EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XI JORNADAS

VOLUMEN 7 (2001), Nº 7

Ricardo Caracciolo
Diego Letzen
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Expresión de propiedades en un lenguaje formal

Gabriela Martín[*]

Introducción

El objetivo de este trabajo es realizar una descripción sintáctica de propiedades, según son consideradas por las distintas teorías existentes en el ámbito de la metafísica de propiedades. A este efecto, utilizamos ideas pertenecientes a la teoría de tropos, tal como se presenta en [1], al nominalismo mereológico [2], y a la caracterización de propiedades que hace Lewis en [3] tomando en cuenta la relación entre propiedad y semejanza. Una vez propuestas algunas descripciones posibles de propiedades en un modelo A de un lenguaje formal L, identificamos entre sí a aquellos individuos que comparten cierta propiedad P. Esto produce un nuevo universo formado por clases al cual llamamos *modelo cociente*. Intentamos algunas interpretaciones razonables que hacen de este nuevo universo un modelo de L, y finalmente utilizamos esta visión "cocientada" de un conjunto para obtener caracterizaciones nuevas de propiedades.

Describiendo propiedades en L

Sea A un modelo del lenguaje $L = R \cup F \cup C$ (como es habitual en lógica de primer orden, estos conjuntos son respectivamente el conjunto de símbolos de relación, el de símbolos de función, y el de símbolos de constantes). Supongamos que queremos describir la situación "a y b tienen una propiedad (P) en común". Sea entonces $F(x, y)$ una fórmula de L que expresa tal propiedad (podemos suponer, y no parece un requerimiento excesivo, ya que el lenguaje elegido es apropiado para hablar de los elementos del modelo y sus relaciones, con lo cual existe tal F). La situación mencionada entre a y b se puede escribir entonces:

$$A \models F[a, b].$$

Similarmente si la situación es "a tiene la propiedad P" habrá una fórmula $G(x)$ del lenguaje tal que expresa P y resulta

$$A \models G[a].$$

Ambas descripciones son equivalentes en el sentido que precisa la siguiente proposición:

Proposición

Sea A un modelo del lenguaje L, y sea $F(x, y)$ una fórmula tal que como relación en A es de equivalencia[1] entonces existe un lenguaje $L' = \{r_1, \dots, r_n\}$ tal que todas las relaciones son unarias y la relación (binaria) $F(x, y)$ es expresable en L' por medio de relaciones unarias, de modo que "a y b tienen la propiedad expresada por F en común" sii "a tiene una cierta propiedad P y b tiene la misma propiedad P", esto es:

$$A \models F[a, b] \Leftrightarrow A \models \vee_{i=1}^{n} r_i[a] \wedge r_i[b].$$

[*] Facultad de Matemáticas, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

Recíprocamente si A es un modelo de L cuyos elementos tienen propiedades posibles expresadas por las fórmulas $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$, *i.e.*:

$$A \models \forall x \vee_{i=1}^{n} \Phi_i(x),$$

y además

$$A \models \forall x\ \Phi_i(x) \rightarrow \neg\Phi_j(x)$$

para todos $i, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$, entonces existe un lenguaje $L = \{r^2\}$ tal que "a tiene la propiedad Φ_i y b tiene la propiedad Φ_i" sii "a y b tienen la propiedad r en común", *i.e.*:

$$A \models \vee_{i=1}^{n} \Phi_i[a] \wedge \Phi_i[b] \Leftrightarrow A \models r[a, b].$$

La prueba de la proposición anterior se obtiene a partir de la observación de que es posible pensar en propiedades, solo en tanto particiones del modelo. Esto nos acercaría a la noción mereológica de propiedad; cualquier asociación de individuos del modelo (recordemos que pensamos siempre en particiones finitas) conformaría una clase y definiría una *propiedad*. A saber: si $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es una partición y $L = \{r^2\}$ entonces A es modelo de L con la siguiente interpretación: $r^A(x, y)$ = "$x \in A_i$ *and* $y \in A_i$" para algún i. Podríamos decir entonces:

$$\text{"}a \text{ y } b \text{ tienen la propiedad } \Phi \text{ en común"} \Leftrightarrow A \models r[a, b].$$

Adoptemos ahora el punto de vista de la teoría de tropos; debemos considerar que una propiedad de un objeto dado es tan particular como el objeto mismo, y a este particular abstracto llamamos tropo.

Tener una propiedad significa tener un tropo, que dos objetos compartan una propiedad significa que sus tropos se asemejan exactamente. Según esto la semejanza de objetos se explica en términos de semejanza de otros entes: de sus tropos, y tiene por lo tanto status derivado. El único hecho que es irreducible a otros es la semejanza de tropos.

