

Conocimiento simbólico e infinito matemático

Javier Legris*

La naturaleza del infinito matemático fue tal vez el problema central en la fundamentación de la matemática a comienzos del siglo XX, y en el tratamiento de este problema el simbolismo tuvo una enorme importancia. El caso extremo lo constituyó el formalismo de Hilbert, al proponer la reconstrucción de teorías matemáticas en términos de lenguajes formales, en los cuales toda operación se entendía como manipulación simbólica. Las siguientes observaciones tienen por objetivo analizar la función del simbolismo en el conocimiento del infinito matemático. El análisis se basará en la idea de conocimiento simbólico, tal como fue desarrollada por Leibniz. Como marco de la exposición debe pensarse en las discusiones que luego de 1920 se dieron entre formalistas e intuicionistas y la situación de ambas escuelas posterior a los resultados de Gödel de 1931.

I

El concepto de *conocimiento simbólico* fue formulado por Gottfried Wilhelm Leibniz a partir de sus investigaciones sobre el álgebra, y lo empleó como un concepto fundamental en su teoría del conocimiento con el cual fundamentar sus ideas de cálculo, de una *ars combinatoria* y de una *characteristica universalis*. Los antecedentes de la teoría de los sistemas formales en estas ideas leibnizianas han sido ampliamente reconocidos y han sido objeto de estudio. Sin embargo, el concepto de conocimiento simbólico y su papel fundante no han ocupado la atención que se merecen.

Leibniz introdujo el concepto de conocimiento simbólico, *cogitatio symbolica*, al que también llamaba “conocimiento ciego,” *cogitatio caeca*, en varios pasajes de su extensa obra, siempre al referirse a las características del conocimiento humano. En sus *Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas*, de 1684, Leibniz hace notar la necesidad de contar con signos en lugar de las cosas para poder emplear procedimientos analíticos

“Por lo general y especialmente en un análisis de mayor extensión, no vemos, sin embargo, la naturaleza total de la cosa de un modo simultáneo sino que empleamos signos en lugar de las cosas cuya explicación, al meditar, solemos omitir por razones de economía, sabiendo o creyendo que lo poseemos.” (GP IV 423)

El quiliógono, o polígono de mil lados, le sirve a Leibniz como un ejemplo de tal situación. La representación de esta figura geométrica es imposible, por lo que se emplea directamente el signo que lo denota. En un escrito posterior, Leibniz afirma que “Todo razonamiento humano se lleva a cabo mediante algunos signos o caracteres” a causa de que una observación continua de los objetos resulta imposible (GP VII, 204).

En relación con esta manipulación de símbolos, Leibniz afirmaba:

“Suelo llamar a este tipo de pensamiento ciego o también simbólico: se lo utiliza no sólo en el álgebra sino en la aritmética, y casi en todo” (*ibid.*).

* Universidad de Buenos Aires. CONICET

Otro caso típico de conocimiento simbólico se encuentra en las operaciones con números grandes, donde la representación intuitiva del número no es posible, es decir, cuando el número no es *facticamente* construible (por ejemplo, la décima potencia de 10 elevada a la 10). De este modo, la función del conocimiento simbólico consiste en poder pensar (i.e., hacer inferencias) acerca de objetos no intuitivos o construibles.

Leibniz contraponía este tipo de conocimiento a la *intuición*, en el sentido cartesiano del término, es decir, como un conocimiento claro y distinto acerca de hechos simples o elementales y que para Leibniz es más propio de un ser supremo que de los seres humanos. Frente al método cartesiano que partía de un contacto directo del espíritu con el objeto de conocimiento, surgía la necesidad de un método indirecto de conocimiento en el que el contacto con el objeto de conocimiento se realiza a través de signos que lo representan. En este método, el nuevo conocimiento se adquiere a través de la *manipulación* de los signos considerados ahora como objetos, de manera independiente de su significado. Leibniz señalaba en un texto anterior (aproximadamente de 1671):

“Si alguna vez fuéramos conscientes de haber ordenado las palabras distinta e invariablemente, bastaría con emplear pensamientos ciegos para razonar con distinción” (A VII, ii, 481)

Con la introducción de este concepto se obtiene un importante salto metodológico: el conocimiento por medio de la manipulación de símbolos adquiere un lugar especialmente destacado en la estructura cognoscitiva humana. El conocimiento de las propiedades de una entidad se puede reducir al conocimiento de las propiedades de los símbolos que se emplean para representarla. Es por ello que los símbolos dejan de tener un papel simplemente auxiliar en el conocimiento, pasando a ser *constitutivos* de conocimiento (véase al respecto Dascal 1987). Por lo demás, representa un paso decisivo en la *mecanización* de los procedimientos inferenciales, en la medida en que se manipulan los símbolos entendidos como objetos.

