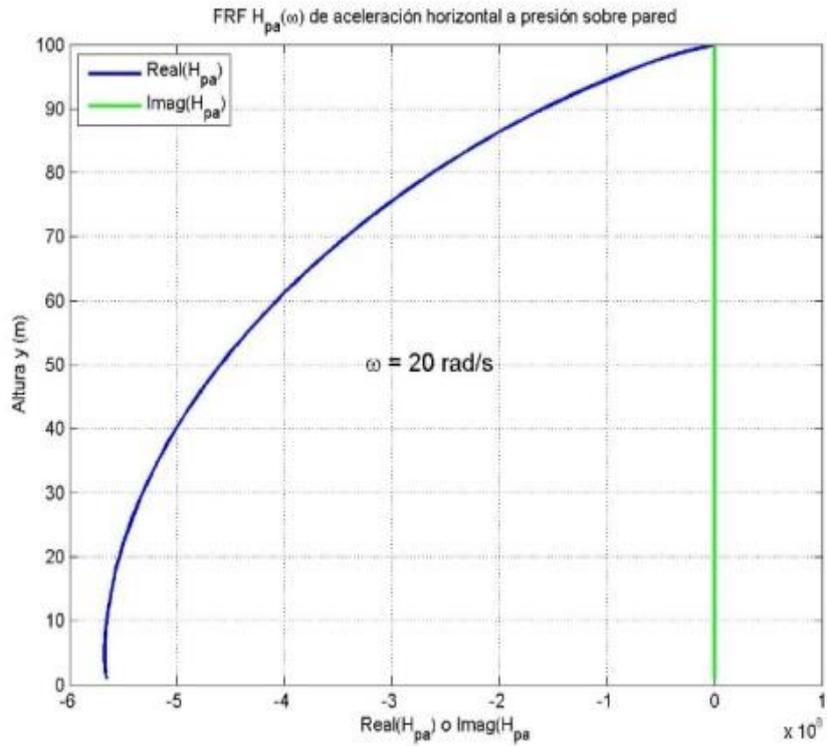


Figura 11: Función respuesta en frecuencia de aceleración a presión en la pared para desplazamiento uniforme y frecuencia  $\omega = 20 \text{ rad/s}$

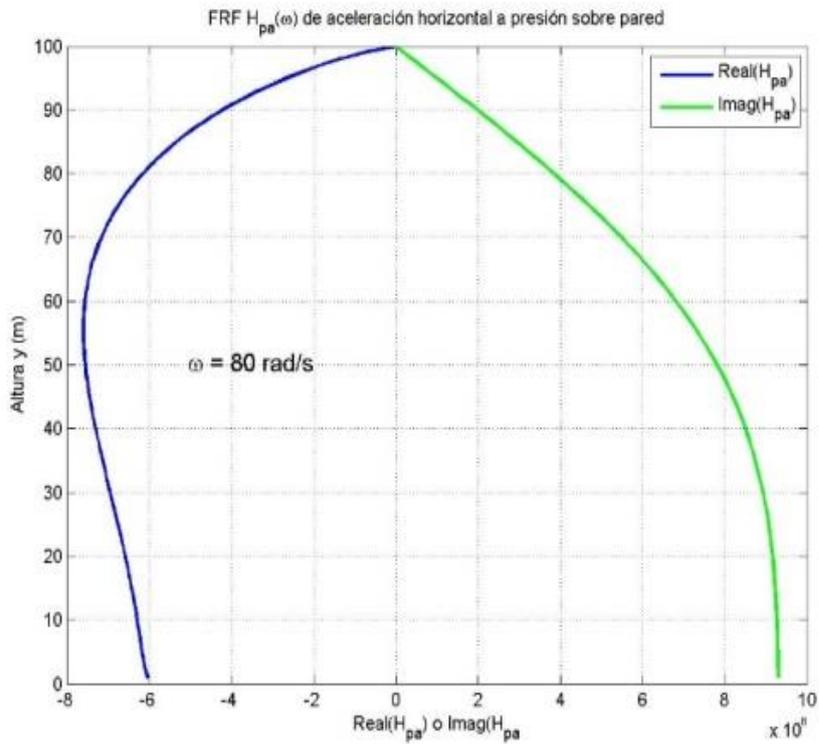


Figura 12: Función respuesta en frecuencia de aceleración a presión en la pared para desplazamiento uniforme y frecuencia  $\omega = 80 \text{ rad/s}$

La figura 12 muestra la rigidez dinámica asociada al movimiento uniforme de la pared de la presa en función de la frecuencia. Los valores negativos de la parte real indican el carácter inercial de la interacción con fluido en la rigidez dinámica para el rango de frecuencias analizado.

