

Título: ESTUDIO DE RELACIONES ENTRE VARIABLES: PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Autores: Corellano I., Antonela; Krank A., Vanesa y Salgado E. Andrea

Profesora Supervisora de MOPE: Villarreal, Mónica

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 19-11-15



ESTUDIO DE RELACIONES ENTRE VARIABLES: PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA EN LA ESCUELA SECUNDARIA por Corellano, Antonela - Krank, Vanesa - Salgado, Andrea se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-SinDerivar 2.5 Argentina](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/arg/).

Clasificación:

97 Mathematical Education

Palabras Claves:

VARIABLES, relaciones entre variables, tabla, gráfico, regularidades, relación de proporcionalidad directa e inversa, proyecto de modelización.

Resumen:

El presente informe expone las prácticas realizadas en un colegio de la ciudad de Córdoba. Dichas prácticas se desarrollaron en tres divisiones (A, B y C) de primer año, donde se trabajó el contenido Relaciones entre Variables: Proporcionalidad Directa e Inversa. Para abordarlo, se propusieron tres instancias: primero se realizaron tres actividades de carácter exploratorio en las cuales los estudiantes reconocieron variables y relaciones entre ellas, construyeron tablas, buscaron regularidades y realizaron gráficos. En una segunda instancia se desarrollaron otras dos actividades a partir de las cuales surgieron las propiedades y las expresiones simbólicas de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Finalmente se realizó un proyecto de modelización en el que los alumnos debían buscar una situación de la vida real que represente una relación entre variables.

Índice de contenidos

1. Introducción	6
1.1. Características de la institución	6
1.2. Los cursos en los cuales se trabajó	6
1.3. Recursos en el aula	7
1.4. Estilo de trabajo en las diferentes clases	10
1.5. Estilo de trabajo en la clase de matemática	11
2. Diseño de la práctica e implementación en el aula	12
2.1. Planificación de la profesora	12
2.2. Contenidos desarrollados previo al inicio de prácticas	13
2.3. Tema de práctica en la Planificación Anual del curso	14
3. Planificación realizada por las practicantes	14
3.1. Objetivos generales	15
3.2. Selección de los contenidos	15
3.3. Participación de los alumnos	15
3.4. Organización del escenario áulico	15
3.5. Organización y secuenciación de los contenidos	16
3.6. Cronogramas implementados	17

3.7. Acerca de las actividades	27
3.7.1. Primera Etapa: Exploración del tema	27
3.7.1.1. Primera parte: Recolección de datos	35
3.7.1.2. Segunda parte: Trabajo en el aula	35
3.7.1.3. Tercera parte: Presentaciones orales	38
3.7.1.4. Cierre de las Actividades Exploratorias Iniciales	39
3.7.2. Segunda Etapa: Desarrollo del tema	42
3.7.2.1. Resolución de la primera actividad	45
3.7.2.2. Resolución de la segunda actividad	47
3.7.2.3. Cierre de la Guía de Actividades	49
3.7.3. Tercera Etapa: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática	51
3.7.3.1. Selección de tema, planteo de problema e identificación de variables	55
3.7.3.2. Recolección, organización y representación de datos	58
3.7.3.3. Para Finalizar	62
3.8. La evaluación	62
3.8.1. Actividades Exploratorias Iniciales	63
3.8.2. Proyecto de Modelización	67

3.8.3. Evaluación Sumativa	73
4. Problemática a analizar	82
4.1. Introducción	82
4.2. Relacionando nuestra experiencia con diversos autores	92
A modo de conclusión	95
5. Bibliografía	96
6. Anexos	97
6.1. Anexo 1	97
6.2. Anexo 2	103
6.3. Anexo 3	119

1. Introducción

A continuación se presenta una breve descripción de la institución educativa la cual permite comprender el trabajo desarrollado en las prácticas: características generales tales como la ubicación de la institución, su infraestructura, tipo de gestión, especialidad, entre otras y características más particulares que afectaron directamente a nuestras prácticas, tales como los cursos en los que se trabajó, los alumnos, los medios y recursos disponibles, el estilo de trabajo en el aula, etc.

1.1 Características de la institución

El establecimiento donde concurrimos para realizar las prácticas docentes es mixto, público de gestión privada y religioso. Se encuentra cercano a la terminal de ómnibus de la ciudad de Córdoba. Posee tres niveles: inicial, primario y secundario. Alumnos de estos tres niveles concurren simultáneamente en el edificio, cada uno en pabellones diferenciados. Actualmente asisten a la institución aproximadamente 1000 alumnos en el Nivel Primario y 700 en el Nivel Secundario.

El nivel secundario se divide en dos ciclos de 3 años de duración cada uno de ellos, el Ciclo Básico y el Ciclo Orientado. La especialidad del Ciclo Orientado es de Humanidades con orientación en Ciencias Sociales.

El colegio posee un uniforme específico para sus estudiantes que cuenta con diversas prendas tanto para varones como para mujeres y se caracteriza por tener los colores representativos del escudo de la institución.

Los espacios disponibles para las actividades escolares con los que cuenta el establecimiento son: aulas, laboratorio, gabinete de informática, biblioteca con sala de estudio, recepción, secretaría, dirección, sala de profesores, preceptorías, pileta de natación, gimnasio con cancha de básquet, vóley y hándbol, cancha de fútbol, comedor, cantina, patio, estacionamiento, capilla, entre otros.

Cada curso tiene asignada un aula específica. Las aulas son amplias, cuentan con varias ventanas, aire acondicionado frío-calor, un pizarrón, una pizarra digital interactiva, un escritorio para la profesora donde se localiza una computadora conectada a la pizarra, una red local la cual brinda acceso a Internet, WiFi, bancos individuales y amplios.

1.2 Los cursos en los cuales se trabajó

Las prácticas se realizaron en tres cursos de primer año, A, B y C, a cargo de una misma docente de la institución. 1°A tiene 27 alumnos (12 mujeres y 15 varones), 1°B tiene 26 alumnos (7 mujeres y 19 varones) y 1°C tiene 29 alumnos (13 mujeres y 16 varones).

Cada curso posee una carga horaria de 5 horas cátedra¹ semanales, distribuidas de la siguiente manera:

¹ Cada hora cátedra corresponde a 40 minutos reloj.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
7:30 a 8:10	1°B			1°C	
8:10 a 8:50	1°B			1°C	
8:50 a 9:25					1°B
9:40 a 10:20	1°A	1°C	1°A	1°C	1°A
10:20 a 11:00		1°C	1°A		1°A
11:15 a 11:55		1°B			
11:55 a 12:35		1°B			

Figura 1. Horarios.

La ubicación de los alumnos, en los bancos individuales, está a cargo de su correspondiente preceptor. En cuanto a la distribución de los bancos en el aula está dada de la siguiente manera (Figura 2):

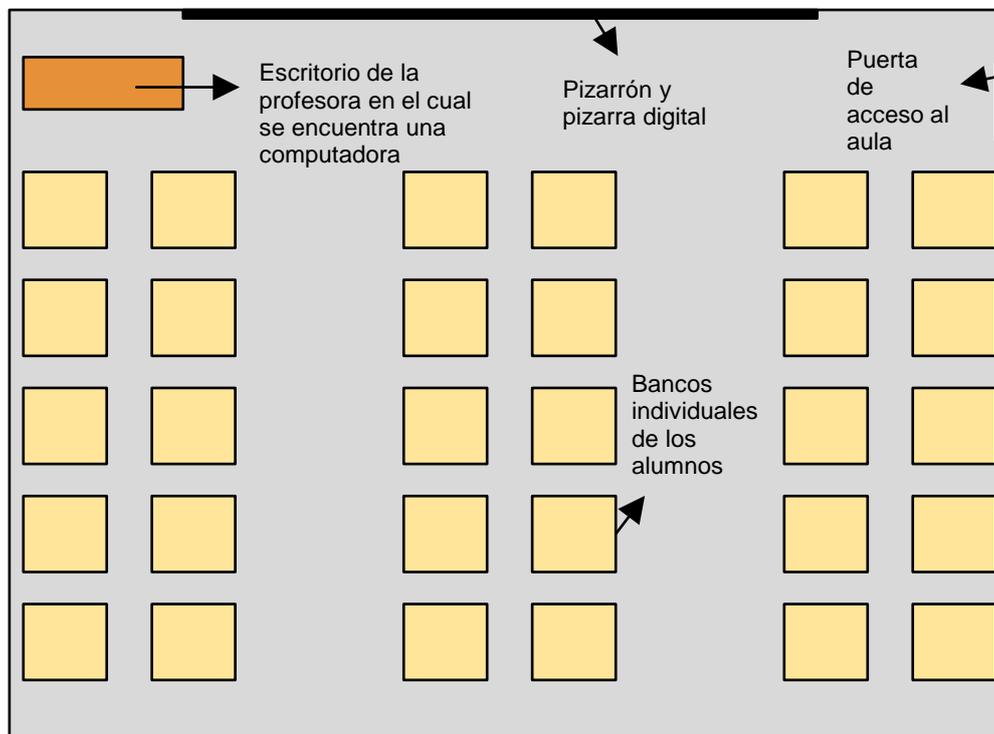


Figura 2. Esquema que representa las aulas donde se llevaron a cabo las prácticas.

1.3 Recursos en el aula

En el aula se puede trabajar con varios recursos tecnológicos provistos por la institución ya que ésta cuenta con acceso a Internet. Dentro de los más utilizados y relevantes encontramos la pizarra digital (ver Figura 3). Cada aula cuenta con una de ellas. Ésta

funciona como monitor de una computadora y se puede trabajar sobre ella con un lápiz propio de la pizarra o con el mouse de la computadora. La computadora, que se encuentra sobre el escritorio para el profesor, cuenta con editor de texto, hoja de cálculo, calculadora, entre otras aplicaciones; tiene instalados programas como GeoGebra, BlueStacks, entre otros; y también posee el software ActivInspire que ofrece numerosos recursos didácticos, por ejemplo permite escribir sobre los documentos que se encuentran en la pizarra, recortar parte de ellos, etc.

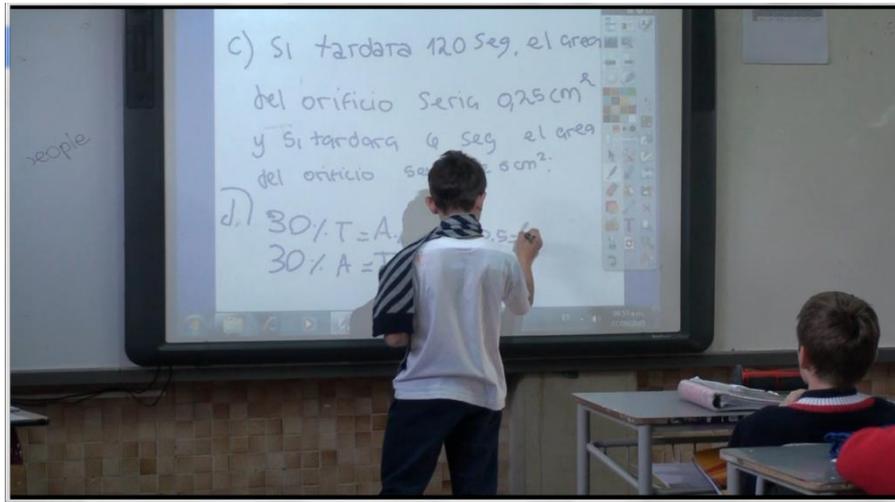


Figura 3. Pizarra digital y actividad donde se trabajó con el programa ActivInspire. Un alumno escribiendo las respuestas a la guía de actividades.

Cada estudiante, cuenta con una tablet personal que es obligatoria para asistir a clases (ver Figura 4). En ellas, generalmente, los alumnos cuentan con una carpeta para cada materia donde van guardando el material con el que han trabajado y/o producido en clases. Además, la institución posee una plataforma virtual (ver Figura 5) donde cada profesor cuenta con un aula virtual para cada curso donde puede subir actividades, material de estudio, notas de evaluaciones, etc.



Figura 4. Uso de tablet para realizar una actividad.

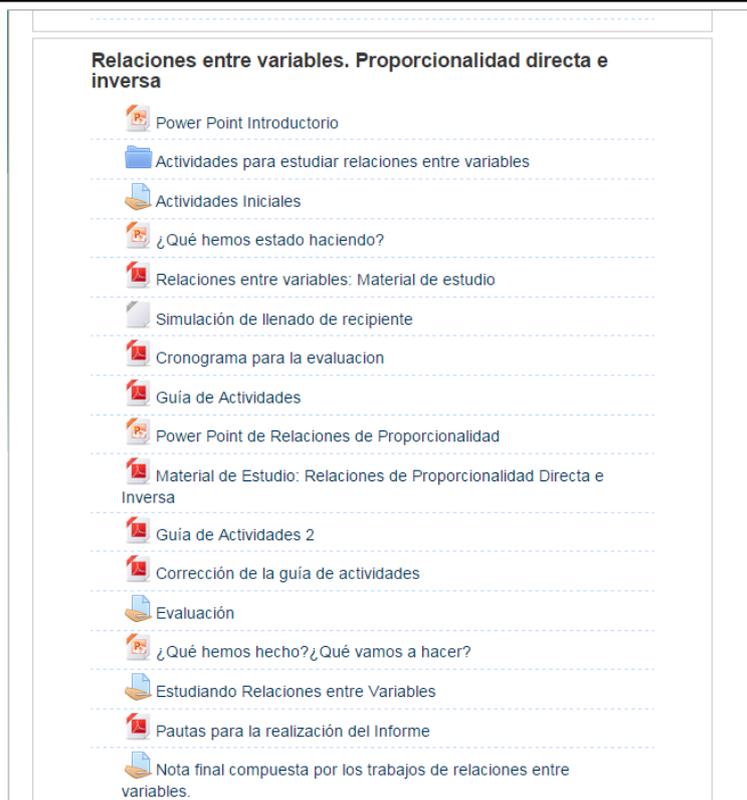


Figura 5. Espacio del aula virtual utilizado por las practicantes.

Aparte de los recursos antes mencionados, durante las clases también se emplean elementos didácticos tradicionales como la carpeta (ver Figura 6), donde los alumnos registran las actividades realizadas, las definiciones construidas, las tareas solicitadas, etc. También se hace uso del pizarrón (ver Figura 7), utilizado en forma paralela a la pizarra digital, sobre todo en momentos de corrección de una actividad donde varios alumnos pasan al frente, simultáneamente, a exponer sus producciones.



Figura 6. Alumno utilizando la carpeta.



Figura 7. Alumna completando una actividad en el pizarrón del aula utilizando lo escrito en la pizarra digital.

En Matemática no se utilizaba un libro de estudio, aunque en otras materias sí se empleaban, por ejemplo, en Lengua y Literatura, Física o Geografía.

1.4 Estilo de trabajo en las diferentes clases

Durante el período de observaciones hubo un día en que presenciamos una jornada completa. En ese día asistimos en 1°A a las clases de Ciudadanía y Participación, Tecnología, Biología y Lengua; en 1°B a las clases de Música, Geografía, Matemáticas y Gimnasia y en 1°C a las clases de Física, Tecnología, Matemáticas y Catequesis. Allí notamos que, en general, el uso de los recursos disponibles en la institución depende de la materia o profesor a cargo del curso. Las tablets, por ejemplo, no son empleadas con frecuencia en algunas materias, no así la pizarra digital que es de uso cotidiano. También observamos que la disciplina de los alumnos variaba según el profesor o profesora con el cual tenían clases. Esto estaba muy relacionado con el trato que había entre ambas partes, es decir, si bien la relación entre alumnos y profesores siempre fue de respeto mutuo, había profesores con los cuales el vínculo era más informal. Este hecho parecía fomentar que los alumnos estuvieran más dispersos, o no respondieran al primer llamado de atención del profesor.

En las clases de Gimnasia las actividades de los alumnos estaban separadas por sexo. Los varones hacían deportes como hándbol, básquet, etc. mientras que las mujeres realizaban gimnasia artística. Además, si bien no observamos la clase de Inglés, pudimos recabar el dato de que las clases se dividen en tres niveles, un nivel básico, uno medio y uno avanzado y reúne a estudiantes de diferentes cursos.

1.5 Estilo de trabajo en la clase de matemática

Las clases de matemática iniciaban siempre con un breve repaso de la clase anterior. Este repaso estaba a cargo de uno o varios estudiantes que explicaban lo realizado, mientras la docente les hacía preguntas sobre el tema. Posteriormente, la profesora les presentaba la actividad prevista para esa clase y los alumnos comenzaban a trabajar en ella.

Durante la realización de la tarea prevista para el día, la profesora circulaba por el curso, resolviendo dudas y corroborando que todos los alumnos realizaran las actividades correctamente. Luego, para la corrección de las mismas los estudiantes pasaban al frente a exponer sus resoluciones mientras la profesora realizaba preguntas para asegurarse de que el resto de sus compañeros entendieran. Cuando surgían otras maneras de resolver una misma actividad, los distintos procedimientos eran corroborados.

Generalmente las clases tenían un cierre, ya sea a partir de la corrección de actividades o de la presentación de un breve resumen de lo trabajado hasta el momento. Estos cierres eran realizados en su gran mayoría por los alumnos y eran muy fructíferos para ellos ya que, por ejemplo, en los momentos en que estos estaban haciendo trabajos diferenciados en grupos, las ideas y producciones de otros grupos podían fortalecer y dar nuevas ideas a sus compañeros.

Se pudo observar que la relación que tenía el docente con los alumnos y viceversa era de mutuo respeto, que las ideas o propuestas de los estudiantes siempre eran muy valoradas. También distinguimos que dentro de la metodología de trabajo, el diálogo y debate con los alumnos era una cuestión central, basada en que al desarrollar los contenidos, se debe tener en cuenta lo que los alumnos aportan, sus ideas, sus producciones, sus dudas, sus errores.

En las clases de matemática los recursos tecnológicos eran utilizados constantemente. Tanto la pizarra digital como la tablet, la plataforma virtual y el acceso a Internet eran medios que se emplearon como herramientas tanto para la realización de actividades y corrección de las mismas, así como para trabajar con ideas conceptuales respecto a determinados contenidos, como por ejemplo, un video explicativo acerca de cómo marcar un par ordenado en el plano cartesiano, que involucra nociones de lo que es un plano cartesiano y un par ordenado. El uso de Internet en el aula es muy racional por parte de los alumnos y les permite no solo consultar material previamente cargado en el aula virtual por la profesora o buscar información, sino también utilizar programas como Google Drive para realizar trabajos en conjunto con sus compañeros.

Los tiempos en el aula son aprovechados al máximo. Se trabaja durante toda la hora respetando los límites de horarios y el contenido que se presenta en cada clase está planificado de modo que pueda ser producido y comprendido por los estudiantes.

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula

Aquí se presentan tanto la planificación que realizó la profesora titular del curso como así también el tema que nos fue asignado en el periodo de las prácticas.

2.1 Planificación de la profesora

La Planificación Anual de la profesora titular de los cursos en que realizamos nuestras prácticas fue el pilar fundamental para la elaboración de nuestra planificación y guión conjetural y el desarrollo del mismo, para no dejar de lado la manera en que se venía trabajando en dichos cursos y así mantener una coherencia en las actividades que propusimos. Bajo estos aspectos planteamos actividades que nos permitan trabajar con relaciones entre variables, búsqueda de regularidades, representación de datos en tablas y gráficos, pasaje de una representación a otra y viceversa, comunicación y puesta en común de los resultados obtenidos para el resto del curso. Destacamos, entre las actitudes que se pretende desarrollar en los alumnos y que están propuestas en la planificación de la profesora, aquellas que creemos están asociadas a nuestras prácticas:

- Reconocer a la Matemática como ciencia que busca regularidades.
- Flexibilidad al explorar ideas matemáticas mediante la búsqueda de regularidades y al representarlas en distintos registros matemáticos.
- Reconocer las relaciones que establece la matemática y sus traducciones a distintas formas de representación.
- Inclinación a revisar y reflexionar sobre sus propias producciones y a comparar con las de sus compañeros, reconociendo en esto una forma importante de aprendizaje.

(Planificación Anual, 2015)

Los contenidos que los alumnos habían visto hasta el momento previo a nuestras prácticas (los mismos están detallados en la Sección **2.2.** fueron de gran ayuda para realizar la planificación pertinente.

Las expectativas generales planteadas en la Planificación Anual son:

- Buscar regularidades en situaciones donde, su principal contenido esté centrado en la matemática o en situaciones fuera de ella pero donde se pueda obtener alguna representación matemática de dicha situación.
- Representar las regularidades encontradas mediante distintos textos propios de la matemática (lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, gráficos, tablas, fórmulas, etc.) y traducir de una forma de representación en otra.
- Manipular las distintas representaciones obtenidas y controlar los cambios que esto significa en otra representación disponible.
- Identificar las representaciones óptimas para resolver un problema y seleccionar los recursos materiales apropiados (por ejemplo, papel y lápiz, calculadora, software, útiles de geometría, etc.), reconociéndolas como distintas formas de comunicar una idea a los otros.
- Aprovechar las distintas situaciones que se presenten para repasar, sintetizar y afianzar conceptos aprendidos en el nivel primario, especialmente dándoles mayor grado de formalidad propia de la matemática.

- Escribir pequeños textos argumentativos para justificar ideas o procesos de solución de un ejercicio o construcción, utilizando distintos tipos de lenguajes.
- Valorar la aplicación de la matemática en situaciones que surjan de otras materias y de la experiencia diaria.
- Reconocer el valor de la matemática como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana, y como un lenguaje particular.

(Planificación Anual, 2015)

Las metodologías que la docente propone implementar en los cursos son:

Modelización matemática como estrategia de enseñanza, experimentos matemáticos con tecnología, o sin ella, heurística, ejercitación de afianzamiento de procedimientos propios de la matemática, con recursos digitales a disposición, resolución de problemas, desarrollo de pequeños proyectos de modelización de temas elegidos por los alumnos y construcción de simulaciones usando Scratch u otro software pertinente.

(Planificación Anual, 2015)

Los contenidos se explicitan y agrupan en dos cuatrimestres, donde el primero posee cuatro unidades y el segundo cinco unidades. Cada una de las unidades posee un título y los contenidos que se desarrollarán dentro de la misma.

También se menciona dentro de la planificación de la profesora los principales procedimientos del quehacer matemático, las actitudes que se esperan desarrollar en el alumno, las principales actividades de los alumnos, la participación en actividades interdisciplinarias, los criterios de evaluación, y la bibliografía o webgrafía.

Luego de hacer un análisis comparativo entre la planificación de la docente y el Diseño Curricular para Matemática de la Provincia de Córdoba 2011 - 2015, podemos destacar que la planificación se adecua al mismo y que además, no se realizó ningún recorte significativo.

2.2 Contenidos desarrollados previo al inicio de las prácticas

Los contenidos trabajados en clase previo al inicio de nuestras prácticas fueron los correspondientes a la Unidad 1: Conjunto de los Números Naturales: el conjunto de los naturales, sus propiedades; la representación de los números naturales en la recta numérica utilizando métodos de construcción con instrumentos de geometría; orden en los números naturales; Unidad 2: Conjunto de los Números Enteros: resolución de inecuaciones; y Unidad 4: Conjunto de los Números Racionales Positivos: el conjunto de los números racionales como solución al problema de la medida; representación de los números racionales en la recta numérica; magnitud y proceso de medir.

Otros contenidos que los alumnos habían abordado eran: problemas de conteo; medición de longitudes, áreas y volúmenes usando unidades no convencionales o cm , cm^2 y cm^3 respectivamente, con apoyo del papel milimetrado y applets para la visualización de este proceso. Esto fue comunicado por la docente titular del curso para que tuviéramos conocimiento sobre lo visto con anterioridad a las prácticas.

Cabe aclarar que el desarrollo de estos contenidos, que en la planificación aparecen agrupados en diferentes unidades, no necesariamente siguió el orden lineal de la planificación.

Particularmente durante nuestro periodo de observaciones pudimos ver el desarrollo de los siguiente temas: las operaciones de suma y resta en los números naturales y en los números racionales positivos, representación de estas operaciones mediante vectores en la recta numérica y en GeoGebra; propiedades de la suma; ejercicios de cálculo de racionales (notación fraccionaria); operaciones de multiplicación y división tanto en el conjunto de los números naturales como de los racionales positivos; sistema de coordenadas en el plano cartesiano; ubicación y lectura de puntos en el plano cartesiano; expresiones analíticas de algunas trayectorias; animaciones en GeoGebra; elementos de programación para trabajar nociones de variable; asignación de valores a variables, cálculo numérico del contenido de variables y condicionales, usando la herramienta Tynker.

2.3 Tema de práctica en la Planificación Anual del curso

El tema que abordamos durante el periodo de las prácticas corresponde a la Unidad 3: Relaciones entre Variables, y a una parte de la Unidad 4: Conjunto de los Números Racionales Positivos. A continuación se mencionan los contenidos de ambas unidades.

Unidad 3: Relaciones entre variables

Búsqueda de regularidades entre dos variables; noción de variables; distintas representaciones de la representación entre dos variables: tabla, lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, esquemas; sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos en el plano, y para representar la relación entre dos variables; traducción de una forma de representación en otra y pequeños proyectos de estudio de fenómenos que involucren la búsqueda de una relación entre dos variables como respuesta a alguna pregunta que se plantean los alumnos.

Con respecto a la Unidad 4 se trabajó con los siguientes contenidos:

Estudio de algunas relaciones de proporcionalidad directa e inversa y la constante de proporcionalidad directa e inversa; La escala y el porcentaje desde la perspectiva de constante de proporcionalidad y como número racional.

3. Planificación realizada por las practicantes

A continuación daremos cuenta de la planificación que elaboramos para la realización de nuestras prácticas profesionales. Abordaremos los objetivos generales que nos planteamos, la selección de contenidos, la participación de los alumnos, la organización del escenario áulico, la organización y secuenciación de los contenidos, los cronogramas implementados en cada curso, las actividades y, finalmente, mostraremos la evaluación: tipos de evaluación, criterios tenidos en cuenta y resultados correspondientes.

Destacamos que para la elaboración de la planificación hemos tenido en cuenta, tal como ya lo señalamos antes, la Planificación Anual de la profesora a cargo de los cursos, el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba 2011 - 2015, el

Guión conjetural realizado por Aiassa, Alonso y Olmos (2014) y el trabajo final de MOPE (Metodología y Práctica de la Enseñanza) de Odetti (2013).

3.1 Objetivos Generales

Los objetivos que planteamos para nuestras prácticas fueron los siguientes:

- Reconocer diferentes tipos de relaciones entre variables a partir de la realización de actividades en diferentes contextos.
- Construir tablas para organizar la información obtenida por los alumnos en las actividades.
- Reconocer variables dependientes e independientes.
- Buscar regularidades que permitan establecer relaciones entre dos variables y la dependencia entre ellas.
- Escribir regularidades en lenguaje coloquial y simbólico.
- Determinar las propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa a través de la búsqueda de regularidades en tablas.
- Introducir las constantes de proporcionalidad para los casos de relaciones de proporcionalidad directa o inversa.
- Representar gráficamente relaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Representar simbólicamente relaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Identificar relaciones de proporcionalidad directa o inversa y distinguirlas de otro tipo de relación.
- Desarrollar un proyecto de modelización que proponga un problema de la vida real en el cual haya dos variables que se relacionen.

3.2 Selección de los contenidos

Los contenidos que se desarrollaron durante el periodo de nuestras prácticas fueron los asignados por la profesora titular del curso y corresponden a la Unidad 3 y una parte de la Unidad 4, según se encuentran detallados en la Sección **2.3**.

3.3 Participación de los alumnos

Durante el transcurso de nuestras prácticas la idea fue mantener un clima de trabajo tomando como eje central al alumno y colocándolo como productor de conocimientos, tal como lo venía realizando la docente titular en las tres divisiones.

Mediante la discusión y el debate, como estrategia principal, se proponía a los estudiantes tanto introducir, realizar y/o corregir las diversas actividades que se planteaban en la clase.

Esta metodología de trabajo fomentó una gran motivación por parte de los estudiantes, mostrando sus producciones y colaborando en la corrección de las diversas actividades para el resto del curso.

Los alumnos en general, tuvieron buena concentración, disciplina y disposición para el trabajo, tanto de manera individual como grupal.

3.4 Organización del escenario áulico

En nuestro periodo de prácticas las actividades realizadas fueron bastante variadas. Se realizaron tanto trabajos de manera individual como colectiva; el tamaño de los grupos fue

diverso dependiendo de la actividad que se llevara a cabo. Hubo casos en que los grupos fueron de dos alumnos y otros en que fueron de cuatro o cinco integrantes. Debido a la infraestructura del curso, esto fue fácilmente llevado a cabo ya que los bancos se podían desplazar sin mayores inconvenientes.

Además, para algunas actividades se dispuso del laboratorio, ya que en el mismo podíamos disponer de materiales que necesitábamos para implementarlas, tales como agua en el caso de las primeras actividades, o mecheros, probeta, balanza, termómetros, entre otros elementos que se utilizaron para los trabajos de modelización desarrollados hacia el final de las prácticas.

3.5 Organización y secuenciación de los contenidos

Los contenidos implementados en el período de las prácticas fueron organizados en tres grandes etapas que se desarrollaron a lo largo de seis semanas.

1. Primera etapa: Exploración del tema
2. Segunda etapa: Desarrollo del tema
3. Tercera etapa: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática

En la siguiente tabla se puede ver las actividades que se llevaron a cabo en cada una de las etapas, los contenidos que se trataron en estas actividades y el tiempo que se destinó a cada una de ellas.

Etapas	Tiempo destinado	Actividades realizadas	Contenidos asociados a cada actividad
Primera Etapa: Exploración del tema	5 clases de 80 minutos.	Actividades exploratorias iniciales: Realización de tres actividades simultáneas de naturaleza experimental para estudiar tres relaciones entre variables. Cada actividad era efectuada por dos grupos. 1) Circunferencias Animadas en GeoGebra: relación entre el radio de una circunferencia y la longitud de la misma; 2) Vaciado de botellas: relación entre el área de orificios realizados en la base de botellas de 500 cm ³ y el tiempo de vaciado de las mismas. 3) El Péndulo: relación entre la longitud del hilo de un péndulo y el tiempo que tarda el mismo en realizar una oscilación completa. Síntesis de cierre.	Noción de variable. Noción de relación entre variables. Construcción de tabla como forma de organización de datos. Relación entre dos variables como conjunto de pares ordenados. Búsqueda de regularidades. Gráfico que represente la relación entre las variables. Noción de variable dependiente e independiente.
Segunda Etapa:	5 clases de 80	Guía de Actividades: La primera actividad se desarrolla a	Propiedades y características de las relaciones de

<p>Desarrollo del tema</p>	<p>minutos.</p>	<p>partir de una tabla de datos que representa la relación estudiada en la actividad “Circunferencias Animadas en GeoGebra” que es una relación de proporcionalidad directa. La segunda actividad se desarrolla a partir de una tabla de datos que representa de manera ideal la relación estudiada en la actividad “Vaciado de Botellas”, que es una relación de proporcionalidad inversa. En ambas actividades se trabaja inicialmente en la determinación de valores que no figuran en la tabla y cuyo cálculo podrá realizarse poniendo en juego las propiedades que caracterizan cada una de las relaciones involucradas. La búsqueda de regularidades en las tablas conduce a la determinación de las propiedades y las expresiones simbólicas asociadas a cada una de las relaciones estudiadas. Síntesis de cierre.</p>	<p>proporcionalidad directa e inversa Constantes de proporcionalidad directa e inversa. Expresiones simbólicas y gráficos de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa.</p>
<p>Tercera Etapa: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática</p>	<p>3 clases de 80 minutos.</p>	<p>Proyecto de modelización: Los alumnos eligen una situación del mundo real que represente una relación entre dos variables y se plantean preguntas. Seleccionan variables a relacionar, descartan o fijan otras, buscan información, recolectan datos, los organizan y representan en tablas o gráficos. Buscan regularidades. Estudian dependencia entre variables. Encuentran fórmulas que representen la relación. Síntesis de cierre</p>	<p>Proceso de modelización matemática en el cual se ponen en juego todos los contenidos abordados en las etapas anteriores.</p>

3.6 Cronogramas implementados

A continuación se muestran los cronogramas que implementamos en cada curso. Cada uno muestra cómo se fueron administrando las actividades en cada clase, teniendo en cuenta días feriados, actos u otras actividades de la institución que afectaron nuestra planificación original.

