EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XII JORNADAS

VOLUMEN 8 (2002), Nº8

Norma Horenstein
Leticia Minhot
Hernán Severgnini
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

El tiempo, la lógica y la matemática del mundo de las finanzas

*Jesús A. Zeballos / María Rosa R. de Estofán**

1. Introducción

En este trabajo nos proponemos analizar las interrelaciones epistemológicas entre las ciencias formales, las ciencias de las finanzas y las prácticas financieras Con él no pretendemos agotar el vastísimo y complejo universo de las finanzas Sólo queremos mostrar la ingerencia de la matemática pura, la lógica formal y una concepción formalista del tiempo en alguna pequeña, aunque relevante esfera de ese universo.

El mercado financiero en nuestro mundo globalizado ha alcanzado un alto nivel de complejización e hizo imprescindible una paralela evolución en los modelos teóricos para explicarlo. Enmarcado por los límites que fija el derecho, supone la confluencia de por lo menos dos disciplinas, la economía y la administración. Sumadas a éstas, utiliza dos ramas de la matemática aplicada, la estadística y la matemática financiera, que formalizan y ordenan la práctica real de las finanzas y, al mismo tiempo aportan los instrumentos para tomar decisiones y hacer pronósticos financieros. Una decisión financiera será tanto más científica y racional cuanto mayor sea la certeza con que se conozca en el tiempo futuro el valor de una suma de dinero, comparándolo con el monto que esa suma representa en el día de hoy.

Así vemos que las finanzas entrañan una determinada concepción del tiempo e introduce lo que en los mercados financieros se denomina "valor tiempo del dinero." Las finanzas, efectivamente, poseen una dimensión temporal La clave de su análisis consiste en que el presente sea comparable con el futuro o, para decirlo con más precisión, que el valor peso del futuro se confronte con el valor peso del presente.

El valor presente, distendido al tiempo futuro, involucra una predicción o una apuesta sobre el monto de la rentabilidad. Esta apuesta financiera, como cualquier apuesta, implica un cierto margen de riesgo. Cuando no se conoce la razón probable entre riesgo y rentabilidad, la apuesta del valor presente se impregna de incertidumbre Con estos tres elementos, riesgo, rentabilidad e incertidumbre, se juega el juego financiero.

Para minimizar este margen de incertidumbre, los financistas apelan a la lógica, a la estadística y a la matemática financiera Por medio de ellas, se analizan e interrelacionan los conceptos de capitalización, actualización, rentas, amortizaciones de préstamos, etc... obteniendo como una conclusión la operación financiera considerada óptima.

Desde el punto de vista de la lógica, todas las transacciones financieras se basan en una simple proposición elemental y pragmática: "el pago de un interés, como una recompensa o retorno por el uso de un capital, en un lapso de tiempo determinado, es una institución de la actual vida económica." Desde el punto de vista de la matemática, los modelos más relevantes de la teoría y la práctica financiera toman como base al *Binomio de Newton y las Series de Taylor y de Maclaurin* que, como se sabe, son conceptos de la matemática pura.

* Universidad Nacional de Tucumán.

2. Formalización de la Práctica Financiera

La matemática financiera es un amplio capítulo de la extensa rama de la matemática aplicada y exige a los profesionales de las finanzas conocimientos lógico-matemáticos previos. De hecho, los problemas financieros se resuelven a través de las siguientes instancias:

a) *Elaboración de un diagrama temporal.* Los procedimientos de la matemática financiera suponen construcciones racionales del tiempo real, expresadas en funciones matemáticas, cuya variable independiente es el tiempo.

b) *Ecuación de valor.* Una vez homogeneizado el tiempo de los vencimientos de prestaciones y contraprestaciones, se encuentran igualdades entre entradas y salidas que conforman las fluctuaciones del capital en el tiempo.

c) *Conclusiones financieras.* El sentido común, apoyado en la lógica, permitirá inferir la solución óptima que surja de la confrontación de los resultados obtenidos.

Las presentes reflexiones se refieren especialmente al tema que consideramos fundamental en la práctica financiera: *la capitalización*. De la cabal comprensión de este tema se deriva la intelección de los restantes.