La componente imaginaria positiva para frecuencias positivas indica la disipación por radiación en el medio semi-infinito que se produce para frecuencias para las cuales  $B_n$  en Ec. (5) resulta un número imaginario por ser negativo el radicando en el denominador de esa expresión. Esto se explica por ondas que transportan energía desde la fuente hacia el medio semi-infinito, usualmente denominado amortiguamiento por radiación o radiación mecánica.

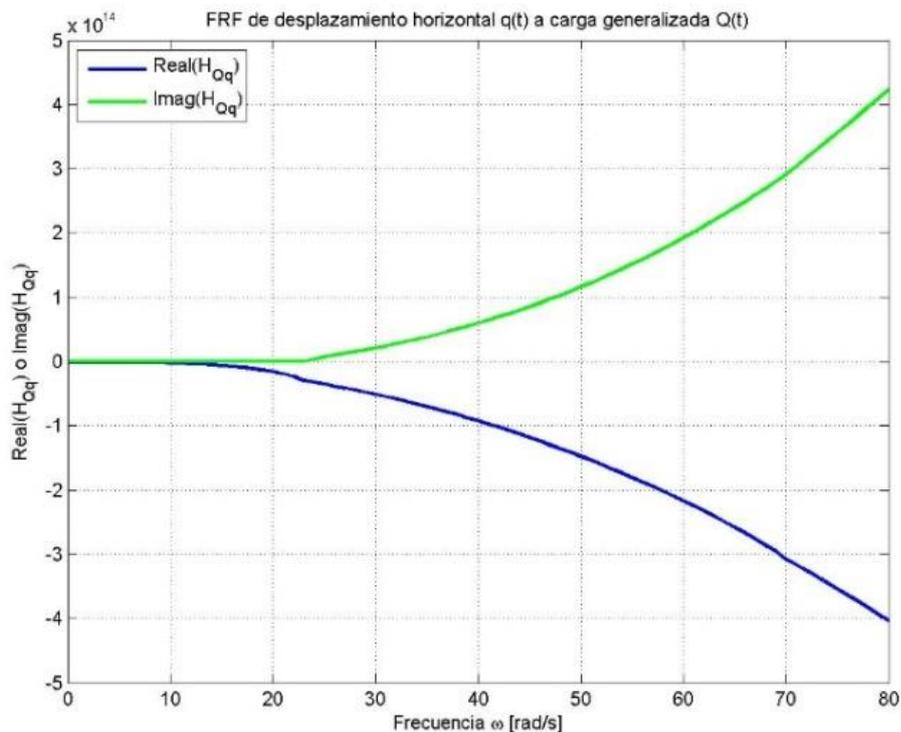


Figura 13: Rigidez dinámica asociada a desplazamiento uniforme en la altura de la presa.

## CONCLUSION

Se ha desarrollado una aplicación de la solución de presiones hidrodinámicas en fluido compresible para el análisis dinámico de presas en el dominio de la frecuencia. La implementación computacional de esta solución permite el cálculo de la matriz de rigidez dinámica de la interacción fluido-estructura en el dominio de la frecuencia.

## MODELIZADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA DE CUERPOS RIGIDOS EN EL ESPACIO MEDIANTE UN SOFTWARE PARA LA SIMULACION

El objetivo propuesto es el desarrollo de un software para la simulación de sistemas de cuerpos rígidos sometidos a diversas fuerzas y distintas tipologías de vínculos.