Para facilitar la organización de las clases decidimos dividir las mismas en “momentos” de 40 minutos de duración. Así, dependiendo de los cursos, algunas clases constarían de un momento, otras de dos y otras, como en el caso de 1°C, de tres momentos.

En las tablas que mostramos a continuación se puede ver la distribución de las actividades por semanas, etapas, clases y momentos para cada uno de los cursos.

La Tabla 1 muestra el cronograma que se implementó en el curso 1°A

Semanas	Etapas	Clases	Momentos	Actividades	
PRIMERA SEMANA	PRIMERA ETAPA: Exploración del tema	Clase 1 12/08	Momento 1	Presentación, usando un Power Point, de las Actividades Exploratorias Iniciales (AEI) sobre estudio de relaciones entre variables a ser realizadas en el laboratorio. Realización de la 1 ^{ra} Parte de las AEI: recolección de datos en el laboratorio.	
			Momento 2	Realización de la 1 ^{ra} Parte de las AEI: recolección de datos en el laboratorio.	
		Clase 2 14/08	Momento 3	Realización de la 2 ^{da} Parte de las AEI: elaboración de un informe en el aula.	
			Momento 4	Realización de la 3 ^{ra} Parte de las AEI: preparación de una presentación por parte de los alumnos.	
SEGUNDA SEMANA		PRIMERA ETAPA: Exploración del tema	17/08		Feriado. Conmemoración del fallecimiento del General José de San Martín.
			Clase 3 19/08	Momento 5	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.
				Momento 6	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en de las AEI.
			Clase 4 21/08	Momento 7	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.
Momento 8	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.				

TERCERA SEMANA	SEGUNDA ETAPA: Desarrollo del tema	Clase 5 24/08	Momento 9	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.	
		Clase 6 26/08	Momento 10	Cierre usando Power Point, retomando cuestiones importantes que se trabajaron en las AEI, tales como variables dependiente e independiente, construcción de tablas, pares ordenados, gráfico cartesiano.	
			Momento 11	Realización de una actividad en la que, a partir de una simulación en GeoGebra, se estudia la relación entre el tiempo y la altura del nivel de agua de un recipiente cilíndrico.	
		Clase 7 28/08	Momento 12	Corrección de la actividad basada en la simulación. Mediante la búsqueda de regularidades, se arribó a la expresión simbólica que representa la relación entre el tiempo y la altura del nivel de agua del recipiente cilíndrico.	
			Momento 13	Realización de una Guía de Actividades (GA) en donde se estudiaba una relación de proporcionalidad directa y una relación de proporcionalidad inversa.	
		CUARTA SEMANA	31/08		No se dictaron clases por la realización de un Taller Docente.
			Clase 8 02/09	Momento 14	Corrección de la primera actividad de la GA donde se pusieron de manifiesto las propiedades de la relación de proporcionalidad directa, el gráfico y la constante de proporcionalidad de la misma.
Momento 15	Presentación, usando un Power Point, donde se detallan las características de la relación de proporcionalidad directa.				
Clase 9 04/09	Momento 16		Evaluación de relaciones entre variables.		
	Momento 17	Realización de una nueva guía de actividades que propone la			

				<p>búsqueda de regularidades en tablas, para arribar a una expresión simbólica y para reconocer relaciones de proporcionalidad directa e inversa.</p> <p>Corrección de la segunda actividad de la GA donde se pusieron de manifiesto las propiedades de la relación de proporcionalidad inversa, el gráfico y la constante de proporcionalidad de la misma.</p>
QUINTA SEMANA		Clase 10 07/09	Momento 18	<p>Finalización de la corrección de la segunda actividad de la GA. Presentación usando un Power Point donde se detallan las características de la relación de proporcionalidad inversa.</p>
		<p>TERCERA ETAPA: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática</p>	Clase 11 09/09	Momento 19
	Momento 20		<p>Inicio del PM. Elección de la situación donde se relacionen variables. Planteo de problema y selección de variables.</p>	
11/09			Feriado. Día del Maestro.	
SEXTA SEMANA		Clase 12 14/09	Momento 21	<p>Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.</p>
		Clase 13	Momento 22	<p>Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos.</p>

		16/09		Realización de tablas y gráficos.
			Momento 23	Finalización del PM. Presentación, usando un Power Point, de los proyectos de modelización realizados por los alumnos.

Tabla 1: Cronograma implementado en el curso 1°A

La Tabla 2 muestra el cronograma que se implementó en el curso 1°B

Semanas	Etapas	Clases	Momentos	Actividades
PRIMERA SEMANA	PRIMERA ETAPA: Exploración del tema	Clase 1 10/08	Momento 1	Presentación, usando un Power Point, de las AEI sobre estudio de relaciones entre variables a ser realizadas en el laboratorio. Realización de la 1 ^{ra} Parte de las AEI: recolección de datos en el laboratorio.
			Momento 2	Realización de la 1 ^{ra} Parte de las AEI: recolección de datos en el laboratorio.
		Clase 2 11/08	Momento 3	Realización de la 2 ^{da} Parte de las AEI: elaboración de un informe en el aula.
			Momento 4	Realización de la 2 ^{da} Parte de las AEI: elaboración de un informe en el aula. Realización de la 3 ^{ra} Parte de las AEI: preparación de una presentación por parte de los alumnos.
		14/08		No se dictaron clases pues los alumnos concurren al acto organizado por la institución conmemorando el fallecimiento del General San Martín.
SEGUNDA SEMANA		17/08		Feriado. Conmemoración del fallecimiento del General José de San Martín.
		18/08		Feriado. Día del Educador Católico.
		Clase 3	Momento 5	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.

		21/08			
TERCERA SEMANA		Clase 4	Momento 6	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.	
			24/08	Momento 7	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.
		Clase 5		Momento 8	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.
			25/08	Momento 9	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI. Cierre usando Power Point, retomando cuestiones importantes que se trabajaron en las AEI, tales como variables dependiente e independiente, construcción de tablas, pares ordenados, gráfico cartesiano.
Clase 6	Momento 10	Finalización del cierre usando Power Point, iniciado en la clase anterior. Realización de una actividad en la que, a partir de una simulación en GeoGebra, se estudia la relación entre el tiempo y la altura del nivel de agua de un recipiente cilíndrico. Corrección de la actividad basada en la simulación. Mediante la búsqueda de regularidades, se arribó a la expresión simbólica que representa la relación entre el tiempo y la altura del nivel de agua del recipiente cilíndrico.			
28/08					
CUARTA SEMANA	SEGUNDA ETAPA: Desarrollo del tema	31/08		No se dictaron clases por la realización de un Taller Docente.	
		Clase 7	Momento 11	Realización de una GA en donde se estudiaba una relación de proporcionalidad directa y una relación de proporcionalidad inversa.	
			01/09	Momento 12	Finalización de la GA en donde se estudiaba una relación de proporcionalidad directa y una relación de proporcionalidad inversa.
		Clase 8	Momento 13	Corrección de la primera actividad de	

		04/09		la GA donde se pusieron de manifiesto las propiedades de la relación de proporcionalidad directa, el gráfico y la constante de proporcionalidad de la misma.
QUINTA SEMANA		Clase 9 07/09	Momento 14	Finalización de la corrección de la primera actividad de la GA.
			Momento 15	Presentación, usando un Power Point, donde se detallan las características de la relación de proporcionalidad directa.
			Momento 16	Evaluación de relaciones entre variables.
		Clase 10 8/09	Momento 17	Realización de una nueva guía de actividades que propone la búsqueda de regularidades en tablas, para arribar a una expresión simbólica y para reconocer relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Corrección de la segunda actividad de la GA donde se pusieron de manifiesto las propiedades de la relación de proporcionalidad inversa, el gráfico y la constante de proporcionalidad de la misma.
		11/09		Feriado. Día del Maestro.
SEXTA SEMANA	TERCERA ETAPA: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática	Clase 11 14/09	Momento 18	Presentación, usando un Power Point, donde se plantea la consigna del PM a realizar por los alumnos. En este proyecto ellos deberán elegir una situación de la vida real para estudiar alguna relación entre variables que allí se ponga de manifiesto. Una vez realizada la propuesta, se mostró un video, recorte de la película Mi villano favorito, donde se puede ver una situación en la cual un científico pone de manifiesto una relación entre dos variables. Discusión con los alumnos sobre la relación descubierta.

			Momento 19	Inicio del PM. Elección de la situación donde se relacionen variables. Planteo de problema y selección de variables.
		Clase 12	Momento 20	Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.
		15/09	Momento 21	Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.
		Clase 13 18/09	Momento 22	Finalización del PM. Presentación, usando un Power Point, de los proyectos de modelización realizados por los alumnos.

Tabla 2: Cronograma implementado en el curso 1°B

La Tabla 3 muestra el cronograma que se implementó en el curso 1°C

Semanas	Etapas	Clases	Momentos	Actividades
PRIMERA SEMANA	PRIMERA ETAPA: Exploración del tema	Clase 1 11/08	Momento 1	Presentación, usando un Power Point, de las AEI sobre estudio de relaciones entre variables a ser realizada en el laboratorio. Realización de la 1 ^{ra} Parte de las AEI: recolección de datos en el laboratorio.
			Momento 2	Realización de la 1 ^{ra} Parte de las AEI: recolección de datos en el laboratorio.
		Clase 2 13/08	Momento 3	Realización de la 2 ^{da} Parte de las AEI: elaboración de un informe en el aula.
			Momento 4	Realización de la 3 ^{ra} Parte de las AEI: preparación de una presentación por parte de los alumnos.
			Momento 5	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.
			18/08	

SEGUNDA SEMANA		Clase 3 20/08	Momento 6	Exposición oral de los alumnos a partir del trabajo realizado en las AEI.
			Momento 7	Cierre usando Power Point, retomando cuestiones importantes que se trabajaron en las AEI, tales como variables dependiente e independiente, construcción de tablas, pares ordenados, gráfico cartesiano.
			Momento 8	Realización de una GA en donde se estudiaba una relación de proporcionalidad directa y una relación de proporcionalidad inversa.
TERCERA SEMANA	SEGUNDA ETAPA: Desarrollo del tema	Clase 4 25/09	Momento 9	Finalización de la GA en donde se estudiaba una relación de proporcionalidad directa y una relación de proporcionalidad inversa.
			Momento 10	Corrección de la primera actividad de la GA donde se pusieron de manifiesto las propiedades de la relación de proporcionalidad directa, el gráfico y la constante de proporcionalidad de la misma.
		Clase 5 27/08	Momento 11	Finalización de la corrección de la primera actividad de la GA.
			Momento 12	Corrección de la segunda actividad de la GA donde se pusieron de manifiesto las propiedades de la relación de proporcionalidad inversa, el gráfico y la constante de proporcionalidad de la misma.
			Momento 13	Finalización de la corrección de la segunda actividad de la GA.
		CUARTA SEMANA		Clase 6 01/09
Momento 15	Realización de una actividad en la que, a partir de una simulación en GeoGebra, se estudia la relación entre el tiempo y la altura del nivel de agua de un recipiente cilíndrico. Corrección de la actividad basada en			

				la simulación. Mediante la búsqueda de regularidades, se arribó a la expresión simbólica que representa la relación entre el tiempo y la altura del nivel de agua del recipiente cilíndrico.
		Clase 7 03/09	Momento 16	Evaluación de relaciones entre variables.
			Momento 17	Realización de una nueva guía de actividades que propone la búsqueda de regularidades en tablas, para arribar a una expresión simbólica y para reconocer relaciones de proporcionalidad directa e inversa.
			Momento 18	Presentación, usando un Power Point, donde se detallan las características de la relación de proporcionalidad inversa.
QUINTA SEMANA	TERCERA ETAPA: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática	Clase 8 08/09	Momento 19	Presentación, usando un Power Point, donde se plantea la consigna del PM a realizar por los alumnos. En este proyecto ellos deberán elegir una situación de la vida real para estudiar alguna relación entre variables que allí se ponga de manifiesto. Una vez realizada la propuesta, se mostró un video, recorte de la película Mi villano favorito, donde se puede ver una situación en la cual un científico pone de manifiesto una relación entre dos variables. Discusión con los alumnos sobre la relación descubierta.
			Momento 20	Inicio del PM. Elección de la situación donde se relacionen variables. Planteo de problema y selección de variables.
		Clase 9 10/09	Momento 21	Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.
			Momento 22	Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.

			Momento 23	Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.
SEXTA SEMANA		Clase 10 15/09	Momento 24	Continuación del PM. Búsqueda, recolección y organización de datos. Realización de tablas y gráficos.
			Momento 25	Finalización del PM. Presentación, usando un Power Point, de los proyectos de modelización realizados por los alumnos.

Tabla 3: Cronograma implementado en el curso 1°C

3.7 Acerca de las actividades

Basándonos en las observaciones realizadas en las tres divisiones de la profesora titular, para el abordaje de los contenidos que formaban parte de nuestra planificación intentamos crear actividades que fomenten la exploración y producción de conocimientos por parte de los alumnos. La idea era colocar a los estudiantes en un papel activo. Tal como lo anticipamos en la Sección 3.6, dividimos nuestras prácticas en tres etapas.

1. Primera etapa: Exploración del tema
2. Segunda etapa: Desarrollo del tema
3. Tercera etapa: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática

Las actividades se presentaban mayormente en fotocopias y además eran previamente cargadas en el aula virtual, para que los estudiantes pudieran visualizarlas fácilmente desde sus tablets. Las presentaciones en Power Point que se mostraban en la pizarra digital también eran subidas al aula virtual. Luego de entregar la fotocopia con las actividades, se destinaba un tiempo para la resolución de las mismas.

Ya finalizado el tiempo de realización de la actividad, ésta se controlaba de diversos modos. Algunas veces de manera grupal. En otras ocasiones un estudiante mostraba sus resultados y luego se iniciaba un debate con todo el curso.

En esta sección mostraremos explícitamente las actividades que desarrollamos en cada etapa a lo largo de las prácticas, los objetivos que nos propusimos con cada una de ellas y breves descripciones donde destacamos cuestiones interesantes que surgieron, así como complicaciones e imprevistos.

3.7.1 Primera Etapa: Exploración del tema

El inicio de nuestras prácticas se realizó a través del planteo de tres actividades exploratorias, a partir de tres situaciones diferentes.

El objetivo de estas actividades, como hemos mencionado anteriormente, era que los estudiantes reconozcan relaciones entre dos variables, exploren la dependencia entre ellas y además incorporen la tabla como herramienta para organizar datos.

Previamente a la realización de las actividades exploratorias hicimos una presentación Power Point donde nos referimos a las nociones de variable y de relación entre variables, ya que al trabajar en dichas actividades, los alumnos comenzarían a poner en juego estas nociones. Durante esta presentación se intentó que los alumnos participaran en la construcción de las nociones antes mencionadas. Por ejemplo para comenzar a reconocer variables, ofrecíamos ejemplos o situaciones como la siguiente:

Supongan que están enfermos, tienen fiebre, su mamá les toma la temperatura y tienen 38 grados, a la hora vuelve a tomárselas y tienen 39 grados por eso les da un medicamento, y nuevamente al rato les toma la temperatura y tienen 37 grados, ¿reconocen las variables que se están relacionando?

Ante esta situación, los estudiantes reconocieron que el tiempo transcurrido y la temperatura del niño en cada instante eran las variables que se relacionaban en ese fenómeno.

Cabe destacar, que la noción de variable con que se trabajó y que fue acordada conjuntamente con los alumnos fue la siguiente: una variable es “algo cuyo valor se modifica”. Para entender con mayor claridad esto, se mostraron diversas situaciones y en ellas se identificaron las variables y se vio la relación entre ellas, esto se encuentra en el material de estudio Sección **6.2** correspondiente al Anexo 2.

Luego de realizar este primer acercamiento a la noción de variable, propusimos la realización de tres actividades

- 1) Circunferencias Animadas en GeoGebra: los alumnos debían construir una animación donde el radio de la circunferencia aumentara gradualmente. El objetivo era estudiar la relación entre el radio de la circunferencia y la longitud de la misma;
- 2) Vaciado de botellas: los estudiantes debían llenar con determinada cantidad de agua, botellas que tenían orificios con diferentes áreas en su parte inferior y observar el tiempo en que cada una de ellas se vaciaba. El objetivo era estudiar la relación entre el área del orificio y el tiempo de vaciado de las botellas.
- 3) El Péndulo: utilizando un laboratorio virtual, a partir de una simulación, los alumnos debían experimentar virtualmente con el péndulo fijando algunas variables como “fricción”, “gravedad”, “tiempo real”, entre otras. El objetivo era estudiar la relación entre la longitud del hilo de un péndulo y el tiempo que tarda el mismo en realizar una oscilación completa.

A continuación mostramos los enunciados de cada una de las actividades que fueron entregados a los estudiantes.

ACTIVIDAD 1: “CIRCUNFERENCIAS ANIMADAS en GeoGebra”

INTEGRANTES DEL GRUPO:

Objetivo de la Actividad:

En el transcurso de esta actividad estudiaremos la relación entre el radio de una circunferencia y la longitud de dicha circunferencia.

Recordar:

1. Radio de la circunferencia: segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos.

Materiales:

- Tablet (que disponga del programa GeoGebra).
- Papel y lápiz.

IMPORTANTE: Leer atentamente toda la actividad antes de realizarla.

1ª Parte: Construcción de una animación y recolección de datos (en el laboratorio)

1) Construir una animación en GeoGebra que muestre una circunferencia cuyo radio vaya aumentando de 1 cm en 1 cm hasta llegar a 10 cm, comenzando con una circunferencia de radio 1 cm.

Sugerencia: utilizar la herramienta “Circunferencia dados su centro y radio” y luego asociar un deslizador al radio de la circunferencia.

2) Para cada una de las circunferencias de la animación, obtener su longitud utilizando la



herramienta “Distancia o longitud”. Registrar estos valores.

3) Verificar que se han tomado y registrado en una hoja o archivo las mediciones correspondientes para cada una de las circunferencias. Al finalizar esta actividad deberán tener 10 pares de datos

Nota: Recomendamos que para recolectar los datos, se dividan las tareas dentro del grupo. Por ejemplo, que uno mida en el GeoGebra, otro anote los datos, etc.

2ª Parte: Trabajo en el aula

1) Escribir en un archivo de texto, las respuestas a las siguientes consignas:

- ¿Cuáles son las variables involucradas en esta situación?
- ¿Pueden anticipar alguna relación entre las variables que están en juego? ¿Cuál?
- ¿Cómo organizarían los datos obtenidos y registrados en la 1ª Parte, de modo tal que al hacer una presentación para sus compañeros, entiendan cuáles han sido sus registros?
- Escribir en forma de pares ordenados los datos obtenidos en la 1ª Parte de la actividad.

e. Observar con cuidado los datos obtenidos anteriormente, ¿observan alguna regularidad en ellos que les llame la atención? Describan todas las que encuentren.

2) Graficar en GeoGebra los pares ordenados obtenidos en el ítem d.

3) Subir al aula virtual:

- la animación que crearon durante la 1ª Parte de la Actividad,
- el archivo de texto que realizaron en la 2ª Parte, punto 1) y
- el gráfico en GeoGebra generado en el punto 2).

Estos archivos deberán tener como nombre: "Circunferencias Animadas – nombres de los integrantes del grupo" y ser subidos, por uno de los integrantes del grupo, en la Tarea denominada: *Actividades iniciales* que se encuentra dentro del tema titulado Relaciones entre Variables. *Proporcionalidad directa e inversa*.

3ª Parte: Presentación de la actividad

Preparar para exponer por grupo una presentación Power Point (o similar) conteniendo:

- El nombre de la Actividad que realizaron,
- los nombres de los integrantes del grupo,
- las respuestas a los incisos a. y b. de la 2ª Parte,
- la presentación de los datos de manera organizada,
- el gráfico y
- las regularidades encontradas.

ACTIVIDAD 2: "VACIADO DE BOTELLAS"

INTEGRANTES DEL GRUPO:

Objetivo de la Actividad:

En el transcurso de esta actividad estudiaremos la relación entre el tiempo de vaciado de una botella y el tamaño del orificio por el cual el líquido se vierte.

Materiales:

- 6 botellas de 600 cc Cada una de ellas posee un orificio cuadrado diferente en la parte inferior y tiene un rótulo con el valor del área del orificio expresado en cm^2 .
- Recipiente medidor de líquidos.
- Cronómetro (de la Tablet o del celular).
- Tablet
- Papel y lápiz.

IMPORTANTE: Leer atentamente toda la actividad antes de realizarla.

1ª Parte: Recolección de datos (en el laboratorio)

Procedimiento:

- 1) Tomar una botella y registrar el área del orificio que está escrita en el rótulo.
- 2) Verter agua en el recipiente medidor hasta obtener 500 cc.
- 3) Colocar los 500 cc en la botella. Al hacerlo tapar el orificio que se encuentra en la parte inferior para evitar pérdidas.
- 4) Destapar el orificio con cuidado y con un cronómetro medir el tiempo (en segundos) que tarde en vaciarse la botella. Registrar ese dato.
- 5) Repetir los incisos (1), (2), (3) y (4) para el resto de las botellas.
- 6) Verificar que se han tomado y registrado en una hoja o archivo las mediciones correspondientes para cada una de las botellas. Al finalizar esta parte, deberán tener 6 pares de datos.

Nota: Recomendamos que se dividan las tareas dentro del grupo. Por ejemplo, que uno llene las botellas, otro mida el tiempo de vaciado, otro anote los datos, etc.

2ª Parte: Trabajo en el aula

- 1) Escribir en un archivo de texto, las respuestas a las siguientes consignas:
 - a. ¿Cuáles son las variables involucradas en esta situación?
 - b. ¿Pueden anticipar alguna relación entre las variables que están en juego? ¿Cuál?
 - c. ¿Cómo organizarían los datos obtenidos y registrados en la 1ª Parte, de modo tal que

al hacer una presentación para sus compañeros, entiendan cuáles han sido sus registros?
d. Escribir en forma de pares ordenados los datos obtenidos en la 1ª Parte de la actividad.
e. Observar con cuidado los datos obtenidos anteriormente, ¿observan alguna regularidad en ellos que les llame la atención? Describan todas las que encuentren.

2) Graficar en GeoGebra los pares ordenados obtenidos en el ítem d.

3) Subir al aula virtual:

- el archivo de texto que realizaron en la 2a Parte, punto 1) y
- el gráfico en GeoGebra generado en el punto 2).

Ambos archivos deberán tener como nombre: "Vaciado de botellas – nombres de los integrantes del grupo" y ser subidos, por uno de los integrantes del grupo, en la Tarea denominada: *Actividades iniciales* que se encuentra dentro del tema titulado Relaciones entre Variables. *Proporcionalidad directa e inversa*.

3ª Parte: Presentación de la actividad

Preparar para exponer por grupo una presentación Power Point (o similar) conteniendo:

- El nombre de la Actividad que realizaron,
- los nombres de los integrantes del grupo,
- las respuestas a los incisos a. y b. de la 2ª Parte,
- la presentación de los datos de manera organizada,
- el gráfico y
- las regularidades encontradas.

ACTIVIDAD 3: “EL PÉNDULO”

INTEGRANTES DEL GRUPO:

Objetivo de la Actividad:

En el transcurso de esta actividad estudiaremos la relación entre la longitud del hilo del péndulo y el período (tiempo que el péndulo tarda para realizar una oscilación completa)

Materiales:

- Netbooks (con Simulación Phet, que se puede encontrar en la siguiente página <https://phet.colorado.edu/es/simulation/legacy/pendulum-lab>)
- Tablet.
- Papel y lápiz.

IMPORTANTE: Leer atentamente toda la actividad antes de realizarla.

1ª Parte: Recolección de datos usando una simulación (en el laboratorio)

Abrir el programa “Simulación Laboratorio del Péndulo” que se encuentra en el Escritorio de la computadora. Este laboratorio virtual permite estudiar el movimiento de un péndulo. Pueden ver que hay un péndulo que se mueve haciendo click con el mouse en él y deslizándolo, y un transportador que muestra el ángulo que forma el hilo con una línea vertical punteada. También hay muchos botones que representan distintas condiciones o variables que intervienen en este movimiento: la longitud del hilo, la masa del cuerpo, si hay fricción o no, si estamos en la tierra, en algún otro planeta o en la luna, etc. Como a nosotros nos interesa estudiar la relación entre la longitud del hilo y el tiempo que el péndulo tarda en realizar una oscilación completa (período), vamos a fijar algunas condiciones para iniciar nuestro experimento virtual. También vamos a usar un cronómetro especial que se llama “reloj fotoactivado” que permite medir el tiempo de una oscilación completa, que en Física se llama período, es decir el reloj fotoactivado mide el período.

Para iniciar nuestro experimento realizaremos los siguientes pasos:

- 1) Activar la opción “Reloj fotoactivado”
- 2) Fijar las siguientes condiciones iniciales:
 - Masa: 1 kg,
 - Fricción: ninguna,
 - Tiempo real
 - Tierra
 - Mostrar energía de: ningún

3) Fijar la longitud del hilo (comenzar con 0,50 cm).

4) Usando el mouse, arrastrar el cuerpo azul que forma parte del péndulo hasta que el hilo que lo sostiene forme un ángulo de 60° con la línea vertical punteada y luego suéltalo. El cuerpo comenzará a oscilar.

Observación: el valor del ángulo es arbitrario, puede ser cualquier otro, pero debe ser el mismo para cada simulación que realicen en este experimento.

5) Utilizando el reloj fotoactivado, registrar el período correspondiente. Para activar el reloj es necesario hacer clic en “Comenzar”. Anotar ese valor.

6) Repetir los pasos 3), 4) y 5) para las siguientes longitudes del hilo: 0.60m, 0.70 m, 1.00 m, 1.20 m, 1.40 m, 1.50 m, 1.80m, 2.00 m, 2.40 m, 2.50 m. Registrar estos datos.

7) Verificar que se han tomado y registrado en una hoja o archivo las mediciones correspondientes para cada una de las longitudes del hilo que fueron consideradas. Al finalizar esta parte deberán tener 11 pares de datos.

Nota: Recomendamos que se dividan las tareas dentro del grupo, por ejemplo, que uno maneje el simulador, otro anote los datos, otro controle, etc.

2ª Parte: Trabajo en el aula

1) Escribir en un archivo de texto, las respuestas a las siguientes consignas:

- a. ¿Cuáles son las variables involucradas en esta situación?
- b. ¿Pueden anticipar alguna relación entre las variables que están en juego? ¿Cuál?
- c. ¿Cómo organizarían los datos obtenidos y registrados en la 1ª parte, de modo tal que al hacer una presentación para sus compañeros, entiendan cuáles han sido sus registros?
- d. Escribir en forma de pares ordenados los datos obtenidos en la 1ª parte de la actividad.
- e. Observar con cuidado los datos obtenidos anteriormente, ¿observan alguna regularidad en ellos que les llame la atención? Describan todas las que encuentren.

2) Graficar en GeoGebra los pares ordenados obtenidos en el ítem d.

3) Subir al aula virtual:

- el archivo de texto que realizaron en la 2a Parte, punto 1) y
- el gráfico en GeoGebra generado en el punto 2).

Ambos archivos deberán tener como nombre: “El Péndulo – nombres de los integrantes del grupo” y ser subidos, por uno de los integrantes del grupo, en la Tarea denominada: Actividades iniciales que se encuentra dentro del tema titulado Relaciones entre Variables. Proporcionalidad directa e inversa.

3ª Parte: Presentación de la actividad

Preparar para exponer por grupo una presentación Power Point (o similar) conteniendo:

- El nombre de la Actividad que realizaron,
- los nombres de los integrantes del grupo,
- las respuestas a los incisos a. y b. de la 2a Parte,
- la presentación de los datos de manera organizada,
- el gráfico y
- las regularidades encontradas.

Luego de la presentación realizada por cada una de nosotras, la clase se organizó de la siguiente manera: se formaron grupos de 4 a 6 integrantes, cuya conformación fue voluntaria y después cada grupo eligió un sobre donde se encontraba alguna de las tres actividades exploratorias que mostramos anteriormente. A continuación realizaremos algunos comentarios respecto del modo en que se llevó a cabo lo solicitado en cada una de las tres partes que integraban las actividades.

3.7.1.1 Primera parte: Recolección de datos

Una vez asignadas las actividades, nos dirigimos al laboratorio para realizar la 1ª parte que consistía en la recolección de datos. En ella pudimos observar un buen trabajo por parte de los estudiantes.

En el caso de la actividad “Circunferencias animadas en GeoGebra”, la creación de la simulación no les causó demasiadas dificultades ya que estaban familiarizados con el programa. Un conocimiento nuevo que surgió fue la utilización de la herramienta que medía una determinada longitud.

En la actividad “Vaciado de botellas” los alumnos se divirtieron mucho en la toma de datos e imágenes de su experiencia. Surgieron algunos inconvenientes al momento de tapar los orificios de los recipientes ya que algunos de ellos eran grandes. También les costaba coordinar los movimientos entre quien destapaba el orificio por el cual se vertía el agua y que comenzaba y finalizaba el cronómetro.

En la actividad “El péndulo”, los alumnos se interesaron mucho por investigar la simulación e ir cambiando diversos parámetros y ver cómo esta variación afectaba al fenómeno que ellos debían estudiar. Aquí no hubo grandes inconvenientes.

Cabe destacar que el proceso de recolección de datos llevado a cabo en esta primera parte nos permitió ver una diversidad de formas de registrar y organizar los datos. En la siguiente sección se muestran algunos de estos registros.

3.7.1.2 Segunda parte: Trabajo en el aula

Posteriormente, ya en el aula se comenzó con la 2ª parte de cada actividad. Cabe destacar que, en esta clase, algunos de los grupos no llevaron los datos recolectados en la 1ª parte para realizar el trabajo áulico. Por este motivo brindamos un tiempo extra para que esos grupos en particular volvieran a realizar la 1ª parte.

Nosotras consideramos que frente a estas situaciones y principalmente en los primeros años de la escuela secundaria, hubiera sido conveniente que llevemos algún registro de los datos recolectados por cada grupo para evitar tener que destinar mayor tiempo a la misma actividad.

En esta segunda parte planeamos una serie de cuestiones. A continuación enunciaremos algunas para después realizar comentarios sobre lo ocurrido en clases.

- **Inciso 1 c) de la 2ª Parte:** *¿Cómo organizarían los datos obtenidos y registrados en la 1ª parte, de modo tal que al hacer una presentación para sus compañeros, entiendan cuáles han sido sus registros?*

La mayoría de los alumnos eligió la tabla como forma de organización de los datos registrados. Solo tres grupos en total, considerando los tres cursos, utilizaron otras formas.

Dos grupos organizaron los datos en forma de lista. La Figura 8 muestra ese tipo de organización. Otro grupo, que trabajó con la actividad de péndulo presentó los datos registrados a través de imágenes, mostrando para cada longitud del hilo, el periodo correspondiente (Ver Figura 9). En los tres casos se destacó, al momento de la exposición oral, que el uso de la tabla era la forma más económica y común, utilizada por los matemáticos y científicos para organizar, representar y comunicar determinados datos.