Tratemos de reflejar esta situación.

Sea A un universo de objetos (físicos o no), y sea B_A el universo de los tropos de cada elemento de A respecto de alguna propiedad P. Tal universo será de la forma: $B_A = \{c_a: a \in A\}$ y modelo del lenguaje $L = \{r^2\}$, donde $r^B(c_a, c_b)$ = "c_a y c_b son tropos semejantes". Entonces el hecho de que dos elementos a, b del universo A tengan la propiedad P en común se expresa como sigue:

$$\text{"}a \text{ y } b \text{ tienen } P \text{ en común" sii } B_A \models r[c_a, c_b].$$

Es interesante observar la imposibilidad de reducción sintáctica de esta descripción a las anteriores. Esto responde claramente al hecho (que caracteriza justamente a la teoría de tropos) de que la relación de semejanza está definida, no en el universo original, sino en el universo de tropos que él induce.

Descripción de modelos cociente

Pasemos ahora a considerar las clases asociadas a propiedades, concebidas como relaciones unarias, binarias, o particiones del universo. En vista de lo hecho hasta ahora utilizaremos indistintamente estas tres descripciones según convenga al contexto. Para esto definimos los siguientes conjuntos:

$$U_\Phi = \{a_i: i \in I\} \text{ tal que para todos } i, j \in I \text{ sucede } A \models \Phi(a_i, a_j),$$

donde Φ es una fórmula que describe cierta propiedad.

En un plano sintáctico ingenuo, tales conjuntos, considerados como clases, podrían ser llamados *universales*. La pregunta que surge naturalmente es en qué condiciones el conjunto $\{U^k_\Phi\}_{k\in K}$ con K un conjunto de índices que agota los posibles universales definidos por Φ, es una partición de A. Esta pregunta es de interés porque encierra la idea natural de que nunca un individuo es "parcialmente otro". Cuando identifiquemos en el universo original individuos poseedores de una propiedad compartida, los nuevos individuos serán clases, así, para que no suceda ninguna confusión de identidades, las clases no deben tener intersecciones no vacías.

Si Φ es una relación de equivalencia, es un hecho conocido que sus clases son en efecto una partición del universo. Usualmente la idea de identificación esta asociada a la de relación de equivalencia, sin embargo veremos que la pretensión de obtener un modelo cociente que preserve la estructura del universo original requerirá en algunos casos, más restricciones sobre Φ.

Cuando la propiedad Φ considerada sea una relación de equivalencia, podremos intentar definir un nuevo modelo A/Φ del lenguaje, a partir del original A, que llamaremos modelo cociente respecto a Φ, en el cual no distinguiremos entre elementos que compartan la propiedad Φ. Este nuevo universo podría ser pensado como un discurso con universales. Veamos un ejemplo de tal contracción.

Ejemplo

El conjunto $A = N \times N$ es modelo del lenguaje $L = \{r^2, \leq^2\}$ con las interpretaciones siguientes: $r^A((a, b), (c, d)) = v$ sii $ad = bc$ y $(a, b) \leq^A (c, d)$ sii $a \leq c$ y $b \leq d$, donde este último orden es el usual en los naturales. El conjunto que resulta de identificar en A a los pares que satisfacen la propiedad expresada por $\Phi((x, y), (z, w)) = r((x, y), (z, w))$, es claramente $A/\Phi = \{[(a, b)]: a/b \text{ es una fracción irreducible}\}$. Este nuevo conjunto también puede ser considerado un modelo de L con las interpretaciones $[(a, b)] \leq^{A/\Phi} [(c, d)]$ sii $(a', b') \leq^A (c', d')$ donde $r((a', b'), (a, b)) = v$, y (a', b') es el mínimo de su clase según el orden de A, $r((c', d'), (c, d)) = v$, y (c', d') es el mínimo de su clase según el orden de A y, naturalmente $r^{A/\Phi}((a, b), (c, d)) = \Delta^A$.

Dicho informalmente, en el conjunto de los pares ordenados de números naturales, hemos renunciado a distinguir entre aquellos que determinan fracciones equivalentes, como (2, 4), (1, 2) y (500, 1000). Notemos que esta identificación se realiza de hecho en situaciones de cálculo, pues a tales fines resulta conveniente (y por cierto, equivalente) tratar con fracciones irreducibles. La noción de menor o igual se conserva intuitivamente satisfactoria y finalmente, como era de esperar, renunciar a distinguir tiene su precio, y se refleja en el hecho de que la relación r ha quedado trivializada.