Sybille Krämer ha propuesto caracterizar el conocimiento simbólico mediante los siguientes tres rasgos (Krämer 1992, pp. 224 s.).

- (1) Los sistemas de símbolos son empleados como una técnica, esto es, con un fin instrumental.
- (2) Los símbolos se vuelven independientes (“autárquicos”) de su significado.
- (3) Los objetos del conocimiento se constituyen de manera simbólica, es decir, los símbolos no sólo representan objetos, sino que los *producen*.

Krämer funda estas afirmaciones en diferentes pasajes de la obra de Leibniz. Para ella son estos tres rasgos los que hacen que el conocimiento simbólico lleve a reducir operaciones mentales o espirituales a operaciones entre signos considerados como objetos físicos.

Aquí importa destacar que, según el segundo rasgo característico, los mecanismos que gobiernan los sistemas simbólicos son independientes de la interpretación que se les dé. De hecho pueden recibir diferentes interpretaciones, la construcción del sistema puede anteceder a sus interpretaciones (tal como ocurre en el álgebra abstracta). De este modo, los signos del sistema son simplemente manipulados como objetos y la *corrección* de esta manipulación no depende del significado que adopten los símbolos. En este sentido, el conocimiento simbólico no emplea conceptos, sino símbolos.

Por lo demás, de acuerdo con el tercer rasgo del conocimiento simbólico, la posibilidad de una entidad está determinada por la construcción del sistema simbólico que lo representa, construcción entendida a la manera de una producción técnica. Una consecuencia destacable de esta característica es que los sistemas simbólicos permiten presentificar entidades "inimaginables," que no se pueden capturar por la intuición sensible, y operar con ellas. El concepto de una cosa se obtiene al encontrar un sistema de símbolos que constituya su representación. En apoyo de esta afirmación, Krámer recurre a pasajes del escrito de Leibniz "Qué es idea", de 1678, como el siguiente.

"Y lo que todas estas expresiones tienen en común es que sólo por la contemplación de los respectos de aquello que expresan podemos llegar al conocimiento de propiedades que corresponden a la cosa que va a expresarse" (GP VII, p. 263).

El concepto de conocimiento simbólico está vinculado con la idea de una *lingua characteristic*, pero sobre todo está en la base para los proyectos leibnizianos de obtener un *calculus ratiocinator* y, en general, una *mathesis universalis*, es decir una ciencia general. Sin embargo, su aplicación más directa y efectiva está en el álgebra abstracta: la construcción de sistemas algebraicos que pueden recibir diferentes interpretaciones (numéricas, geométricas, lógicas). Así, se entiende la influencia que ejerció este concepto en el desarrollo del álgebra de la lógica durante los siglos XVIII y XIX (Johann Heinrich Lambert, George Peacocke, George Boole, Ernst Schröder, entre otros), permeando incluso los orígenes de la teoría de modelos. En este sentido sirve para entender mejor la manera de entender la "lógica como cálculo," en oposición a la "lógica como lenguaje" (de acuerdo con la distinción propuesta por Jean van Heijenoort). Los sistemas formales con diferentes interpretaciones ilustran uno de los aspectos más fructíferos del conocimiento simbólico: la aplicación de las estructuras simbólicas a diferentes ámbitos. El conocimiento respecto de un dominio de objetos puede trasladarse a otros dominios que tienen la misma estructura (lo que se expresa usualmente como isomorfismo). Esto quiere decir que las propiedades que tienen los símbolos en el sistema, es decir, las propiedades *formales*, son *parte* del significado que se les asigne a los símbolos en cualquier interpretación.