ACTIVIDADES:

- Punto 4,5,6 y 7:

- pendulos 1:
- Longitud:0,50: [1.5219](#) s
- Longitud:0,60: [1.6837](#) s
- Longitud:0,70: [1.8154](#) s
- Longitud:1,00: [2.1288](#) s
- Longitud:1,20: [2.3184](#) s
- Longitud:1,40: [2.4899](#) s
- Longitud:1,50: [2.5689](#) s
- Longitud:1,80: [2.7943](#) s
- Longitud:2,00: [2.9438](#) s
- Longitud:2,40: [3.2015](#) s
- Longitud:2,50: [3.2658](#) s

- Nosotros mientras ibamos trabajando con las diferentes longitudes, ibamos anotando los periodos.

Figura 8. Datos recolectados por uno de los grupos y organizados mediante una lista.

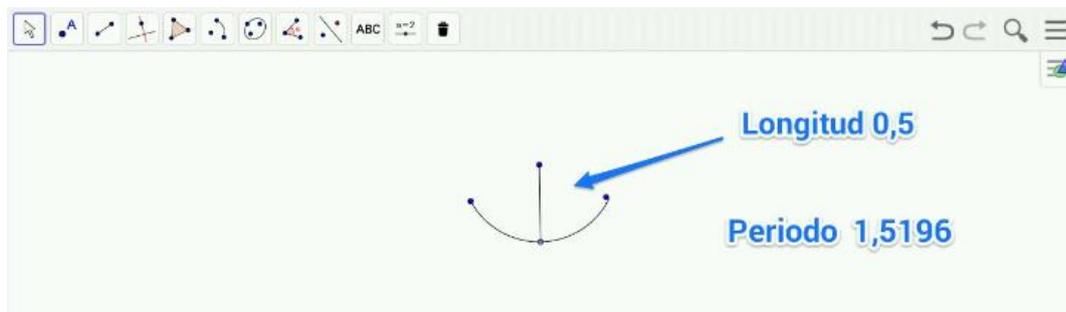


Figura 9. Registro de dato mediante imágenes.

Lo que nosotras buscábamos con la pregunta anterior, era iniciar un camino para llegar a la tabla como un instrumento de organización de datos, ya que este era uno de los objetivos que nos propusimos durante nuestro período de prácticas. A fin de conseguir esto, durante la recolección de datos, realizábamos preguntas tales como: “¿De qué manera podríamos organizar esos datos de forma tal que no se haga repetitiva las palabras longitud y segundos?”, haciendo referencia en este caso a los datos presentados en la Figura 8 correspondiente a la actividad del péndulo; o “Si hubiera que tomar 50 datos, ¿Cuál te parece que sería la forma más económica de hacerlo?”, orientando a los alumnos a imaginarse lo que sería listar una serie con tanta cantidad de datos. A partir de las respuestas a este tipo de preguntas se pudo lograr que los alumnos consideraran la tabla como un modo económico y convenido por los científicos para organizar y presentar datos.

Así obtuvimos tablas como la que se muestra en la Figura 10 a continuación:

Medida del Hilo (metros)	Valor Del periodo (segundos)
0,5	1,5212
0,6	1,667
0,7	1,7998
1	2,0956
1,2	2,3573
1,4	2,5463
1,5	2,63656
1,8	2,8876
2	3,0436
2,4	3,3341
2,5	3,403

Figura 10. Tabla realizada por uno de los grupos en las actividades experimentales.

- **Inciso 1 e) de la 2ª Parte:** *Observar con cuidado los datos obtenidos anteriormente, ¿observan alguna regularidad en ellos que les llame la atención? Describan todas las que encuentren.*

Cuando nosotras comenzamos a dar clases, los alumnos ya habían trabajado con búsqueda de regularidades, por lo que no se les presentó ningún inconveniente al momento de encontrarlas en la tabla.

Una de las regularidades que surgió con más frecuencia fue, en el caso de las “Circunferencias animadas en GeoGebra”, que si el radio ascendía de 1 en 1, la longitud de la circunferencia aumentaba de 6,28 en 6,28. Algunos grupos percibieron en este momento que esto no era “del todo cierto”, ya que el programa GeoGebra estaba configurado para dar los números con solo dos decimales, y así, por ejemplo, si tomaban el valor de la longitud de la circunferencia correspondiente a 1 y le sumaban 6,28 no obtenían exactamente el valor de la longitud de la circunferencia correspondiente al radio 2 que informaba el software y que era 12,57.

En la actividad “Vaciado de botellas”, las regularidades encontradas fueron variadas y dependieron de los datos que los estudiantes recabaron en su experimentación. Una regularidad común a todos los grupos fue que al aumentar el tamaño del área del orificio, el tiempo de vaciado de la botella descendía.

- **Inciso 2) de la 2ª Parte:** *Graficar en GeoGebra los pares obtenidos en el ítem d.*

En el momento en que los alumnos tenían que realizar el gráfico a partir de los datos registrados se produjo un desconcierto, pues si bien ellos sabían lo que era un par ordenado y cómo marcar ese par ordenado o punto en el plano cartesiano, ahora comenzaban a considerarlo en un contexto nuevo: el estudio de relaciones entre variables. Para lograr que los estudiantes avanzaran, lo que se hizo fue hacerles notar que cada par de datos que ellos habían registrado conformaban un par ordenado y que el conjunto de esos pares ordenados mostraban la relación entre las variables que habían estado estudiando. Esto fue un proceso costoso ya que fue necesario que dejaran de ver los pares ordenados como simples puntos en el plano para pasar a mirarlos como un conjunto de puntos que representan una relación entre dos variables.

3.7.1.3 Tercera parte: Presentaciones orales

La tercera parte de la actividad consistía en la elaboración, por parte de los alumnos, de una presentación usando Power Point u otro programa similar. Cada grupo realizó una exposición presentando la actividad con la que habían trabajado en las clases previas.

Mediante esta exposición los grupos pudieron mostrar al resto del curso los resultados que habían obtenido en su experiencia, pudiendo así también compararlos con aquellos grupos que habían trabajado con la misma actividad.

Nosotras, mientras tanto, intentamos que todos los integrantes del grupo participaran e hicimos preguntas acerca de cuáles eran las variables involucradas en la situación que habían estudiado y cómo era la relación entre estas variables. También se les preguntaba sobre la dependencia de las mismas, mediante preguntas del tipo: ¿se podría decir que la longitud de la circunferencia depende del radio de la misma? La idea de hacer esto fue para que ellos abordaran la cuestión de la dependencia entre variables de manera intuitiva pues recién después que comentaban si habían encontrado o no una dependencia, nosotras presentábamos, las nociones de variable dependiente e independiente, teniendo en cuenta lo que los alumnos habían dicho.

Además de las preguntas antes expuestas, también se preguntó a los alumnos por datos que no se encontraban en sus tablas. Esto se hizo con el fin de que ellos se centraran en el fenómeno que habían estudiado y pudieran, a partir de los datos tomados o del gráfico en GeoGebra, predecir qué era lo que iba a suceder si tenían valores más chicos, valores más grandes o intermedios. Por ejemplo, en el caso de la tabla de la actividad “Circunferencias animadas en GeoGebra”, el radio solo tomaba valores naturales a partir del 1, por lo que se les preguntó qué pasaría con la longitud de la circunferencia correspondiente al radio 4,5 para que ellos pudieran anticipar que ese valor se encontraría entre las longitudes de circunferencias correspondientes a los radios 4 y 5. Los alumnos se dieron cuenta que tomando ambos valores de la longitud de la circunferencia, sumándolos y dividiéndolos en dos, iban a obtener exactamente el valor de la longitud de la circunferencia de radio 4,5.

Además, les pedíamos que expongan un gráfico en GeoGebra que muestre la relación entre variables que habían estudiado. Con respecto a esto, hubo algunos grupos que tuvieron inconvenientes en el uso del programa ya que para la escritura de números decimales en GeoGebra hay que emplear “.” en lugar de “,” por lo que el programa les daba un mensaje de error y no podían obtener el gráfico requerido.

Con el fin de afianzar la construcción de gráficos de relaciones entre variables, dimos un espacio para que cada grupo que no había podido realizar el gráfico de manera correcta o directamente no lo había realizado, lo hiciera. Esto se hizo de manera individual por lo que cada alumno tuvo que obtener los pares ordenados de la tabla correspondiente a la situación que se estaba analizando y graficarlos.

Una vez hecho esto se corrigió de manera conjunta, al frente, destacando la existencia de la relación que vinculaba los componentes de cada par ordenado. También se resaltó la necesidad de utilizar la notación decimal que requiere GeoGebra y se analizó la tendencia del gráfico según el comportamiento del fenómeno en estudio.

3.7.1.4 Cierre de las Actividades Exploratorias Iniciales (AEI)

Una vez finalizadas estas actividades cada una de nosotras presentó un Power Point de cierre. El mismo contenía las cuestiones ya trabajadas durante el desarrollo de las AEI: nociones de variable dependiente e independiente (ver Figura 11), formalidades referidas a la construcción de una tabla (ver Figura 12), generación de pares ordenados a partir de los datos que brinda la tabla (ejemplo en la Figura 13), gráfico en GeoGebra y algunas formalidades respecto del gráfico como por ejemplo, de qué manera introducir los nombres de las variables que se representan en cada uno de los ejes (ver Figura 14).

Variable independiente: variable cuya variación puede ser manejada por la persona que estudia el fenómeno o realiza mediciones, a fin de ver qué sucede con la variable dependiente.

Variable dependiente: variable cuyo valor puede cambiar dependiendo del cambio que experimente la variable independiente.

Figura 11. Noción de Variable Dependiente e Independiente.

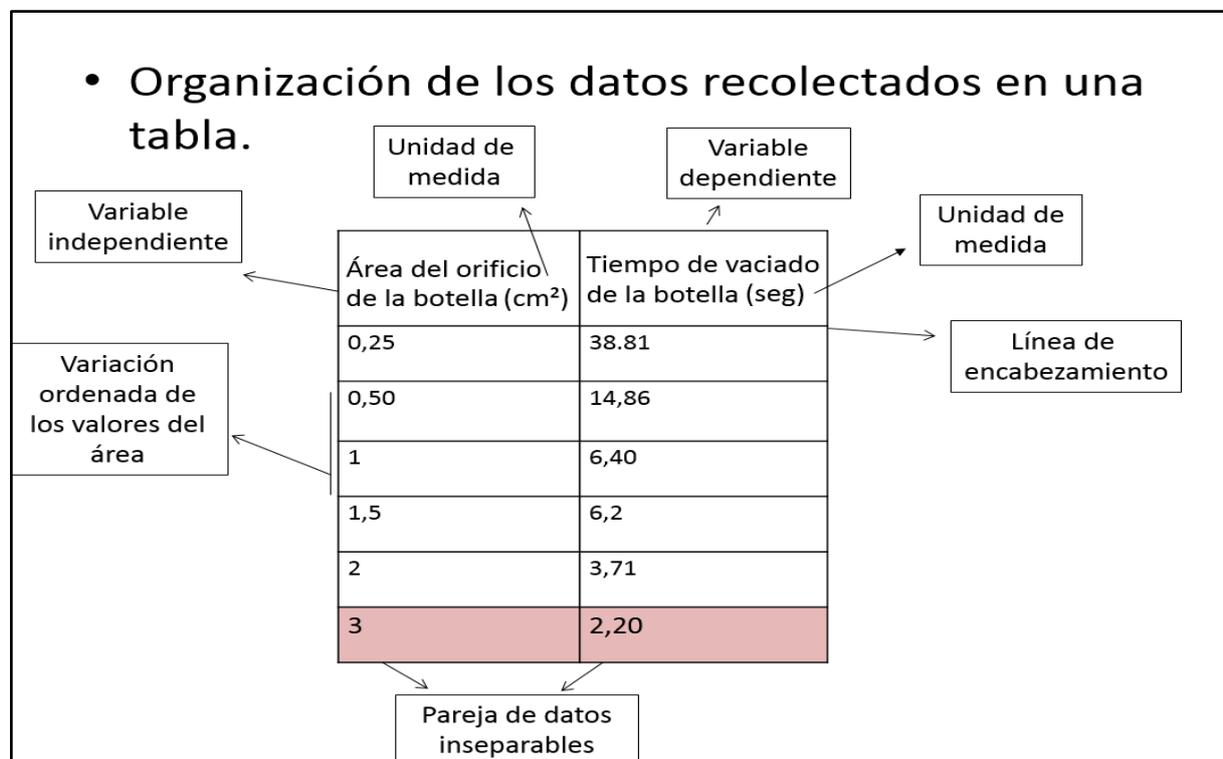


Figura 12. Elementos de una tabla.

- Pasaje de la tabla al conjunto de pares ordenados que representa la relación.

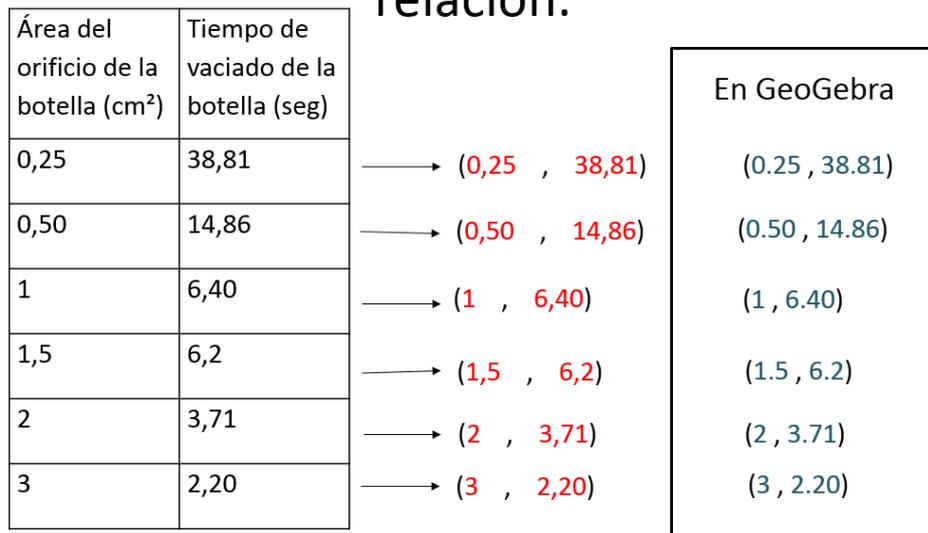


Figura 13. Cómo generar los pares ordenados a partir de los datos de una tabla.

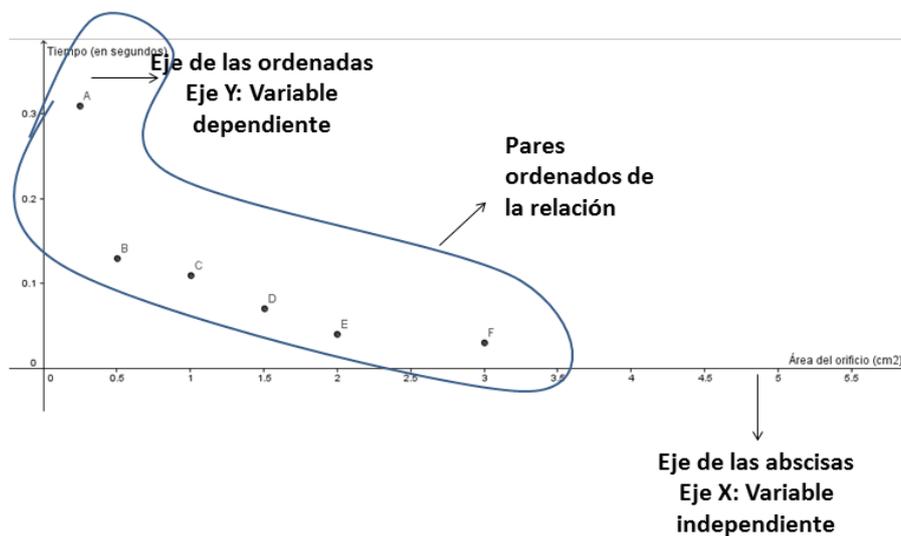


Figura 14. Elementos de un gráfico.

Para terminar con este cierre, se mostró una simulación en GeoGebra (ver Figura 15), en la cual se representaba el llenado de un recipiente cilíndrico a medida que transcurre el tiempo. En forma simultánea se observaba cómo se iba trazando el gráfico que representa la relación entre la altura del nivel del agua, en centímetros, y el tiempo de llenado del recipiente, en segundos.

Esta actividad se realizó de manera individual durante la clase y se corrigió conjuntamente con todo el curso.

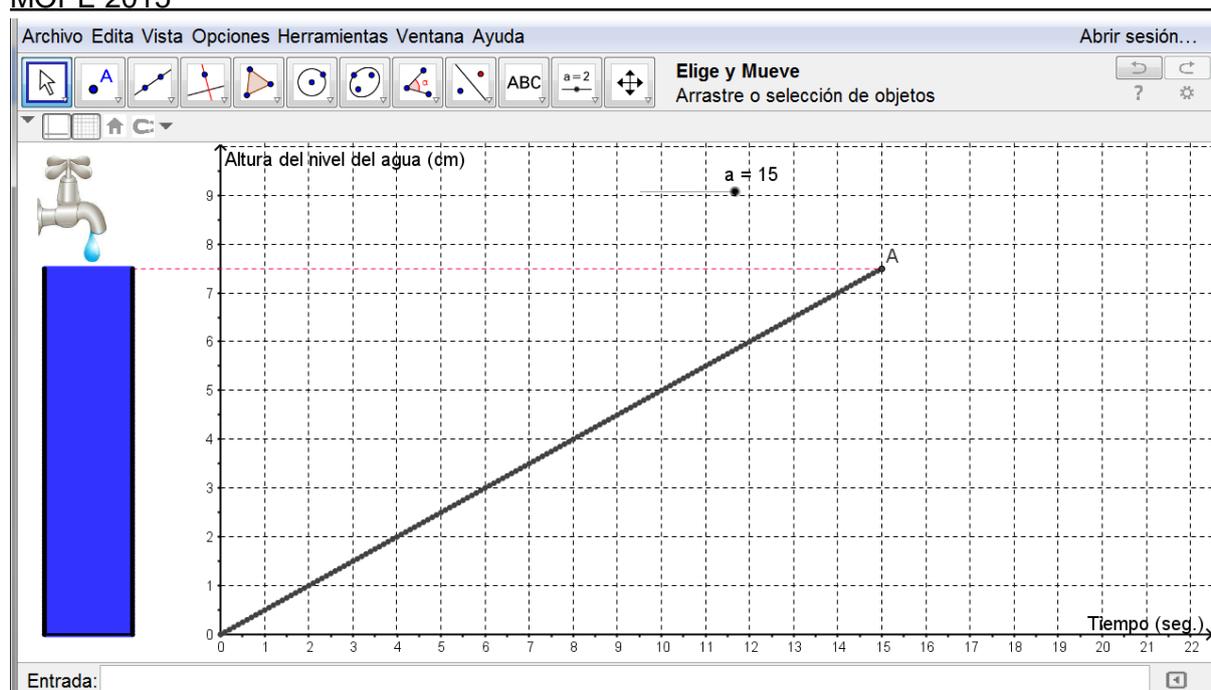


Figura 15. Simulación en GeoGebra.

A partir de esta simulación pedimos a los alumnos que identifiquen cuáles eran las variables y si había alguna dependencia entre ellas. También les solicitamos que realicen una tabla con los datos que proporcionaba el gráfico de dicha simulación y que en base a esos datos escribieran los pares ordenados correspondientes.

Una vez que los alumnos habían realizado dicha tabla se pidió que busquen las regularidades que estaban “escondidas” en ella. Algunas de las regularidades encontradas fueron:

- Si aumenta la variable independiente en 1 segundo, la variable dependiente aumenta en 0,5 cm.
- La altura multiplicada por 2 es igual al tiempo.
- El tiempo dividido 2 es igual a la altura.

En el momento de la corrección, a partir de estas regularidades que los alumnos habían encontrado y mediante preguntas del tipo: *¿Cómo podríamos escribir simbólicamente altura? ¿Y tiempo? ¿Y cómo se podrían escribir simbólicamente las frases: “la altura multiplicada por 2 es igual al tiempo” o “el tiempo dividido 2 es igual a la altura”?*, se pudo arribar a las expresiones

$$A \times 2 = T \quad \text{y}$$

$$T \div 2 = A.$$

Los alumnos pudieron notar que estas dos expresiones simbólicas eran equivalentes pues las dos estaban representando la misma relación entre variables. Luego lo que se hizo fue tomar una de estas dos expresiones simbólicas, más precisamente $A \times 2 = T$, y pedir a los alumnos que la ingresen en GeoGebra.

En el curso 1°A, los alumnos se dieron cuenta inmediatamente que GeoGebra no iba a reconocer las variables de esta expresión. Para que las reconociera debían reemplazar la “A” por la “y”, ya que la “A” representaba la altura y esta era la variable dependiente en la relación estudiada. Asimismo la letra “T”, debía ser reemplazada por la letra “x” que representa la variable independiente. Luego la expresión que ingresaron en GeoGebra fue $y \times 2 = x$.

En los cursos 1°B y 1°C lo que hicieron los alumnos fue ingresar la fórmula $A \times 2 = T$ y ver que el programa no reconocía esta expresión. En ese momento se les explicó que GeoGebra es un programa que reconoce un determinado lenguaje y les preguntamos *¿Cómo creen que deberíamos escribir esta expresión para que la acepte?* Algunos alumnos dieron la opción de que se podía reemplazar “A” por “y” y “T” por “x”. Se les preguntó por qué creían que de este modo el programa reconocería la expresión y la respuesta que obtuvimos fue que la altura era la variable dependiente en esta relación y la variable dependiente era representada en el gráfico sobre el eje Y, y lo mismo sucedía con el tiempo, era representado en el gráfico sobre el eje de las X pues allí se representa la variable independiente.

Luego, en los tres cursos, ingresaron en GeoGebra la fórmula $y \times 2 = x$ y vieron que sí era aceptada y se mostraba el gráfico. Hubo alumnos que también ingresaron la expresión $x \div 2 = y$. Luego se comparó el gráfico de las expresiones con el gráfico de la simulación. De este modo se pudo corroborar que todos los gráficos eran iguales ya que representaban la relación entre el tiempo y la altura del nivel del agua en el recipiente cilíndrico.

Conseguir que los alumnos puedan expresar simbólicamente una relación entre variables era uno de los grandes objetivos de las prácticas y se comenzó a lograr en la corrección de esta actividad, generalizando las regularidades que los alumnos habían encontrado.

3.7.2 Segunda Etapa: Desarrollo del tema

Para iniciar la segunda etapa se presentó una guía con dos actividades. Como podrán notar posteriormente, estas actividades fueron generadas usando los contextos de “Circunferencias Animadas en GeoGebra” y “Vaciado de Botellas” presentadas anteriormente y en ellas se propone trabajar a partir de tablas.

- 1) En la primera actividad se estudia la relación entre el radio de la circunferencia y la longitud de la misma que es una relación de proporcionalidad directa. La idea de introducir esta actividad es que los alumnos puedan encontrar regularidades en la tabla para poder así obtener propiedades que le permitan arribar a la fórmula y a la constante de proporcionalidad directa.
- 2) En la segunda actividad, se estudia la relación entre el área del orificio en la base de la botella y el tiempo de vaciado de las botellas que idealmente es una relación de proporcionalidad inversa. El objetivo que buscamos con esta actividad es que los alumnos, identifiquen regularidades en la tabla, para así obtener la fórmula y la constante de proporcionalidad inversa.

A continuación se presenta la Guía de Actividades que identificamos como GA.

Guía de Actividades Relaciones entre variables

1) La siguiente tabla, ya conocida por ustedes, muestra algunos pares ordenados de la relación entre el radio y la longitud de una circunferencia

Radio de la circunferencia (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)
0	0
1	6,28
2	12,56
3	18,84
4	25,12
5	31,40
6	37,68

- a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente?
- b) ¿Cuánto será la longitud de la circunferencia si el radio es de 12 cm? ¿Y si el radio es de 70 cm?
- c) Si la longitud de la circunferencia es de 62,80 cm ¿Qué radio tiene? ¿Y si es de 94,20 cm?
- d) Explica cómo obtuviste las respuestas para los incisos b) y c) ¿Encontraste alguna/s regularidad/es en la tabla que te ayudaron? Descríbela/s.
- e) ¿De qué manera podemos calcular la longitud de la circunferencia sabiendo el radio que tiene? Explícalo con tus palabras.
- f) Realiza en GeoGebra el gráfico con los datos que proporciona la tabla y aquellos obtenidos en los incisos b) y c).

2) En una actividad experimental, se estudió el tiempo de vaciado de 6 recipientes con 750cc de agua cada uno, sabiendo que cada uno de ellos tenía en la base un orificio determinado y distinto a los demás. Los datos obtenidos aparecen en la siguiente tabla.

Área del Orificio (cm ²)	Tiempo de Vaciado (segundos)
0,5	60
1	30
1,5	20
2	15
2,5	12
3	10

- a) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente?
- b) ¿Cuánto tiempo tardaría en vaciarse el recipiente, si el orificio fuese de 6 cm²? ¿Y si fuese de 4 cm²?
- c) ¿Si el tiempo de vaciado fue de 120 segundos, ¿qué área tenía el orificio? ¿Y si fue de 6 segundos?
- d) Explica cómo obtuviste las respuestas para los incisos b) y c) ¿Encontraste alguna/s regularidad/es en la tabla que te ayudaron? Descríbela/s.
- e) ¿De qué manera podemos calcular el tiempo de vaciado de un recipiente conociendo el área del orificio? Explícalo con tus palabras.
- f) Realiza en GeoGebra, el gráfico con los datos que proporciona la tabla y aquellos obtenidos en los incisos b) y c).

Cada actividad de la GA fue estructurada de modo que los estudiantes, además de reconocer las variables involucradas (inciso a), pudieran obtener valores que no estaban presentes en las tablas (incisos b y c) a partir del descubrimiento de regularidades en el comportamiento de las variables. Así, el inciso d) pide que esas regularidades se hagan explícitas a fin de que surjan las propiedades que caracterizan a cada tipo de relación. El inciso e) apunta a obtener una generalización que permita más adelante obtener la expresión simbólica que represente la relación. Finalmente en el inciso f) se trabaja con la representación gráfica de la relación.

Estas actividades fueron realizadas en grupos de dos integrantes. Posteriormente se corregían de manera colectiva haciendo pasar al frente a los estudiantes para que presenten sus soluciones, discutan la validez de sus procedimientos al tiempo que el resto de la clase exponía maneras alternativas de resolución. A continuación relatamos algunas particularidades en la resolución de cada una de las actividades.

3.7.2.1 Resolución de la primera actividad

Para resolver los incisos b) y c) los estudiantes tuvieron que mirar con atención la tabla y buscar regularidades en ella. Allí notaron que:

- Al aumentar el radio de 1 en 1, la longitud de la circunferencia aumentaba de 6,28 en 6,28,
- Si multiplico por 2 al radio, se debe multiplicar por 2 la longitud de la circunferencia correspondiente,
- Si multiplico por 6,28 el radio de la circunferencia obtengo la longitud de la misma,
- Si divido por 6,28 la longitud de la circunferencia obtengo el radio de la misma.

Entonces, por ejemplo, en el inciso b) hacían uso de esas regularidades, para calcular la longitud de la circunferencia correspondiente al radio de 12 cm. Algunos alumnos tomaron el radio de 3 cm, vieron la longitud de la circunferencia que correspondía a ese radio y la multiplicaron por 4 (ya que el radio de 12 cm se obtiene multiplicado 3 cm por 4). Otros tomaron el radio de 6 cm y realizaron el mismo procedimiento multiplicando la correspondiente longitud de la circunferencia por 2. También tomaron la longitud de la circunferencia correspondiente al radio de 1 cm y la multiplicaron por 12.

Para dar respuesta al inciso c), en el caso en que tenían que averiguar el radio de la circunferencia con una longitud de 62,80 cm, también utilizaron la multiplicación pues rápidamente notaron que si multiplicaban por 10 la longitud de la circunferencia de radio 1 cm obtenían el valor que se les brindaba, entonces el radio buscado era 10 cm. En el caso en que la longitud de la circunferencia era 94,20 cm lo que hicieron los alumnos para averiguar su radio fue, o dividir la misma por 6,28, o bien hacerlo mediante prueba y error. En este último caso, lo que hacían era multiplicar longitudes de circunferencias dadas en la tabla por un número al azar hasta dar con el indicado (94,20 cm) y luego multiplicaban por ese mismo número al radio correspondiente para obtener el radio buscado.

Como ninguno de los alumnos sumo los radios y sus respectivas longitudes para responder a estos dos incisos, es decir, para obtener la longitud de la circunferencia de radio 12 cm podrían haber sumado las respectivas longitudes de las circunferencias de radios 5 cm y 7 cm, por ejemplo, entonces nosotras les hicimos notar esta propiedad. Eso lo logramos mediante preguntas como por ejemplo, *¿Cuál es la longitud de la circunferencia correspondiente al radio 7 cm? ¿Y la correspondiente a 13 cm?* La idea de realizar estas preguntas fue que no pudieran utilizar la propiedad de la multiplicación para responderlas. Los alumnos se dieron cuenta rápidamente de esta propiedad por lo que no nos generó mayores inconvenientes llegar a la misma.

Una cuestión que no resultó fácil para los alumnos, en esta instancia, fue explicar en forma escrita cómo obtuvieron los resultados para los incisos b) y c) según se solicitaba en el inciso d). A continuación, en la Figura 16 y 17, se muestran algunas de las respuestas que lograron escribir en el momento de la revisión.

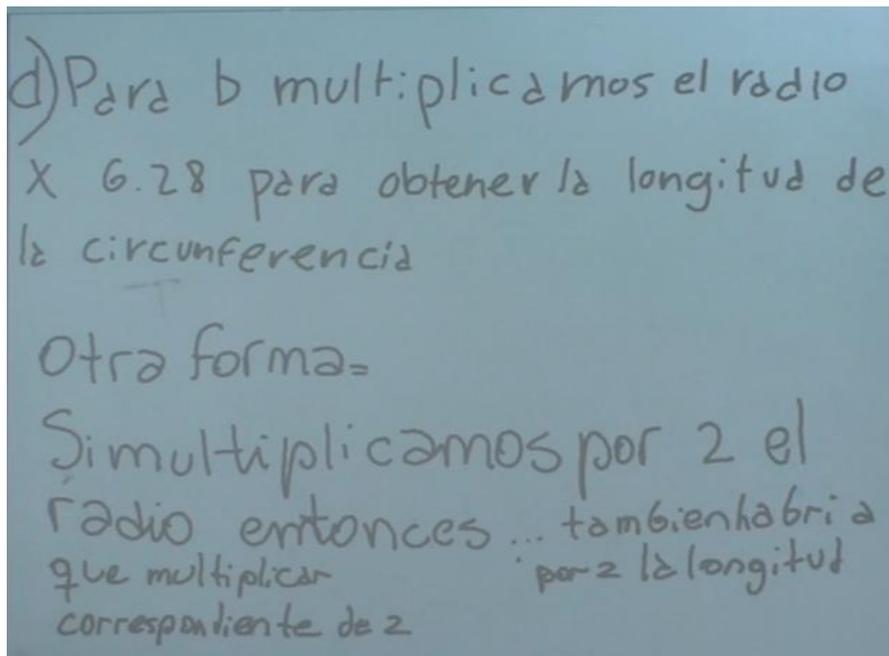


Figura 16. Respuesta de un alumno al inciso d) de la primera actividad.

