EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIII JORNADAS

VOLUMEN 9 (2003), Nº9

Víctor Rodríguez
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Una lógica del razonamiento consistente

*Carlos A. Oller**

1. Introducción: paraconsistencia y razonamiento consistente

Se ha señalado a menudo que hay una diferencia fundamental entre la manera en que los seres humanos manejan la información inconsistente y la manera en que esta es tratada en la mayoría de los sistemas lógicos. Siendo la inconsistencia en la información la norma más bien que la excepción, los seres humanos son bastante hábiles en razonar con la parte "segura" de una información que contiene inconsistencias locales. Esta manera de tratar la información inconsistente parece más eficiente que la estrategia de revisar la información para desembarazarse de las inconsistencias, dado que la verificación y el mantenimiento de la consistencia en una base de conocimiento grande puede ser un procedimiento muy costoso en términos de los recursos requeridos.

En la literatura lógica es posible encontrar diversos sistemas que permiten un razonamiento no-trivial en la presencia de inconsistencias. Estos sistemas paraconsistentes, a diferencia de la lógica clásica, no validan el principio de *ex contradictione quodlibet* (ECQ) de acuerdo con el cual cualquier fórmula es una consecuencia de una inconsistencia. La relación de inferencia $\vdash$ de estos sistemas, definida semánticamente o en términos de la teoría de la demostración, es tal que:

No para todo par de fórmulas A y B, $\{A, \neg A\} \vdash B$

Algunos de estos formalismos evitan este tipo de trivialización usando semánticas multivaluadas que proporcionan modelos para conjuntos inconsistentes de fórmulas. Las matrices trivalentes fuertes de Kleene (Kleene, 1952) y las matrices tetravalentes de Belnap (Belnap, 1972) han sido extensamente usadas con este propósito.

Sin embargo, la mayor parte de estos sistemas no tienen algunas propiedades que podrían resultar deseables para ciertas aplicaciones. Para ver esto, consideremos la noción de razonamiento consistente en presencia de inconsistencias introducida por J. Lin (Lin, 1996): intuitivamente, un sistema nos permite razonar consistentemente sobre información inconsistente si los ítems que son relevantes para la inconsistencia se neutralizan mutuamente y, por lo tanto, no pueden ser usados para apoyar ninguna conclusión. Por ejemplo, el conjunto:

$$\Gamma = \{p, \neg p \wedge q, q \rightarrow r\}$$

es inconsistente, pero p y r no están involucradas en la inconsistencia, mientras que p y $\neg p$ lo están. De manera que, aunque deberíamos ser capaces de inferir q y también r, ni p ni $\neg p$ deberían ser derivables de Γ. Por lo tanto, la relación de inferencia de un sistema de razonamiento consistente debería ser no sólo paraconsistente sino también inherentemente

* Universidad de Buenos Aires.

consistente (Wagner, 1996); una relación de inferencia es inherentemente consistente con respecto a la negación si se cumple el siguiente principio (CI):

Para todo conjunto de premisas Γ y para toda fórmula A, nunca se da que $\Gamma \vdash A$ y $\Gamma \vdash \neg A$

Un sistema lógico que cumpla con el principio (CI) deberá ser no-monótono, es decir no deberá valer para él el siguiente principio de monotonía para la relación de inferencia:

Para todo par de conjuntos de premisas Γ, Δ, tal que $\Gamma \subset \Delta$, y para toda fórmula A, si $\Gamma \vdash A$, entonces $\Delta \vdash A$. (M)

En efecto, en un sistema de este tipo queremos inferir q del conjunto clásicamente consistente de premisas:

$$\Gamma = \{p, p \rightarrow q\}$$

y bloquear la inferencia de q del conjunto inconsistente

$$\Delta = \{p, \neg p, p \rightarrow q\}$$

Sin embargo, como se verá en el próximo parágrafo, no todo sistema no-monótono y paraconsistente nos permite razonar consistentemente en la presencia de inconsistencias.

En este trabajo caracterizaremos semánticamente la relación de inferencia de un sistema no-monótono para el razonamiento consistente. Este sistema tiene, como se verá en parágrafo 3, una semántica trivalente basada en las matrices débiles de Kleene y la noción de Priest de *modelo mínimamente inconsistente* (Priest, 1991). En el siguiente parágrafo se presentarán las nociones presupuestas y algunos sistemas relacionados con la lógica del razonamiento consistente que se presentará en el parágrafo 3.

2. Sistemas multivaluados paraconsistentes

Como se señaló en la introducción de este trabajo, uno de los métodos para construir lógicas paraconsistentes consiste en utilizar una semántica multivaluada que invalide el principio ECQ proporcionándole modelos a los conjuntos de premisas inconsistentes.

