

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XI JORNADAS

VOLUMEN 7 (2001), Nº 7

Ricardo Caracciolo

Diego Letzen

Editores



ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons atribución NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina



Cuatro interpretaciones del Teorema de Completud†

José Seoane*

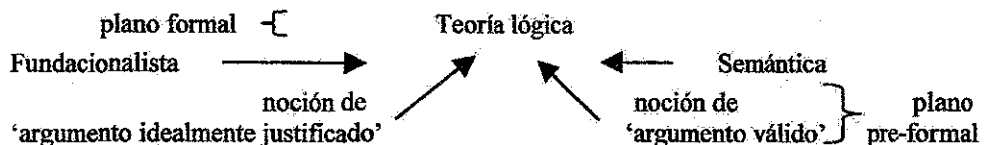
1. Introducción

No todo hallazgo filosófico o científico puede —probablemente— ser comprendido como una *elucidación*. No obstante, es posible identificar casos significativos en uno y otro campo que admiten muy naturalmente ser así entendidos; el concepto de ‘falsabilidad’ respecto de la noción menos precisa de ser refutable empíricamente y la definición en términos δ - ϵ de límite de una función respecto de la noción intuitiva de límite resultan ejemplos incontrovertibles de ello. El problema de la naturaleza general de estos procesos —aunque de innegable interés— no será abordado aquí.¹

Si se concibe la teoría lógica como *elucidación* pueden distinguirse dos formas de entender la *estructura* de la misma: a) entender tal teoría como el esfuerzo por elucidar *una* noción pre-formal y b) entenderla como procurando elucidar *diversas* nociones pre-formales. Una exigencia metodológica fundamental —si se opta por b)— consiste en exhibir la articulación entre tales nociones intuitivas.² Dado que las contrapartidas formales de estas últimas nociones permiten —por su propia naturaleza— un tratamiento matemático al cual éstas son refractarias, una alternativa muy atrayente consiste en explotar el conocimiento que sobre las primeras se tiene para esclarecer la (elusiva) articulación de las últimas. Sin embargo, hacer trabajar los resultados matemáticos relevantes en la resolución de tal problema filosófico (la articulación de las nociones intuitivas) exige, a su vez, la respuesta a otros problemas más básicos, a saber, las relaciones respectivas entre los conceptos pre-formales y formales en cuestión. El propósito de esta nota es mostrar el impacto que producen respuestas diversas a dichos problemas ‘básicos’ en el importe conceptual de un resultado fundamental de la lógica de orden uno: *el teorema de completud*.³

2. Conceptos lógicos pre-formales y conceptos lógicos formales

Si se piensa la teoría lógica como elucidación de conceptos pre-formales, una adecuada comprensión de la misma supone la identificación de éstos así como un análisis de las virtudes y defectos de tal teoría como explicatum. Se asumirá —siguiendo a Shapiro [1991] y Wagner [1987]— que pueden identificarse dos perspectivas de la lógica que influyen decisivamente en las orientaciones específicas del desarrollo de la disciplina a través de su historia. Estas perspectivas quedan caracterizadas básicamente por los diferentes conceptos que atribuyen como explicanda a la teoría lógica. Esquemáticamente, la situación podría lucir así:



* Instituto de Filosofía, FHCE, Universidad de la República (Montevideo, Uruguay).

La concepción *fundacionalista* entenderá entonces que el concepto pre-formal que estimula la investigación lógica es la noción de *argumento idealmente justificado*. Esta noción —de evidente sabor epistémico— puede rápidamente caracterizarse así: un argumento es idealmente justificado si y sólo si las premisas permiten arribar a la conclusión mediante una ‘cadena auto-evidentemente segura de razonamiento’.⁴

La concepción *semántica* o *modelo-teórica* asume que la noción pre-formal fundamental es la de *argumento válido*. Este concepto es el que habitualmente se encuentra en la literatura lógica: un argumento es válido si y sólo si, si sus premisas son verdaderas, necesariamente su conclusión lo es —o, dicho de otra forma, si sus premisas *implican* su conclusión.

La primera concepción habría estimulado una percepción *sintáctica* de la lógica —orientada hacia los sistemas deductivos más que a sus semánticas; la segunda habría colaborado en una concepción *semántica* de la misma.⁵ Simplificando el problema, quizá podría decirse que la contrapartida formal obtenida a partir del primer concepto intuitivo es la noción de *consecuencia sintáctica* y la noción formal correspondiente al segundo concepto pre-teórico es la noción de *consecuencia semántica* o *modelo-teórica*.⁶ Luego si se desease comparar ambos conceptos intuitivos, ¿por qué no recurrir a los resultados matemáticos de completud? Es decir, ¿no proveen estos resultados una respuesta directa y en extremo confiable a la interrogante acerca de la comparación (por lo menos desde un punto de vista extensional) entre ambos conceptos pre-formales?