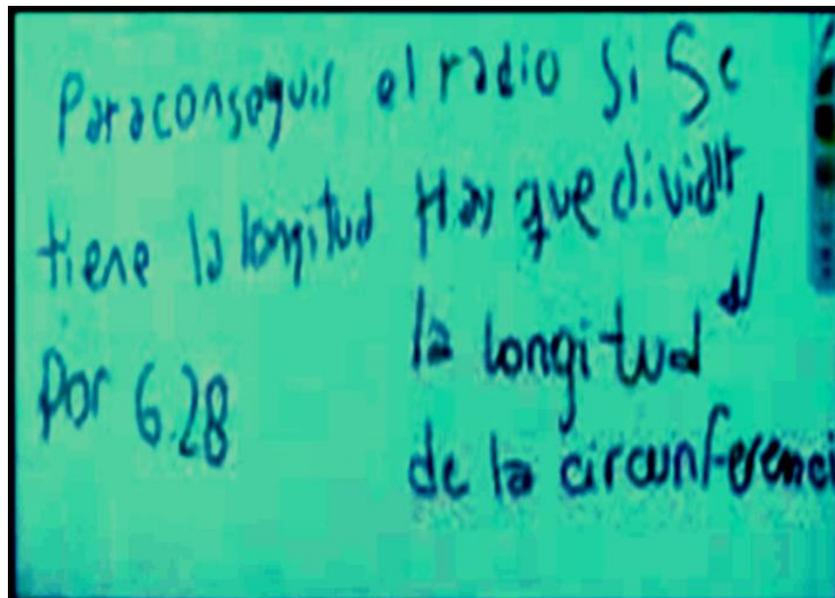


Figura 17. Respuesta de un alumno al inciso d) de la primera actividad.

Como mencionamos anteriormente, los alumnos, habían observado que si el radio aumentaba de 1 cm en 1 cm la longitud de la circunferencia aumentaba de 6,28 cm en 6,28 cm. Esta regularidad fue la que les permitió resolver el inciso e) pues llegaron a la conclusión que si multiplicaban por 6,28 el radio de la circunferencia, obtendrían la longitud de la misma.

Una vez que los alumnos habían descubierto que esa regularidad les permitiría calcular la longitud de cualquier circunferencia sabiendo el radio de la misma se les propuso traducirla a una expresión simbólica. Para llegar a la misma se reemplazó “longitud de la circunferencia” por L y “radio” por R y se obtuvo la expresión $R \times 6,28 = L$. Una vez que, conjuntamente con los alumnos, llegamos a esta expresión se les pidió que la introdujeran

en GeoGebra. Como anteriormente habíamos visto que GeoGebra aceptaba solo x o y como variables, fue necesario traducir esa expresión a la siguiente $x \times 6,28 = y$. Esto no causó dificultad para los alumnos.

Posteriormente un alumno pasó al frente y, en la pizarra interactiva, usando GeoGebra hizo el gráfico correspondiente. En él se marcaron los pares ordenados de la tabla e ingresaron nuevamente la fórmula encontrada para corroborar que la recta que la representa pasa por los puntos marcados.

Luego, se explicó a los alumnos que esta relación entre variables, con la cual estábamos trabajando, se denomina relación de proporcionalidad directa. También se les explicó que esta relación se caracteriza por tener las propiedades de suma y multiplicación que ellos habían encontrado, que su gráfico siempre se representa con una recta creciente que pasa por el origen, que la expresión simbólica que la representa es de la forma $y = a \times x$ y que el número a , en este caso 6,28, se llama constante de proporcionalidad directa. Además se les preguntó *¿Cómo creen que podríamos averiguar cuál es la constante de proporcionalidad si no la supiéramos?* Inmediatamente ellos respondieron que podrían hacerlo mirando el valor correspondiente a la unidad, es decir, cuál es la longitud de la circunferencia de radio 1 cm, o bien dividiendo la longitud de la circunferencia por su radio.

3.7.2.2 Resolución de la segunda actividad

En la segunda actividad, observando la tabla los alumnos habían advertido que:

- Si el área del orificio aumenta el tiempo de vaciado se reduce,
- Si multiplico por 2 el área del orificio debo dividir por 2 el tiempo de vaciado correspondiente,
- Si multiplico por 3 el área del orificio debo dividir por 3 el tiempo de vaciado correspondiente,
- El área del orificio multiplicado por el tiempo de vaciado da como resultado 30, en todos los casos.

Estas regularidades fueron las que les permitieron dar respuesta a los incisos b) y c), pues para calcular cuánto tiempo iba a tardar en vaciarse la botella si el orificio era de 6 cm^2 multiplicaban por dos el área de 3 cm^2 y dividían por dos el tiempo de vaciado correspondiente a esta área. También multiplicaban por tres el área de 2 cm^2 y dividían por tres el tiempo de vaciado respectivamente. Del mismo modo calcularon cuánto era el tiempo que tardaba en vaciarse la botella si el orificio era de 4 cm^2 .

Cabe destacar que en el momento de la corrección, un alumno pasó a escribir en la pizarra digital el tiempo de vaciado cuando el área del orificio es de 6 cm^2 . Para ello consideró el dato que en la tabla establece que si el orificio es de 3 cm^2 el tiempo de vaciado es de 10 s y respondió que si el área del orificio es de 6 cm^2 entonces el tiempo de vaciado sería de 20 segundos. Su respuesta puede verse en la Figura 18. Su justificación frente a la pregunta de cómo había resuelto este inciso era que había multiplicado por dos el área del orificio correspondiente a 3 cm^2 para obtener el de 6 cm^2 , y que entonces también debía multiplicar por dos el tiempo de vaciado correspondiente, obteniendo 20 s. Sus compañeros rápidamente dijeron que el resultado no era correcto y dieron la explicación pertinente de porqué no era así.

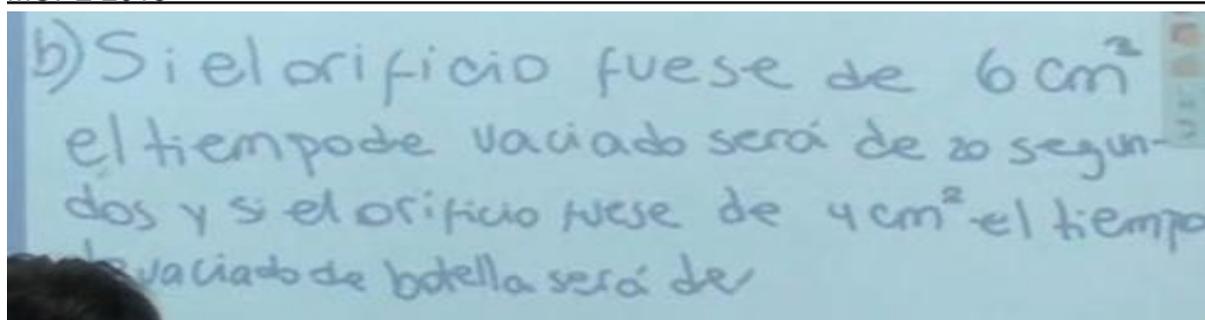


Figura 18. Respuesta de un alumno al inciso b) de la segunda actividad.

Para dar respuesta al inciso c) que pregunta por el área del orificio conociendo un tiempo de vaciado, hicieron el procedimiento inverso, es decir, si multiplicaban por un número el tiempo de vaciado entonces dividían por ese mismo número el área del orificio correspondiente. En el caso en que debían averiguar cuánto era el área del orificio de la botella si la misma se vaciaba en 120 segundos, multiplicaban por dos a 60 segundos (que era un valor que aparecía en la tabla) y dividían por dos al área correspondiente a este tiempo de vaciado (0,5 cm en este caso).

Las respuestas al inciso d), se controlaron oralmente, es decir, los estudiantes leían las respuestas que habían anotado en sus carpetas pero no se las dejó asentadas en la pizarra. Estas respuestas hacían explícitos los procedimientos realizados para resolver los incisos b) y c) y eran del tipo: "multiplico por 2 a 3 cm² para obtener 6 cm² y dividido por 2 a 10 segundos para obtener el tiempo de vaciado de 6cm²," multiplico por 2 a 60 segundos para obtener 120 segundos, entonces divido por 2 a 0,5 cm² para obtener el área".

En el inciso e) los alumnos lograron ver, ya con mayor facilidad que en la actividad referida a las circunferencias, que para encontrar el área del orificio de la botella (A), debían dividir 30 por el tiempo de vaciado (T). Equivalentemente también vieron que para obtener el tiempo de vaciado de una botella (T) debían dividir 30 por el área del orificio correspondiente (A). En la Figura 19 se muestran las expresiones simbólicas respectivas que anotaron en la pizarra.

A photograph of a whiteboard with two handwritten mathematical formulas in blue ink. The first formula is $30 \div T = A$ and the second formula is $30 \div A = T$.

Figura 19. Respuesta de un alumno al inciso e) de la segunda actividad.

Luego, en el inciso f) un alumno pasó a hacer, en la pizarra digital, usando GeoGebra el gráfico de los pares ordenados correspondientes a los datos de la tabla que les habíamos brindado. Además se les pidió que ingresen la fórmula $30 \div A = T$ que habían encontrado para corroborar que pase por los puntos ya marcados en el plano. Para esto fue necesario que tradujeran la expresión antes mencionada para ingresarla en GeoGebra, como $30 \div x = y$, considerando que ya se había definido que A era la variable independiente y T la variable dependiente.

Una vez que ingresaron la fórmula en GeoGebra y apareció el gráfico, se les comentó que este tipo de gráfico se llama hipérbola y se les hizo notar que la rama de la hipérbola que

aparece en el tercer cuadrante del plano cartesiano no tiene sentido en la relación que se estaba estudiando pues es irreal hablar de un área y un tiempo negativo.

Finalmente se explicó a los alumnos que esta relación se denomina relación de proporcionalidad inversa y se destacaron las propiedades que se habían utilizado para resolver incisos anteriores. Posteriormente se les preguntó cuál creían que era la constante de proporcionalidad en este caso y qué cálculos debíamos hacer para conseguirla, a lo que rápidamente respondieron que la constante de proporcionalidad inversa era 30 y que si multiplicaban el área del orificio por el tiempo de vaciado correspondiente siempre daba 30. Esta era una de las regularidades que los alumnos ya habían encontrado. Además notaron, al igual que en la actividad uno, que el tiempo de vaciado del orificio de área 1 cm^2 era igual a la constante de proporcionalidad inversa.

3.7.2.3 Cierre de la Guía de Actividades (GA)

Una vez concluida y corregida la GA, presentamos un Power Point con el fin de hacer un resumen de los contenidos trabajados durante su desarrollo y corrección.

Esta presentación contenía tanto las características y propiedades de la relación de proporcionalidad directa como las de la relación de proporcionalidad inversa. Para cada una de las relaciones se enunciaban las propiedades que la caracterizan, se explicaba cómo obtener la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica para finalmente mostrar el gráfico correspondiente. A continuación se muestra la secuencia de diapositivas correspondiente a la relación de proporcionalidad directa y en el Anexo 6.3 se pueden ver las correspondientes a la relación de proporcionalidad inversa.

Regularidades en la tabla

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)
0	0
1	6,28
2	12,56
3	18,84
4	25,12
5	31,40
6	37,68

X 2 X 2
X 3 X 3

Al multiplicar la variable independiente por un número n , su correspondiente valor de la variable dependiente queda multiplicado por el mismo número n .

1

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)
0	0
1	6,28
2	12,56
3	18,84
4	25,12
5	31,40
6	37,68

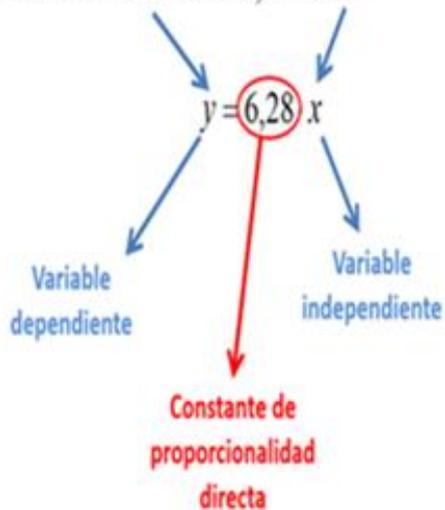
+ +

Al sumar dos valores de la variable independiente sus correspondientes valores de la variable dependiente quedan sumados.
Cabe aclarar que esta propiedad también es válida para la resta.

2

La relación en símbolos

Longitud de la circunferencia = 6,28 . Radio



3

Una regularidad importante

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)	Longitud de la circunferencia / Radio
0	0	No tiene solución
1	6,28	$\frac{6,28}{1} = 6,28$
2	12,56	$\frac{12,56}{2} = 6,28$
3	18,84	$\frac{18,84}{3} = 6,28$
4	25,12	$\frac{25,12}{4} = 6,28$
5	31,40	$\frac{31,40}{5} = 6,28$
6	37,68	$\frac{37,68}{6} = 6,28$

Al dividir valores de la variable dependiente por sus correspondientes valores de la variable independiente (salvo que ésta sea 0), siempre obtenemos el mismo número 6,28 al que llamamos **constante de proporcionalidad directa**.

4

Una regularidad importante

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)	Longitud de la circunferencia / Radio
0	0	No tiene solución
1	6,28	$\frac{6,28}{1} = 6,28$
2	12,56	$\frac{12,56}{2} = 6,28$
3	18,84	$\frac{18,84}{3} = 6,28$
4	25,12	$\frac{25,12}{4} = 6,28$
5	31,40	$\frac{31,40}{5} = 6,28$
6	37,68	$\frac{37,68}{6} = 6,28$

Es decir:

$$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Radio}} = \frac{y}{x} = 6,28$$

5

En general diremos que...

Una **relación de proporcionalidad directa** se representa simbólicamente a través de la expresión

$$y = k \cdot x$$

donde k es un número positivo que se denomina **constante de proporcionalidad directa**.

6

Recordemos que...

en una relación de proporcionalidad directa al dividir valores de la variable dependiente (y) por sus correspondientes valores de la variable independiente (x) (salvo para $x = 0$), siempre obtenemos el mismo número k , o sea la constante de proporcionalidad directa .

Simbólicamente: $\frac{y}{x} = k$

7

El gráfico correspondiente a una **relación de proporcionalidad directa** posee las siguientes características:

- Es una recta
- Es creciente
- Pasa por el origen de coordenadas, es decir pasa por $(0,0)$

8

Figura 20. Secuencia de diapositivas de la relación de Proporcionalidad Directa.

En los cronogramas implementados en cada uno de los cursos y que pueden verse en la Sección 3.6, es posible ver que esta presentación se realizó en dos partes. La primera parte, correspondiente a la caracterización de la relación de proporcionalidad directa, fue expuesta luego de la corrección de la primera actividad de la GA. Posteriormente se realizó una evaluación cuya fecha ya estaba pautada por la institución de manera inamovible desde antes del inicio de nuestras prácticas. Esto motivó que la corrección de la segunda actividad y la presentación de cierre correspondiente a la caracterización de la relación de proporcionalidad inversa se realizaran después de esta evaluación. Los detalles de la evaluación son tratados con mayor precisión en la Sección 3.9.

El día de la evaluación, a aquellos alumnos que iban terminando, se les entregaba una fotocopia con una nueva actividad (de aplicación de relaciones de proporcionalidad directa e inversa) para que realizaran mientras sus compañeros continuaban con la prueba, ya que no era permitido estar fuera del aula después de una evaluación. Una vez que todos los alumnos habían terminado de realizar la prueba, se continuó trabajando con esa actividad y se les pidió que el resto de la actividad la hicieran de tarea. Por cuestiones de falta de tiempo, la resolución de la actividad fue subida al aula virtual para que los alumnos pudieran corroborar sus resultados. Tanto la actividad como la corrección se encuentran en la Sección 6.1 de este trabajo.

Cabe informar que además del Power Point, se realizó un material de estudio que se encuentra en la Sección 6.2.

3.7.3 Tercera Etapa: Aplicación de los conocimientos en Proyectos de Modelización Matemática

En esta etapa propusimos una actividad abierta que buscaba que los estudiantes desarrollaran un proyecto de modelización en el cual se estudiaran relaciones entre variables en situaciones o fenómenos escogidos por ellos mismos. La misma fue realizada en grupos de cinco o seis personas.

La actividad se presentó a través de un Power Point donde cada una de nosotras realizó una presentación recordando las tres actividades experimentales y las variables que se relacionaban en cada uno de los casos. En la actividad “Circunferencias Animadas en GeoGebra” relacionábamos el radio con la longitud de una circunferencia, en la actividad “Vaciado de Botellas” las variables que se relacionaban eran el área del orificio en la base de la botella con el tiempo de vaciado y en la restante actividad, “El péndulo”, relacionábamos la longitud del hilo con el período fijando un ángulo de lanzamiento. Luego, recordamos cuál fue el problema que nos planteamos en cada una de las actividades y cómo fuimos desarrollando nuestro trabajo (Ver Figura 21).

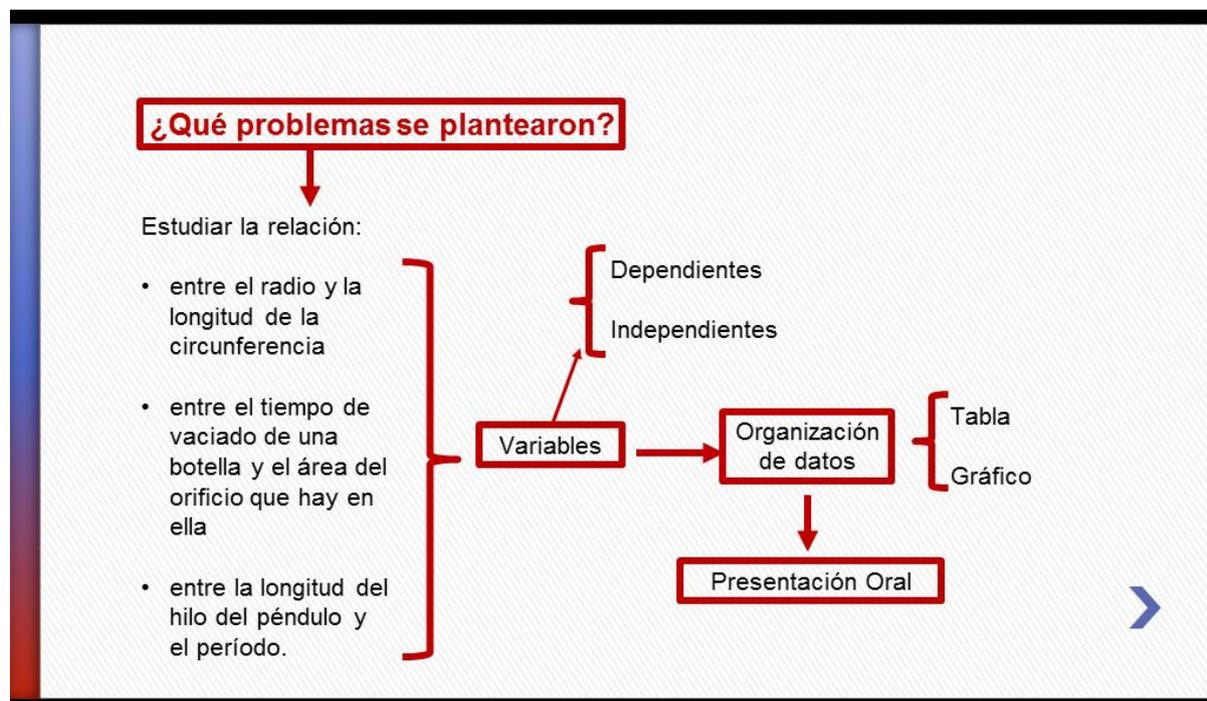


Figura 21. Síntesis del proceso seguido durante el trabajo en las actividades experimentales

Una vez realizada esa presentación se propuso a los estudiantes que asumieran el papel de un científico que quiere estudiar un fenómeno que no conoce y descubre nuevas relaciones entre variables involucradas en ese fenómeno. A través de un fragmento de la película “Mi villano favorito” en cuya historia se muestran los efectos de un rayo reductor al ser aplicado a diferentes objetos, se ve a un científico (el Dr. Nefario) que se da cuenta que: “De acuerdo a la masa del objeto es la rapidez con que el efecto del rayo reductor se pasa”. En este caso los estudiantes identificaron la existencia de una relación entre dos variables: la masa y el tiempo. La finalidad de proyectar este fragmento de la película fue mostrar que podían encontrar relaciones entre variables en diversas situaciones, y elegimos esta película ya que consideramos que resultaría familiar y divertida para los alumnos.

Luego que realizamos esta introducción, se presentó el cronograma a seguir especificando lo que se debía realizar en cada una de las próximas clases. El tiempo destinado para esta actividad fue de dos módulos y medio en 1ºA y 1ºB y tres módulos y medio en 1ºC. A continuación se muestra el cronograma propuesto para 1ºB. En las otras dos divisiones se siguió el mismo modelo.

Cronograma de actividades a realizar

<p><u>Selección de tema, planteo de problema e identificación de variables</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Elegir un fenómeno a investigar que les resulte de interés. • Plantear un problema. • Identificar variables que se pueden relacionar. • Decidir qué fuentes se van a utilizar para buscar datos o de qué manera se pueden recolectar. • Entregar a la profesora una hoja que contenga: <ol style="list-style-type: none"> 1. Integrantes del grupo. 2. Fenómeno o situación a investigar explicando los motivos De la elección. 3. Variables elegidas. • Breve exposición del fenómeno a investigar para compartir con la clase. 	<p>Primera Clase Lunes 14/09</p>
<p><u>Recolección, organización y representación de datos. Inicio del informe</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Recolección de datos respecto de la situación o fenómeno. • Organización y representación de los datos en tablas y gráficos. • Realización de un informe escrito. 	<p>Segunda Clase Martes 15/09</p>
<p>Finalización del informe y entrega.</p>	<p>Tercera Clase Viernes 18/09</p>

El período en que se realizó el proyecto de modelización se ajustó a este cronograma ya que con esta actividad finalizamos nuestras prácticas y la docente titular del curso debía cerrar las notas del trimestre.

Una vez que los alumnos habían seleccionado una situación y establecido las variables a estudiar, debían buscar la información correspondiente a su problema o realizar una experimentación para poder recolectar los datos necesarios, organizarlos y presentarlos en tablas y/o gráficos. Por último, debían elaborar y entregar un informe escrito para cuya realización tenían pautas a seguir. Esas pautas fueron subidas al aula virtual y pueden verse a continuación:

RELACIONES ENTRE VARIABLES

PAUTAS PARA LA REALIZACIÓN DEL INFORME ESCRITO

Aclaración: Este informe debe ser entregado el día (fecha asignada en cada curso). La nota que obtendrán en este trabajo será de 5 puntos y se sumará con la calificación de las primeras actividades en el laboratorio.

El informe deberá contener los siguientes ítems:

1. Carátula

- título del trabajo
- nombre de los integrantes del grupo
- nombre de la escuela
- nombre de la materia
- fecha de entrega

2. Introducción

- Descripción del fenómeno o situación a investigar explicando los motivos de la elección.
- Planteo del problema.
- Variables consideradas para resolver el problema y variables descartadas.
- Explicación acerca de cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

3. Procedimiento de recolección de datos

- En caso que se realice un experimento, explicar el diseño del experimento.
- En caso que no se realice un experimento, especificar la fuente de donde se obtuvieron los datos.

4. Organización y presentación de datos

- Tabla
- Gráfico
- Fórmula (si fuera posible)

5. Conclusiones

Incluir respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Encontraron alguna dependencia entre las variables seleccionadas? ¿Cuál?
- ¿Encontraron alguna regularidad? ¿Algo que les llame la atención?
- Esta relación que encontraron, ¿les es familiar respecto a las que estuvimos estudiando?
Explica por qué.

6. Bibliografía

Listado en orden alfabético de fuentes que hayan consultado para obtener información incluyendo libros, revistas y páginas de Internet.

Les proponemos que en el informe incluyan fotos, imágenes ilustrativas, etc. que quieran mostrarnos acerca de la producción del trabajo y que representen la situación que eligieron.

Estas pautas se elaboraron para que los alumnos tuvieran un esqueleto que les permitiera realizar el informe pedido ya que no estaban familiarizados con la manera de escribir un informe. Además se aclaró que podrían agregar cualquier información que les pareciera pertinente respecto a su trabajo.

Durante la realización de la actividad se buscó que los estudiantes se coloquen en el papel de científicos y realicen actividades más de tipo experimental que una mera búsqueda de datos o informaciones en Internet.

A continuación presentamos algunos comentarios referidos a las actividades planteadas para las dos primeras clases.

3.7.3.1 Selección de tema, planteo de problema e identificación de variables

Durante la primera clase, en general la mayoría de los grupos de estudiantes lograron plantear un problema y concluir la primera parte de la actividad, pero hubo ciertos grupos en los que se aferraron demasiado a una mera búsqueda de información por Internet y plantearon situaciones que no permitían una experimentación por parte de los alumnos o el tiempo con que se contaba no era suficiente para la misma por lo que hubo que guiarlos para la elección del fenómeno y esto provocó un desfasaje en los tiempos explicitados en el cronograma. Las dificultades surgidas en torno a las formas de guiar a los alumnos en esta actividad se abordarán con mayor profundidad en la Sección 4.

Tanto los temas elegidos por los estudiantes como los problemas planteados fueron muy variados. Hubo trabajos de carácter más experimental y para poder llevarlos a cabo, los alumnos trajeron materiales para realizar experimentos y mediciones en el laboratorio. La variedad antes referida puede verse en las tablas que se muestran a continuación para cada una de las divisiones. Las mismas presentan, para cada grupo, el tema elegido, las preguntas planteadas y las variables seleccionadas inicialmente.

Proyectos desarrollados en 1^{ro} A

Grupo	Tema	Pregunta que se plantearon	Variabes
1	Cuota de la institución	¿Cuánto dinero recauda una institución si su cuota mensual es de \$2500? Si la cuota de una institución aumenta \$250 cada mes, ¿cuánto dinero recauda la institución a lo largo de medio año?	Cantidad de personas que concurren a la institución y recaudación Aumento de la cuota y tiempo en meses que transcurre
2	Salto de Felix Baumgartner desde la estratosfera	¿Cuánto tiempo tardó el paracaidista Felix Baumgartner en realizar el salto desde la estratosfera? ¿A qué velocidad lo hizo?	Velocidad, distancia recorrida y tiempo transcurrido
3	Construcción de edificios	¿Cuánto tiempo se tarda en construir un edificio de determinada altura?	La altura del edificio y el tiempo que tarda en construirse
4	Tiempo empleado para el recorrido del avión	¿Cuánto tiempo tarda un avión en recorrer determinada distancia?	La distancia que recorre el avión y el tiempo que tarda en recorrerla
5	Inflado de pelotas	¿Cuánto tiempo tardan en inflarse pelotas de pesos diferentes?	Peso de la pelota y tiempo que tarda en inflarse
6	Caída de objetos en el agua	¿Cuánto tiempo tardan en caer objetos de distintos pesos en un recipiente con agua?	Peso del objeto y tiempo que tarda en caer
7	Tablets y duración de la batería	¿Cuánto tiempo tarda en agotarse la batería de la tablet?	El tiempo y el porcentaje de gasto de la batería

En este caso los proyectos de los grupos 5, 6 y 7 requerían del diseño de un experimento para la recolección de datos.

Proyectos desarrollados en 1^{ro} B

Grupo	Tema	Pregunta que se plantearon	Variables
1	Fabricación de caramelos	¿Cuántos kg de caramelos se producen en una fábrica en un tiempo determinado?	Cantidad de caramelos producidos en kg y tiempo transcurrido
2	Alimentación de un perro bóxer	¿Cuánta plata se va a gastar en un determinado período de tiempo según la cantidad de alimento balanceado que come un bóxer?	Precio del alimento balanceado y cantidad que come un bóxer en un tiempo determinado
3	Fútbol con las manos	¿Cuántos goles convirtió Bautista dependiendo de la longitud del arco?	Cantidad de goles que convirtió Bautista y longitud del arco
4	Duración de la batería de las tablets	¿Cuánto tiempo tarda en gastarse la batería de una tablet dependiendo del brillo de la pantalla?	Brillo de la pantalla y tiempo en que se consume la batería
5	Hundimiento de objetos en el agua	¿Cuánto tarda un objeto en hundirse en un recipiente con agua dependiendo de su peso?	Peso de un objeto y tiempo que tarda en hundirse en un recipiente con agua
6	El cambio de la temperatura del agua mientras se calienta	¿Cuánto va cambiando la temperatura del agua a medida que va pasando el tiempo, cuando se la calienta hasta hervir?	Temperatura del agua -mientras se calienta hasta hervir y tiempo transcurrido

En este caso, los proyectos, 3, 4, 5 y 6 implicaron el diseño de algún experimento.

Proyectos desarrollados en 1^{ro} C

Grupo	Tema	Pregunta que se plantearon	Variables
1	Venta de entradas para la cancha	¿Cuánto dinero recaudaría un club de fútbol con respecto a la venta de entradas para un partido?	Cantidad de personas que van a la cancha y recaudación
2	Elaboración de pan/ criollos/ medialunas	¿Cuántos kg de harina se precisan para hacer determinados kg de pan, criollos, medialunas?	Cantidad de harina y cantidad de pan/ criollos/ medialunas que pueden producirse
3	Cambio de la temperatura ambiente a medida que aumenta la altitud	¿Cuánto va cambiando la temperatura a medida que se asciende hasta determinada altura?	Temperatura y altitud
4	Recorrido y tiempo empleado	¿Cuánto tiempo tarda una persona en recorrer cierta distancia, y luego considerar que a mitad del camino se detiene a hablar con alguien?	Distancia recorrida y tiempo transcurrido bajo ciertas condiciones
5	Gastando tizas	¿Cuánto tiempo tardan en gastarse tizas de diferentes tamaños?	Tamaño de una tiza y tiempo que tarda en consumirse
6	Derritiendo chocolate	¿Cuánto tiempo tardan en derretirse chocolates de pesos diferentes?	Peso del chocolate y tiempo que tarda en derretirse

Los proyectos de los grupos 4, 5 y 6 implicaron la obtención de datos a partir de la realización de algún tipo de medición propia.

3.7.3.2 Recolección, organización y representación de datos

Para la segunda clase, buscamos información e investigamos acerca de las ideas que surgieron en los distintos grupos para ir haciendo avanzar los trabajos. En esta instancia aún un mínimo número de grupos ultimaban detalles de cuál sería la problemática que trabajarían, por lo que la búsqueda de información tuvo que ser realizada extra escolarmente para poder concluir la actividad en la siguiente clase.

Cabe destacar que en este momento, el trabajo en colaboración fue de suma importancia ya que hubo grupos que tuvieron que realizar su experiencia en el laboratorio y otros en el aula, y dado que los alumnos deben estar siempre acompañados por un docente, el hecho de poder atender a todos los proyectos fue logrado gracias al trabajo colaborativo con las profesoras supervisora y tutora y nuestro par pedagógico.

A continuación mostramos, con más detalles y a modo de ejemplo, el trabajo de dos grupos correspondientes a 1ºB. Uno de ellos de carácter experimental y el otro que requería de la búsqueda de información en diferentes medios.

- El cambio de la temperatura del agua mientras se calienta

En este proyecto, los alumnos se plantearon el interrogante: ¿Cuánto va cambiando la temperatura del agua a medida que va pasando el tiempo, cuando se la calienta hasta el punto de hervor? Para dar respuesta a la pregunta planteada, el grupo diseñó un experimento, se dirigió al laboratorio y su trabajo fue orientado por nuestra profesora supervisora.

Una vez en el laboratorio, los alumnos utilizaron un beaker que llenaron con 350 ml de agua y luego de medir la temperatura inicial de la misma empleando un termómetro, lo colocaron a calentar en un mechero con el fin de registrar la variación de la temperatura hasta que el agua hirviera (ver Figura 22).



Figura 22. Medición de la temperatura del agua en un beaker sobre un mechero.

Una vez que comenzaron a calentar el agua, fueron registrando la temperatura cada dos minutos durante el lapso de 30 minutos y luego organizaron los datos en una tabla que puede verse en la Figura 23.

Tiempo que tarda (min)	Temperatura del agua (C°)	Datos registrados en la tabla
0 (antes de calentar)	20	
2	25	
4	30	
6	38	
8	45	
10	50	
12	57	
4	62	
16	67	
18	72	
20	77	
22	82	
24	87	
26	92	
28	97	
30	98	

Figura 23: Muestra los datos registrados por uno de los grupos en el proyecto de modelización.