Veamos cómo interpretar en general, el lenguaje en un nuevo universo –el universo cociente– de manera que resulte semánticamente satisfactorio y formalmente correcto.

Resulta natural, la siguiente interpretación para las constantes: $c^{A/\Phi} = c^A/\Phi$. Esto es, la clase asociada a la constante c es la clase a la cual pertenece la interpretación de c en A.

Para la interpretación de las relaciones $r \in R$, intentemos:

$$r^{A/\Phi}(a_1/\Phi, \dots, a_n/\Phi) = r^A(a_1, \dots, a_n) \qquad (1)$$

(intuitivamente, clases están relacionadas por r si los representantes de cada una de ellas lo están).

Para que esta sea una buena definición deberíamos estar seguros de que

$$A \models \Phi(a_i, b_i),\ i = 1, \dots, n \Rightarrow r^A(a_1, \dots, a_n) = r^A(b_1, \dots, b_n), \qquad (2)$$

o sea, deberíamos estar seguros de que si elegimos cualquier representante de las clases a_i/Φ en vez de a_i en la definición (1), el resultado es el mismo. En otras palabras, Φ "preserva" las relaciones originales del modelo, Φ no une lo que las relaciones originales separan.

Otras posibilidades de definición para las relaciones, que no requieren de la restricción (2) son por ejemplo que las clases están relacionadas si existen elementos privilegiados en cada clase que están relacionados. Este sería el caso del ejemplo $N \times N$, donde nos hemos interesado para relacionar clases, solo en la relación entre los mínimos elementos de cada una. Formalmente:

Sea $F(x)$ una fórmula del lenguaje, entonces $r^{A/\Phi}(a_1/\Phi, \dots, a_n/\Phi) = v$ sii $r^A(b_1, \dots, b_n) = v$ con b_i el único tal que $b_i \in a_i/\Phi$ y $G(b_i)$, donde G claramente expresa el privilegio.

Si la clase contiene más de un elemento privilegiado podríamos definir como arriba pero cambiando "único" por "alguno". (Por falta de espacio no se dan ejemplos en los que estas definiciones son adecuadas.)

Propiedades específicas y triviales

Podemos dar ahora algunas caracterizaciones de propiedades tomando en consideración los cocientes que ellas determinan. Pensemos en una propiedad Φ sobre un conjunto como una caracterización de individuos, esto es, como algo que se afirma sobre ellos, o como un discriminador, si es que tomamos en cuenta las clases que ella determina. Mientras mayor sea el número de clases, mayor será la variedad de individuos distintos en el universo cociente que define Φ. Cuando una propiedad es común a muchos o a todos los elementos, la caracterización se ablanda, la propiedad es poco específica; no significa mucho decir de un sujeto, que la posee. En el caso extremo en que todos los individuos tienen la propiedad decimos que es *trivial*. Una forma equivalente de afirmar esto es:

Φ es *trivial* sii $A/\Phi = \{*\}$, (1)

en donde "*" representa la única clase en donde están todos los individuos del universo.

Es claro que la especificidad de una propiedad es proporcional a la cantidad de clases que determina, así, en el otro extremo, cuando una propiedad es tal que solo hay un individuo en cada clase, nos referiremos a ella como propiedad *específica*. En símbolos:

Φ es *específica* sii $A/\Phi = A$. (2)

Es fácil hallar ejemplos de estas clases de propiedades cuando el modelo es finito, por ejemplo, sea A un comité formado por n docentes representando cada uno a una facultad de cierta universidad. Si hacemos el cociente de este grupo por la propiedad "x es universitario", evidentemente obtenemos el modelo trivial y por lo tanto la propiedad es trivial, si lo hacemos por la propiedad "x e y pertenecen a la misma facultad" es claro que estamos en presencia de una propiedad específica del modelo. Obviamente, en todo modelo existe al menos una propiedad de este tipo, a saber:

$$\Phi(x, y) = (x = y);$$

esta propiedad expresa la identidad absoluta, no ya identidad respecto a cierta cualidad, y corresponde a la relación diagonal que en álgebra universal se llama habitualmente Δ. Sería interesante saber cuándo la identidad puede ser expresada por medio de combinaciones de relaciones propias del lenguaje, en particular, cuándo sucede:

$$\Delta = \bigcap_{i=1}^{m} r_i \text{ para ciertas relaciones } r_i,\ i = 1, \ldots, m, \text{ del lenguaje.} \qquad (3)$$