II

Pero hay otros aspectos más problemáticos. Uno de ellos es el papel que juega el conocimiento simbólico en la comprensión del infinito matemático. Aquí se trata del caso de la teoría de números, de la aritmética y del continuo, es decir, tanto del infinito de los números naturales como del infinito de los reales (no considero aquí el caso del concepto más general de infinito que surge de la teoría de conjuntos). Una discusión clásica en filosofía de la matemática es la que se da en torno de si es posible un conocimiento directo e inmediato de las estructuras infinitas como las que supone la teoría de números o este conocimiento debe ser indirecto. El conocimiento simbólico sería una manera de responder de acuerdo con esta última alternativa y en este caso la pregunta sería: ¿Qué significa que el conocimiento respecto de dominios infinitos sea un conocimiento simbólico? ¿Qué debe presuponerse en este caso acerca de la naturaleza del infinito matemático?

La discusión acerca de la naturaleza del infinito matemático se revitalizó a comienzos del siglo XX en el contexto de las crisis de fundamentos de la matemática. Desde luego, la discusión no es neutral respecto de la naturaleza de las estructuras infinitas, sino que por el contrario se adoptaban diferentes posiciones ontológicas. Es sobre el trasfondo de esta dis-

cusión que pueden hallarse respuestas a la pregunta sobre el conocimiento simbólico del infinito.

Tómese el caso del principio de inducción completa, uno de los principios más básicos de la aritmética, que se puede expresar mediante el siguiente esquema.

$$\begin{array}{c} [P[x]] \\ \vdots \\ P[0] P[s(x)] \\ \hline P[t] \end{array}$$

¿Se está aquí frente a un principio, cuya verdad se justifica por intuición o es una regla puramente simbólica que puede aplicarse a cualquier numeral a fin de generalizar propiedades numéricas?

Desde los primeros escritos de L. E. J. Brouwer, el intuicionismo matemático consideró la serie de los números naturales como una construcción mental que hace un sujeto y en este sentido es que se la podía considerar intuitivamente dada, y esta construcción es la que equivale a la intuición. El principio de inducción completa está justificado por la misma construcción que hace el sujeto de los números naturales. En general, los intuicionistas veían en el simbolismo únicamente un medio de comunicación para expresar las construcciones que constituyen la matemática. Como afirmaba Arendt Heyting:

“El [el matemático intuicionista] usa el lenguaje, tanto el natural como el formalizado, únicamente con el fin de comunicar, es decir, para hacer reflexionar a otros o él mismo sobre sus propias ideas matemáticas. Este acompañamiento lingüístico no es una representación de la matemática, mucho menos es la matemática misma” (Heyting 1931, p. 106).

Obviamente, el intuicionismo no deja espacio para un conocimiento simbólico en la matemática.

III

A la idea de fundamentar el conocimiento del infinito en la intuición se le puede objetar su carácter subjetivo y esta objeción vale también para el caso de equiparar intuición con construcción en la medida en que se la piensa como construcción *mental*. Una objeción de este tipo es la que animaba a David Hilbert y su escuela. Hilbert buscaba esta fundamentación en el formalismo, en las propiedades de los sistemas formales, en tanto sistemas de fórmulas que se generan mediante reglas puramente combinatorias. De aquí surge el programa finitario de reconstrucción de la matemática que Hilbert postuló.

En una palabra, el programa de Hilbert se basaba en la manipulación simbólica y así se aproximó a la idea leibniziana de conocimiento simbólico (tal como ha hecho notar Lassalle Casanave en 2000).

En el programa de Hilbert aparece un primer aspecto esencial del conocimiento simbólico: la *abstracción formal*: el conocimiento se obtiene por medio de signos cuyo significado ha sido dejado de lado o, más aun, a los que ningún significado les ha sido asignado. Con su idea de una axiomática formal para las teorías matemáticas, Hilbert se proponía una abstracción de este tipo. La matemática se basaba en el método axiomático deductivo, pero con independencia de cualquier *contenido intuitivo*, es decir, del contenido matemático de

las expresiones que integran los sistemas axiomáticos. Estas expresiones no tienen significado y, por tanto, no es posible hablar de verdad de los axiomas

La justificación de la aplicación de este método era dada por la determinación de propiedades del sistema axiomático formal, en especial la *consistencia*, que garantizaba la utilidad del sistema formal. El concepto de consistencia se entendía en el sentido de *ausencia de contradicción*, de modo que no era necesario concebir el sistema de objetos en cuestión. Para decirlo en un lenguaje matemático: no era necesario concebir un *modelo* del sistema. En realidad, la función del simbolismo era para Hilbert metodológica y su finalidad pragmática, a saber, justificar la matemática a fin de aplicarla al conocimiento de la naturaleza. Sin embargo, la imposibilidad —probada por Gödel— de demostrar la consistencia de un sistema tan elemental como el de la aritmética con métodos finitarios (que son los métodos de manipulación simbólica) hace cuestionable a la idea de justificar un sistema simbólico mediante la demostración de su consistencia.