Una vez recolectados los datos, buscaron regularidades en la tabla y graficaron los pares ordenados obtenidos en GeoGebra (Ver Figura 24). Los alumnos describieron una regularidad que notaron en su tabla: en el intervalo comprendido entre 12 y 28 minutos, la temperatura ascendía de a 5°C. Los alumnos además, aclararon que este fenómeno no era representado por una relación de proporcionalidad directa ni inversa pues, por lo visto a lo largo del período de las prácticas, no se cumplían las condiciones para que sea alguna de estas dos relaciones.

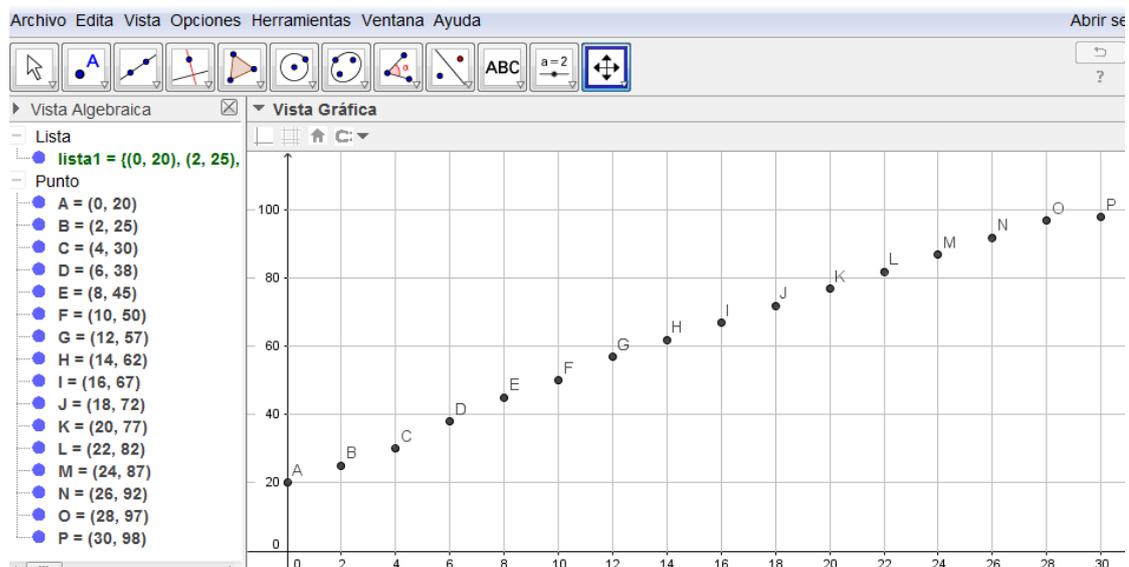


Figura 24. Muestra el gráfico obtenido por uno de los grupos en su proyecto de modelización.

- Venta de entradas para la cancha

El grupo, se planteó inicialmente la siguiente pregunta: ¿Cuánto dinero recaudaría un club de fútbol con respecto a la venta de entradas para un partido? para dar respuesta a su interrogante los alumnos fijaron que el club que estudiarían es el club atlético belgrano y que la cancha en que jugarían sería el Mario Alberto Kempes, averiguaron la capacidad de la cancha, el precio de las entradas para hombres dependiendo el sector de la cancha, Gasparini, Ardiles, Willington y Artime y establecieron que la variable independiente es la cantidad de personas y la variable dependiente la cantidad de dinero recaudado además aclararon en su trabajo que realizaron esa elección porque la cantidad de personas no dependía de otra variable, es decir, que consideraron que dependiendo la cantidad de personas que asistan al partido será la cantidad de dinero recaudado.

Finalmente, realizaron las siguientes tablas organizando los datos que recolectaron en su búsqueda de información respecto del a situación que se plantearon estudiar:

Cantidad de personas Gasparini (hombres)	Plata recaudada (\$)
1	150
10	1.500
100	15.000
1.000	150.000
10.000	1.500.000
11.000	2.850.000

Cantidad de personas Ardiles (hombres)	Plata recaudada (\$)
1	200
10	2.000
100	20.000
1.000	200.000
10.000	2.000.000
11.000	2.800.000

Cantidad de personas Artime y Willington (hombres)	Plata recaudada (\$)
1	120
10	1.200
100	12.000
1.000	120.000
10.000	1.200.000
11.000	1.320.000

Figura 25. Datos organizados en tablas.

Luego colocaron las páginas de internet de donde recolectaron sus datos y obtuvieron las siguientes fórmulas representativas de su situación:

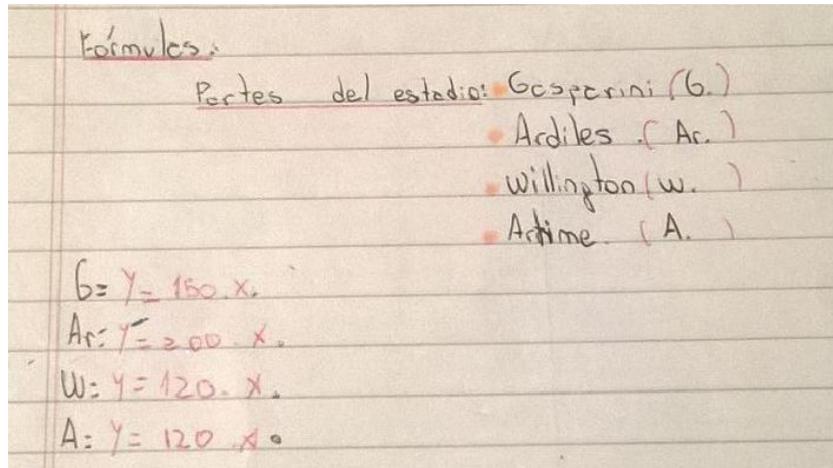


Figura 26. Expresión simbólica obtenida por un grupo de alumnos en su proyecto de modelización.

La única regularidad que mencionaron en su trabajo es meramente numérica, ellos notaron que al multiplicar por diez la cantidad de personas que asisten, se multiplica por diez la cantidad que el club recaudará, y concluyen que su relación se enmarca dentro de una relación de proporcionalidad directa basándose en lo visto durante el transcurso de nuestras prácticas.

3.7.3.3 Para finalizar

En la tercera clase, la primera parte, se destinó para finalizar las actividades en los distintos grupos y en los últimos quince minutos aproximadamente se presentó un Power Point de cierre donde se mostraba una breve descripción de cada una de las actividades que realizó cada grupo y cuáles eran las variables estudiadas en cada situación. También se brindaron unos minutos a los alumnos para que contaran brevemente acerca de sus proyectos. Finalmente, guardamos los proyectos realizados por los alumnos en un pendrive para efectuar la corrección. Una vez corregidos los informes, se realizaron devoluciones escritas que fueron cargadas en el aula virtual. En la Sección 3.8.2 puede verse un ejemplo de tales devoluciones.

3.8 La Evaluación

Durante las prácticas la evaluación se realizó a través de tres instancias:

- 1) Las Actividades Exploratorias Iniciales, de carácter grupal
- 2) Los informes de los Proyectos de Modelización, de carácter grupal
- 3) Una evaluación sumativa individual y escrita

A partir de estas tres instancias se obtuvieron dos notas. Una conformada por la suma de las notas asignadas a las dos producciones grupales, que tenían un valor máximo de 5 puntos cada una. Esta puntuación era asignada a todos los integrantes del grupo. La otra nota se obtenía a partir de la evaluación escrita individual con valor máximo de 10 puntos.

En las siguientes secciones describimos cada una de las instancias evaluativas, presentamos los instrumentos utilizados, los criterios elaborados y reportamos los resultados obtenidos en cada una de ellas.

3.8.1 Actividades Exploratorias Iniciales

Las Actividades de carácter exploratorio que se llevaron a cabo al comenzar las prácticas y que tuvieron una duración de dos semanas aproximadamente, fueron evaluadas en sus tres partes. Para poner una nota se tuvo en cuenta tanto el trabajo que los alumnos realizaron en laboratorio recogiendo datos, así como también la elaboración de un informe que consistía en organizar los datos y responder una serie de preguntas, y la exposición oral de todo el trabajo realizado.

Para poder evaluar estas actividades se realizó una rúbrica con los criterios de evaluación pertinentes a cada una de las tres partes de la actividad y sus correspondientes puntajes. Este instrumento, que mostramos a continuación, fue únicamente para las practicantes, es decir, los alumnos no tuvieron acceso a este documento:

Primera parte (1,5 puntos)	Trabajo en grupo (0,75 puntos)	Participación. (Puesta en común de lo que cada uno de los alumnos realizó del trabajo al resto de los integrantes del grupo) (0,25 puntos)
		Responsabilidad en cuanto a la actividad. (Traer tanto las actividades así como también los datos recolectados en para las próximas clases) (0,5 puntos)
	Recolección de datos (0,75 puntos)	Realizar correctamente la actividad llegando a obtener los datos necesarios. (Se tendrá en cuenta la manera en que recolectaron los datos, en el caso de las circunferencias animadas si realizaron bien la animación, en el caso del péndulo si fijaron correctamente el resto de las variables como se pedía en la consigna) (0,75 puntos)
		Identifica correctamente las variables (0,45 puntos)

Segunda parte (2,5 puntos)	Inciso a (0,45 puntos)	Identifica bien sólo una de las variables (0,25 puntos)
		No identifica las variables (0 puntos)
	Inciso b (0,3 puntos)	Pudieron encontrar una relación entre las variables (0,3 puntos)
		No encontraron una relación entre las variables (0 puntos)
	Inciso c (0,4 puntos)	Realizaron una tabla aunque no cumplan con las formalidades (0,4 puntos)
		No realizaron una tabla (0,2 puntos)
	Inciso d (0,25 puntos)	Pudieron escribir los pares ordenados correctamente (0,25 puntos)
		No pudieron escribir los pares ordenados pero graficaron correctamente (0,1 puntos)
	Inciso e (0,5 puntos)	Encontraron regularidades correctas (0,4 puntos)
		Logran describir correctamente las regularidades encontradas (0,1 punto)
No encontraron regularidades correctas (0 puntos)		
Gráfico en GeoGebra	Grafican correctamente (tenemos en cuenta los puntos que ellos encontraron en el inciso d) (0,25 puntos)	

	(0,25 puntos)	En el caso de que no ingresen correctamente el par ordenado, poniendo “,” en lugar de “.” en la cifra decimal (0,15 puntos)
		No grafican correctamente (tenemos en cuenta los puntos que ellos encontraron en el inciso d) (0 puntos)
	Entrega de archivos (0,35 puntos)	Entregaron en tiempo y forma todos los archivos que se les solicitó (0,35 puntos)
		Entregaron en tiempo y forma solo una parte de los archivos (0,2 puntos)
		No entregaron en el tiempo requerido (0 puntos)
	Tercera Parte (1 punto)	Presentación de la actividad (1 punto)
Cumplieron con todos los ítems que se les solicitó que contenga la presentación (0,25 puntos)		
Dedicación y esmero en la realización de la presentación (incorporación de imágenes o videos) (0,15 puntos)		

En la tabla presentada, los puntajes son distribuidos de manera diferenciada. En la Segunda Parte son asignados de manera gradual mientras que en la Primera y Tercera Parte los puntajes se suman según corresponda.

Una vez realizadas las correcciones del trabajo se elaboró un informe con las correspondientes devoluciones para cada uno de los grupos. A continuación mostramos un ejemplo de devolución realizada para un grupo que trabajó con la actividad “Vaciado de botellas”:

Integrantes		
		Puntaje
<p>Primera Parte del Trabajo (1,5)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Trabajo en grupo. • Realización correcta de la actividad. 	<ul style="list-style-type: none"> • Han realizado un muy buen trabajo en grupo. • Realizaron correctamente la actividad. 	1,5
<p>Segunda Parte del Trabajo (2,5)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificación de variables. • Identificación de la relación entre variables. • Organización de los datos en una tabla. • Escritura de los pares ordenados. • Identificación y descripción de regularidades. • Realización del gráfico de pares ordenados. • Entrega del Trabajo en tiempo y forma. 	<ul style="list-style-type: none"> • Han identificado correctamente las variables. • La descripción de la relación entre las variables no es la adecuada ya que describieron una relación entre el tiempo de vaciado y la velocidad en que el agua se vierte y las variables a relacionar eran el área del orificio y el tiempo de vaciado. • Han organizado adecuadamente los datos registrados utilizando una tabla. • Pudieron escribir correctamente los pares ordenados. • Pudieron identificar regularidades correctas pero la forma en que las describen no es precisa. • No realizaron el gráfico en GeoGebra en el informe escrito, pero lo hicieron al momento de la exposición y lo presentaron correctamente. • Entregaron en tiempo y forma todos los archivos que se les pidió. 	2
<p>Tercera Parte del Trabajo (1)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Presentación ordenada y participación de todos los integrantes en ella. • Cumplimiento con todos los datos solicitados. 	<ul style="list-style-type: none"> • Presentación ordenada y participación pertinente de todos los alumnos del grupo en ella. • No han incluido en la presentación el gráfico en GeoGebra y este era uno de los datos solicitados. 	0,7

<ul style="list-style-type: none"> • Dedicación e incorporación de imágenes en la realización de la presentación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se muestra una dedicación en la presentación aunque no han incluido imágenes ni videos. 	
Puntaje Total		4,2

Las notas grupales asignadas al trabajo que realizaron los alumnos con estas actividades exploratorias iniciales se muestran a continuación en la Tabla 1:

Notas 1ºA	Notas 1ºB	Notas 1ºC
3,5	3,5	4
3,9	3,7	4,2
4,2	4,2	4,6
4,4	4,3	4,7
4,9	4,5	5
5	5	5

Tabla 1. Notas grupales.

En el curso 1ºB, durante el transcurso de las dos primeras semanas de realización de las prácticas, hubo un alumno ausente por cuestiones de salud entonces cuando este retomó la actividad escolar se decidió que desarrollara la primera y segunda parte de la actividad denominada "Circunferencias Animadas en GeoGebra". A este alumno se lo evaluó con los mismos criterios que a sus compañeros y la nota que obtuvo fue de 4 puntos ya que no se consideró el puntaje de la tercera parte del trabajo correspondiente a la exposición oral pues por razones de tiempo no la realizó.

3.8.2 Proyecto de Modelización

Al plantear el proyecto de modelización se entregó a los alumnos una serie de pautas que se expusieron en la Sección 3.7.3. Estas pautas fueron la base para la elaboración de los criterios de evaluación.

Los criterios de evaluación que se tuvieron en cuenta en el momento de puntuar el informe realizado por los alumnos fueron los siguientes:

1 - Formulación del problema e identificación de variables (1 Punto):

Puntos	Descripción
0	El grupo no formula el problema y no identifica las variables.
0,5	<ul style="list-style-type: none"> • El grupo formula el problema y no identifica variables. • El grupo identifica variables y no formula el problema.
0,7	El grupo formula el problema e identifica variables.
0,8	El grupo formula el problema e identifica variables relacionadas con su problema.
0,9	El grupo formula el problema e identifica variables relacionadas con su problema detallando aquellas descartadas.
1	El grupo formula el problema, identifica variables relacionadas con su problema, detalla aquellas descartadas y reconoce cuál es la variable dependiente e independiente en la relación que estudió dentro de su fenómeno.

2 - Recolección de datos y/o búsqueda de información (1,5 Puntos):

Puntos	Descripción
0	El grupo no recolecta datos ni busca información alguna.
1	El grupo diseña un experimento, trae los elementos necesarios para realizarlo, recolecta datos pero no son pertinentes para resolver su problema.
0,7 ²	El grupo realiza una búsqueda de datos pero no son pertinentes para resolver su problema.
1,5	El grupo diseña un experimento, trae los elementos necesarios para realizarlo, recolecta datos adecuados para resolver su problema. Utilizan unidades adecuadas y/o realizan las conversiones de unidades necesarias. Incluyen fotos.
	El grupo realiza una búsqueda de datos adecuada y

² Estos puntajes son diferenciados según el proyecto sea de carácter experimental o no.

	que le permite resolver su problema. Utilizan unidades adecuadas y/o realizan las conversiones de unidades necesarias. Incluyen imágenes y/o bibliografía.
--	--

3 - Organización y presentación de datos (1,5 Puntos):

Puntos	Descripción
0	El grupo no realiza una tabla y no realiza el gráfico.
0,7	<ul style="list-style-type: none"> • El grupo realiza una tabla pero no realiza el gráfico (o este no está correcto). • El grupo realiza el gráfico pero no realiza una tabla.
1	El grupo realiza una tabla y realiza el gráfico pero cumple parcialmente con los requerimientos formales (encabezados, nombre de los ejes, unidades).
1,3	El grupo realiza una tabla cumpliendo con todos los requerimientos formales (encabezados, nombre de los ejes, unidades), realiza el gráfico correctamente y no obtiene una fórmula, pudiendo hacerlo.
1,5	El grupo realiza una tabla cumpliendo con todos los requerimientos formales (encabezados, nombre de los ejes, unidades), realiza el gráfico correctamente y obtiene (si es posible) la fórmula que describe el fenómeno que está estudiando.

4 -Conclusiones y bibliografía (1 Punto):

Puntos	Descripción
0	El grupo no obtiene conclusiones.
0,6	El grupo obtiene conclusiones respondiendo parcialmente a las preguntas planteadas en las pautas del informe.
1	El grupo obtiene conclusiones respondiendo a las preguntas planteadas en las pautas del informe y al fenómeno estudiado, reporta dificultades, reflexiones.

Al igual que en el caso de las Actividades Exploratorias Iniciales realizamos una devolución para cada uno de los grupos que contaba con los detalles del contenido evaluado y su correspondiente puntaje. En estas devoluciones se incluían comentarios en relación a cada uno de los ítems evaluados según se especificó antes. Para elaborar estas devoluciones se tuvo en cuenta el trabajo realizado por cada uno de los grupos en el aula durante las tres clases en las cuales se llevó a cabo el proyecto y el informe final elaborado por los alumnos.

A continuación mostramos la devolución realizada a uno de los grupos.

Integrantes		
		Puntaje
Formulación del problema e identificación de variables (1 Punto)	Han logrado formular el problema, identificar las variables relacionadas con su problema, detallando aquellas descartadas. Reconocen cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente en la relación que estudiaron dentro de su fenómeno.	1
Recolección de datos y/o búsqueda de información (1,5 Puntos)	Han diseñado un experimento y trajeron los elementos necesarios para realizarlo, además recolectaron los datos adecuados para resolver su problema. Realizaron las conversiones de unidades necesarias. No han incluido fotos en el trabajo. Incluyeron bibliografía.	1,5
Organización y presentación de datos (1,5 Puntos)	Realizaron una tabla cumpliendo con todos los requerimientos formales (encabezados, unidades, etc.) y realizaron el gráfico correctamente. No han obtenido la fórmula que muestra la relación estudiada.	1,3
Conclusiones (1 Punto)	Obtuvieron conclusiones respondiendo parcialmente a las preguntas planteadas en las pautas del informe.	1
Puntaje Total		4,8

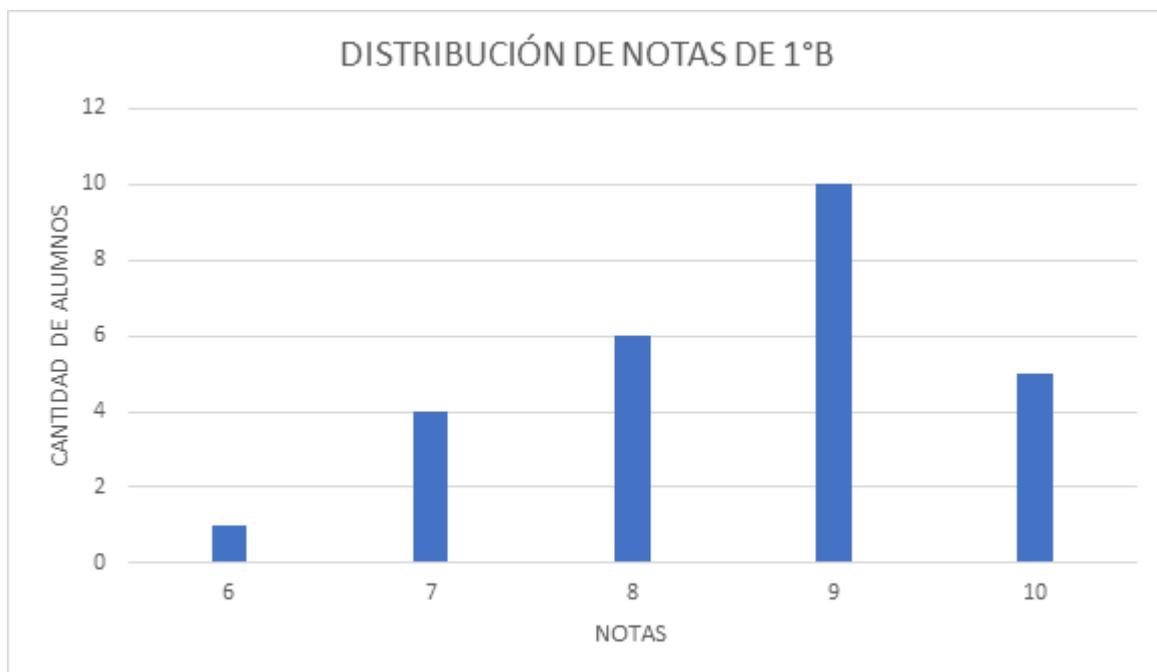
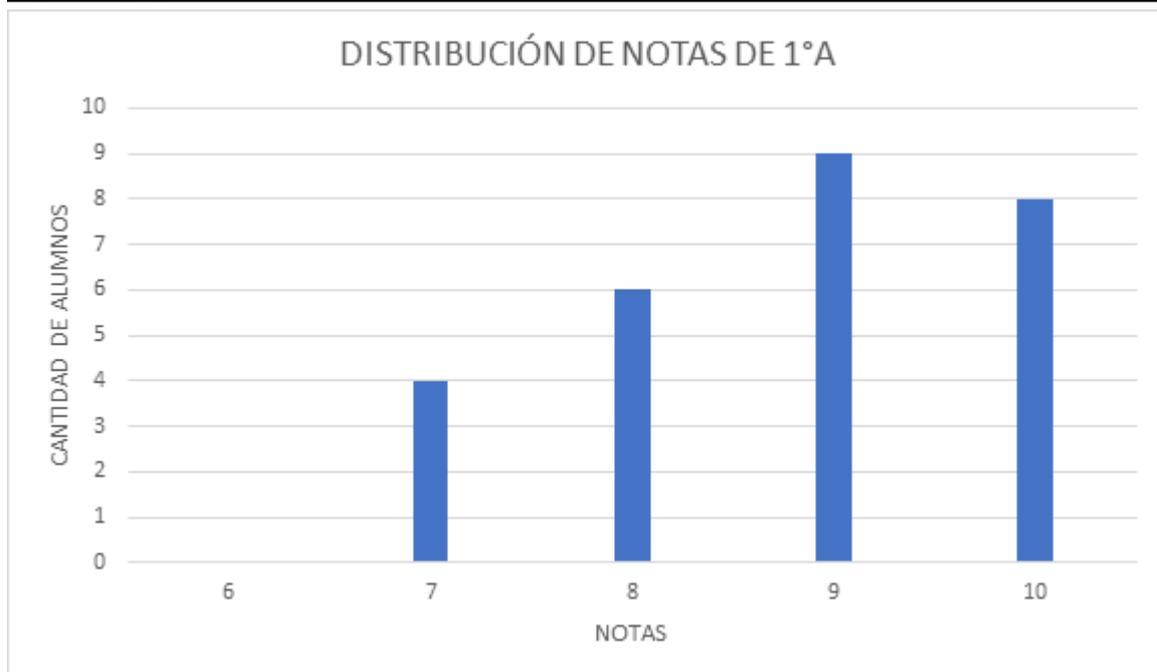
Los resultados obtenidos por los diferentes grupos en el proyecto de modelización se reflejan en la siguiente tabla:

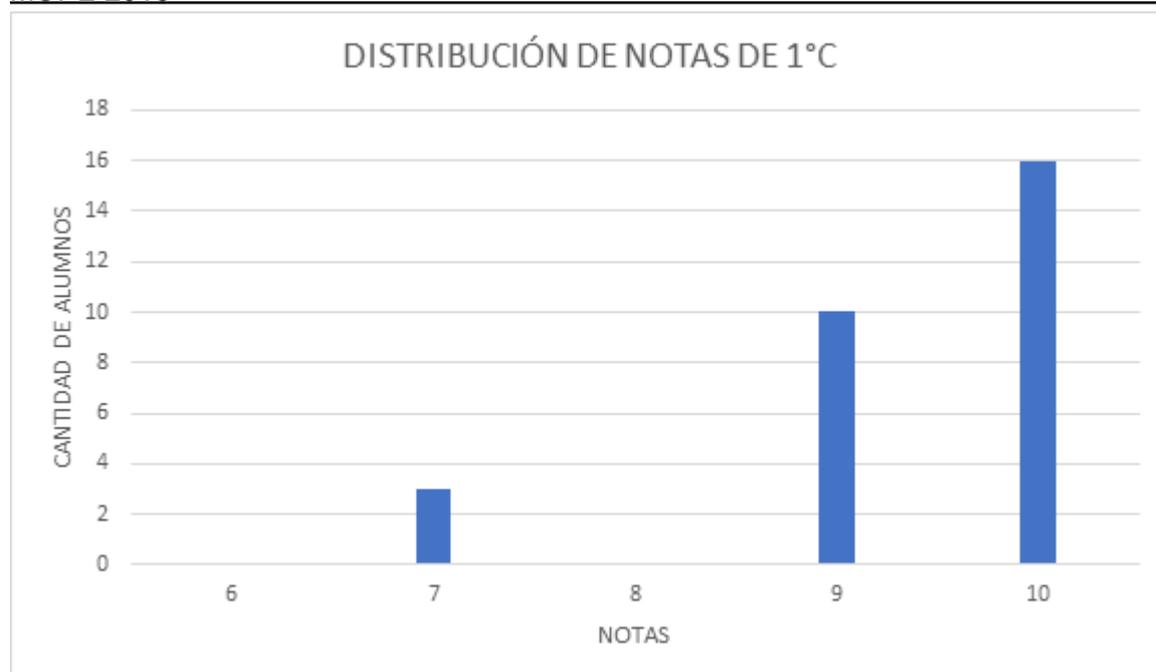
Notas 1ºA	Notas 1ºB	Notas 1ºC
2,8	2,5	3
4,2	3,4	4,8
4,4	4,4	4,8
4,8	4,5	5
4,8	5	5
4,8	5	5
5		

Tabla 2. Notas grupales.

Tanto en el curso 1ºB como en 1ºC surgieron situaciones inesperadas durante las clases en las que se realizaba el proyecto de modelización. En 1ºB un alumno realizó un viaje y no asistió a ninguna de las tres clases, otro alumno asistió solo a la primera clase y faltó a las últimas dos por motivos que desconocemos. En 1ºC una alumna se cambió de división en la segunda clase dedicada al proyecto. Frente a estas situaciones se tomó la determinación que para estos tres alumnos la nota de la primera instancia de evaluación (el referido a las Actividades Exploratorias Iniciales) tuviera un puntaje máximo de 10 en vez de 5. Así, la nota final de estos alumnos sería la nota que habían obtenido en ese trabajo, multiplicada por 2.

A continuación están expuestos los gráficos que muestran, para cada curso, la distribución de las notas finales correspondientes a las Actividades Exploratorias Iniciales + el Proyecto de Modelización ya que como hemos dicho anteriormente estas calificaciones eran sumadas para conformar una sola nota final. Cabe aclarar además que los grupos conformados para cada una de estas actividades no fueron en todos los casos los mismos. Cada alumno tenía su correspondiente nota de acuerdo al grupo en el cual había participado en el transcurso de cada una de estas actividades.





3.8.3 Evaluación Sumativa

Además de los dos trabajos de desarrollo en los que fueron evaluados los alumnos, también hubo una instancia de evaluación sumativa escrita e individual. Esta evaluación se realizó en la cuarta semana, en los cursos 1°A y 1°C mientras que en el curso 1°B se realizó en la quinta semana. Las fechas para esta evaluación ya estaban pautadas por la dirección de la escuela antes del inicio de nuestras prácticas.

Debido a que esta evaluación fue aplicada con una diferencia de tiempo notable entre 1°B y los otros dos cursos, se decidió que en 1°A y 1°C las pruebas conservarían las mismas situaciones problemáticas pero se cambiarían algunos valores numéricos, mientras que en la prueba para 1°B se plantearían nuevas situaciones problemáticas. El tiempo destinado para realizar esta evaluación fue de 40 minutos.

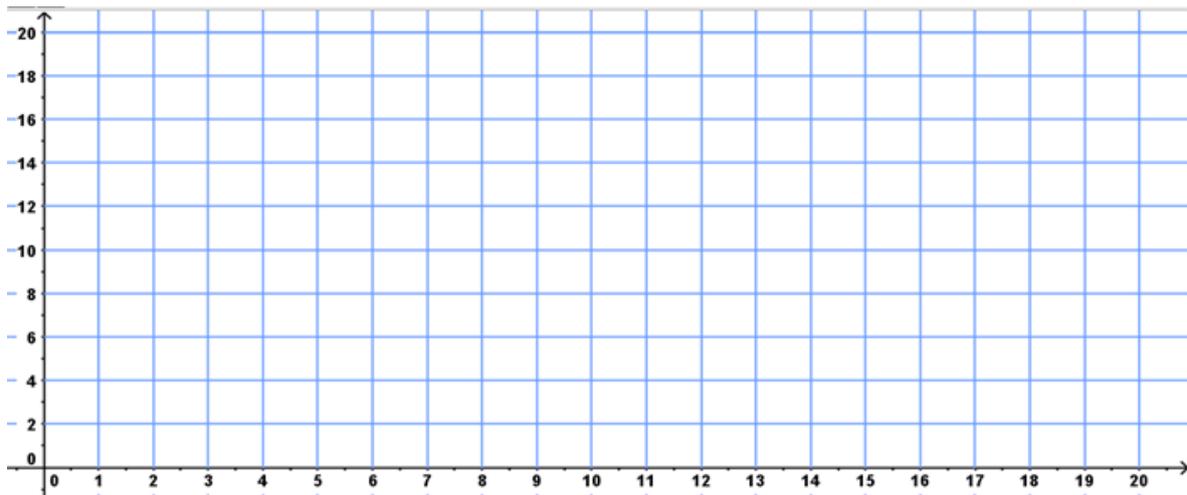
Cabe destacar que durante esta evaluación los estudiantes podían usar el programa GeoGebra y/o calculadora si lo consideraban necesario.