2.1. Capitalización

Toda operación financiera tiende a un único fin, la *capitalización*, que es el valor final que denominamos *monto*, resultado de la transformación del *capital* inicial. Esta transformación del capital en monto se consigue por la interacción de dos factores: *tiempo* y *tasa de interés*.

Los economistas sintetizan la relación lógica entre tiempo e interés con un aforismo económico: "El interés es el costo del tiempo." En efecto, si consideramos el interés en función del tiempo, el capital va incrementándose en nuevos montos a cada infinitésimo de tiempo, lo cual supone un régimen de *capitalización continua*. Como en la práctica, resulta imposible registrar la secuencia infinita de la capitalización continua, se recurre a cálculos que reflejan la variación del capital inicial en un número finito de secciones temporales discretas. Este régimen constituye la denominada *capitalización discontinua*.

La capitalización se realiza bajo dos regímenes alternativos, que son el de *interés simple* y el de *interés compuesto*. En el primer régimen los intereses se calculan sobre el capital inicial, o sea que los intereses no producen interés; en tanto que en el segundo, también llamado acumulativo, se calcula sobre el monto obtenido en el período inmediato anterior.

2.1.1. Monto a Interés Simple

La fórmula financiera que representa el *monto a interés simple*, se obtiene por medio del *principio de inducción completa*. De tal inducción resulta la fórmula financiera que se expresa como $C_n = C_0 (1 + n\, i)$ donde C_n es el monto, C_0 es el capital inicial, n el tiempo e i la tasa de interés. Esta expresión para el monto tiene la forma de una *función lineal* donde la variable independiente es el tiempo n, cuya gráfica es una recta con ordenada al origen C_0 y la pendiente es la tasa de interés i ganada en un período, la que debe estar en sincronía con la variable independiente n.

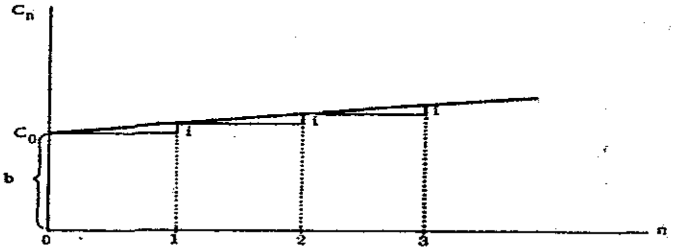

Gráfico N° 1

2.1.2. Monto a Interés Compuesto

Como se sabe, en cada período de tiempo convenido en una obligación se obtiene una capitalización, a la que se denominó "monto." Si, sobre este monto se calculan los intereses correspondientes al siguiente período, los intereses se capitalizan, obteniéndose un nuevo monto. En este caso el capital inicial no permanece constante todo el tiempo, y, se dice que la operación financiera es a interés compuesto.

La fórmula del *monto a interés compuesto*, $C_n = C_0 (1 + i)^n$, obtenida en base al *principio de inducción completa*, donde i es la tasa de interés por período de capitalización, nos muestra que los intereses devengados en cada período van creciendo en una proporción geométrica, cuya razón es $(1 + i)$. Esta expresión legaliforme, cuya forma es una *función exponencial del tiempo n*, es universalmente válida para cualquier par de valores sincrónicos de i y de n positivos, sea n entero o no.

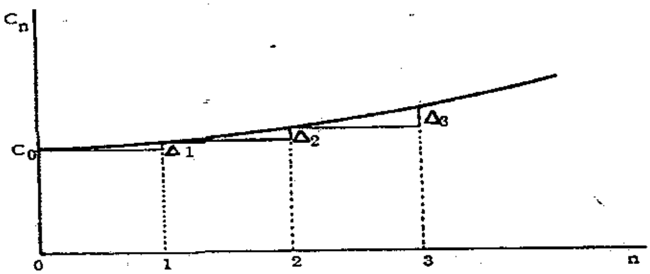

Gráfico N° 2

El cálculo de $(1 + i)^n$ para distintos valores de i y de n, esta predeterminado en tablas financieras de aceptación universal, siguiendo los cánones del teorema del Binomio de Newton, en caso de que n sea entero positivo. En caso contrario se recurre al desarrollo de la Serie de Maclaurin.