Otra perspectiva consiste en pensar el conocimiento simbólico como *construcción simbólica*, de modo que son los procedimientos empleados en la construcción de un sistema simbólico los que justifican su valor cognoscitivo. Esta perspectiva no es otra cosa que aplicar ideas del intuicionismo a la manipulación simbólica. La idea misma de cálculo presupone reglas aplicadas a símbolos. Estas reglas generan o construyen un sistema simbólico que representa una estructura, un objeto. Las reglas de construcción deben entenderse, entonces, en el mismo sentido de las reglas para construir figuras geométricas, como un círculo o un triángulo equilátero. En el contexto leibniziano esta construcción constituía una definición *real* del objeto, en la medida en que “incluye la generación de la cosa” (GP VII, 294). Por cierto, debe aclararse en qué sentido estas construcciones simbólicas son, al mismo tiempo, construcción de objetos. Los procesos que ejecuta el sistema simbólico indican la estructura de la entidad designada, o sea, su forma, de modo que es más bien esta estructura aquello que se conoce simbólicamente.

Otra manera de decir esto es que la construcción simbólica asegura la *posibilidad* de la entidad que el sistema simbólico representa. Dicho en una terminología clásica, la existencia del sistema simbólico sirve para definir un concepto; el plano simbólico se vuelve preeminente respecto del plano conceptual mismo. Desde otro ángulo, se puede decir que la construcción simbólica asegura la existencia de un *modelo*, y esto es así en virtud de las reglas empleadas para la construcción del sistema. Dicho de otro modo, las *reglas de construcción* prevalecen sobre la consistencia del sistema. Así pues, el “mayor número natural” (para tomar un ejemplo del mismo Leibniz) no es un objeto posible ya que no es representable, es decir, construible, en el sistema simbólico que corresponde a los números naturales.

Esta perspectiva puede radicalizarse aun más diciendo que los objetos de la matemática no son otra cosa que estas construcciones simbólicas. Así, el matemático Hermann Weyl, en trabajos de carácter filosófico publicados en 1949 y 1953 (“La ciencia como construcción simbólica del hombre” y “Sobre el simbolismo de la matemática y la física matemática” respectivamente), se refería a un conocimiento simbólico-constructivo, uno de cuyos rasgos principales se encontraba en el hecho de que

“Los signos no son producidos individualmente para lo actualmente dado en cada caso, sino que son extraídos de la reserva potencial de una multiplicidad ordenada

de signos abierta al infinito, producible de acuerdo con un procedimiento prefijado” (Weyl 1953, p. 223).

Es decir, en el simbolismo mismo está *potencialmente* la idea de infinito. Y es así que se le puede dar sentido a la idea de infinito en el contexto del conocimiento simbólico. Esta idea surge de la misma construcción simbólica.

Una tercera perspectiva se basa en la idea de *analogía*. Un primer sentido de analogía fue mencionado ya al hablar de isomorfismo estructural. No obstante, también hay un sentido menos obvio, más sustancial y gnoseológicamente más audaz, ligado a las características esenciales del conocimiento simbólico. Se trata de la analogía entre las propiedades de un sistema simbólico y las de la estructura teórica a investigar: de las propiedades que resultan de la manipulación combinatoria de los símbolos se hace una *extrapolación* a propiedades respecto de una estructura en la cual tal manipulación combinatoria no es posible.

Un uso particularmente interesante de este tipo de analogía en la fundamentación de la matemática resulta al pasar de procedimientos constructivos combinatorios a estructuras infinitas o, más específicamente, en el paso del plano combinatorio de los números naturales a la teoría de los números reales. Este uso de la analogía fue desarrollado por Paul Bernays en su conferencia “El platonismo en matemáticas”, ofrecida en 1934, en relación con el conjunto potencia de los naturales.