El siguiente cuadro muestra la evaluación implementada en 1°A:

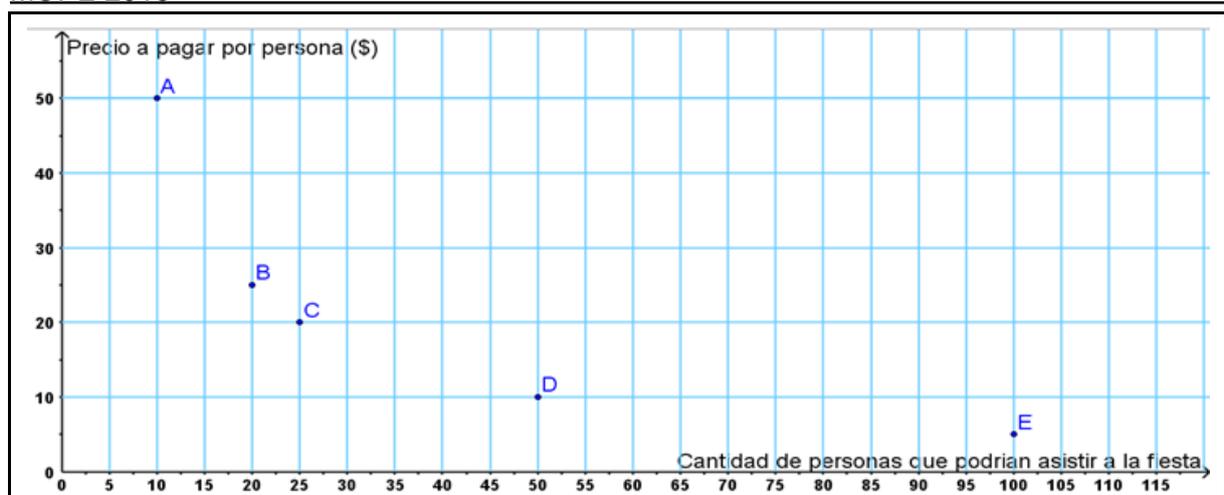
<h2><u>Evaluación</u></h2>
<p><u>Tema:</u> Relaciones entre variables: distintas formas de representarlas</p>
<p><u>Nombre y Apellido:</u></p>
<p><u>Fecha:</u></p>
<p>1) Milagros quiere decorar el salón para el bautismo de su sobrino con cintas doradas. El metro de cinta cuesta \$4, para saber cuánto gastará elaboró la siguiente tabla:</p>

Cantidad de cinta (m)	Precio a pagar (\$)
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

- a) ¿Cuáles son las variables involucradas en esta situación?
- b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente?
- c) ¿Cuál será el precio que debo abonar si compro 3,5 metros de cinta? Explica cómo obtuviste ese valor.
- d) ¿Podrías explicar cómo calcular el precio a pagar para cualquier cantidad de metros de cinta que se desee comprar? ¿Podrías escribirlo en lenguaje simbólico?
- e) En el sistema de coordenadas que se encuentra debajo, grafica los datos de la tabla anterior. Identifica la variable que representa cada eje.



2) Sebastián decidió contratar una banda de música para tocar en su fiesta de cumpleaños. El costo de la contratación es de \$500 y quiere saber cuánto deberá pagar cada uno de los invitados para calcular el costo final de la tarjeta de cada uno. El gráfico que ves abajo representa la relación entre la cantidad de personas que podrían asistir a la fiesta y el precio a pagar por cada una de las personas, hasta juntar \$500.



a) Completa la tabla que se encuentra debajo con los datos que brinda el gráfico. No olvides escribir qué representa cada columna de la tabla.

b) ¿Cuánto tendría que pagar cada invitado si fueran 32 personas las que asisten a la fiesta? Explica cómo obtuviste ese valor.

El cuadro a continuación muestra la evaluación implementada en 1ºB:

Evaluación

Tema: Relaciones entre variables: distintas formas de representarlas

Nombre y Apellido:

Fecha:

1) Anahí detectó una pérdida de agua en un grifo de su casa y registró en una tabla la

cantidad de agua que se pierde (en litros) a medida que pasa el tiempo si la pérdida del grifo no se repara.

Tiempo (horas)	Cantidad de agua (litros)
1	0,5
2	1
3	1,5
4	2
5	2,5

a) ¿Cuáles son las variables involucradas en esta situación? Indica su nombre y las unidades en que se miden.

b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente?

c) ¿Cuántos litros de agua se perderán después de 11 horas? Explica cómo obtuviste ese valor.

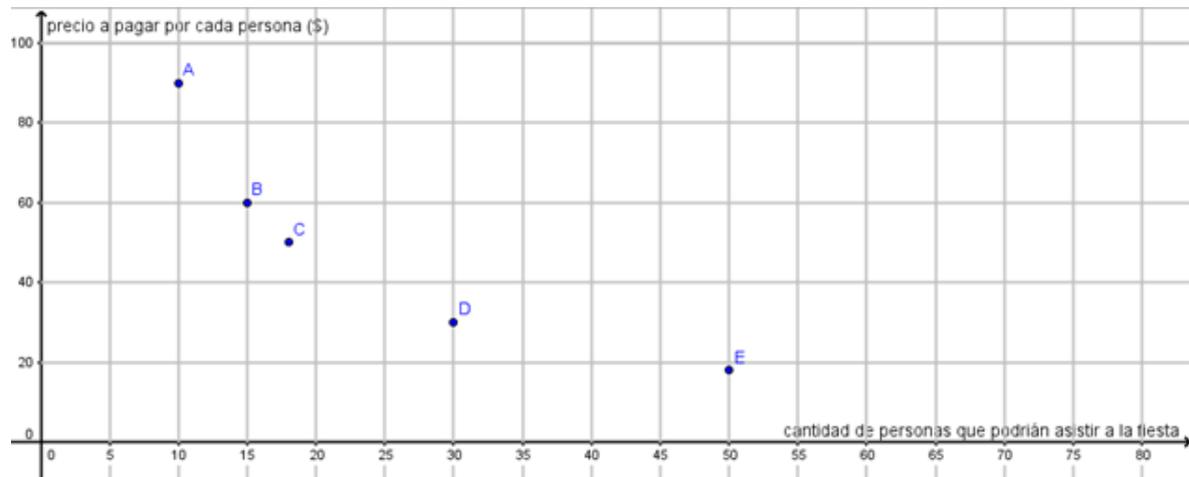
d) ¿Podrías explicar cómo calcular la cantidad de agua que se pierde para cualquier cantidad de horas transcurridas? Intenta escribirlo en lenguaje simbólico.

e) En el sistema de coordenadas que se encuentra debajo, grafica los datos de la tabla anterior. Identifica la variable que representa cada eje, coloca su nombre y unidades.



2) Como regalo de cumpleaños, algunos amigos de Sebastián decidieron contratar una banda de música para que toque en su fiesta. El costo de la contratación es de \$900 y dividirán el gasto entre todos los que deseen participar de ese regalo. Mientras más participen menor será el gasto para cada uno. El gráfico que ves abajo representa la

relación entre la cantidad de amigos que podrían participar del regalo y el precio a pagar por cada uno de ellos, hasta juntar \$900 para pagar la contratación de la banda.



a) Completa la tabla que se encuentra debajo con los datos que brinda el gráfico. No olvides escribir qué variable representa cada columna de la tabla.

b) ¿Cuánto dinero deberá aportar cada amigo si son 40 los que participan del regalo? Explica cómo obtuviste ese valor.

En general, la mayoría de los alumnos pudo resolver la prueba en su totalidad. Se notó que el ejercicio que más dificultad les presentó fue el 1) inciso d) ya que si bien prácticamente todos los alumnos lograron escribir de manera coloquial cómo obtener la respuesta del mismo (ver ejemplo para el caso de la evaluación en 1ºA y 1ºC en Figura 27), no fue así con la expresión simbólica. Además se observaron errores frecuentes en el ejercicio 2) b) ya que muchos de los estudiantes a pesar de intentar resolverlo de distintas maneras no llegaron a la solución correcta (ver ejemplos de resoluciones incorrectas, para el caso de la evaluación en 1ºA y C, en Figura 28 y Figura 29).

d) Para saber el precio a pagar se hace:
Multiplicas los metros que se van a comprar por 4 y te da el precio total

Figura 27. Respuesta de un alumno al inciso 1 c) de la evaluación.

Cada invitado tendría que pagar \$0.064. Para obtener ese valor divide 32 dividido 500 ya que son 32 personas y la contratación es de \$500.

Figura 28. Respuesta de un alumno al inciso 2 b) de la evaluación.

2 (B) tendrían que pagar 16 x lo encuentre multiplicando 32 x N hasta que di con el valor

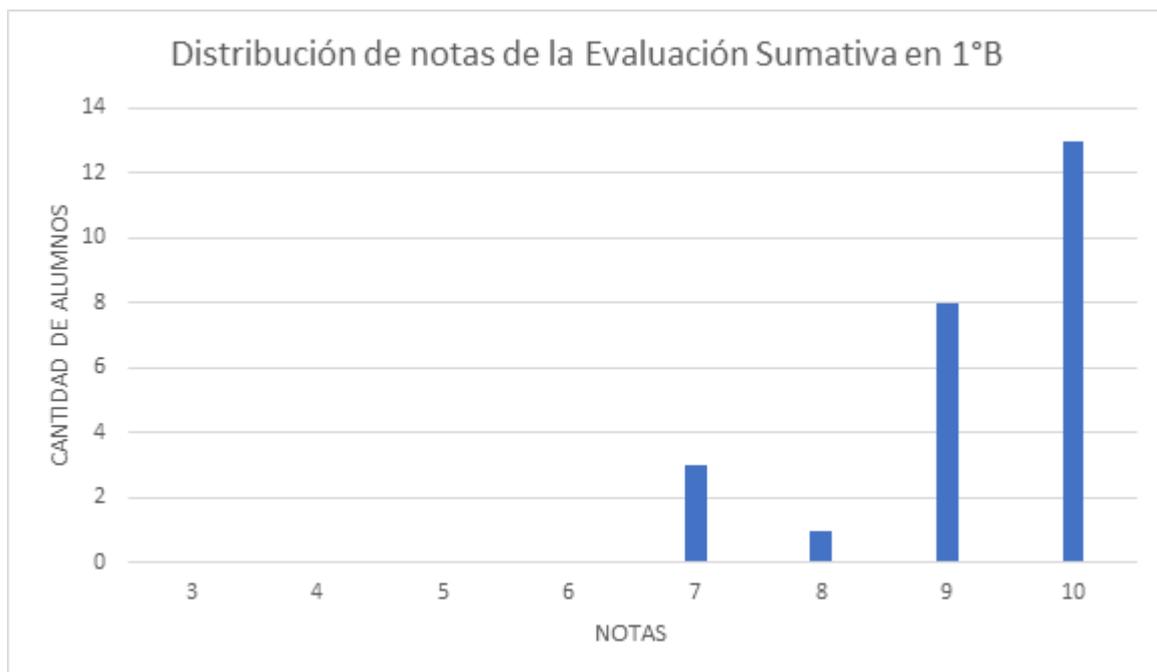
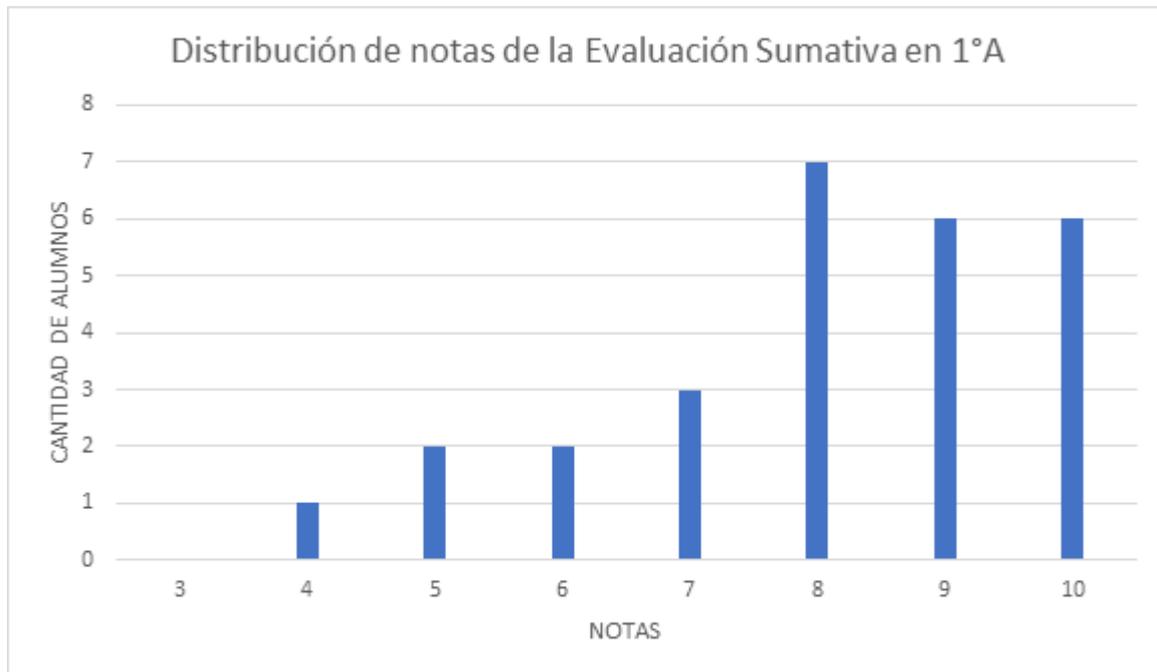
Figura 29. Respuesta de un alumno al inciso 2 b) de la evaluación.

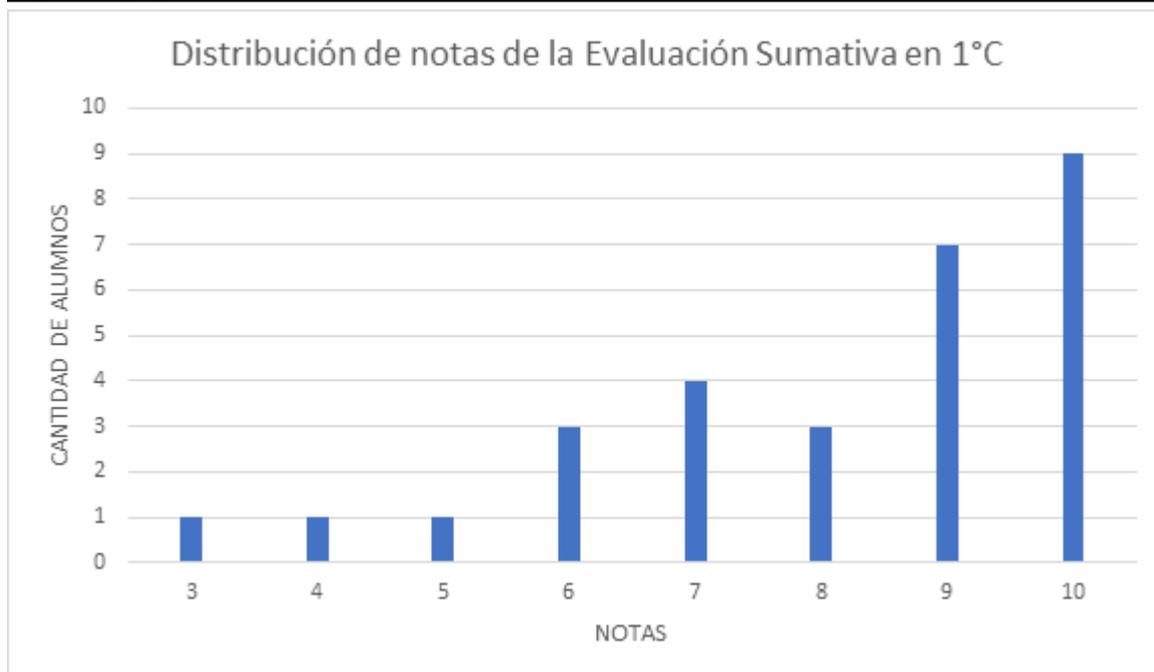
Para poder calificar objetivamente las respuestas de los estudiantes se construyeron criterios de evaluación. En el siguiente cuadro se pueden apreciar los criterios creados y los puntajes asignados a cada inciso:

Ejercicio 1 (7 puntos)	Inciso a (1 punto)	Reconoce las variables involucradas. (1 punto)
		Reconoce solo una de las variables involucradas. (0,5 puntos)
		No reconoce las variables involucradas. (0 puntos)
	Inciso b (1,5 puntos)	Reconoce cual es la variable dependiente e independiente. (1,5 puntos)
		No reconoce cual es la variable dependiente e independiente. (0 puntos)
	Inciso c (1,5 puntos)	Puede responder la pregunta y expresar, correctamente, lo que realizó para resolverla. (1,5 puntos)
Responde la pregunta pero no describe con precisión como obtuvo ese resultado. (1 punto)		

		No puede responder la pregunta correctamente. (0 puntos)
	Inciso d (2 puntos)	Puede expresar de forma coloquial como obtener el precio a pagar para cualquier cantidad de metros a comprar. (1,5 puntos)
		No puede expresar de forma coloquial como obtener el precio a pagar para cualquier cantidad de metros a comprar. (0 puntos)
		Puede expresar de forma simbólica como obtener el precio a pagar para cualquier cantidad de metros a comprar. (0,5 puntos)
	Inciso e (1 punto)	Puede graficar correctamente los pares ordenados. (0,5 puntos)
		No puede graficar los pares ordenados. (0 puntos)
		Puede identificar correctamente las variables en cada eje de coordenadas. (0,5 puntos)
		No puede identificar las variables en cada eje de coordenadas. (0 puntos)
Ejercicio 2 (3 puntos)	Inciso a (2 puntos)	Puede completar correctamente la tabla. (1,5 puntos)
		No puede completar correctamente la tabla. (0 puntos)
		Respeta todas las características de la tabla. (0,5 puntos)
	Inciso b (1 punto)	Puede responder la pregunta y expresar, correctamente, lo que realizó para resolverla. (1 punto)
		Responde la pregunta pero no describe con precisión cómo obtuvo ese resultado. (0,5 puntos)
		No puede responder la pregunta correctamente. (0 puntos)

Las notas de los alumnos en esta instancia se ven reflejadas en los tres gráficos a continuación que muestran la distribución de las mismas en cada curso:





4. Problemática a analizar

Modelización Matemática

4.1 Introducción

Durante nuestro paso por las aulas como practicantes tuvimos varios inconvenientes que nos costó solucionar o sobrellevar, no sabíamos cómo actuar en determinadas situaciones y si lo hacíamos muchas veces no quedábamos conformes con ello y además, pensábamos que no resultaba productivo para los alumnos.

Muchos de estos inconvenientes surgieron cuando planteamos la última actividad que consistía en que los alumnos realizaran un proyecto de modelización, para esto presentamos un cronograma (ver Figura 30) que contenía lo que tenían que hacer:

Actividades a realizar:

-
- The diagram consists of a list of activities on the left and a vertical timeline on the right. Red brackets connect the activities to specific dates and class periods:
- Elegir un fenómeno a investigar que les resulte de interés.
 - Plantear un problema.
 - Identificar variables que se pueden relacionar.
 - Decidir qué fuentes se van a utilizar para buscar datos o de qué manera se pueden recolectar.
 - Establecer que relación quieren estudiar entre las variables elegidas.
 - Entregar una hoja que contenga:
 1. Integrantes del grupo.
 2. Fenómeno o situación a estudiar.
 3. Variables elegidas.
 4. Relación entre las variables que se desea investigar.
 - Breve exposición del fenómeno a investigar.
- Primera Clase
Martes 08/09
- Recolección de datos respecto de la situación o fenómeno.
 - Organización y representación de los datos en tablas y gráficos.
 - Realización de un informe escrito.
- Segunda Clase
Jueves 10/09
- Finalización del informe y entrega.
- Tercera Clase
Martes 15/09

Figura 30. Cronograma implementado por 1° C.

Quisimos que fuera una actividad abierta ya que habíamos percibido, tanto cuando hicimos las observaciones como cuando dimos las clases, que cuando los alumnos tenían la palabra surgían cosas muy importantes, interesantes y fructíferas. Además el planteo de este desafío llamaba más la atención de los estudiantes, creemos que era porque no tenían límites, es decir, ellos podían elegir su propia situación y no era algo que les imponíamos nosotras. Pero a la vez teníamos miedo de lo que pudiera llegar a ocurrir dentro del aula y de no poder gestionarlo.

Cuando los estudiantes empezaron a pensar qué situación o fenómeno elegirían para estudiar, a algunos grupos se les ocurrieron ideas que eran complicadas de guiar en el momento, o que nos parecía no iban a poder desarrollar para continuar con lo que se pedía en la actividad. Por ejemplo, en la división A surgieron estos temas:

- Salto de Felix Baumgartner desde la estratosfera:

Felix Baumgartner es un renombrado paracaidista austríaco que se destaca por realizar saltos en caída libre desde distintos lugares, que tienen una altura prominente. En la siguiente página de Internet se puede encontrar información acerca de Felix Baumgartner y las distintas aventuras realizadas por él: https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Baumgartner

Entre los diversos saltos efectuados por el paracaidista, los alumnos se propusieron estudiar en detalle el salto que este hizo desde la estratosfera, iniciando su caída desde 39.068 m de altura. Ellos se plantearon en un principio investigar en cuánto tiempo Felix realizó el salto en caída libre, desde qué altura lo hizo y cuál fue la velocidad máxima que este adquirió antes de abrir su paracaídas para llegar a la tierra. En esta situación las variables reconocidas por los estudiantes fueron: altura, tiempo y velocidad.

Los datos del salto que interesaban a los alumnos se podían encontrar en páginas de Internet, pero sólo se trataba de un valor para cada una de las variables y de esta manera, si bien había relaciones entre las variables a estudiar, no se podían apreciar al tener solo un dato de cada una de ellas. Para resolver esta situación, en un primer momento, pensamos en proponer a los alumnos que comparen los saltos que Felix había realizado desde distintos lugares en sus travesías por el mundo, pero luego pudimos ver que, dependiendo del lugar del salto, podían influir otras variables referidas, por ejemplo, a las condiciones climáticas, tales como la velocidad y dirección del viento. Entonces decidimos plantear a los alumnos que relacionen sólo las variables tiempo y altura en el salto desde la estratosfera y que averigüen: el tiempo que tardó en alcanzar la altura máxima y cuál fue esa altura, el tiempo que estuvo en caída libre y la altura a la que llegó en el momento de abrir el paracaídas y el tiempo que tardó en tocar el suelo nuevamente. Esto les permitiría tener al menos tres pares de datos de la relación altura-tiempo.

La decisión de proponer a los alumnos que descartaran la variable velocidad surgió, no solo por el hecho que no había datos suficientes para enriquecer el trabajo que se les proponía que realicen, sino porque desde un principio se pidió que trabajen con una relación entre dos variables, para simplificar el trabajo.

Una vez que propusimos a los alumnos que organizaran su trabajo en base a los tres momentos del salto que mencionamos arriba, es decir, el momento en que el paracaidista llega a la altura máxima desde donde realiza el salto, el momento en que abre el paracaídas y el momento en el que toca el suelo nuevamente, comenzaron con la recolección de datos. Estos fueron obtenidos a través de páginas de Internet consultadas en el aula, ya que contaban con acceso a WiFi. La obtención de los datos tampoco fue una tarea fácil para los alumnos ya que la información estaba esparcida por distintas páginas o sitios de Internet y mezclada a su vez con distintos tipos de datos que no eran útiles para este trabajo en particular.

Finalmente los alumnos lograron recabar todos los datos y realizar la tabla correspondiente, aunque no consiguieron hacer al gráfico. A continuación se

muestran algunos de los datos extraídos de las páginas de Internet utilizados y la tabla construida por los alumnos (Ver Figura 31):

El día 14 de octubre de 2012, Baumgartner despegó desde Roswell (Nuevo México), para ascender hasta los 39.068 metros, altura desde la cual efectuó una caída libre.³

“(…) el salto se produjo a las dos horas y media del comienzo de la ascensión.”⁴

“(…) aunque no consiguió el récord de mayor tiempo de descenso en caída libre (hizo 4 minutos 19 segundos frente a los 4 minutos 39 segundos de Kittinger en 1960).”⁴

“**Apertura del paracaídas:** 2.566,8 metros (8.421,3 pies sobre el nivel del mar) Aproximadamente 1.525 metros (5.000 pies sobre el suelo).”⁴

“**Tiempo total transcurrido desde el salto hasta el aterrizaje:** 9 minutos con 18 segundos.”⁴

	Altura(m)	Tiempo(M)
Origen	0	0
En subir	39,068	150
Caída libre	1525	4,19
Cuando abre el paracaídas	1435	0
Total		159,09

Figura 31. Tabla realizada por el grupo de alumnos correspondiente al salto de Felix Baumgartner.

Como observamos en la Figura 31 y comparando con la información anterior la tabla realizada por los alumnos presenta imprecisiones ya que no han conseguido combinar bien los datos que encontraron además, han considerado como variable independiente al tiempo y como variable dependiente a la altura. El tiempo que tarda en realizar la caída libre es de 4,19 minutos pero hay que sumarlos al tiempo del ascenso que fueron 150 minutos. Luego, la caída libre finaliza en el momento en que Felix abre el paracaídas entonces la altura en estos dos momentos es la misma. Y por último, cuando llega al piso (o sea a 0 metros) tarda los 159,09 minutos que los alumnos colocan en la última fila como “Total”. En la tabla aparece también el dato 1435 m correspondiente al descriptor “Cuando abre el paracaídas” asociado con Tiempo 0. No sabemos el origen de ese dato. En la Figura 32 mostramos una nueva tabla teniendo en cuenta estas cuestiones que acabamos de resaltar y los momentos del salto correspondientes, sin embargo estimamos que es más conveniente

³https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Baumgartner

⁴https://es.wikipedia.org/wiki/Red_Bull_Stratos

representar el fenómeno considerando la altura como variable dependiente y el tiempo como variable independiente ya que esto favorece una mejor visualización del fenómeno.:

Momentos del salto	Tiempo (en minutos)	Altura (en metros)
Baumgartner inicia el ascenso en globo desde la tierra	0	0
Baumgartner llega en globo al punto más alto e inicia el salto	150	39068
Baumgartner abre el paracaídas	154.19	1525
Baumgartner toca el piso	159.09	0

Figura 32. Tabla del Salto de Felix Baumgartner realizada por nosotras.

Nos parece importante mostrar el gráfico de esta situación. El mismo se observa en la Figura 33, a continuación:

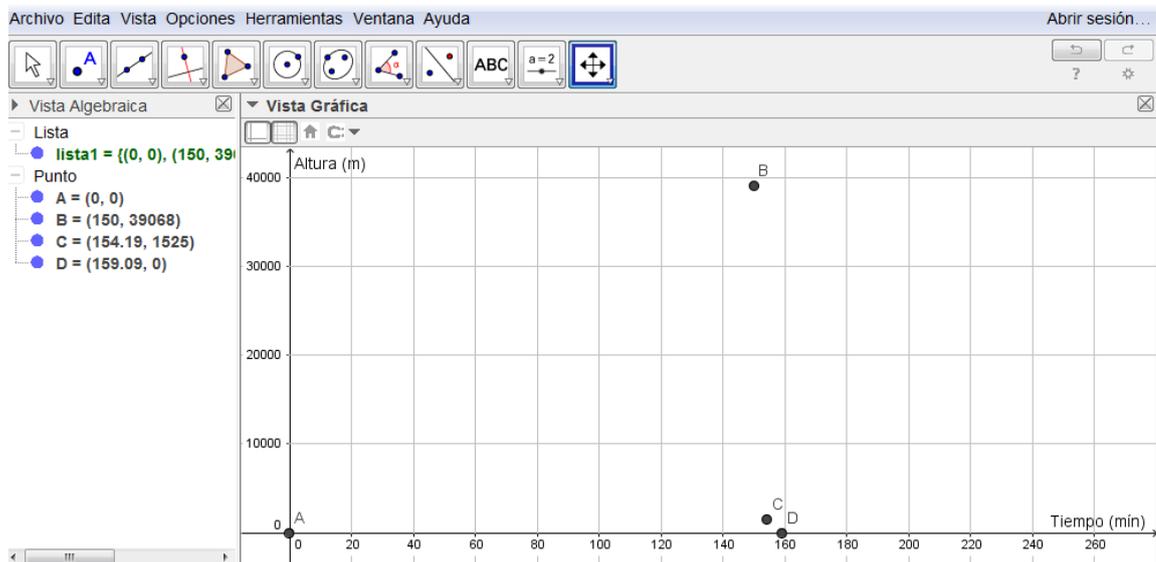


Figura 33. Gráfico en GeoGebra correspondiente a los datos que se encuentran en la tabla de la Figura 32.

La realización del gráfico también tiene sus complicaciones. Es necesario configurar adecuadamente las escalas en GeoGebra para que se puedan visualizar los puntos en pantalla y los ejes quedan a escalas desiguales.

Además, interpretar la situación de manera tal que permitiera notar los tres momentos que se destacaban en el salto desde la estratosfera, fue un trabajo complejo tanto para los alumnos como también para nosotras ya que para llegar a los datos correspondientes a esos momentos era necesario combinar varias informaciones.

Resaltamos los problemas que tuvimos para hacer avanzar este proyecto:

1. Guiar a los alumnos en la recolección de datos, puesto que Internet ofrece mucha información.
2. Ayudar a los alumnos en la interpretación de los datos, para que solo tomaran aquellos que representaban su situación y los combinaran de manera correcta.
3. Tratar de que los alumnos reconozcan los tres momentos importantes en el salto para poder armar la tabla y realizar el gráfico.

- Construcción de edificios

En un primer momento, un grupo de alumnas, planteó que querían investigar cuanto tiempo tarda en construirse un edificio dependiendo de la altura del mismo. La Figura 34 muestra la hoja que ellas nos presentaron donde indican las variables a relacionar, la fuente de información a consultar, la relación que desean estudiar e informan otra variable influyente. Este grupo de alumnas también manifestó que quería realizar una simulación en GeoGebra que represente la situación elegida.

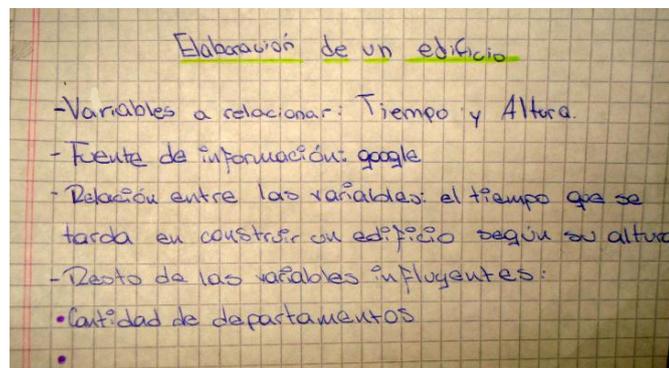


Figura 34. Idea original del grupo.

En este caso, las alumnas, no notaban que podían tener varias dificultades a la hora de recolectar los datos ya que, a partir de la cantidad de variables que estaban en juego, cada construcción es única.

Lo que se aconsejó a las alumnas, luego de hacerles ver la dificultad que implicaba resolver un problema así, fue que recolecten informaciones referidas a una construcción ya hecha y que representen esta construcción a escala en GeoGebra.

Una vez hecha esta sugerencia, el grupo buscó datos en páginas de Internet acerca de la construcción de la Torre Ángela en Córdoba Capital. Los datos que pudieron recoger fueron: la altura de la Torre (110 metros) y el tiempo que se tardó en construirla (3 años). Así, tiempo y altura serían las variables a relacionar. Las estudiantes decidieron fijar otras variables que influían en este caso, como por ejemplo: la cantidad de departamentos, la cantidad de trabajadores, el dinero invertido en la construcción, y calcular, a partir de las informaciones encontradas, cuánto tiempo se tardaría en construir cada uno de los pisos del edificio, teniendo en cuenta el tiempo en el que se llevó a cabo toda la construcción y asumiendo implícitamente que el tiempo de construcción de cada piso es siempre el mismo.

Finalmente, relacionando estas variables y haciendo los cálculos mencionados, el grupo concluyó que la relación estudiada era de proporcionalidad directa, ya que a los tres años que se tardó en hacer la Torre Ángela los dividieron por la cantidad de pisos que tiene y de ahí obtuvieron cuánto tiempo se tardaba en construir cada piso.

Aquí mostramos la tabla que realizó este grupo donde se observa esta relación de proporcionalidad directa:

TABLA

A	B
Altura (m)	Tiempo (año)
36,5	1
73	2
109,5	3

Figura 35. Tabla realizada por las alumnas.

Por cuestiones de tiempo no realizaron la representación gráfica en GeoGebra.

Nuevamente aquí resaltamos las dificultades que tuvimos:

1. No fue fácil guiar al grupo de alumnas frente a este tema ya que hubo que modificarlo mucho en relación a la idea original que habían planteado.
2. En repetidas ocasiones observamos que cuando hacíamos sugerencias -como por ejemplo, que tengan en cuenta la diversidad de variables involucradas o el problema que iba a resultar recolectar datos-, el grupo no las consideraba. Esto provocaba más dificultades para nosotras ya que no teníamos la habilidad de brindarles inmediatamente ideas nuevas si las que sugeríamos eran descartadas.

