EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XI JORNADAS

VOLUMEN 7 (2001), Nº 7

Ricardo Caracciolo
Diego Letzen
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons atribución NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina

Aproximación a un Análisis histórico-epistemológico de los Conocimientos Aritméticos: aportes para un Análisis Didáctico

*Silvia C. Etchegaray**

1. Planteo del problema

Es nuestro interés mostrar que en el campo de la Didáctica de la Matemática, el análisis histórico-epistemológico del conocimiento matemático es un paso previo necesario para el análisis didáctico, el cual permite elaborar criterios para la enseñanza. En efecto, con él es posible identificar los distintos sistemas de entidades que participan en el estudio del contenido matemático que nos ocupa, a saber: *Divisibilidad en el conjunto de los números enteros (Z)*. Mostraremos que este tipo de análisis pone en evidencia la complejidad de las nociones aritméticas, quedando al descubierto tanto la construcción de significados parciales de las nociones aritméticas elaborados en sus respectivos momentos, como la relativización de la noción de rigor matemático y su total dependencia de los dominios matemáticos involucrados. Asimismo con este análisis se tratará de dejar al descubierto los fenómenos de "ilusión de transparencia" en los procesos de enseñanza inducidos por la epistemología escolar, la cual generalmente no tiene en cuenta las condiciones de construcción de los saberes puestos en juego, ni las restricciones de sus significados en relación con su campo de aplicación y la institución en que se manifiestan.

2. Marco teórico de referencia

Desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo didáctico,[1] donde explícitamente se sitúa esta investigación, cada etapa histórica descripta caracteriza una determinada institución. En ellas se identifican diferentes elementos de significados de las nociones involucradas, lo que conlleva la realización de un *análisis ecológico de los saberes,* es decir analizar la interacción entre los saberes. Más específicamente se observa la *dinámica de los significados,* es decir la evolución de ellos a través del tiempo. Este análisis se realizará dentro de la *Teoría de los Significados Institucionales y Personales de los Objetos Matemáticos* de Godino y Batanero (1994-1998), según la cual la noción de significado es la herramienta conceptual fundamental para analizar la actividad matemática.

En este marco se hace necesario estudiar las nociones aritméticas de tal forma que su evolución histórica resulte significativa para la investigación en Didáctica de la Matemática. Ello a los efectos de lograr comprender las construcciones de las nociones en el sujeto, como así también poder decidir una transposición que no desnaturalice los significados de las nociones básicas de la Aritmética. Lo dicho implica dos tipos de acciones en esta investigación, a saber:

1) que la lectura de la historia no puede ser lineal, sino que se debe desarrollar enfatizando los problemas más significativos alrededor de los cuales ha evolucionado el conocimiento

* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto.

en cuestión. Ha sido considerado base de esa etapa el trabajo de "Historia de la Aritmética desde el método histórico-crítico" (Palau y otros, 1993), cuya fundamentación se sintetiza especialmente en la siguiente tesis: *los distintos períodos por los que pasa una ciencia son vistos como "etapas secuenciales" que no se suceden por azar, sino que cada una se ha hecho posible gracias a las precedentes y a su vez prepara las siguientes. En otras palabras, el desarrollo de una ciencia puede interpretarse como una sucesión de etapas que presentan niveles cognoscitivos característicos y en el que cada etapa es una* ***reorganización*** *de los conocimientos adquiridos en las anteriores* (Palau, 1993). Bajo esta perspectiva, el aparato conceptual que conforma cada período de la historia de una ciencia determina un modo particular de abordar sus problemas. Asimismo, en este marco el significado institucional de cada noción resulta solidario de los demás conceptos que conforman el conocimiento aritmético de cada período del desarrollo histórico, ya que la modificación de uno de ellos condiciona a los restantes.

2) que el análisis epistemológico se realizará identificando y describiendo los denominados *elementos estructurales del significado*, es decir los componentes del contenido matemático y emergentes de las prácticas que se ponen en juego en la actividad matemática y que posibilitan distintas dimensiones de análisis en las nociones matemáticas. Ellos son:

- *Ostensivos*: entidades lingüísticas/notacionales (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos)
- *Extensivos*: entidades que inducen actividades matemáticas como las situaciones problemas, aplicaciones, etc.
- *Actuativos*: modos de actuar ante situaciones o tareas, procedimientos, algoritmos, operaciones.
- *Validativos*: argumentaciones que permiten validar los procedimientos, ya sea con demostraciones, comprobaciones, justificaciones.
- *Intensivos*: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones como los conceptos, definiciones, teoremas.