Se emplea para la programación la herramienta MATLAB. Un software matemático con lenguaje propio que permite, entre otras cosas, operaciones con vectores y matrices tanto de manera numérica como simbólica.

El programa consta de varias secciones:

1. Base de datos: En esta sección el usuario debe ingresar las variables de estado y demás datos necesarios de cada cuerpo para resolver el problema:
  - Numero de cuerpos que conforman el sistema
  - Coordenadas del centro de masas
  - Ángulos de Euler
  - Velocidad del centro de masas
  - Velocidad angular
  - Tensor de inercia
  - Masa

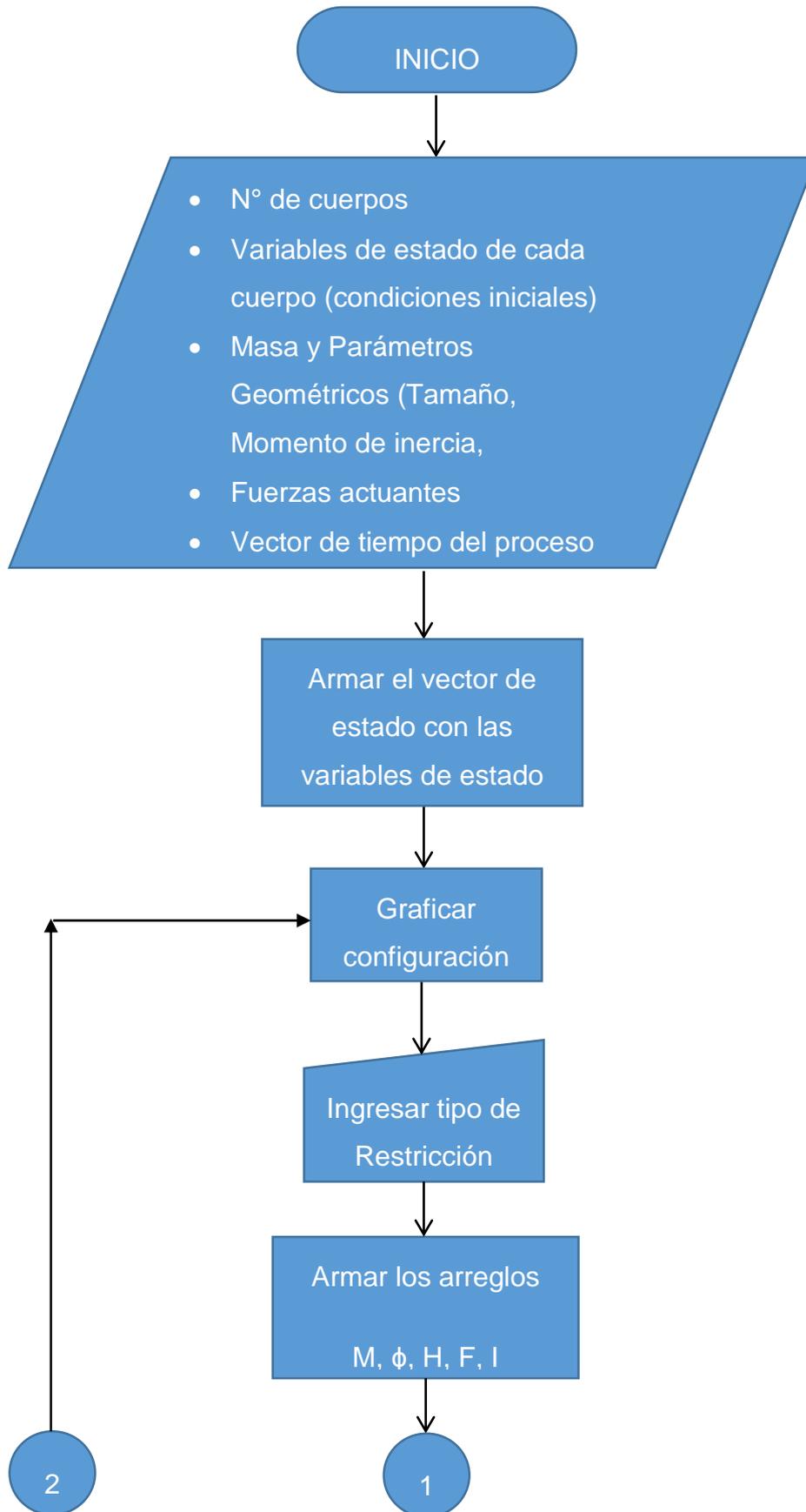
Se supone que las variables de estado ingresadas constituyen las condiciones iniciales del modelo.