En la división B:

- Alimentación de un perro bóxer

En un comienzo, los alumnos se plantearon dar respuesta al interrogante: ¿cuánto gasto le ocasiona a una persona alimentar a un perro de raza bóxer? En este caso intentamos que los alumnos reformulen esta pregunta de manera que les permita una mayor experimentación, ya que para nosotras el trabajo experimental es más productivo, permite recolectar datos fácilmente (si plantean de manera correcta el experimento), pueden investigar intensivamente la situación y visualizarla y además es una forma de guiar el trabajo de modelización. En ese momento surgió la idea de averiguar cuánto alimento consumía un perro de la misma raza, luego cambiaron la raza, finalmente se decidieron por la pregunta: ¿cuánto gastará una persona en alimentar a un perro bóxer adulto en el periodo de un año? Allí las variables que se propusieron estudiar fueron la cantidad de alimento (en kg) que consume un perro con esas características y el precio del alimento balanceado. Así quedaron fijadas otras variables: la raza del perro, el tamaño del mismo, la cantidad de alimento diario que consume.

Durante el proceso de delimitación del problema a resolver dentro de la situación elegida, los alumnos se dieron cuenta que, dependiendo del tamaño del animal, iba a variar el gasto de alimentarlo o la cantidad de comida que consumiría.

Para responder a la pregunta que se plantearon, averiguaron cuánto sale el kg de alimento para esta mascota y lo dividieron por los 365 días del año. En la devolución que le hicimos del informe les indicamos que esto no es coherente porque sino el perro comería muy poco por día, parecían no estar viendo en sí la situación real.

Así, los alumnos acordaron presentar como situación final, el enunciado que se muestra en la Figura 36:

¿QUE VAMOS A AVERIGUAR?

Vamos a averiguar:

¿Cuánto plata vamos a gastar en la comida del perro (adulto boxer) durante todo un año?

¿Por qué se nos ocurrió?

Por que un integrante del grupo tiene un boxer adulto y quiere saber cuanta plata gasta en un año

Figura 36. Situación final elegida por los alumnos.

Con respecto a este grupo los inconvenientes que tuvimos en el proceso de modelización fueron:

1. Intentar orientar a los alumnos hacia un trabajo de naturaleza más experimental, y tratar de que puedan reformular su pregunta original para llegar a esto.
2. Elegir un fenómeno y pensar en la manera de recolectar los datos necesarios demanda mucho tiempo de trabajo de los alumnos, lo que a veces resulta incompatible con el tiempo acotado del período escolar.

De la producción de galletitas al...Fútbol con las manos

De igual modo que en el grupo anterior, estos alumnos tuvieron muchas ideas que desde nuestra escasa experiencia resultaban complejas para llevar a cabo o hacer avanzar. Comenzaron pensando en estudiar la relación entre la cantidad de galletitas que fábrica una empresa y el tiempo que lleva fabricarla. Esta idea inicial implicaba la necesidad de tomar varias decisiones: elegir qué galletas iban a considerar, buscar en alguna página de Internet que brinde el dato de la cantidad de galletas que una fábrica produce por día. También era necesario considerar si en la empresa de galletas que eligieran se trabajaba ocho horas diarias o se trabajaba en varios turnos, porque eso implicaría que se produzca mayor cantidad. Como vieron que resultaba complicado acotar el problema, cambiaron de idea. Así, pensaron en estudiar la efectividad que tenía Lionel Messi en una temporada relacionando la cantidad de tiros al arco y la cantidad de goles que convertía. En este caso lo que sucedía era que los datos se podían obtener directamente de Internet que era algo que nosotras queríamos evitar porque no tenía sentido que solo copien información, queríamos que ellos, en lo posible, experimenten, investiguen y recolecten los datos.

No se les ocurría nada y no sabíamos cómo guiarlos sin brindarles una idea completa.

La última idea que tuvieron, que fue la que finalmente presentaron, la desarrollaron con ayuda de la profesora del curso, motivados por las ideas de experimentos que surgieron en otros grupos y comentadas por sus compañeros. Como era la última clase antes de entregar el informe escrito y necesitaban tomar los datos construyeron un arco con dos lapiceras y un bollo de papel era su pelota, entonces uno de ellos realizaba cinco tiros al arco y registraban la cantidad de veces que anotaban un gol. Luego cambiaban la amplitud del arco y repetían el mismo procedimiento de los cinco tiros. Terminaron relacionando la amplitud del arco (en cm) con la cantidad de goles que se convertían.

Las dificultades que apreciamos aquí son:

1. Encontrar una situación que los alumnos deseen estudiar y sacarlos de su zona de confort.
2. Avanzar de una mera búsqueda de datos a colocarlos en un papel de científicos, de investigadores de una cierta situación que les genere interés.

En la división C:

- De las flores a la ...Elaboración de pan

En este grupo hubo varios cambios de ideas. Primeramente surgió la idea de relacionar la cantidad de flores que crecen y el tiempo que transcurre. Esto era complicadísimo de guiar y llevar a cabo, no solo porque no se podían tomar datos sino porque también había muchas variables en juego tales como las condiciones climáticas, la zona donde se cultivan las flores, el tipo de flores, entre otras. Como se dieron cuenta que no iban a poder con esto, cambiaron de tema y se propusieron estudiar, citando las palabras de las estudiantes: "¿Cuántas tiras de pan se realizaban en una mañana en una panadería y cuántas vendían? Averiguaron ese dato en una panadería cerca de sus hogares y una vez que obtuvieron la información no sabían qué hacer con ella puesto que ya tenían una respuesta a su pregunta. No habiendo mucho más que pensar, decidieron descartar esta idea. La siguiente pregunta que se hicieron fue: "¿Cuántos autos fabrica una empresa por mes?", pero no sabían de dónde obtener los datos, así que también eliminaron esta idea. Para la siguiente clase, y gracias a la ayuda de la profesora supervisora de nuestras prácticas, les llevamos un documento titulado: "De la tierra a la mesa", que informaba la cantidad de harina de trigo que se necesitaba para hacer una cantidad determinada de medialunas, criollos, pan, entre otros productos. Entonces tomando estos datos decidieron relacionar cantidad de harina de trigo con cantidad de medialunas que se pueden realizar descartando el resto de los ingredientes. Las Figuras 37 y 38 muestran respectivamente la información que utilizaron, referido a la cantidad de trigo necesario para elaborar una docena de medialunas de manteca y la tabla realizada por las alumnas a partir de ese dato:

¿Cuánto Trigo se necesita para hacer Medialunas?

Por cada docena de medialunas de manteca se necesitan 220 grs de Harina, lo que equivale a 293 gramos de trigo.

1 Docena de Medialunas = 0,3 Kg de Trigo

Figura 37. Información que utilizaron las alumnas para la obtención de datos.

Punto 4:
Organización y presentación de datos:

Cantidad de facturas	Cantidad de trigo (g)
1	24,41
3	73,23
6	146,46
12	292,92
24	585,84
48	1171,68
96	2343,36
192	4686,72

Figura 38. Tabla realizada por las alumnas.

También se dieron cuenta que esta tabla representaba una relación de proporcionalidad directa y llegaron a una expresión simbólica (Ver Figura 39) donde “y” representaba la cantidad de trigo necesario para elaborar “x” medialunas.

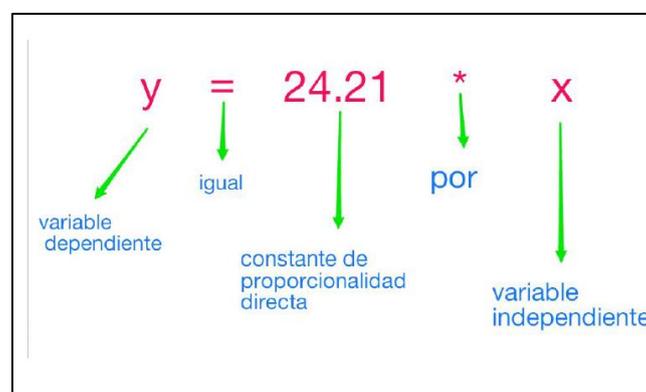


Figura 39. Expresión simbólica de la situación elegida por las alumnas.

En este caso, las dificultades que tuvimos, nuevamente, fueron:

1. Orientar a las alumnas a elegir una situación sin darles la idea completamente acabada,

2. Animarlas a investigar otras situaciones, ya que con las primeras que habían elegido era imposible para nosotras encaminarlas en la realización de la actividad.

- Cumpleaños

Aquí primeramente apareció la idea de relacionar cuánto tiempo tarda Ana en llegar a un cumpleaños si va a 15 km por hora en auto, hay 6 casas antes de llegar a la casa donde se hace el festejo, y tarda determinada cantidad de segundos en pasar por cada una de las casas. Luego agregaron que en el camino hay un semáforo que tarda cierta cantidad de segundos en volver a ponerse en verde, entonces surge otra pregunta que es: ¿Cuánto tarda Ana en llegar al cumpleaños si el semáforo está en rojo? ¿Y si no? En la Figura 40 mostramos el planteo del problema que realizó el grupo.

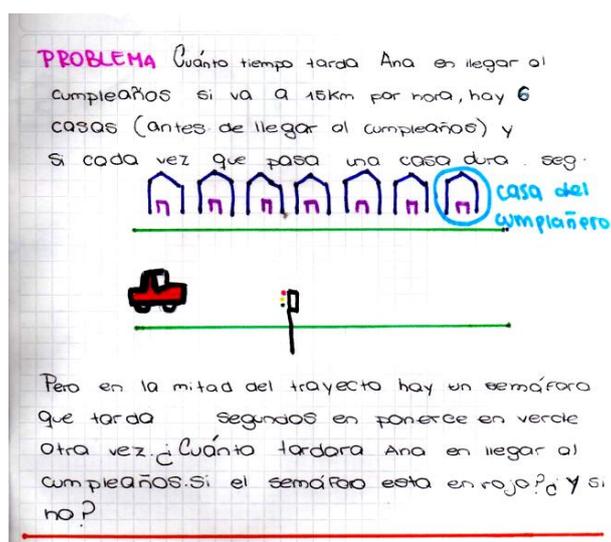


Figura 40. Representación gráfica de la situación elegida por las estudiantes.

A la siguiente clase, para poder terminar de completar el problema, trajeron medido cuánto tardaban en pasar por una casa a 15 km por hora, sin considerar cuánto mide el frente de la casa, y también el dato del tiempo del semáforo pero no sabían cómo seguir, sobre todo cómo armar una tabla relacionando la distancia y el tiempo. Para hacer avanzar el problema se les propuso que en vez de contar las casas contaran las cuadras para que les sea más fácil medir la distancia que tienen desde donde está Ana a donde es el cumpleaños, considerando las cuadras con una longitud de 100 metros, y que tomaran el dato de cuánto tardaban en recorrer esa cuadra a 15 km/h. Como a esta medición no la podían hacer en clase, reformaron el problema, ahora Ana iría caminando hasta el festejo. En un pasillo de la escuela, midieron cuánto tiempo tardaban en recorrerlo y cuánto medía el pasillo contando la cantidad de baldosas, esto les permitió tener una estimación del tiempo que demorarían en recorrer 100 metros. Fijaron una distancia de 1000 metros hasta la casa del cumpleaños y empezaron a relacionar la distancia desde 0 metros hasta 1000 metros y la cantidad de tiempo que tardaba Ana en caminar diferentes distancias hasta llegar a 1000 metros.

Al agregar la condición que Ana se encontraba con una amiga en el camino y que se demoraba 20 segundos charlando, el problema que surgía era que Ana, durante 20 segundos permanecería, en la misma posición, entonces al momento de hacer el

gráfico se les iba a dificultar ver que el gráfico tendría una primera parte creciente, una constante y, luego, otra vez, una parte creciente. Esto no se pudo trabajar con el grupo porque a las clases siguientes no trajeron el material para seguir con la actividad. Sumado a esto una de las integrantes del grupo se cambió de división.

Las dificultades que encontramos en este caso pueden sintetizarse así:

1. No contar con el material para poder continuar trabajando. Esto nos llevó a reflexionar que, en un futuro, cuando estemos dando nuestras clases ya siendo docentes, si planteamos una actividad debemos adoptar un modo de organización tal que al terminar cada clase nos aseguremos que para la próxima clase tengamos todos los materiales o datos disponibles.
2. Orientar a las alumnas siguiendo sus propias opciones. Las alumnas tenían buenas ideas y al momento de definir la situación siempre agregaban algún factor que complicaba el fenómeno o la recolección de datos. Esto introducía una complejidad que hacía difícil orientarlas.

En síntesis, podemos resumir las dificultades que encontramos en el siguiente listado:

1. Guiar a los alumnos en la recolección de datos, puesto que Internet ofrece mucha información.
2. Ayudarlos en la interpretación de los datos, para que solo tomen aquellos que representen su situación y los combinen de manera adecuada.
3. No tener la habilidad de brindarles inmediatamente ideas nuevas si las que sugeríamos eran descartadas.
4. Encontrar una situación que deseen estudiar y sacar a los alumnos de su zona de confort.
5. Avanzar de una mera búsqueda de datos a colocarlos en un papel de científicos, de investigadores de una cierta situación que les genere interés.

Frente a todas estas dificultades que aparecieron durante la actividad de Modelización es que surgió la problemática que planteamos de la siguiente manera:

¿Cómo guiar a los alumnos en una actividad de Modelización Matemática bajo cierta diversidad de temas?

Consideramos que nos falta experiencia en estas actividades para saber cómo orientarlas mejor y tener respuestas o ideas más inmediatas. Sin embargo, creemos que a partir de nuestra breve experiencia podemos decir que una forma pertinente de guiar a los estudiantes, fue incentivarlos a “experimentar” para que pudieran recolectar datos y vivenciar un proceso investigativo de carácter experimental ya que notamos que los grupos que avanzaron sin dificultad fueron aquellos que realizaron un trabajo completamente experimental. Otra acción que creemos también fue una buena forma de ayudarlos en este trabajo de modelización fue buscar información y brindarla a los alumnos para que la utilicen y les surjan nuevas ideas.

4.2 Relacionando nuestra experiencia con diversos autores

Al proponer una actividad abierta de Modelización, generamos un ambiente de aprendizaje investigativo y nos arriesgamos a enfrentar situaciones o ideas propuestas por los alumnos que no sabíamos si íbamos a poder guiar. En palabras de Skovsmose (2000):

Moveirse a través de los diferentes ambientes de aprendizajes posibles y prestarle atención a los escenarios de investigación puede causar un alto grado de incertidumbre (pág. 21).

Con esta incertidumbre Skovsmose se refiere a que en una actividad abierta como esta los alumnos pueden incursionar en terrenos donde necesitan nuestra ayuda y plantear preguntas que nosotras no podemos predecir. Es decir que, nosotras las practicantes, salimos de nuestra “zona de confort” para adentrarnos en una “zona de riesgo” en la cual no sabíamos cómo actuar.

Como la consigna de trabajo dada a los estudiantes era elegir una situación de la vida cotidiana, nos centramos en un escenario de investigación con referencia a situaciones de la vida real, por lo que nuestro miedo e incertidumbre ya estaban presentes mucho antes de comenzar con la actividad.

En el momento en que los alumnos nos entregaron sus ideas no sabíamos cómo ayudarlos a hacer avanzar sus trabajos. Nos costó mucho, cuando estábamos en el aula, brindarles ideas o sugerencias. Gracias a recomendaciones realizadas por nuestra profesora supervisora de las prácticas buscamos información, materiales, etc. para poder, a la clase siguiente, guiarlos en la continuación de su trabajo.

Destacamos que los alumnos estaban entusiasmados con sus trabajos, con la recolección de datos, y la posibilidad de experimentar ellos mismos para poder obtener datos más reales.

Lo que notamos en nuestras prácticas durante esta actividad de modelización fue que, si bien hubo mucha interacción y trabajo colaborativo entre profesores tutores y practicantes y alumnos, no brindamos mucho espacio para la interacción entre los alumnos de distintos grupos. En los últimos minutos de la primera clase de esta etapa los estudiantes expusieron por grupo al resto de los compañeros las situaciones elegidas para abordar pero no se produjo ningún debate entre todos y creemos que con esto se hubiesen podido ayudar entre ellos y además brindarnos ideas a nosotras, ya que como dice Almeida, Silva y Vertuan (2011):

(...) la interacción social tiene un lugar importante en la construcción de conocimiento (pág. 32).

Como mostramos anteriormente en la Sección **3.7.3**, dedicada a los proyectos de modelización, los alumnos eligieron situaciones referidas a un contexto de realidad, utilizaron conocimientos brindados por otras materias, emplearon tecnología, o diseñaron experimentos. Hubo una gran variedad de ideas y problemáticas. Muchas de esas ideas se pudieron llevar a cabo gracias a los elementos y la metodología de trabajo que tiene el colegio donde hicimos nuestras prácticas, ya que contamos con recursos que en la mayoría de los colegios no hay. Al ser un lugar donde se prioriza la incorporación de tecnología en el aula nos enfrentamos con un escenario totalmente diferente al que transitamos cuando nosotras pasamos por la escuela secundaria, y fue necesario que aprendiéramos a usar herramientas a las que no estábamos acostumbradas tales como la pizarra digital y las tablets. Esto influyó en nuestras prácticas, sobre todo ese miedo a lo nuevo, a no saber usar correctamente esas herramientas. Pero nos dimos cuenta que fue muy fructífero trabajar con tecnologías de la información y la comunicación (TIC) sobre todo en esta última actividad de modelización, ya que los alumnos podían buscar información de manera instantánea para sus trabajos. Esto trajo también un inconveniente, hubo algunos grupos que querían sacar todo de Internet y sus proyectos terminaban consistiendo en hacer una

simple operación aritmética. Por ejemplo el grupo que tuvo la idea de trabajar con el alimento del perro podía responder su pregunta realizando un cálculo aritmético sin poner en juego una relación entre variables. Por este motivo tuvimos que enfatizar que el objetivo era que ellos se pusieran en lugar de “científicos” e investigaran un fenómeno de la vida real. Tratamos que, implícitamente, los alumnos respeten algunas normas a ser tenidas en cuenta cuando se trabaja con TIC en el aula. Las mismas son mencionadas en el texto de Mónica Villarreal (2004) “*Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática*”:

- los resultados brindados por las herramientas tecnológicas no pueden ser considerados como justificaciones, aunque pueden ayudar a generarlas (pág.54).

También queremos resaltar con respecto al uso de las TIC que los alumnos y la profesora del curso nos ayudaron mucho a manejarlas, cuando teníamos algún problema que no sabíamos resolver y aquí coincidimos con lo que dice Villarreal en el texto mencionado anteriormente:

Se asume que las tecnologías incorporadas en las clases de matemática (...) tienen (...) un papel (...) de reorganización, que constituyen junto a los estudiantes, docentes y otros medios presentes en la sala de clases un colectivo pensante, un sistema constituido por seres humanos y dispositivos tecnológicos de diversa naturaleza (...) que generan, en conjunto, conocimientos matemáticos (pág. 45).

Durante el período de esta actividad de modelización nos dimos cuenta el tiempo que lleva realizarla, ya sea tiempo fuera del aula buscando los materiales e información para los alumnos como también tiempo dentro del aula cuando los grupos trabajaban en sus proyectos. Los tiempos escolares son muy acotados y a veces no muy favorables para actividades de este tipo. Esto es reconocido también por Villarreal, Esteley y Smith (2011), que afirman:

(...) el desarrollo de un proyecto de modelización en aula fue una tarea con una alta demanda de tiempo, energía y compromiso (pág. 10).

Volviendo a la pregunta que nos planteamos, luego de nuestra experiencia y relacionándola con lo visto en el texto de Silva, Almeida y Vertuan (2011), surge automáticamente en nosotras la idea de que en una actividad de modelización matemática el profesor es un orientador y con orientar nos referimos a indicar caminos, hacer preguntas, sugerir procedimientos, no es dar respuestas definitivas y acabadas. Orientar proyectos de modelización implica necesariamente estudiar, siempre hay que seguir estudiando e investigando contenidos que no son exclusivamente matemáticos, para poder ayudar a los alumnos.

Llevar adelante esta actividad de modelización matemática no hubiese sido posible sin la ayuda de nuestra profesora supervisora, la profesora del curso y el par pedagógico. Por eso queremos destacar aquí algo que varios autores también resaltan: el trabajo colaborativo. Skovsmose (2000) dice:

Una condición importante para que los profesores sean capaces de operar en una zona de riesgo es el establecimiento de nuevas formas de trabajo cooperativo en particular entre profesores (pág. 22).

Almeida, Silva y Vertuan (2011) señalan:

La modelización matemática en el aula puede ser vista como una actividad esencialmente cooperativa, en que la cooperación y la interacción entre los alumnos y

entre el profesor y el alumno tienen un papel importante en la construcción de conocimiento (pág. 33).

Nos resulta importante recalcar que la interacción con los alumnos, sus ideas, sus sugerencias también ayudaron a llevar adelante esta actividad. En ningún momento hubo imposiciones de nuestra parte, siempre intentamos orientarlos tratando de no darles ideas completamente acabadas donde sólo tuvieran que completar algo que pensó otro y nada más.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Aclararemos antes que estas conclusiones refieren tanto a la problemática que tratamos anteriormente como así también a nuestras experiencias en las prácticas.

Ya habiendo vivido nuestra experiencia trabajando con una actividad de modelización matemática en el aula, creemos que si tenemos que proponer el día de mañana otra actividad como esta, estamos mejor preparadas gracias a lo aprendido en nuestras prácticas. Sabemos que tenemos que estar dispuestas a enfrentar la diversidad de temas, la gran demanda de tiempo que lleva, el uso de recursos, y que por sobre todas las cosas, vamos a tener que orientar a nuestros alumnos.

Coincidimos que a esta etapa de las prácticas nos hubiese gustado dedicarle dos clases más para poder dar tiempo a los alumnos para pensar, experimentar, debatir, etc.

Además consideramos que el trabajo colaborativo fue fundamental para atender la diversidad de temas que surgieron en la actividad de modelización.

Concluimos con respecto a nuestra experiencia en las prácticas que un aspecto a tener en cuenta en nuestro futuro como docentes es que cuando se lleva a cabo un trabajo en el que los alumnos necesiten disponer de cierto material para continuar en la clase siguiente, nosotras deberíamos asegurarnos de que ellos dispongan del mismo.

Otra conclusión a la que hemos llegado es que siempre tenemos que contar con un “*plan B*” para enfrentar imprevistos de la clase, como por ejemplo tener una actividad extra cuando algunos alumnos finalizan antes una tarea.

5. **Bibliografía**

- Almeida, L.; Silva, K. y Vertuan, E.R. (2012) *Modelagem Matemática na educação básica*. Editorial Contexto. São Paulo.
- Blomhøj, M. (2008) *Modelización Matemática- Una Teoría para la Práctica*. Revista de Educación Matemática. Vol. 23, n2, p.20-35. Traducción de María Mina del original Mathematical modelling. A theory for practice.
- Odetti, F. (2013) *Estudio de Proporcionalidad Directa e Inversa en distintos ambientes de aprendizaje*. Informe final de prácticas docentes. Facultad de Matemática, Astronomía y Física – Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.
- Skovsmose, O. (2000) *Escenarios de investigación*. Revista EMA. Vol. 6, N° 1, p.3-26.
- Villarreal, M.; Esteley, C y Smith, S. (2011) *Desafíos y decisiones de profesores de matemática en escenarios de modelización: el diseño de un proyecto para el aula*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.
- Villarreal, M. (2004) *Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática*. Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. N.1, 41-55.

Webgrafía⁵

- https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Baumgartner
- https://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Baumgartner
- https://es.wikipedia.org/wiki/Red_Bull_Stratos

⁵ Las páginas web fueron consultadas por última vez en noviembre de 2015.

6. Anexos

6.1 Anexo 1

En este anexo se muestra una guía de actividades que se entregó a los alumnos una vez finalizada la evaluación, con el fin de que ellos puedan ejercitar los contenidos trabajados. También se puede apreciar en esta sección la corrección de la guía de actividades que se adjuntó en el aula virtual a los alumnos para que pudieran corroborar si los resultados obtenidos por ellos eran correctos.

GUÍA DE ACTIVIDADES

Relaciones de Proporcionalidad: Directa e Inversa

1º Año

Sugerencia: consultar el material de estudio puede ayudarte a resolver estos ejercicios

1) Aquí te presentamos una tabla que está incompleta:

Variable Independiente	Variable Dependiente
0	
1	
2	
3	600
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Te proponemos que la completes de dos maneras diferentes:

- Para que represente una relación de proporcionalidad directa.
 - Para que represente una relación de proporcionalidad inversa.
- a) Represente gráficamente los datos de cada tabla.
- b) Indica cuál es la constante de proporcionalidad en ambos casos. Y dar la expresión simbólica que represente cada una de dichas proporcionalidades.

2) Observe detenidamente las siguientes tablas y determine regularidades para cada una de ellas (expresarlas en lenguaje coloquial y/o simbólico).

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

x	y
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

x	y
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

x	Y
1	9
2	4,5
3	3
4	2,25
5	1,8

x	y
2	12
4	24
6	36
8	48
10	60

x	y
1	15
3	24
4	37
5	91
7	94

Resolución de la Guía de Actividades

1) Esta tabla representa una relación de proporcionalidad directa:

Variable Independiente	Variable Dependiente
0	0
1	200
2	400
3	600
4	800
5	1000
6	1200
7	1400
8	1600
9	1800
10	2000

Constante de Proporcionalidad Directa = 200

Expresión simbólica: $y = 200 \cdot x$

Esta tabla representa una relación de proporcionalidad inversa:

Variable Independiente	Variable Dependiente
0	-
1	1800
2	900
3	600
4	450
5	360

6	300
7	257,14
8	225
9	200
10	180

Constante de Proporcionalidad Inversa = 1800

Expresión simbólica: $y = \frac{1800}{x}$

2) Observe detenidamente las siguientes tablas y determine regularidades para cada una de ellas (expresarlas en lenguaje coloquial y/o simbólico).

x	Y
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

Expresión simbólica: $y = x + 1$

Lenguaje coloquial: Para obtener el valor de la variable dependiente tengo que sumarle uno al valor de la variable independiente.

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

Expresión simbólica: $y = 2 \cdot x$

Lenguaje coloquial: Para obtener el valor de la variable dependiente tengo que

multiplicar por dos al valor de la variable independiente.

x	Y
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

Expresión simbólica: $y = x - 1$

Lenguaje coloquial: Para obtener el valor de la variable dependiente tengo que restarle uno al valor de la variable independiente.

x	y
1	9
2	4,5
3	3
4	2,25
5	1,8

Expresión simbólica: $y = \frac{9}{x}$

Lenguaje coloquial: Para obtener el valor de la variable dependiente tengo que dividir 9 por el valor de la variable independiente.

x	Y
2	12
4	24
6	36
8	48
10	60

Expresión simbólica: $y = 6 \cdot x$

Lenguaje coloquial: Para obtener el valor de la variable dependiente tengo que multiplicar por 6 al valor de la variable independiente.

X	Y
1	15
3	24
4	37
5	91
7	94

Expresión simbólica: No tiene una expresión conocida.

6.2 Anexo 2

En este anexo se muestran los dos materiales de estudios que se elaboraron y subieron al aula virtual para que los alumnos pudieran disponer de ellos y utilizarlos cuando lo desearan. El primer material de estudio fue armado en base a los contenidos trabajados en la primera etapa, es decir, los referentes a relaciones entre variables. El segundo material fue realizado en base a los contenidos trabajados en la segunda etapa: relaciones de proporcionalidad directa e inversa.

Material de Estudio

Relaciones entre variables

La matemática nos brinda herramientas para estudiar situaciones o fenómenos de distinta naturaleza tanto en el mundo que nos rodea como dentro de la propia matemática. Nos permite, por ejemplo, estudiar relaciones entre variables... veamos qué queremos decir con esto...

- **¿Qué es una variable?**

Una variable es “algo cuyo valor se modifica”. Ahora les ofrecemos algunos ejemplos para ayudarlos a entender mejor esta noción. Son variables:

<p>La altura de una persona a medida que pasa el tiempo</p> 	<p>El peso de un perro a lo largo de su vida</p> 	<p>La temperatura a lo largo de la semana</p> 
<p>El color de ojos de los alumnos de primer año</p> 		

Entre los ejemplos de variables que hemos dado, hay algunas que pueden medirse (altura, peso, temperatura), es decir son magnitudes. Así, algunas variables pueden ser magnitudes.

En particular nos interesa estudiar relaciones entre variables en diferentes situaciones o

fenómenos. A continuación les presentamos una situación en la que podremos apreciar una relación entre variables.

Pedro tiene fiebre, la mamá le toma la temperatura y es de 38° ; pasa media hora y la mamá vuelve a tomarle la temperatura, esta vez es de 39° y entonces le da un remedio para que la fiebre disminuya. Tras una hora, al medir la temperatura nuevamente, ésta ha bajado a 37° .



Hemos descrito aquí un fenómeno de aumento y descenso de la fiebre de un niño en un cierto período de tiempo. Podemos identificar dos variables que se relacionan: la **temperatura** de Pedro que cambia según el **tiempo** que va transcurriendo.

Para poder profundizar nuestro estudio de relaciones entre variables realizamos tres actividades en el laboratorio (en el aula virtual pueden ver los enunciados de cada una). A continuación recordamos los objetivos que se propusieron en cada actividad y las variables identificadas en cada caso.

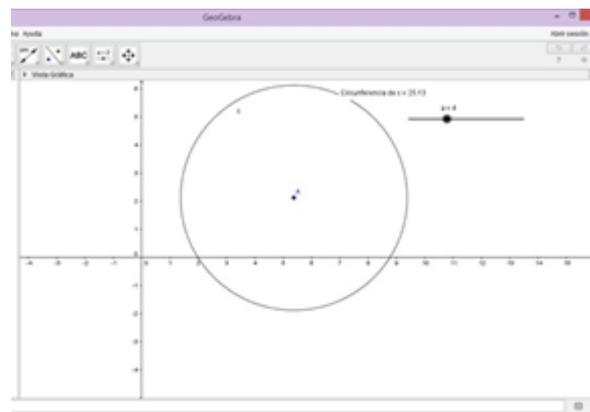
Actividad 1:

Circunferencias animadas en GeoGebra

Objetivo: Estudiaremos la relación entre el radio y la longitud de una circunferencia.

Variables:

longitud del radio
longitud de la circunferencia



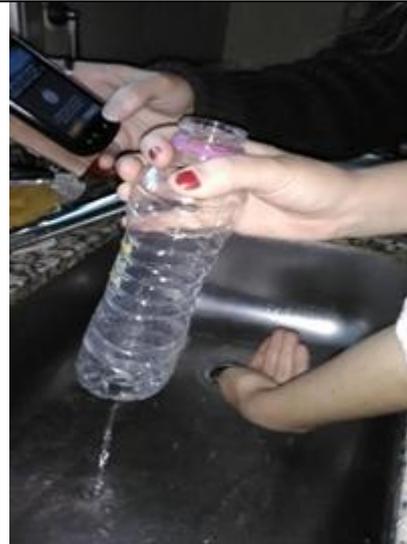
Actividad 2: *Vaciado de botellas*

Objetivo: Estudiaremos el tiempo de vaciado de una botella en relación al tamaño del orificio por el cual el líquido se vierte.

Variables:

Área del orificio

Tiempo de vaciado



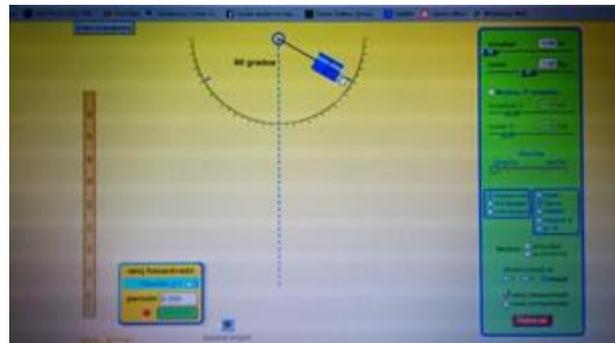
Actividad 3: *El péndulo*

Objetivo: Estudiaremos la relación entre la longitud del hilo del péndulo y el período (tiempo que se invierte en realizar una oscilación completa).