Algunas de estas lógicas paraconsistentes utilizan las matrices trivalentes fuertes de Kleene:

$\neg$	
v	f
a	a
f	v

$\wedge$	v	a	f
v	v	a	f
a	a	a	f
f	f	f	f

$\vee$	v	a	f
v	v	v	v
a	v	a	a
f	v	a	f

$\rightarrow$	v	a	f
v	v	a	f
a	v	a	a
f	v	v	v

Así, por ejemplo, G. Priest (Priest, 1979) lee el tercer valor de verdad a (ambos) como *tanto verdadero como falso*, y lo toma como valor designado junto con v (verdadero). De esta manera, su lógica LP (*Logic of Paradox*) puede proporcionar modelos trivalentes para conjuntos de inconsistentes de fórmulas de la lógica proposicional, i.e. interpretaciones que asignan a todas las fórmulas de esos conjuntos v ó a . La relación de consecuencia semántica de LP se define de la siguiente manera: una fórmula es una consecuencia semántica de un conjunto de premisas en LP si y sólo si no hay ninguna interpretación que asigne un valor de verdad designado a todas las premisas y un valor no designado a la conclusión.

Usando las mismas matrices trivalentes es posible construir una variedad de esa lógica que es al mismo tiempo paraconsistente y no-monótona, el sistema mínimamente inconsistente LP. Para ello, es necesario definir la noción de modelo (de LP) mínimamente inconsistente y de consecuencia (de LP) mínimamente inconsistente. Un modelo trivalente de un conjunto de fórmulas será mínimamente inconsistente si asigna a tantas letras proposicionales como sea posible el valor de verdad v; formalmente:

Definición 2.1. (Modelo mínimamente inconsistente) Sea $\prec$ el siguiente orden parcial en el conjunto de valores de verdad, donde $t_1 \preccurlyeq t_2$ abrevia $t_2 \nprec t_1$: $v \prec b$, $f \prec b$, $v \preccurlyeq f$, $f \preccurlyeq v$. Una interpretación I_{LP} es al menos tan consistente como otra interpretación I_{LP}', en símbolos $I_{LP} \preccurlyeq I_{LP}'$, si y sólo si para cada letra proposicional p, $I_{LP}(p) \preccurlyeq I_{LP}'(p)$. Un modelo I_{LP} es un modelo mínimamente inconsistente de un conjunto de fórmulas Γ si y sólo si no hay ninguna interpretación I_{LP}' de Γ tal que I_{LP}' sea un modelo de Γ y $I_{LP}' \prec I_{LP}$.

Definición 2.2. (Consecuencia mínimamente inconsistente) Una fórmula A es una consecuencia mínimamente inconsistente de un conjunto de oraciones Γ en la lógica mínimamente inconsistente LP si y sólo si todo modelo mínimamente inconsistente I_{LP} de Γ es tal que $I_{LP}(A) = v$ o $I_{LP}(A) = a$

La lógica de Belnap, por su parte, tiene una semántica tetravaluada que asigna a las fórmulas atómicas del lenguaje un valor del conjunto de valores de verdad {v, f, a, n}, donde a (ambos) tiene la interpretación *tanto verdadero como falso* y n (ninguno) tiene la interpretación *ni verdadero ni falso*. La asignación de valores de verdad a las fórmulas moleculares se hace de acuerdo a las siguientes matrices:

$\neg$	
v	f
a	a
f	v
n	n

$\wedge$	v	a	f	n
v	v	a	f	n
a	a	a	f	f
f	f	f	f	f
n	n	f	f	n

$\vee$	v	a	f	n
v	v	v	v	v
a	v	a	a	v
f	v	a	f	n
n	v	v	n	n

Una fórmula B será una consecuencia semántica de una premisa A en la lógica de Belnap si y sólo si esta inferencia preserva la verdad *y* la no-falsedad, i.e. si y sólo si ninguna interpretación tetravaluada de este tipo hace verdadera a la premisa y asigna cualquiera de los otros tres valores de verdad a la conclusión, ni asigna *tanto verdadero como falso* o *ni verdadero ni falso* a la premisa y *falso* a la conclusión. El sistema resultante es paraconsistente y monótono.

Ni la lógica paraconsistente tetravalente de Belnap ni la lógica paraconsistente no-monótona de Priest son, sin embargo, lógicas del razonamiento consistente, ya que ninguna de ellas cumple con el principio (CI). Así, por ejemplo y como es fácil comprobar, la lógica de Belnap sanciona la inferencia de tanto p como $\neg p$ a partir de $\{p, \neg p\}$. En la lógica no-monótona mínimamente inconsistente LP, por su parte, tanto p como $\neg p$ pueden ser inferidos de $\{p \wedge \neg p\}$.

3. Una lógica del razonamiento consistente

En esta sección presentaré la semántica de una lógica del razonamiento consistente que recurre a las matrices trivalentes débiles de Kleene.