Bernays partía del hecho de que el *concepto* de número natural surge de la capacidad combinatoria humana (si bien existen números naturales –los números “grandes”– que no son construibles de manera efectiva, sino sólo “en principio”). Esta es la mera capacidad de construir secuencias de símbolos cualesquiera, barras por ejemplo, cuya identidad puede decidirse por simple inspección. Estas secuencias de barras representan los números naturales. En este punto se aproxima a la perspectiva que se acaba de caracterizar como construcción simbólica.

Ahora bien, no puede construirse un sistema simbólico que sirva para representar el conjunto potencia de los naturales, pues no se obtiene por procedimientos combinatorios. En este punto, viene en auxilio la analogía formal: tal como los procedimientos combinatorios permiten una construcción simbólica útil para representar los naturales, pueden concebirse procedimientos “casi combinatorios” que dan lugar al conjunto potencia. Un ejemplo de procedimiento “casi combinatorio” que da Bernays es el axioma de elección (véase Bernays 1934, p. 260). También puede pensarse aquí en las operaciones con cardinales infinitos, donde se procede de manera analógica con lo que sucede con los números finitos. Aquí puede hablarse de un valor *constitutivo* de la analogía.

Obviamente, aquí la analogía no está concebida primariamente como un isomorfismo entre sistema simbólico y estructura matemática, sino en una *extrapolación* de lo que ocurre en un sistema simbólico a una estructura que no es simbólicamente representable. Esto es coherente con el rasgo del conocimiento simbólico formulado por Leibniz de permitir la presentificación de objetos “inimaginables.” Ahora bien, surge naturalmente la cuestión de la existencia de la estructura que es representada de manera analógica. Esta cuestión ontológica requiere un análisis más cuidadoso. Parece haber aquí una forma de la *analogía entis* concebida en la metafísica. De todos modos, se la puede soslayar en la medida en que se decida limitar la discusión a los aspectos epistemológicos del conocimiento simbólico.

En suma, se acaba de esbozar tres perspectivas para justificar la idea de que el conocimiento del infinito matemático y sus propiedades se da a través del simbolismo. Estas se

basan respectivamente en los conceptos de consistencia, construcción y analogía. Las tres perspectivas son bien diferentes, aunque podrían complementarse. No es difícil advertir que estas tres perspectivas reproducen las tres concepciones clásicas en fundamentos de la matemática: formalismo, intuicionismo y platonismo. Este hecho lleva a sugerir que el concepto de conocimiento simbólico tiene cierta independencia de las concepciones que se pueda tener acerca de las entidades matemáticas, encerrando un núcleo metodológico.

Referencias bibliográficas

- Bernays, Paul (1934). "Sur le platonisme dans le mathématiques". *L'enseignement mathématique* 34 (1935), 52-69. Trad. inglesa de C. D. Parsons, "On Platonism in Mathematics", en *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, comp. por Paul Benacerraf & Hilary Putnam, 2da. ed., Cambridge et al. Cambridge University Press, 1983, pp. 258-271.
- Dascal, Marcelo (1987). *Leibniz. Language, Signs and Thoughts. A Collection of Essays*. Amsterdam & Philadelphia. John Benjamins.
- Krämer, Sybille (1992). "Symbolische Erkenntnis bei Leibniz". *Zeitschrift für philosophische Forschung* 46, 224-237.
- Lassalle Casanave, Abel (2000). "Formalismo, finitismo y conocimiento simbólico". *Cuadernos del Sur - Filosofía* 30, pp. 173-180.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (A). *Sämtliche Schriften und Briefe*. Editado por la Academia Alemana de las Ciencias en Berlín, Berlín, desde 1923.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (C). *Opusculs et fragments inédits de Leibniz*. Compilados por Louis Couturat. París. 1903. Reedición. Hildesheim, Olms, 1961.
- Leibniz, Gottfried Wilhelm (GP). *Die Philosophische Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*. Editados por Carl Immanuel Gerhardt, 7 vols., Berlín. Weidmannsche Buchhandlung, 1875-1890.
- Weyl, Hermann (1953). "Über den Symbolismus der Mathematik und mathematischen Physik". *Studium Generale* 6, pp. 219-228. Reproducido en *Gesammelte Abhandlungen* de Hermann Weyl, Berlín et al.: Springer, 1968, vol. IV, pp. 527-536.