Además de estas entidades primarias esta teoría contempla entidades secundarias, es decir combinaciones de las anteriores, las cuales han sido propuestas por Chevallard, Bosch y Gascón (1997) para analizar las distintas formas organizativas del saber matemático presentadas en las diversas instituciones, a saber: *tareas, técnicas, tecnologías y teorías*. Bajo este enfoque, *técnica* es una "manera de hacer" y el *estudio de las técnicas* permite estudiar las relaciones entre los objetos involucrados en toda actividad matemática. Por otra parte, *tecnología* es una agrupación de elementos de significado primarios que describen un campo de problemas y sus correspondientes técnicas de resolución y una *teoría* es la sistematización de los elementos intensionales y sus respectivas justificaciones (Godino, 1999).

Se concibe así una organización matemática dinámica, donde las técnicas generan nuevos problemas, los que desarrollan nuevas tecnologías que necesitan a su vez de la evolución de las técnicas conocidas y que avanzan hacia la construcción de Teorías englobantes. Esto permite generar un recurso de gran utilidad para comprender la génesis, el desarrollo y las funciones de los saberes matemáticos en las distintas instituciones. Siempre estos saberes están pensados en interrelación con otros objetos y "viviendo" en las distintas instituciones, ya sea de producción, de utilización o de enseñanza lo que posibilita rescatar ciertas cuestiones que sin esta mirada sistémica e institucional pasarían desapercibidas o consideradas irrelevantes. En efecto, se realiza un análisis epistemológico indicando los distintos elementos de significados institucionales asociados a sucesivas etapas correspondientes a la evolución histórica de la Aritmética. En el parágrafo siguiente ejemplificaremos en la historia de la divisibilidad en Z el funcionamiento del modelo que se acaba de describir. Se verá claramente cómo el pasar de una etapa o período a otro se determina por el cambio en los elementos de significado estructurales, lo cual provoca indefectiblemente un avance en una construcción nunca definitiva del significado de los conceptos aritméticos.

3. Diferentes elementos de significado asociados a la evolución histórica de las nociones elementales de la *aritmética*

La primera etapa correspondiente a los inicios de la época griega, fundamentalmente a la obra pitagórica, se caracteriza por situaciones problemáticas centradas en la búsqueda de relaciones entre ciertas categorías de números (pares, impares, poligonales), las cuales fueron justificadas empíricamente y por elementos de significado intensivo relacionados con la mística. En efecto, se trataba de demostrar que los números eran la esencia de todas las cosas, considerándolos asociados a las magnitudes y utilizando las proporciones como el medio de relación. Pese a no trabajar con los números enteros, el trabajo realizado con los números naturales se constituye en la génesis de la Divisibilidad en Z.. En esta etapa es posible identificar los siguientes elementos de significado:

- Búsqueda de relaciones entre los números enteros positivos de ciertas categorías: pares, impares, poligonales (elementos extensivos)
- Justificación de las relaciones encontradas mediante trabajo empírico, tales como el manipuleo de piedrecillas (elementos actuativos)
- Asignación a los números enteros positivos de ser la esencia de todas las cosas (elemento intensivo)
- Relación de los números y las magnitudes por medio de las proporciones. (elemento intensivo)

En la segunda etapa correspondiente a la época euclidiana hay cambios en todos los elementos de significado, tanto primarios o estructurales como secundarios. Se produce un importante cambio en los elementos ostensivos representado por un lenguaje geométrico que conlleva elementos actuativos y validativos diferentes a la etapa anterior. En este período se comparan los números separados de las magnitudes y se efectúan validaciones deductivas en el contexto geométrico, tratando de sistematizar el conocimiento existente. Es necesario destacar el enriquecimiento de elementos tecnológicos que se produce en esta época como resultado de esta nueva manera de realizar la actividad matemática. Por lo tanto los nuevos elementos de significados identificados son:

- Uso de un lenguaje geométrico para la formulación de propiedades y teoremas (elementos ostensivos)
- Separación entre el número considerado discreto y la magnitud considerada continua (elementos actuativos)
- Demostraciones deductivas de ciertos resultados dentro de un contexto geométrico. (elementos validativos)