De modo análogo, para determinar el tiempo n en función del monto, con i fijo, se recurre a una función logarítmica que, como se sabe, es la inversa de la función exponencial.

Cuando se quiere analizar el comportamiento del monto en función de la tasa i, manteniendo fijo el factor tiempo, se recurre a: *derivadas de funciones, análisis de crecimiento y de concavidad.*

Gráfico N° 3

Las diferentes empresas, según sus propios intereses, recurren a tablas específicas para calcular. interés simple, interés compuesto, seguros de vida, créditos, rendimientos de bonos y obligaciones, etc Los criterios básicos para la construcción de cualquier tabla financiera son. alto grado de confiabilidad, mayor rapidez operacional y mínimo costo de los resultados.

Sin embargo, es preciso tener presente que ninguna tabla, sea esta financiera o de cualquier índole, es exhaustiva y contempla todos los infinitos casos posibles

Para los casos no contemplados en la tabla, se utiliza *el método de interpolación lineal* Hay inevitables errores que se cometen *por defecto o por exceso* al interpolar.

Si se quiere conocer el valor de *i* para un monto determinado se comete error por defecto, lo que se muestra en el siguiente gráfico

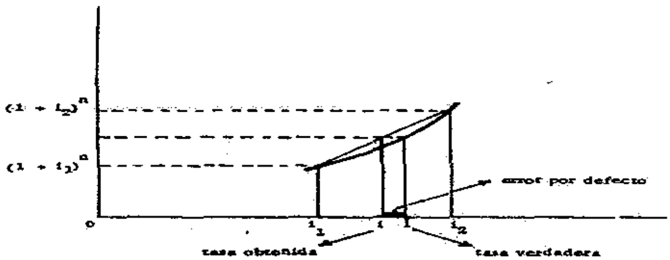

Gráfico N° 4

En cambio si se quiere conocer un valor de $(1 + i)^n$ cuando *i* es conocido pero no tabulado se comete error por exceso, según se aprecia en el siguiente gráfico

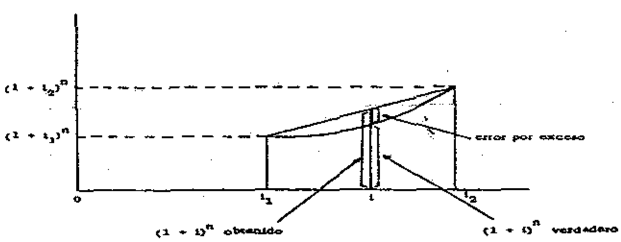

Gráfico N° 5

Idéntico procedimiento se realiza cuando se quiere analizar el comportamiento del monto en función del tiempo *n*, manteniendo fija la tasa *i*. Los errores *por defecto o por exceso* que se cometen al interpolar, son respectivamente, cuando se quiere conocer un determinado valor de n o cuando se quiere conocer un valor de $(1 + i)^n$ cuando i está tabulado y n está comprendido entre dos tabulados.

2.1.3. Comparación de Montos a Interés Simple y Compuesto

Ahora mostraremos cómo interactúan estos elementos en una confrontación formal del monto a interés simple con el monto a interés compuesto:

Frente a un capital inicial $C_0 = \$1$ comparamos el monto a interés simple $M_s = 1 + i\,n$ con el monto a interés compuesto $M_c = (1 + i)^n$

De la Serie de Maclaurin:

$$M_c = 1 + i\,n + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}\,i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,i^3 + \ldots}_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M_c = M_s + \alpha}$$

Según sea n, se pueden presentar tres casos:

1. Si $n < 1$ será $\alpha < 0$ entonces $\mathbf{M_c < M_s}$
2. Si $n = 1$ será $\alpha = 0$ entonces $\mathbf{M_c = M_s}$
3. Si $n > 1$ será $\alpha > 0$ entonces $\mathbf{M_c > M_s}$

De aquí se concluye que no siempre el monto a interés compuesto es mayor que a interés simple, pues si el tiempo es menor a un período el monto a interés simple es mayor.