Variables:

Longitud del hilo del péndulo

Período



https://phet.colorado.edu/sims/pendulumlab/pendulum-lab_es.html

En la Actividad 1, al estudiar la relación entre el radio y la longitud de la circunferencia a partir de la animación en GeoGebra, pudimos ver que la variación de la longitud de la circunferencia **depende** de la variación del radio de la circunferencia y por eso decimos que la longitud de la circunferencia es la **variable dependiente**, mientras que la longitud del radio será la **variable independiente**.

En la Actividad 2, al estudiar la relación entre el área del orificio y el tiempo de vaciado de las botellas, pudimos ver que el tiempo de vaciado **depende** de la variación del área del orificio y por eso decimos que el tiempo de vaciado de la botella es la **variable dependiente**, mientras que el área del orificio será la **variable independiente**.

En la Actividad 3, al estudiar la relación entre la longitud del hilo del péndulo y el período, pudimos ver que el período **depende** de la variación de la longitud del hilo del péndulo y por eso decimos que el período es la **variable dependiente**, mientras que la longitud del hilo del péndulo será la **variable independiente**.

En resumen, a partir de estas actividades en las que estudiamos diferentes relaciones entre dos variables, aprendimos a:

- Identificar variables independientes y dependientes
- Recolectar y organizar datos en tablas
- Realizar gráficos a partir de los datos de las tablas

A continuación nos referimos a cada uno de estos aspectos. Para ellos vamos a responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué es una variable independiente?
- ¿Qué es una variable dependiente?
- ¿Cómo organizar los datos obtenidos en una tabla?
- ¿Cómo graficar los datos de una tabla en un sistema de coordenadas cartesianas?

- **¿Qué es una Variable Independiente?**

Es una variable cuya variación puede ser manejada por la persona que estudia el fenómeno o realiza mediciones, a fin de ver qué sucede con la variable dependiente.

Ejemplos:

- En "*Circunferencias Animadas en GeoGebra*" la variable independiente es el radio.
- En "*Vaciado de Botellas*" la variable independiente es el área del orificio.
- En "*El Péndulo*" la variable independiente es la longitud del hilo.
- En el ejemplo de Pedro la variable independiente es el tiempo.

- **¿Qué es una Variable Dependiente?**

Es una variable cuyo valor puede cambiar dependiendo del cambio que experimente la variable independiente.

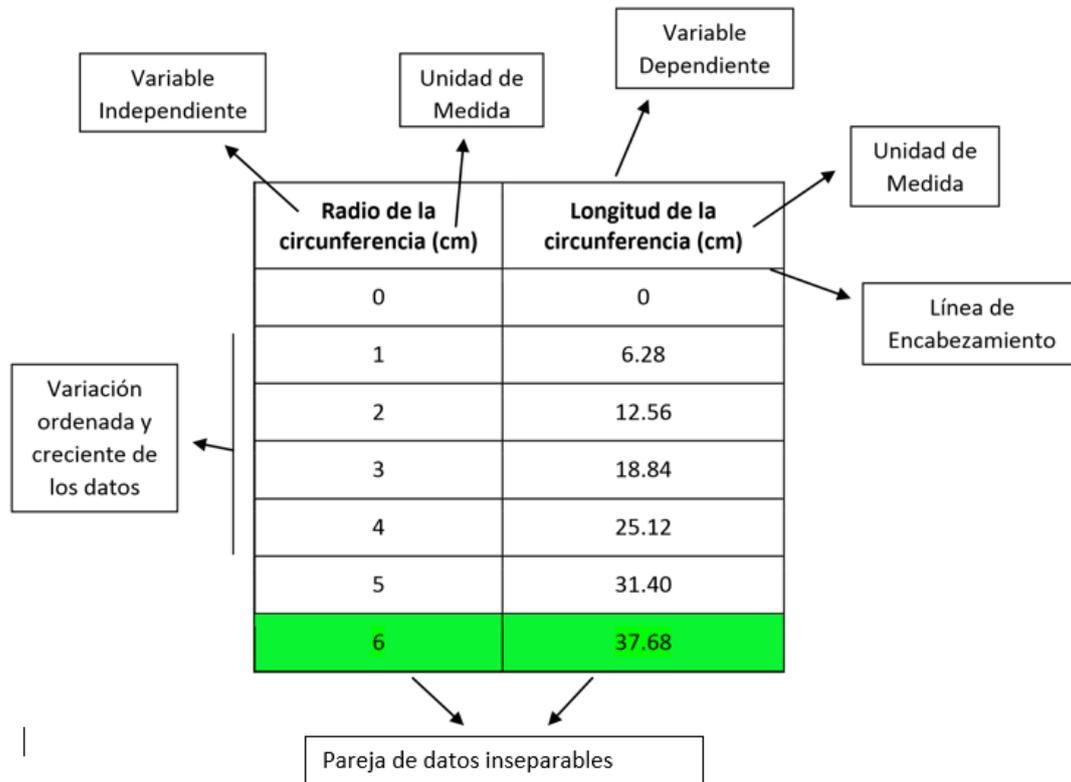
Ejemplos:

- En "*Circunferencias Animadas en GeoGebra*" la variable dependiente es la longitud de la circunferencia.
- En "*Vaciado de Botellas*" la variable dependiente es el tiempo de vaciado.
- En "*El Péndulo*" la variable dependiente es el período.

- En el ejemplo de Pedro la variable dependiente es la temperatura.

• **¿Cómo organizar los datos obtenidos en una tabla?**

Hemos visto que una forma económica de organizar los datos y adecuada para comunicarlos es la tabla.



Una tabla se organiza en columnas y filas. En el encabezado de la columna del lado izquierdo siempre colocamos la variable independiente mientras que en la columna del lado derecho siempre colocamos la variable dependiente con sus correspondientes unidades de medida, entre paréntesis.

Es conveniente que los valores de la variable independiente se escriban en forma ordenada y creciente. Esto facilita la lectura y la búsqueda de regularidades.

En una fila siempre hay una pareja de datos inseparables ya que cada valor de la variable independiente tiene una correspondencia única con un valor de la variable dependiente. Con este par de datos relacionados podemos formar un par ordenado.

• **¿Cómo graficar los datos de una tabla en un sistema de coordenadas cartesianas?**

Para poder graficar los datos de una tabla es importante observar que cada par de datos de la tabla conforman una pareja inseparable y pueden ser escritos como pares ordenados, donde la primera coordenada representará a la variable independiente y la segunda coordenada representará a la variable dependiente.

A continuación les mostramos la tabla correspondiente a la relación entre el radio y la longitud de las circunferencias y cómo escribimos cada par de datos relacionados como

pares ordenados. A la derecha pueden ver la forma en que se deben ingresar los datos en GeoGebra.

Observemos que para ingresar en GeoGebra un número decimal, por ejemplo **6,28** es necesario escribir **6.28** (es decir usar punto en lugar de coma).

Radio de la circunferencia (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)		
0	0	→	(0 , 0)
1	6,28	→	(1 , 6,28)
2	12,56	→	(2 , 12,56)
3	18,84	→	(3 , 18,84)
4	25,12	→	(4 , 25,12)
5	31,40	→	(5 , 31,40)
6	37,68	→	(6 , 37,68)

[En GeoGebra](#)

(0 , 0)

(1 , 6.28)

(2 , 12.56)

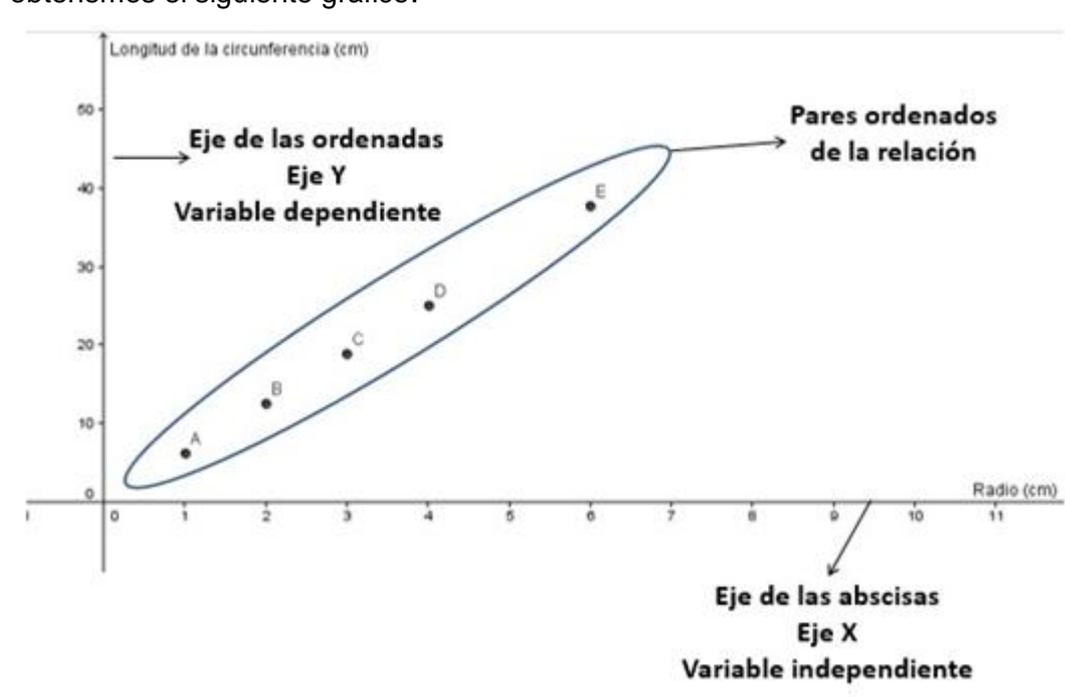
(3 , 18.84)

(4 , 25.12)

(5 , 31.40)

(6 , 37.68)

Luego de ingresar en GeoGebra el conjunto de pares ordenados de la relación, obtenemos el siguiente gráfico:



En los ejes cartesianos, la variable independiente siempre se representa sobre el eje de

abscisas mientras que la variable dependiente se representa sobre el eje de ordenadas. Además, por convención, al eje de abscisas siempre lo llamamos “eje x ” y al eje de ordenadas lo llamamos “eje y ”.

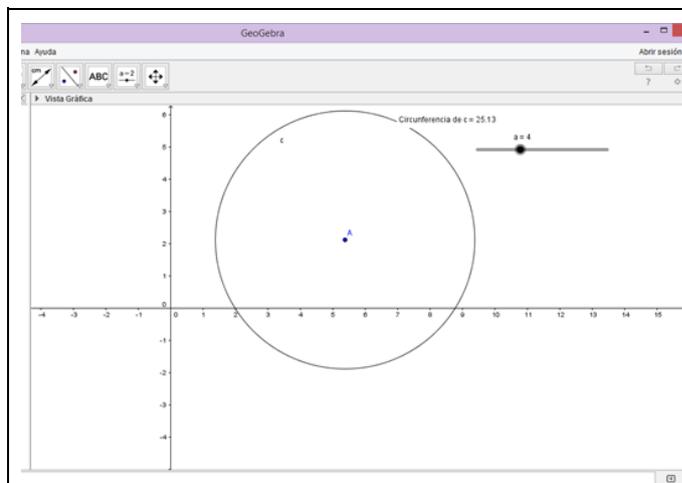
Cada uno de los puntos marcados en el gráfico son pares ordenados. Por convención siempre se pone primero, en el par ordenado, el punto que corresponde a la variable independiente y posteriormente el de la variable dependiente. El conjunto de esos pares ordenados representa la relación entre las variables antes mencionadas.

Material de Estudio

Hemos estado estudiando relaciones entre variables y hemos visto que en la vida cotidiana encontramos situaciones y fenómenos que nos muestran relaciones entre dos variables. Entre estas relaciones que observamos se destacan dos relaciones particulares que estudiaremos con más detalle: la relación de Proporcionalidad Directa y la relación de Proporcionalidad Inversa. Particularmente vamos a estudiar qué características tienen estas dos relaciones para poder reconocer cuándo una relación es de Proporcionalidad Directa, cuándo es de Proporcionalidad Inversa o cuándo no lo es.

Relación de Proporcionalidad Directa

Podemos encontrar distintas situaciones o fenómenos que nos muestran relaciones de proporcionalidad directa. Por ejemplo:



El radio y la longitud de la circunferencia muestran una relación de proporcionalidad directa.



Si la velocidad de un auto es constante, la distancia que este recorre y el tiempo que tarda en recorrer esa distancia muestran una relación de proporcionalidad directa.

¿Cómo sabemos si una relación entre dos variables es de Proporcionalidad Directa?

Vamos a responder esta pregunta basándonos en una de las Actividades realizadas en clase, la que muestra la relación entre el radio y la longitud de la circunferencia. Recordemos que en esa relación el radio es la variable independiente y la longitud de la circunferencia es la variable dependiente. A partir de la búsqueda de regularidades en la tabla, observamos algunas propiedades. Por ejemplo pudieron observar que:

Si multiplicamos por 2 un radio, entonces la longitud de la circunferencia correspondiente a ese radio también se multiplica por 2, del mismo modo, si multiplicamos por 3 un radio, la longitud de la circunferencia correspondiente a ese radio se multiplica por 3.

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)
0	0
1	6,28
2	12,56
3	18,84
4	25,12
5	31,40
6	37,68

Diagram illustrating the relationship between radius and circumference. The table shows that as the radius increases, the circumference also increases proportionally. Arrows indicate that multiplying the radius by 2 (X 2) results in the circumference being multiplied by 2, and multiplying the radius by 3 (X 3) results in the circumference being multiplied by 3.

En general, podemos decir que al multiplicar la variable independiente por un número n , su correspondiente valor de la

variable dependiente queda multiplicado por el mismo número n .

También pudimos observar que al sumar dos valores del radio, las longitudes de las circunferencias correspondientes, también se suman, en este caso, por ejemplo, $2 + 3 = 5$ y del mismo modo, $12,56 + 18,84 = 31,40$:

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)
0	0
1	6,28
2	12,56
3	18,84
4	25,12
5	31,40
6	37,68

+ +

Es decir que al sumar dos valores de la variable independiente sus correspondientes valores de la variable dependiente quedan sumados.

Pudimos ver que para calcular la longitud de cualquier circunferencia había que multiplicar 6,28 por el valor del radio de esa circunferencia. Luego pudimos escribir eso de manera más sintética:

$$\text{Longitud de la circunferencia} = 6,28 \cdot \text{radio de la circunferencia}$$

Si elegimos nombres más abreviados para las variables, por ejemplo

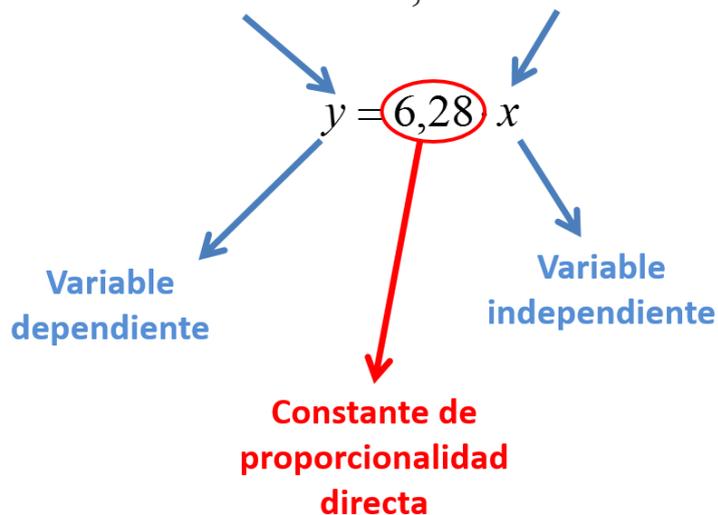
L = Longitud de la circunferencia

r = radio

Podríamos escribir: $L = 6,28 \cdot r$

En matemática, por convención, la variable independiente se representa con x y la dependiente con y . Por este motivo la expresión simbólica de la relación que se está estudiando podría escribirse como $y = 6,28 \cdot x$.

Longitud de la circunferencia = 6,28 . Radio



Observación: al usar los nombres x e y para las variables independiente y dependiente, respectivamente, es posible realizar los gráficos en GeoGebra ya que el programa reconoce esos nombres de variables.

Luego vimos que dentro de estas regularidades, que se esconden en la tabla, había una que era muy importante: al realizar la división entre cualquier valor de la variable dependiente y su correspondiente valor de la variable independiente se obtiene siempre el mismo número, en el caso de nuestro ejemplo 6,28.

Radio (cm)	Longitud de la circunferencia (cm)	$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Radio}}$
0	0	No tiene solución
1	6,28	$\frac{6,28}{1} = 6,28$
2	12,56	$\frac{12,56}{2} = 6,28$
3	18,84	$\frac{18,84}{3} = 6,28$
4	25,12	$\frac{25,12}{4} = 6,28$
5	31,40	$\frac{31,40}{5} = 6,28$
6	37,68	$\frac{37,68}{6} = 6,28$

Es decir que al dividir valores de la variable dependiente por sus correspondientes valores de la variable independiente, siempre obtenemos el mismo número 6,28 y este número lo llamamos **constante de proporcionalidad directa**.

La expresión simbólica de esta regularidad sería $\frac{y}{x} = 6,28$

Hasta ahora hemos analizado una relación de proporcionalidad directa particular: la relación entre el radio y la longitud de la circunferencia.

En general diremos que:

Una relación de proporcionalidad directa se representa simbólicamente a través de la expresión

$$y = k \cdot x$$

donde k es un número positivo que se denomina constante de proporcionalidad directa.

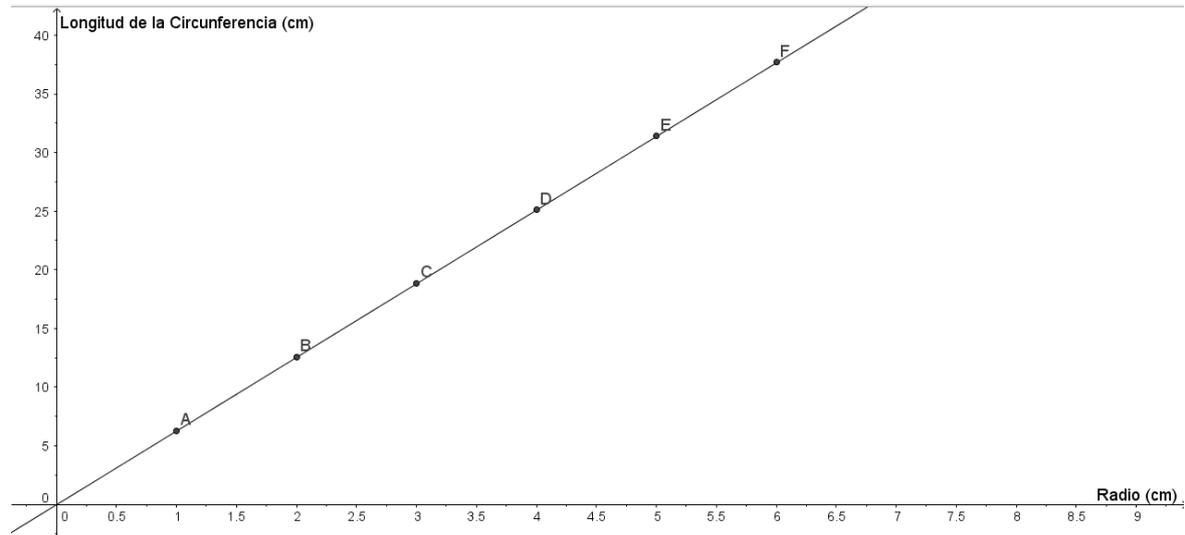
Recordemos que en una relación de proporcionalidad directa al dividir valores de la variable dependiente (y) por sus correspondientes valores de la variable independiente (x) (salvo para $x = 0$), siempre obtenemos el mismo número k , o sea la constante de proporcionalidad directa. Simbólicamente:

$$\frac{y}{x} = k$$

Observemos que esta característica de la proporcionalidad directa nos permite:

- Encontrar la constante de proporcionalidad directa: usando cualquier par de datos de la relación, hacemos la división $\frac{y}{x}$ para obtener k .
- Verificar si una tabla dada está representando una relación de proporcionalidad directa: todas las divisiones $\frac{y}{x}$ de los pares que componen la tabla deben dar el mismo resultado k .

Además de la representación de la relación de proporcionalidad directa usando una tabla y en lenguaje simbólico, también vimos su representación gráfica



El gráfico correspondiente a una relación de proporcionalidad directa posee las siguientes características:

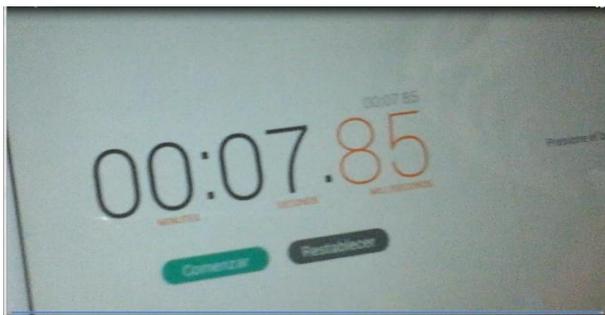
- Es una recta
- Es creciente
- Pasa por el origen de coordenadas, es decir, pasa por (0,0)

Relación de Proporcionalidad Inversa

En la vida nos podemos encontrar también situaciones que muestran una relación de proporcionalidad inversa entre dos variables. Por ejemplo:



Hemos realizado un experimento en el laboratorio, "Vaciado de botellas", donde colocamos una cierta cantidad de agua en diferentes botellas, y registramos el tiempo que tardaban en vaciarse, dependiendo del área del orificio que cada una tenía en su base. Así relacionamos el área del orificio de cada botella con el tiempo que ésta tarda en vaciarse.



¿Cómo sabemos si una relación entre dos variables es de Proporcionalidad Inversa?

Para responder esta pregunta haremos uso de la actividad “Vaciado de botellas”. En esa Actividad, que muestra la relación entre el área del orificio de una botella y el tiempo en el que se vierte el agua por este orificio, al buscar regularidades en la tabla de datos, observamos propiedades como:

Al multiplicar por 2 el área del orificio, se divide por 2 el tiempo de vaciado de la botella correspondiente a esa área, del mismo modo, por ejemplo, al multiplicar por 4 el área del orificio, se divide por 4 el tiempo de vaciado de la botella correspondiente:

Área del orificio (en cm^2)	Tiempo de vaciado (segundos)
0,5	60
1,0	30
1,5	20
2,0	15
2,5	12
3,0	10

Diagram illustrating the inverse relationship between area and time. On the left, a curved arrow labeled 'X 4' points from the first row (0.5, 60) to the fourth row (2.0, 15). On the right, a curved arrow labeled '/ 2' points from the first row (0.5, 60) to the second row (1.0, 30), and another curved arrow labeled '/ 4' points from the first row (0.5, 60) to the fourth row (2.0, 15).

Es decir al multiplicar la variable independiente por un número n , su correspondiente valor de la variable dependiente queda dividido por el mismo número n .

Se puede ver que para calcular el tiempo de vaciado de una botella hay que dividir 30 por el valor del área del orificio de la botella. Si lo queremos escribir de forma más sintética:

$$\text{Tiempo de Vaciado} = \frac{30}{\text{Área del orificio}}$$

Si elegimos nombres más abreviados para las variables, podemos escribir:

$T = \text{tiempo de vaciado}$

$A = \text{área del orificio}$

podríamos escribir: $y = \frac{30}{x}$

Como mencionamos anteriormente, en matemática, por convención, la variable independiente se representa con x y la dependiente con y . Por este motivo la expresión simbólica de la relación que se está estudiando podría escribirse como $y = \frac{30}{x}$

Tiempo de vaciado = $\frac{30}{\text{Área del orificio}}$

$y = \frac{30}{x}$

Variable dependiente

Variable independiente

Constante de proporcionalidad inversa

Observación: al usar los nombres x e y para las variables independiente y dependiente, respectivamente, es posible realizar los gráficos en GeoGebra ya que el programa reconoce esos nombres de variables.

Observemos que dentro de estas regularidades, que se esconden en la tabla, hay una muy importante: al realizar la multiplicación de cualquier valor de la variable independiente por su correspondiente valor de la variable dependiente se obtiene siempre el mismo número, en el caso de nuestra actividad 30.

Área del orificio (en cm^2)	Tiempo de vaciado (segundos)	Área del orificio . Tiempo de vaciado
0,5	60	0,5.60=30
1,0	30	1,0.30=30
1,5	20	1,5.20=30
2,0	15	2,0.15=30
2,5	12	2,5.12=30
3,0	10	3,0.10=30

Es decir, que al multiplicar valores de la variable independiente por sus correspondientes valores de la variable dependiente obtenemos el mismo número 30, a ese número lo llamamos constante de proporcionalidad inversa.

La expresión simbólica de esta regularidad sería $y \times x = 30$.

Hasta ahora hemos analizado una relación de proporcionalidad inversa particular: la relación entre el área del orificio de un recipiente por el cual se vierte agua y el tiempo de vaciado del mismo.

En general diremos que:

Una relación de proporcionalidad inversa se representa simbólicamente a través de la expresión

$$y = \frac{k}{x}$$

donde k es un número positivo que se denomina constante de proporcionalidad inversa.

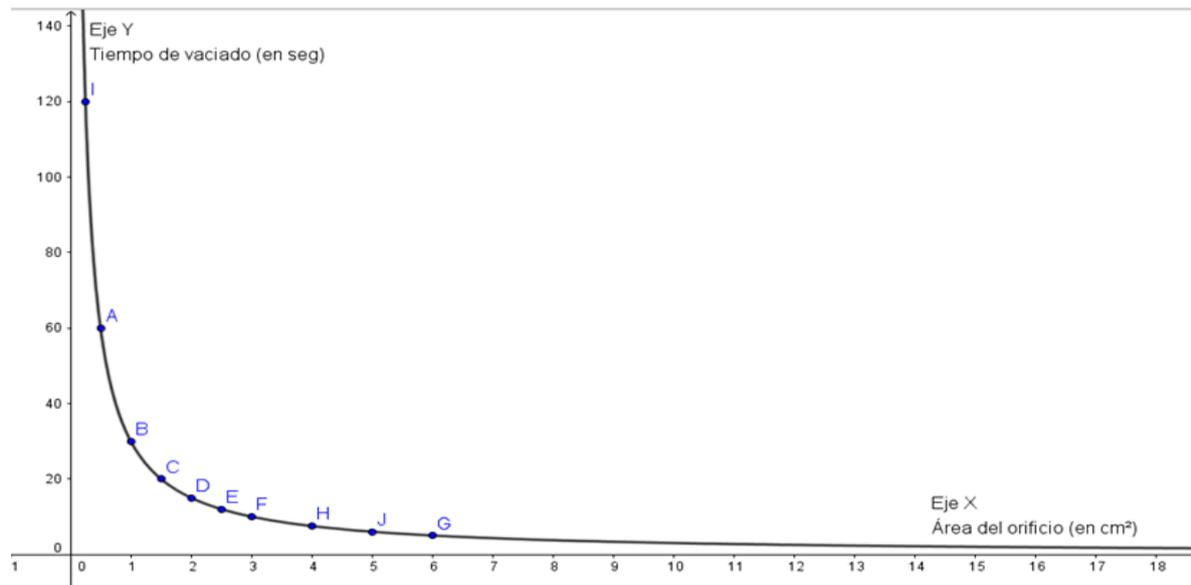
Recordemos que en una relación de proporcionalidad inversa al multiplicar valores de la variable independiente (x) por sus correspondientes valores de la variable dependiente (y), siempre obtenemos el mismo número k , o sea la constante de proporcionalidad inversa. Simbólicamente:

$$x \cdot y = k$$

Observemos que esta característica de la proporcionalidad inversa nos permite:

- Encontrar la constante de proporcionalidad inversa usando cualquier par de datos de la relación, hacemos la multiplicación $x \cdot y$ para obtener k .
- Verificar si una tabla dada está representando una relación de proporcionalidad inversa: todas las multiplicaciones $x \cdot y$ de los pares que componen la tabla deben dar el mismo resultado k .

Además de la representación de la relación de proporcionalidad inversa usando una tabla y en lenguaje simbólico, también vimos su representación gráfica:



El gráfico correspondiente a una relación de proporcionalidad inversa posee las siguientes características:

- Es una hipérbola
- Es decreciente
- No corta a los ejes coordenados

6.3 Anexo 3

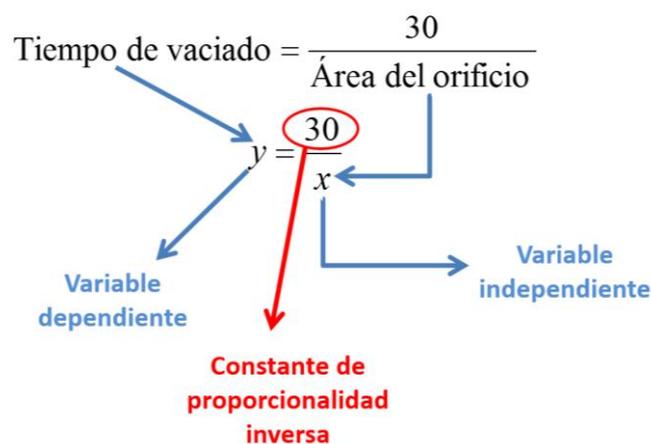
En este Anexo se muestra la secuencia de diapositivas que fueron presentadas a los alumnos como cierre de la segunda actividad, detallada en la Sección 3.7.2.2. En esta secuencia se puede observar la caracterización de la relación de Proporcionalidad Inversa a la que se arribó.

Regularidades en la tabla

Área del orificio (en cm^2)	Tiempo de vaciado (segundos)
0,5	60
1,0	30
1,5	20
2,0	15
2,5	12
3,0	10

Al multiplicar la variable independiente por un número n , su correspondiente valor de la variable dependiente queda dividido por el mismo número n .

La relación en símbolos



Una regularidad importante

Área del orificio (en cm^2)	Tiempo de vaciado (segundos)	Área del orificio . Tiempo de vaciado
0,5	60	0,5.60=30
1,0	30	1,0.30=30
1,5	20	1,5.20=30
2,0	15	2,0.15=30
2,5	12	2,5.12=30
3,0	10	3,0.10=30

Al multiplicar valores de la variable independiente por sus correspondientes valores de la variable dependiente obtenemos el mismo número 30, al que llamamos **constante de proporcionalidad inversa**.

Una regularidad importante

Área del orificio (en cm^2)	Tiempo de vaciado (segundos)	Área del orificio . Tiempo de vaciado
0,5	60	0,5.60=30
1,0	30	1,0.30=30
1,5	20	1,5.20=30
2,0	15	2,0.15=30
2,5	12	2,5.12=30
3,0	10	3,0.10=30

Es decir:

$$\text{Área del orificio} \cdot \text{Tiempo de vaciado} = x \cdot y = 30$$

En general diremos que...

Una **relación de proporcionalidad inversa** se representa simbólicamente a través de la expresión

$$y = \frac{k}{x}$$

donde k es un número positivo que se denomina **constante de proporcionalidad inversa**.

Recordemos que...

en una relación de proporcionalidad inversa al multiplicar valores de la variable independiente (x) por sus correspondientes valores de la variable dependiente (y) obtenemos el mismo número k , al que llamamos **constante de proporcionalidad inversa**.

Simbólicamente: $x \cdot y = k$

El gráfico correspondiente a una **relación de proporcionalidad inversa** posee las siguientes características:

- Es una hipérbola
- Es decreciente
- No corta a los ejes coordenados