3. Teoremas y tesis filosóficas

La respuesta negativa a las interrogantes de arriba ha sido fundamentada por diversos autores.⁷ El problema es fácil de advertir, una vez que se han descrito con relativo detalle la estructura elucidatoria tanto del concepto de consecuencia sintáctica como de consecuencia semántica. Es decir, una vez constatado el status de explicatum de ambos, la cuestión de sus relaciones con los respectivos explicanda es inmediata. Esta da lugar a dos *tesis*⁸ —donde Γ' , ϕ' son las traducciones respectivamente de Γ y ϕ , ‘SD’ representa un sistema deductivo particular y ‘Sem’ una semántica formal particular:

Tesis 1:

- a) (Corrección informal sintáctica) Si ϕ es *deducible* (en SD) a partir de Γ , entonces ϕ' se encuentra *idealmente justificada* (en el lenguaje ordinario) a partir de Γ' .
- b) (Completud informal sintáctica) Si ϕ se encuentra *idealmente justificada* (en el lenguaje ordinario) a partir de Γ , entonces ϕ' se *deduce* (en SD) a partir de Γ' .

Tesis 2:

- a) (Corrección informal semántica) Entonces si ϕ es *consecuencia semántica* (en Sem) de Γ , ϕ' se encuentra *implicada por* (en el lenguaje ordinario) Γ' .
- b) (Completud informal semántica) Entonces si ϕ se encuentra *implicada por* (en el lenguaje ordinario) Γ , ϕ' es *consecuencia semántica* (en Sem) de Γ' .

Se trata de *tesis* en el sentido habitual de esta palabra en la literatura: cada una de ellas establece el ‘vínculo’ entre un concepto intuitivo y un concepto formal. Este rasgo —por lo menos en un sentido clásico— impone cierta peculiaridad metodológica a la justificación posible: se tratará de una justificación conceptual y no de una prueba.

El teorema de completud puede expresarse así (con la simbología usual):

Teorema de completud: Sea Γ un conjunto de sentencias de un lenguaje formal, sea ϕ una sentencia del mismo. $\Gamma \vdash_{SD} \phi$ si y solamente si $\Gamma \models_{Sem} \phi$.

Es fácil advertir la enorme distancia entre lo que afirman este teorema y la comparación extensional pretendida. Debiera resultar obvio que esta última —a la luz de los desarrollos anteriores— posee la naturaleza de una tesis. Se trata de comparar —extensionalmente— dos conceptos pre-formales o intuitivos, no de evaluar las relaciones entre conceptos formales. Luego, adviértase que para hacer trabajar ‘filosóficamente’ el teorema de arriba (en el sentido antes especificado) es necesario haber resuelto la evaluación de las tesis 1 y 2. La próxima sección pretende mostrar cómo diversas evaluaciones de estas tesis implican interpretaciones distintas del teorema de completud.

4. El teorema de completud: interpretaciones

Es posible asumir ante las tesis 1 y 2 actitudes significativamente diversas pero —en una primera aproximación— parece sensato clasificar tales actitudes en términos de aprobación o rechazo.⁹ Si se acepta —aunque más no sea provisionalmente— tal reducción, se ofrecen cuatro formas de interpretar el teorema de completud, dependiendo de cómo se distribuyan aceptaciones y rechazos en relación con las tesis.

Interpretación 1. Supóngase que se aceptan ambas tesis, es decir, se considera que tanto la elucidación ‘sintáctica’ como la elucidación ‘semántica’ han sido plenamente exitosas, entonces se tiene, por así decir, la ‘informatividad filosófica máxima’ del teorema. Efectivamente, el mismo establecería que —para el lenguaje en cuestión— los dos conceptos intuitivos —en un sentido razonable— son co-extensionales. Pero cabe advertir que este éxito filosófico se apoya en el resultado matemático más la justificación conceptual de las tesis 1 y 2. Ninguno de los dos ‘resultados’ —ni el matemático, ni el filosófico— permiten, por sí solos, obtener la ecuación conceptual pretendida. Es sugestiva la afirmación de Shapiro:¹⁰

...there is a sense in which the conceptions coincide when attention is restricted to first-order languages. This is related to the fact that first-order logic is complete, unlike higher-order logic.

La misma es exacta en la medida que relaciona ‘concepciones’ (ya que se las ha caracterizado como asumiendo las tesis respectivas) y no ‘conceptos pre-formales’; esto último supondría que se cuenta con una aceptable argumentación filosófica a favor de 1 y 2. Esta última observación posee cierto interés porque (hasta donde alcanzo a ver) sugiere la distinción entre dos estrategias posibles de defensa de la superioridad de orden uno respecto de los lenguajes de orden superior. Una estrategia *débil* apoyada en la coincidencia de las perspectivas fundacional y semántica;¹¹ una estrategia *fuerte* respaldada en la coincidencia de los conceptos pre-formales.¹² Estos desarrollos permiten apreciar el diverso costo filosófico de tales defensas; en particular, el carácter oneroso de la última.