Esto también se observa en el siguiente gráfico:

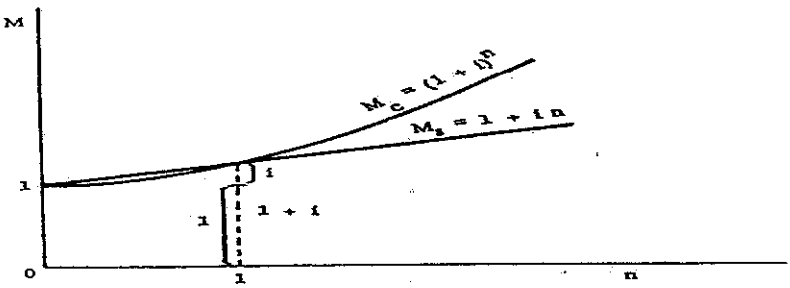

Gráfico N° 6

2.2. Determinación del Capital Inicial

Para determinar el capital inicial $C_0 = C_n\,(1+i)^{-n}$ cuando se conoce el monto, la tasa de interés y el tiempo, se utiliza la fórmula recíproca con los valores tabulados de $(1+i)^{-n}$. Aquí se ve cómo para distintos valores de i y de n, la tabla se fundamenta en un teorema de la matemática pura, la Serie de Maclaurin Si tomáramos como monto un valor nominal de \$1, la tabla nos proporciona el valor actual o efectivo correspondiente, descontando n períodos antes de su vencimiento con descuento compuesto a la tasa i

Gráfico Nº 7

Para encontrar datos de i, de n o de $(1 + i)^{-n}$, no registrados en la tabla se recurre a *interpolación lineal*. En todos los casos se comete errores por exceso.

2.3. Aplicaciones

Otros cálculos fundamentales en la práctica financiera son la *tasa media de inversión de varios capitales, monto en caso de tiempo fraccionario, monto con tasa variable*. Su determinación depende de una combinación entre procedimientos lógicos de derivación, interpretaciones formales de la naturaleza del tiempo y sus consecuencias en las diferentes tasas. Lo cual concluiría en una correcta aplicación de los instrumentos conceptuales matemáticos ya enunciados, combinaciones entre ellos y las variaciones en sus respectivas aplicaciones.

2.3.1. Cálculo del Monto en Tiempo Fraccionario

Ilustraremos el anterior aserto con un único caso: *el cálculo del monto en caso de tiempo fraccionario*. Supongamos que el tiempo sea representado por un lado como una parte entera y, por otro, una fraccionaria. Esta doble concepción temporal posibilita dos procedimientos lógico-matemáticos para calcular el monto:

1°- Combinación de ambos tipos de interés. Capitalización en la parte entera de tiempo a interés compuesto y en la fraccionaria a interés simple.

p/k

0 n' ⟷ n n'+1

C_0 ⟶ ⟷

a interés compuesto a int. simple

$n = n' + p/k$ siendo n' la parte entera y p/k la fracción.

Entonces $C_n = C_0\,(1 + i)^{n'}\,(1 + i\,\frac{p}{k})$, denominado monto comercial o bancario.

2°- Capitalización en la parte entera y en la fraccionaria a interés compuesto.

p/k

0 n' ⟷ n n'+1

C_0 ⟶ ⟷

a interés compuesto a int. simple

$C_n = C_0\,(1 + i)^{n'}\,(1 + i)^{p/k} = C_0\,(1 + i)^{n'+p/k} = C_0\,(1 + i)^{n}$, denominado monto teórico.

Desde un punto de vista financiero, el primer procedimiento es superior al segundo. Efectivamente, se observó que en las fracciones de período el monto a interés simple es mayor que a interés compuesto. Razón por la cual los bancos otorgan préstamos a interés simple, cuyas tasas son anuales pero recuperables en cuotas mensuales.