- Construcción de nuevas clasificaciones de números enteros positivos (primos, perfectos, etc.), de un algoritmo para la extracción del M.C.D y de teoremas básicos de la Aritmética, tales como: si un primo divide a un producto divide alguno de los factores, y dado cualquier número primo siempre se puede encontrar otro mayor. (Colección de elementos intensivos)
- Agrupación de definiciones, proposiciones y elementos ostensivos en los "Elementos" de Euclides que sistematizan las prácticas realizadas hasta el momento. (Tecnología)

La tercera etapa se caracteriza por la resignificación de la dimensión extensiva de las nociones involucradas en la divisibilidad en Z, cuyo mayor exponente es Fermat (siglo XVII) que retoma la obra de Diofanto (siglo III d.C.) cuya mayor adquisición fue el concepto de *arithmo*. En efecto, se retorna al contexto aritmético dejado de lado en la etapa anterior, delimitando el dominio de la Aritmética al conjunto de los números enteros. Se produce además la incorporación de importantes elementos ostensivos como son los signos de las operaciones aritméticas elementales y el uso del sistema posicional en base 10. Esta relación dialéctica entre elementos intensivos y ostensivos diferentes al período precedente produce nuevos e importantes problemas para el posterior desarrollo de la Teoría de números enteros, como así también el primer método aritmético puro, a saber: el del descenso infinito. Hay explícitas producciones deductivas manifestadas en las demostraciones de teoremas, pero no se logra todavía la conformación de una teoría general de números. Específicamente los nuevos elementos de significados detectados en esta etapa son los siguientes.

- Introducción del *arithmo* en tanto génesis del símbolo, uso del sistema posicional de base 10 y de los signos "+" y "–" que conforman la base de una simbología escasa pero propiamente aritmética (colección de elementos ostensivos).
- Expresión de los problemas en un contexto aritmético (elementos actuativos)
- Primera delimitación del dominio de la Aritmética a los números enteros (elemento intensivo).
- Enunciación de problemas motivadores para el desarrollo de la Aritmética Moderna, tales como el Pequeño Teorema de Fermat y el Ultimo Teorema de Fermat, entre otros (colección de elementos extensivos).
- Agrupación de tareas y técnicas que permitieron la construcción de un método propio del dominio de la Aritmética como lo es el del descenso infinito (nueva tecnología).

El cuarto momento tiene como característica relevante la aparición del signo de congruencia (≡) como nuevo elemento ostensivo que genera una mirada diferente del hacer aritmético y permite la relación de las nociones de divisibilidad con el campo algebraico. Además aparece la primera sistematización de una Teoría de Números en un tratado especial: *Disquisitiones Arithmeticae* de F. Gauss publicada en 1901. En efecto, en este período se identificaron los siguientes nuevos elementos de significado que resignificaron la relación de divisibilidad en el conjunto de los números enteros:

- Uso de una nueva notación para indicar que un número divide a otro, a saber: m divide a x, si $x \equiv 0 \pmod{m}$ (elemento ostensivo)

- Definición de la noción de congruencia como una relación de equivalencia que origina una partición en los números enteros determinando un método de clasificación según los restos obtenidos al dividir por m. (elemento intensivo)
- La demostración de la Ley de reciprocidad cuadrática (elemento extensivo)
- Aplicación de la noción de congruencia como instrumento de resolución de ecuaciones algebraicas (elementos actuativos y validativos)
- Sistematización de los elementos intensivos, ostensivos y extensivos característicos de este Período organizados ahora en la Teoría de Números de Gauss: *Disquisitiones arithmeticae*. (Teoría).

Por último, la quinta etapa está representado por la generalización del Dominio de los números enteros a los enteros complejos de Gauss y de éstos a los números algebraicos, produciéndose así una nueva teoría englobante: la Teoría de Números Algebraicos. Esta ampliación de los números enteros a los enteros generalizados implica un cambio sustancial en la dimensión intensiva, ya que en los nuevos dominios de números se deben ahora redefinir nociones básicas de la divisibilidad en Z tal como los conceptos de número primo y unidades. Los nuevos elementos identificados son:

- Generalización de la Ley de reciprocidad cuadrática y tentativas de resolución del último Teorema de Fermat (colección de elementos extensivos)
- Generalización del Dominio de los números enteros a los enteros complejos de Gauss, y éstos a los números algebraicos (elementos intensivos)
- Redefinición de las nociones básicas y de las operaciones fundamentales de la divisibilidad respecto de los nuevos dominios (elementos validativos)
- Nuevos planteos acerca de qué nuevos campos satisfacen el Teorema Fundamental de la Aritmética o sea de cuáles de ellos admiten factorización única (elementos extensivos)
- Definición de Ideales y caracterización de Dominios de Factorización única (elementos intensivos).
- Sistematización de las tareas, técnicas, elementos intensivos, ostensivos y tecnología en la actual Teoría de Números Algebraicos (teoría)

4. Conclusión

Esperamos que el análisis epistemológico que se ha realizado en este trabajo haya permitido detectar los importantes cambios de elementos de significado en las nociones elementales de la Teoría de Números Enteros en diferentes instituciones de producción del conocimiento matemático. Las variadas situaciones problemáticas planteadas en los distintos períodos históricos, los diferentes elementos tecnológicos que han ido conformando la Teoría y los distintos elementos ostensivos generados a lo largo del tiempo, han permitido describir cinco períodos, donde se ha podido observar con claridad que cada etapa resignifica a la anterior. En otras palabras, se ha mostrado que el crecimiento de la dimensión extensiva produce paralelamente el crecimiento de la dimensión intensiva y de la ostensiva, lo que conlleva a nuevos elementos actuativos y validativos.

En síntesis, las resignificaciones de los conceptos que se han analizado evidencian la complejidad significativa de los mismos, es decir dejan al descubierto la "ilusión de transparencia" que la epistemología escolar presupone en la enseñanza. Mostrar tal complejidad y las interrelaciones que se producen entre los objetos de saber es el aporte que este tipo de análisis epistemológico brinda al análisis didáctico.

Nota

[1] La problemática de lo didáctico se asume en términos "institucionales", entendiendo a la noción de institución en sentido amplio siendo una institución tanto la escuela como un libro de texto, un alumno, una clase, etc.

Bibliografía

Artigue, M. (1990), "Epistemologie et Didactique", *Recherches en Didactique des Mathemathiques*, Vol. 10, pp. 241-86. Traducción: Bernardo Capdevielle, noviembre 1993.

Bell, E.T. (1985), *Historia de las Matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México.

Boyer, C.B. (1987), *Historia de la Matemática*, Madrid, Alianza.

Brousseau, G. (1986), *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*, traducción: Fa MAF, *Trabajos de Matemática*, Serie B.

Chevallard, Y. (1989), "Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel", *Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Chevallard, Y. (1991), *La Transposición Didáctica*, Aique.

Kline, M. (1972), *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press.

Gascón, J. (1998), "Evolución de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica", *Recherches en Didactique des Mathemathiques*, Vol. 18, nº 1, pp. 7-34.

Godino, J. (1993), "La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática", *Quadrante (Revista Teórica e de Investigacao)*, Vol. 2, Nº 2, pp. 69-79, Portugal.

Godino, J.; y Batanero, C.(1994), "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", *Recherches en Didactique des Mathemathiques*, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.

Godino, J.; y Batanero, C.(1998), "Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", ponencia presentada en el *IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM)*, Guimaraes. [La versión inglesa ha sido aceptada para su publicación en el libro *Semiotics Perspectives in Mathematics Educations*, en proceso de edición por M. Anderson, V. Cifarelli, A. Saenz-Ludlow y A. Vile.]

Palau, G.; Bastán, M; Colombo, S.; Etchegaray, S.; Marckiewicz, M.; Peparelli, S. (1993), "La Historia de la Aritmética desde el método histórico-crítico", trabajo leído en las *IV Jornadas de Epistemología e Historia de las Ciencias*, Universidad Nacional de Córdoba.

Palau, G. (1993), "Cambio científico y Epistemología Genética", en *Actas de las IV Jornadas de Epistemología e Historia de las Ciencias*, Universidad Nacional de Córdoba.

Piaget, J., y Garcia, R. (1984), *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*, Madrid, Siglo XXI.

Rotman, B. (1988), "Toward a Semiotics of Mathematics", *Semiótica* 72 (1/2), 1-35.

Ruiz Higueras, L. (1998), *La noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*, Universidad de Jaén.