Sea L un lenguaje proposicional finitario y P el conjunto de sus letras proposicionales. Las siguientes definiciones caracterizan la noción de interpretación y de modelo para esta lógica:

Definición 1 ***(Interpretación de Kleene débil)*** Una interpretación trivalente de Kleene débil es una función I_{kd} de P al conjunto $T_3 = \{v, a, f\}$ de valores de verdad, que se extiende a todas las fórmulas de L de acuerdo a las siguientes tablas de verdad para las conectivas débiles de Kleene (también conocidas como *las conectivas internas de Bochvar*):

¬	
v	f
a	a
f	v

∧	v	a	f
v	v	a	f
a	a	a	a
f	f	a	f

∨	v	a	f
v	v	a	v
a	a	a	a
f	v	a	f

→	v	a	f
v	v	a	f
a	a	a	a
f	v	a	v

Definición 2 (Modelo de Kleene débil) Un modelo de Kleene débil de una fórmula A es una interpretación I_{kd} tal que $I_{kd}(A) = \text{v}$ ó $I_{kd}(A) = \text{a}$, y un modelo de Kleene débil de un conjunto de oraciones Γ es una interpretación I_{kd} tal que para toda oración A_i de Γ, $I_{kd}(A_i) = \text{v}$ ó $I_{kd}(A_i) = \text{a}$.

Conservando el mismo orden entre valores de verdad y adaptando la definición de Priest de modelo mínimamente inconsistente presentada en parágrafo anterior, es posible caracterizar ahora la relación de consecuencia semántica de nuestra lógica $\mathcal{L}_{kd}$.

Definición 3 (Consecuencia mínimamente inconsistente de Kleene débil) Una fórmula A es una consecuencia mínimamente inconsistente de un conjunto de oraciones Γ en la lógica de Kleene débil si y sólo si todo modelo mínimamente inconsistente I_{kd} de Γ es tal que $I_{kd}(A) = \text{v}$.

La lógica $\mathcal{L}_{kd}$ cuya relación de consecuencia caracteriza la anterior definición es, como la lógica mínimamente inconsistente LP de Priest, al mismo tiempo no-monótona y paraconsistente. Sin embargo, a diferencia del sistema de Priest es una lógica del razonamiento consistente que cumple con el principio CI. En efecto, resulta inmediato que:

Proposición 1 La relación de consecuencia $\vdash_{kd}$ de la lógica $\mathcal{L}_{kd}$ es no-monótona.

Del conjunto $\Gamma = \{p\}$ se infiere en $\mathcal{L}_{kd}$ p, pero p no se infiere en $\mathcal{L}_{kd}$ de $\Delta = \{p, \neg p\}$, aunque $\Gamma \subset \Delta$. Por lo tanto, no se cumple para $\mathcal{L}_{kd}$ el principio M de monotonía.

Proposición 2 La relación de consecuencia $\vdash_{kd}$ de la lógica $\mathcal{L}_{kd}$ es paraconsistente.

Del conjunto $\Delta = \{p, \neg p\}$ no se infiere en $\mathcal{L}_{kd}$ ni p ni $\neg p$. Por lo tanto, no se cumple para $\mathcal{L}_{kd}$ el principio ECQ.

Proposición 3 La relación de consecuencia $\vdash_{kd}$ de la lógica $\mathcal{L}_{kd}$ cumple con CI.

Supóngase que para algún conjunto de fórmulas Γ y alguna fórmula A, se da que $\Gamma \vdash_{kd} A$ y $\Gamma \vdash_{kd} \neg A$. De acuerdo a la definición de $\vdash_{kd}$ (Definición 3), esto implica que todo modelo mínimamente inconsistente I_{kd} de Γ es tal que tanto $I_{kd}(A) = \text{v}$ como $I_{kd}(\neg A) = \text{v}$, lo que es imposible por la tabla de verdad de la negación débil de Kleene. Por lo tanto, para ningún conjunto de premisas Γ y ninguna fórmula A, se da que $\Gamma \vdash_{kd} A$ y $\Gamma \vdash_{kd} \neg A$.

4. Referencias

Belnap Jr., N.D. (1977), "A Useful Four-valued Logic", en Dunn, J.M.; and Epstein, G. (eds.), *Modern Uses of Multiple-valued Logic*. Dordrecht. Reidel, pp. 8-37.

Kleene, S.C. (1952), *Introduction to metamathematics*. Amsterdam. North Holland Publishing Co.

Lin, J. (1996), "A semantics for reasoning consistently in the presence of inconsistency", *Artificial Intelligence*, 86, 75-95.

Priest, G. (1979), "Logic of Paradox", *Journal of Philosophical Logic*, 8, 219-241.

Priest, G. (1991), "Minimally Inconsistent LP", *Studia Logica*, 50, 321-331.

Wagner, G. (1996), "Belnap's Epistemic States and Negation-as-Failure", en Wansing, H. (ed.), *Negation – A Notion in Focus*. De Gruyter