Interpretación 2. Supóngase que se acepta la tesis 2 pero que se rechaza (o simplemente no se cuenta con evidencia a favor de) la tesis 1. Es decir, el enfoque semántico es exitoso pero el sintáctico no lo es (o, por lo menos, no puede afirmarse que lo sea). El teorema de completud permite concluir la adecuación del sistema deductivo en cuestión a la noción de

argumento válido pero no permite inferir nada acerca de cómo se relacionan los conceptos pre-formales que subyacen a las perspectivas lógicas que se pretende comparar, pues es impotente para resolver la cuestión de la relación entre las nociones de consecuencia sintáctica y de argumento idealmente justificado. Esta lectura parece aproximarse a la interpretación tradicional del teorema de completud para lenguajes de orden uno (clásico): *lo que muestra es la adecuación del sistema deductivo pues satisface el control semántico*. Esta primacía de la semántica no necesariamente está asociada con un rechazo de la tesis 1 pero resulta compatible con el mismo. La lectura tradicional indudablemente adhiere a la primacía de la semántica; la duda quizá surja en si debe entenderse como comprometida con una concepción *exclusivista* del punto de partida pre-formal o intuitivo (y éste sería la noción de argumento válido)¹³ o como comprometida con una –por así decir– tesis de la primacía semántica a nivel pre-formal.

Interpretación 3. Supóngase ahora que se acepta la tesis 1 pero que se rechaza (o simplemente no se cuenta con evidencia a favor de) la tesis 2. Es decir, el enfoque sintáctico es exitoso pero el semántico no. El teorema de completud entonces todo lo que permite concluir es que existe una contrapartida semántica de la noción sintáctica adecuada, pero nada informa acerca de la conexión de esta noción sintáctica con el concepto pre-formal de validez: no resuelve la relación entre la semántica (formal) construida y la noción de argumento válido. Al igual que en la interpretación 2, si lo que se procuraba era una comparación extensional entre los conceptos intuitivos como medio para *unificar* ambas perspectivas lógicas, el teorema es inútil. Una observación marginal pero interesante es que una convicción de este tipo parece subyacer en las lógicas que, presentadas como sistemas deductivos sin semántica intuitiva, auspician la construcción de una cierta semántica formal que permite la prueba del teorema. En cierto sentido, la justificación de tal semántica es su capacidad de permitir probar la completud. Se ha producido allí una especie de ‘inversión’ del enfoque tradicional: de alguna forma no es la semántica la que funciona como ‘test’ de la sintaxis sino, por el contrario, la legitimidad de la semántica es dada por su capacidad de traducir los requerimientos de la sintaxis. Se podría conjeturar que cierta diferencia intuitiva percibida entre la dosis informativa del teorema de completud de lenguajes de orden uno (clásico) y la ofrecida por los teoremas de completud de algunas lógicas divergentes –por ejemplo, ciertos sistemas paraconsistentes o aún el caso de la lógica intuicionista¹⁴– quedaría así parcialmente aclarada. Para decirlo un tanto metafóricamente, la completud clásica es ‘completud del sistema deductivo’ y la completud divergente (en los casos referidos) es ‘completud de la semántica’.

Interpretación 4. Supóngase, finalmente, que se rechazan ambas tesis (o no se tiene evidencia a favor de ninguna de las dos). Este caso contrasta radicalmente con la interpretación 1: se tiene entonces (por así decir) la ‘*mínima informatividad filosófica*’. El teorema de completud no puede aclarar relación alguna entre los conceptos pre-formales pero más aún no puede representar control alguno de una alternativa elucidatoria sobre otra; es decir, no expresa ni la evaluación de la sintaxis por la semántica ni la evaluación de la semántica por la sintaxis y, naturalmente, no ofrece ninguna información respecto de las tesis 1 y 2. La propia denominación (completud) parece un tanto inmotivada en esta alternativa; sería mejor denominarlo (como lo hacen algunos autores¹⁵) ‘teorema de coincidencia’ o ‘correspondencia’: todo lo que afirma es que dos conceptos formales –a saber, consecuencia se-

mántica y consecuencia sintáctica— coinciden extensionalmente para un cierto lenguaje dado. Debe notarse que esta interpretación —al igual que la 1— es radicalmente 'igualitarista': no entroniza ninguna de las dos alternativas elucidatorias.