A un tal conjunto de relaciones llamaremos *conjunto exhaustivo*, ya que por medio de él se obtiene una caracterización completa de todo elemento del modelo (asumimos que Δ no está entre las r ya que es obvio que si ella participa en cualquier intersección, (3) se verifica automáticamente), en el sentido de que nos permite decidir la identidad o alteridad de dos elementos cualesquiera, o sea:

$$x \neq y \Leftrightarrow \neg\, r_i(x, y) \text{ para algún } i.$$

Podemos preguntarnos en que condiciones un universo es modelo de un lenguaje tal que podamos tener este tipo de especificidad. Si el universo es finito, esto es condición suficiente:

Proposición

Todo conjunto finito es modelo de un lenguaje que posee un conjunto exhaustivo de relaciones.

Al observar la prueba se ve que esta descripción es fácilmente realizable, pero completamente sintáctica, no tiene en cuenta las cualidades propias de los individuos del universo ni la estructura previa del conjunto. Ahora bien, al entrar en los dominios de la semántica, la situación es más difícil; aún considerando conjuntos finitos, a veces es imposible hallar relaciones entre los individuos tales que sean atingentes y al mismo tiempo adecuadas. Si, por ejemplo, queremos hacer un estudio formal de un conjunto finito de números, digamos $\{1, 3, 5, 7, 13, 15\}$, seguramente hallaremos relaciones que nos permitan lograr la especificidad. Esto sucede gracias a que el lenguaje de la aritmética es adecuado para decir casi todo acerca de números naturales. Consideremos en cambio la situación siguiente. Se desea realizar un estudio en el cual es necesario describir formalmente al conjunto de la totalidad de los alumnos de una escuela. Las relaciones que naturalmente aparecen en el lenguaje son, por ejemplo, pertenencia a cada curso, intervalo de calificaciones en cada materia, regularidad, etc. Es poco probable que se puedan agregar propiedades (naturales) que permitan individualizar a cada alumno. Sin embargo existen universos en los cuales existe alguna propiedad asociada a la estructura del conjunto por medio de la cual esto es posible, en ese caso, para tener la condición (2) basta tomar al conjunto como modelo del lenguaje con una relación binaria r, e interpretar a r como la propiedad en cuestión. Esta posibilidad es inherente al universo que se enfoca; a la calidad de la relación subyacente que es previa a toda descripción sintáctica. Así, dado un conjunto cualquiera A, y un lenguaje con una relación binaria r, no podemos pretender calificar la propiedad r^A de modo que resulte específica, ya que esto sería alterar la identidad del universo; no queremos forzar al "significado" a encajar en el signo, sino, en la medida de lo posible ajustar el signo a lo significado. Si el conjunto que nos interesa es infinito, se puede, de todos modos, tener una cantidad finita de relaciones que satisfagan la condición (3):

Ejemplo
Sea X un conjunto infinito tal que tiene un orden parcial que denotamos $<$, y el lenguaje $L = \{r_1, r_2\}$ (ambas relaciones binarias), X resulta modelo de L con las interpretaciones $r_1(x, y) = y < x$ y $r_2(x, y) = x < y$, se ve que entonces $r_1 \cap r_2 = \Delta$.

El estudio de la condición (3) en el caso general de un modelo cualquiera, sin símbolos de relación, ha sido muy fructífero. Si ésta se cumple, la satisfacción de identidades del modelo puede ser chequeada en un conjunto de modelos muy simples llamados *subdirectamente irreducibles*, que quedan determinados por las relaciones que intervienen en (3) (son exactamente el cociente del modelo por cada una de estas relaciones).

Propiedades abundantes y naturales

Finalmente, haciendo uso de algunas de las ideas presentadas, podemos hacer ciertas observaciones sobre la relación entre propiedades y semejanza.

Veamos la relación existente entre los siguientes hechos:

i) a y b son semejantes,

ii) a y b tienen una propiedad en común.

Lo primero que se observa es que la relación, en caso de que exista, no es un si y sólo si. Por ejemplo, si la propiedad que comparten los elementos a y b es

P = "x es blanco o x es negro"

es claro que no es necesariamente cierto que a y b son semejantes, ya que puede que a la satisfaga siendo blanco y b la satisfaga siendo negro. Así, es natural preguntarse: ¿existe una clasificación de las propiedades, tal que se pueda asegurar que si a y b tienen cierta clase de propiedad entonces son semejantes? Según Lewis, esta clasificación es: *propiedades abundantes o disyuntivas* y *propiedades escasas o naturales*. Veamos una descripción de tales clases.