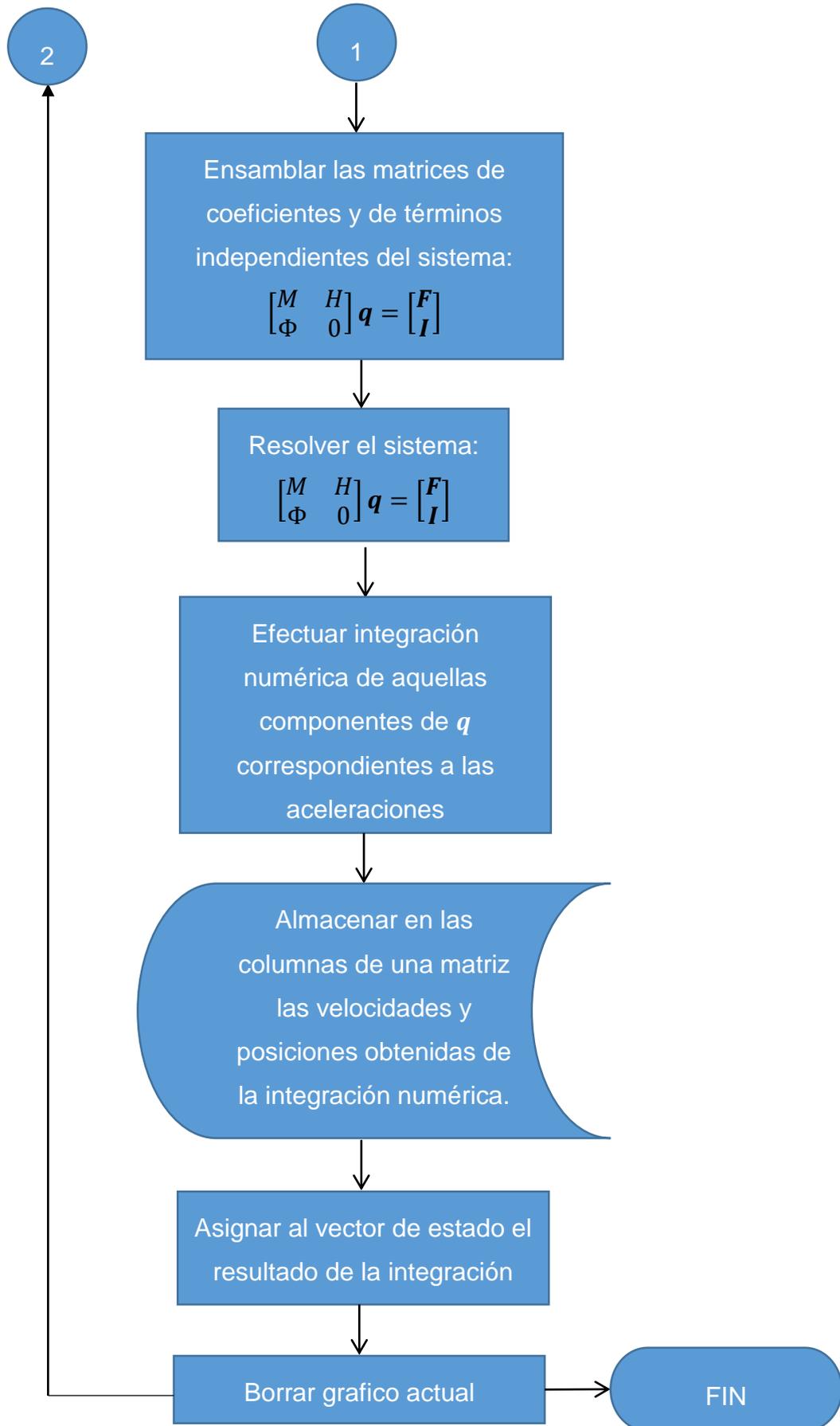
2. Introducción de restricciones: Aquí se pide al usuario que seleccione el tipo de restricción a incluir. El programa actualmente tiene cargada la clase "Rotula" dejando para actualizaciones posteriores la inclusión de nuevas clases.