3. Conclusiones

Al hablar de los plazos de vencimientos de prestaciones y contraprestaciones, hablamos de un tiempo homogeneizado y especioso. Una herramienta fundamental para la homogeneización de ese tiempo especioso, es la elección de una *fecha focal*. Se entiende por ésta el momento coincidente en que se encontrarían, una vez transportados, todos los capitales diferidos temporalmente.

La *fecha focal*, considerada desde la perspectiva de la lógica, confiere al transporte de capitales una indicación temporal, la fecha, que puede ser considerada como un functor proposicional, cuyo argumento serían los diversos montos de capital. Como ella establece arbitrariamente inicios o finales de tiempos financieros, se sitúa ante una cantidad innumerable de fechas distintas. Por lo cual, una lógica de la datación, que adecua el functor temporal a un sistema de índices potencialmente infinitos, resulta especialmente útil para las finanzas. Al igual que el sistema de Rescher y Garson,[1] las ciencias de las finanzas han adoptado una axiomática lógica en la cual la fecha de origen no se ha fijado de una vez para siempre, sino que está correlacionada al incesante aquí y ahora, como en el caso de las expresiones "hace un mes" o "dentro de treinta días a partir de ahora." Por las dificultades que encierra la propiedad denominada por Rescher y Urquhart de la *transparencia*, de la cuasiconstante "ahora," dejamos aquí expresamente de lado su tratamiento. La datación o fecha focal financiera se expresaría en la terminología lógica como "existe un instante t tal que T_t (p)," con la referencia aclaratoria si ese instante es posterior o anterior al instante presente n (ahora).

Cabe destacar, empero, que esta naturaleza relativista y convencional del tiempo financiero reposa en una intuición pura de tipo kantiano. Al hilo de este tiempo no discreto, continuo e infinito, se realiza la capitalización continua. En este caso, la teoría matemática parte de la concepción de que la variación del capital se produce en función de la variación del tiempo, o sea $C_0 = f'(t)$.

Si llamamos Δt al incremento de tiempo, entonces el monto $C_n = f(t) + \Delta f(t)$ siendo $\Delta f(t)$ los intereses obtenidos en el período.

Si hacemos tender Δt a cero, tendremos los intereses referidos a un infinitésimo de tiempo, que matemáticamente se define:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t) \text{ que es la derivada de la función.}$$

$f'(t)$ representa los intereses obtenidos en un período en función de lo ganado, acumulándolo constantemente en cada infinitésimo de tiempo. Esta sería la base de la construcción matemática de todos los conceptos financieros desde el punto de vista continuo. Esta continuidad no alude solamente al discurrir del interés en el tiempo, sino que también es una característica temporal tanto de la actualización como de la capitalización.

Estimamos que el sistema minimal R construido por Rescher y Urquhart[2] puede captar las propiedades del tiempo, imprescindibles para una axiomatización lógica de la matemática financiera. En efecto, este sistema da cuenta, además de las propiedades de infinitud y continuidad, de la *transitividad y linealidad del tiempo*. Entendemos "transitividad" como la relación *anterioridad-posterioridad*, y "linealidad" como su sentido unidireccional. Esta linealidad se presenta como una característica temporal para nada contraintuitiva con respecto al pasado. Pero, en relación al futuro y para analizar predicciones en vista a probabilidades, se han elaborado lógicas del tiempo ramificado. La práctica financiera, sin embargo, se despliega en un tiempo intuitivamente lineal, tanto hacia el pasado como hacia el futuro. Se supone que si los instantes t y t' son ambos futuros (o pasados), entonces uno es anterior al otro, a menos que se confundan uno con otro.

En cuanto a la propiedad de *densidad* del tiempo, que nos permitiría colocar entre dos instantes de tiempo cualquiera un instante intermedio, subyace como una posibilidad teórica en la concepción temporal financiera. Pero en la práctica hay un límite a esta interpolación en la serie infinita de los números reales.

Queremos destacar, no obstante, que desde el puro interés teórico, la capitalización continua es lógicamente anterior, es decir, tiene mayor fuerza lógica, porque es el fundamento de la capitalización discontinua. Lo cual señala también que, para el tratamiento de los temas de matemática financiera es prioritario el manejo fluido de los conceptos de lógica y matemática puras. Sin embargo, por razones prácticas, se comienza habitualmente con el tratamiento discontinuo de estos conceptos financieros.