Las propiedades naturales están asociadas a los poderes causales de las cosas, por ejemplo, estar caliente, ser redondo, ser vegetal o animal, etc. Es claro que estas son las propiedades asociadas a la semejanza. También es claro que su caracterización sólo puede ser semántica, no hay forma natural de distinguir este tipo propiedades a partir de alguna expresión exclusivamente sintáctica de ellas.

Las propiedades abundantes son las del tipo de la P enunciada arriba, propiedades que no nos ayudan a decidir si los individuos que la comparten son o no semejantes. Inspirándonos en este primer ejemplo digamos, entonces, que las propiedades abundantes sobre un conjunto A son las que están asociadas a particiones del conjunto de la forma $\{B, B^c\}$ con $B \subseteq A$; notar que así tendríamos caracterizada a la familia de todas las posibles propiedades abundantes sobre A como $\{\{B, B^c\}: B \subseteq A\}$ y por lo tanto cada una de ellas sería expresable en el lenguaje $L = \{r_1, r_2\}$, $r_1(a) = v$ sii $a \in B$ y $r_2(a) = v$ sii $a \in B^c$. Una propiedad del tipo que nos interesa sería entonces expresable por la fórmula: $\Phi(x) = r_1(x) \vee r_2(x)$.

En realidad la utilización del lenguaje L dado es un poco redundante; bastaría tomar $L' = \{r\}$ con r unaria y $r^A(x) = v$ sii $x \in B$, entonces simplemente $\Phi(x) = r(x) \vee \neg r(x)$ lo cual muestra que estamos en presencia de propiedades del tipo que habíamos llamado triviales. Nuestra definición de trivial sería una generalización de la noción de abundante (es claro que toda abundante es trivial). Ahora bien, si estamos interesados en la caracterización de propiedades que no guardan relación con la "semejanza" podríamos flexibilizar la presentación inicial y decir:

$\Phi(x)$ expresa una propiedad abundante sii es de la forma:

$$\Phi(x) = (r_1(x) \vee r_2(x)) \wedge \neg(r_1(x) \wedge r_2(x))$$

para r_1, r_2 relaciones unarias del lenguaje, de equivalencia en el modelo considerado.

O sea, no requerimos que la propiedad parta al modelo en dos clases, sino que la caracterización de los individuos que ella ofrece mantenga esa ambigüedad que impide afirmar una determinada cualidad del individuo.

Comentarios finales

Al enfrentarnos a un conjunto de individuos naturalmente reparamos en las particularidades y semejanzas de sus miembros, imponiéndole de este modo una estructura. Este ordenamiento responde a la experiencia del contacto entre el universo y el observador y está determinado (al menos parcialmente) por ella. La tarea de formalizarlo, por ejemplo por medio de un lenguaje finito, con un rigor aceptable, está afectada por la necesidad de "describir"; la necesidad de perder la menor cantidad de información posible en el pasaje entre universo y modelo. En este sentido el avance es lento, engorroso y a menudo insatisfactorio.

En el otro extremo, pensar en las posibles estructuras formales, estudiar las descripciones a nuestro alcance, olvidándonos entretanto que han de aplicarse luego a universos más o menos concretos, ha producido resultados enormemente poderosos y estéticamente espectaculares.

La posición intermedia que parece requerir el estudio de propiedades resulta bastante problemática. Como hemos visto en el presente trabajo, a menudo las necesidades semánticas le cierran el paso al desarrollo sintáctico, o el desarrollo de ideas rigurosas vacía de significado a las construcciones.

Resultaría muy interesante reflexionar sobre las posibilidades de realización de ese camino, como descripción apegada a la experiencia, y por otro lado –con seguridad más aventurado– sobre la arbitrariedad-convencionalidad de la imposición de estructura relacionada con propiedades y semejanza que mencionábamos al principio de estos comentarios.

Nota

[1] En general consideraremos que existe una cantidad finita de clases, ya que en los modelos que estudiaremos solo hay cantidades finitas de propiedades, y de clases determinadas por ellas, además esto nos permite mantenernos en lenguajes de primer orden.

Bibliografía

[1] Daly, Chris (1997), "Tropes", en D.H. Mellor y Alex Oliver (eds.), *Properties*, Oxford: Oxford University Press.

[2] Goodman, N. (1956), "A World of Individuals", en *The Problem of Universals, A Symposion*, Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, pp. 13-31.

[3] Lewis, David K. (1997), "New Work for a Theory of Universals", en Mellor y Oliver, A. (eds.), *Properties*, Oxford: Oxford University Press, pp. 188-218.