Una vez seleccionada la restricción deben seleccionarse los sólidos que participaran de la misma y también ingresar las coordenadas locales respecto al centro de masa para ubicarla.

3. Confección de arreglos y ensamble de matrices: Se arriba a la ecuación de movimiento  $\begin{bmatrix} M & H \\ \Phi & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$  vista y analizada en el capítulo de modelización
4. Resolución del sistema de ecuaciones: Se resuelve para encontrar el vector de incógnitas  $\mathbf{q}$  para posteriormente efectuar integración numérica.
5. Integración Numérica: se integra el campo de aceleraciones encontrado para posteriormente arribar a las variables de estado en el instante de tiempo siguiente.
6. Graficación: En cada iteración se grafica la configuración encontrada por integración numérica tomando como condición inicial el resultado del proceso anterior.

En las páginas siguientes se presenta un diagrama esquemático de flujo del software desarrollado, mientras que en el apéndice se incluye el algoritmo completo.





En el proceso anterior, se ha empleado como método de integración el método de RUNGE-KUTTA de cuarto orden el cual se detalla a continuación:

### MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Los métodos de Runge-Kutta son los más utilizados para integrar una ecuación diferencial de primer orden ya que en comparación con otros métodos (por ejemplo el método de Euler) el orden de exactitud se incrementa mediante un método de integración de más alto orden. Esto implica resultados más exactos y además los errores se reducen con mayor rapidez al reducirse el paso de integración.

Estos métodos se basan en aproximar una función usando su expansión de serie de Taylor. De esta manera, un método de Runge-Kutta de primer orden usa una expansión de serie de Taylor de primer orden, un método de Runge-Kutta de segundo orden usa una expansión de serie de Taylor de segundo orden, etc.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y' = f(y, t); \quad y(0) = y_0$$

Si se desea calcular  $y_{n+1}$  dado un valor conocido de  $y_n$  es necesario integrar la ecuación anterior en el intervalo  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$  dando como resultado:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y, t) dt$$

En el algoritmo descrito líneas arriba se empleó Runge-Kutta de cuarto orden. Este método es exacto hasta el término de cuarto orden de la expansión de Taylor.

En el problema en cuestión es posible reducir el orden de la ecuación diferencial correspondiente a la segunda ley de Newton haciendo:

$$\begin{aligned} u' &= f(u, v, t) = \text{velocidad "v"} \\ v' &= g(u, v, t) = \text{aceleracion "a"} \end{aligned}$$

Sin ahondar en detalles y basándonos en la regla de 1/3 de Simpson, el método de Runge-Kutta de 4<sup>to</sup> orden puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h f(u_n, v_n, t_n) \\
 k_2 &= h f\left(u_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{m_1}{2}, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \\
 k_3 &= h f\left(u_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{m_2}{2}, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \\
 k_4 &= h f\left(u_n + k_3, v_n + \frac{m_3}{2}, t_{n+1}\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\
 m_1 &= h g(u_n, v_n, t_n) \\
 m_2 &= h g\left(u_n + \frac{k_1}{2}, v_n + \frac{m_1}{2}, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \\
 m_3 &= h g\left(u_n + \frac{k_2}{2}, v_n + \frac{m_2}{2}, t_{n+\frac{1}{2}}\right) \\
 m_4 &= h g\left(u_n + k_3, v_n + \frac{m_3}{2}, t_{n+1}\right) \\
 v_{n+1} &= v_n + \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6}
 \end{aligned}$$

En el apéndice se muestra el código con la implementación en Matlab de este método de integración.