Por último, queremos destacar que los adelantos tecnológicos en Inteligencia Artificial parecieran hacer prescindibles los análisis teóricos aquí desarrollados. En efecto, ya son de uso común las máquinas de cálculos financieros, a las que los financistas recurren con creciente asiduidad. Pero, precisamente por ello, por esta automatización inconsciente del saber, consideramos que una tarea relevante de la epistemología y la reflexión filosófica consiste esencialmente en el análisis lógico y, en este caso, matemático, para una justificación racional de los procesos tecnológicos. Así como la matemática financiera formaliza y esclarece los procesos financieros, con este trabajo procuramos esclarecer los fundamentos de la matemática financiera por medio de los conceptos de la Lógica y del Análisis Matemático. Desde un punto de vista epistemológico, diríamos que hemos procedido como aquel que esclarece los contenidos de una caja negra mostrando todos sus procesos internos.

Las presentes reflexiones procuran aportar un cierto grado de certeza en el cambiante mundo de las finanzas, desde la lógica y la matemática. Estas, como ciencias formales son, para decirlo en términos kantianos, necesariamente verdaderas y universalmente válidas. Esta validez, con algunas restricciones, se extiende a las prácticas financieras.

La empiria, sin embargo, aporta un cierto grado de incertidumbre. Ya hemos adelantado alguna justificación de ello en párrafos anteriores: "El valor presente apostado al futuro involucra el monto de la rentabilidad con un cierto margen de riesgo. Cuando no se conoce la razón probable entre riesgo y rentabilidad, la apuesta del valor presente se impregna de incertidumbre. Con estos tres elementos, riesgo, rentabilidad e incertidumbre, se juega el juego financiero." En la medida en que las reglas de este juego estén dictadas desde la razón, como por ejemplo la cuantificación del riesgo por medio del cálculo probabilístico, las prácticas financieras se mueven razonablemente. Pero las finanzas son también hechuras del hombre, que no es pura razón. Los intereses humanos, no se agotan en el ámbito financiero. Existe un sentido prioritario del "*inter-esse*," como el "ser/estar adentro," donde radican también la irracionalidad y la pasión.

Notas

[1] Rescher N y Garson J (1968): "Topological Logic", *Journal of symbolic logic*, vol 33, nº4.

[2] Rescher N y Urquhart A (1971): *Temporal logic*, N York, Springer Verlag.

Bibliografía

Botbol, J (1982). *Curso General de Matemática Financiera* Buenos Aires: Ed Ergon.

González Galé, J (1973) *Matemáticas Financieras Intereses y Anualidades Ciertas* Buenos Aires. Ed Macchi.

Portus Govinden, L. (1975). *Matemáticas Financieras* Bogotá. Ed. McGraw-Hill.

Pascale, R. (1998). *Decisiones Financieras* Buenos Aires: Ed Macchi

Zeballos, J (1997). "Modelos Económicos y Formas de Vida" *Siglo XXI*, Tucumán.

Zeballos, J.; Estofán, M.R. y Gatti, M (1999) "La Lógica y la Matemática como Instrumentos Indispensables para las Ciencias Económicas" *Kipukamayo* 34, 24-25 Tucumán.

Zeballos, J y Estofán, M R. (1999) "Contextualización de las Ciencias Formales en las Ciencias Económicas" *V Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas* Buenos Aires.

Zeballos, J y Estofán, M R. (2000) "Formalización Económica". *Estudios de Epistemología* III, 255-265 Tucumán.

Zeballos, J., Estofán, M.R. y Del Negro, M P (2001). "Intersecciones Entre la Matemática y la Economía" *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14, 195-201 México-Panamá.

Rescher, N., y Garson, J (1968). "Topological Logic" *Journal of symbolic logic*, Vol. 33, nº4

Rescher, N.; y Urquhart, A. (1971). *Temporal logic* N. York. Springer Verlag.