## CONCLUSIÓN

Si bien se utilizó la clásica formulación de los ángulos de Euler, se encontraron ciertas dificultades computacionales. La matriz de los coeficientes ensamblada en la ecuación de movimiento resultaba ser una matriz singular para valores nulos del ángulo de nutación. Sin embargo este problema puede salvarse asignándole un valor muy pequeño a dicha variable; o caso contrario, asignarle un valor de  $\pi/2$  y modificar la vista de graficación en Matlab.

Si bien el código presentado actualmente permite solo el modelizado de barras con una sola condición de vínculo (articulación), el software queda abierto para la implementación de nuevos tipos o clases de vínculos y cuerpos de diversas geometrías.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Bosch Xavier O. Olivella - Carlos A. de Saracibar, 2002. *Mecanica de Medios Continuos para Ingenieros*. - Barcelona : Universitat Politecnica de Catalunya SL.

Chopra Anil K., 1967. Hydrodynamic Pressures on Dams During Earthquakes, *Journal of Enginnering Mechanics Division* Proceedings of the American Society of Civil Engineers.-

Inaudi Jose A., 2005 *Simplified Seismic Analysis of Concrete Gravity Dams* [Informe]. - Cordoba, Argentina [s.n.].

Prato Carlos A. Fluid-Structure Interaction Analysis in Seismic Analysis of Gravity Dams [Informe]. - Pavia : [s.n.], 2006.

# TABLA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema representativo de un mecanismo plano modelado de acuerdo a coordenadas naturales. ....	4
Figura 2: Esquema representativo de la relación entre coordenadas locales y globales.....	5
Figura 3: (a): Sistema de ejes primario. (b). Giro del cuerpo y sistema secundario respecto a Z.....	9
Figura 4: (a) Giro del cuerpo y sistema secundario respecto a su eje x en su posición final. (b) Giro del cuerpo respecto del sistema secundario y respecto al eje z secundario. ....	10
Figura 5: Esquema representativo del caso de una rotula en brazo robótico .....	12
Figura 6: Representacion del tensor de tensiones de un fluido en el plano de Mohr .....	19
Figura 7: Volumen de control considerado donde están aplicadas las fuerzas de superficie. ....	22
Figura 8: Modelo Presa-Reservorio .....	37
Figura 9: Función respuesta en frecuencia de aceleración a presión en la pared para desplazamiento uniforme y frecuencia $\omega = 0$ rad/s.....	43
Figura 10: Función respuesta en frecuencia de aceleración a presión en la pared para desplazamiento uniforme y frecuencia $\omega = 20$ rad/s.....	44
Figura 11: Función respuesta en frecuencia de aceleración a presión en la pared para desplazamiento uniforme y frecuencia $\omega = 80$ rad/s.....	44
Figura 12: Rigidez dinámica asociada a desplazamiento uniforme en la altura de la presa. ....	45

## BIBLIOGRAFIA

- Olivella X, Agelet de Saracibar Bosch C. Mecanica de medios continuos para ingenieros. Edicions UPC, S.L. Universitat Politecnica de Catalunya. Barcelona, España.
- Coulson C. Ondas. Exposicion matemática de los tipos más comunes de movimiento ondulatorio. Editorial DOSSAT, S.A. Madrid.
- Clark S. Dinamica de elementos continuos. Editorial Reverte S.A. España 1975.
- Roca Vila R, Juan Leon L. Vibraciones Mecanicas. Editorial Limusa
- Thomson W. Teoria de vibraciones. Aplicaciones. Editorial Prentice/Hall Internacional
- Jaca R, Prado R. Bavastri C. Caracterizacion Dinamica de un Sistema Embalse – Presa tipo Escollera. ENIEF-XII Congreso de Metodos Numericos y sus Aplicaciones. Mecanica Computacional Vol 20. Pp. 414-421.
- Shoichiro Nakamura. Analisis numérico y visualización grafica con Matlab. Editorial Prentice-Hall.
- Delores M. Etter. Solucion de problemas de ingeniería con Matlab. Segunda edición. Editorial Prentice-Hall.
- Bedford-Fowler. Mecanica para ingeniería. Dinamica. Quinta edición. Editorial Prentice-Hall.

# APENDICE