5. Observaciones finales

Dos conclusiones principales se extraen de los desarrollos precedentes. La primera es que *cada una de las interpretaciones propuestas, dependiendo del problema filosófico que se procure atacar, puede resultar valiosa o eficaz.*

Si se asume la pluralidad aludida de nociones pre-formales de 'consecuencia lógica' surge el problema acuciante de entender la articulación conceptual de las mismas. La 'capacidad filosófica' del teorema de completud para resolver tal cuestión depende —esencialmente— de la 'solución' al desafío planteado por las tesis 1 y 2. Sucintamente expuesto: sólo en la interpretación 1 se encuentra una respuesta directa a la misma. En un sentido preciso, podría decirse que tal interpretación asegura una especie de —para usar la feliz expresión de Shapiro— 'completud pre-formal'.¹⁶ Como señala adecuadamente esta autor,¹⁷ esto supone defender la idea de que ciertas habilidades humanas idealizadas (capacidades deductivas) son suficientes para justificar todo argumento válido (matemáticamente representable en el lenguaje formal en cuestión). En esta perspectiva, la apreciación de la completud como virtud resulta filosóficamente fundada.

Si se atiende en cambio al problema de las opuestas jerarquizaciones de los conceptos formales de consecuencia lógica quizá las interpretaciones 2 y 3 puedan resultar de cierta utilidad heurística. En particular, permitirían conjeturar que es la fortaleza de la conexión con el plano pre-formal lo que explica la jerarquización o la primacía conceptual de sintaxis o semántica; no se trata (en principio) de propiedades matemáticamente aislables o identificables de una u otra dimensión lo que posibilita entender el énfasis respectivo. Esto establece que la predilección por uno u otro concepto puede (eventualmente) fundarse en razones *filosóficas*: contarse con una justificación conceptual más sólida o relativamente mejor para la tesis respectiva. El punto posee cierto interés porque contempla la posibilidad de un tipo de defensa de la primacía (semántica o sintáctica) *no absolutista* —es decir, no reduccionista.

La interpretación 4, finalmente, resume una perspectiva peculiar —aunque no inédita— de entender el teorema de completud. Del punto de vista conceptual, tal perspectiva auspicia la cuestión del valor filosófico de este resultado, independientemente de su conexión (directa) con el plano pre-formal. Quizá podría decirse que el interés de la misma reside más en *sugerir* que en *resolver* un problema.

La segunda conclusión que se sigue de estos análisis es *el impacto conceptual de las tesis 1 y 2*. Es importante notar que la discusión de la tesis 2 posee una tradición que principia con la emergencia de la propia noción formal; recientemente, no obstante, el trabajo de Etchemendy¹⁸ ha generado una saga de importantes debates. La tesis 1 posee también una valiosa tradición; análisis profundos y básicos de la noción de prueba (como el que ha sido desarrollado recientemente por Chateaubriand¹⁹) pueden entenderse como contribuciones a una mejor comprensión de la misma.

Un problema filosófico del mayor interés (subyacente en cierto sentido a una mejor intelección de las relaciones entre las nociones pre-formales de argumento idealmente justificado y argumento válido) es el de la *autonomía* o *heteronomía* de tales nociones. Este es —hasta donde alcanzo a ver— un auténtico desafío para la filosofía e historia de la lógica.

Notas

[†] Deseo agradecer vivamente a los participantes en la discusión posterior a la presentación de este trabajo; en especial, al Dr. Javier Legris, cuyas observaciones me condujeron a explicitar ciertos supuestos del texto original.

¹ Puede verse, por ejemplo, Coffa (1975).

² La justificación de dicha exigencia puede leerse en Seoane (2000).

³ Se entiende por 'completud' la conjunción de los teoremas que se denominan (estrictamente) 'de corrección' y 'de completud'.

⁴ Véase Shapiro (1991), pág. 36.

⁵ En realidad, las opciones por uno u otro punto de partida poseen un enjambre de consecuencias. Algunas de ellas son estudiadas en Seoane (2000).

⁶ Este tipo de discusión supone una perspectiva de gran generalidad: podría decirse que de lo que se trata es de contrastar 'estrategias elucidatorias' y no 'elucidaciones concretas'; no obstante, el uso que aquí hacemos es bastante menos abstracto. En la medida que nuestra discusión está centrada en el teorema de completud para la lógica de orden uno, las nociones de sistema deductivo (i.e. consecuencia sintáctica) y semántica formal (i.e. semántica formal) son las ordinarias. Si se aspira a contemplar la cuestión en su auténtica generalidad, se hace necesario explicitar ciertas exigencias (como ocurre en la literatura citada), para caracterizar más rigurosamente ambas estrategias.

⁷ Por citar dos, véase Shapiro (1991) y Etchemendy (1990).

⁸ Véase Shapiro, S (ob. cit.), pág. 41.

⁹ Para advertir la posibilidad de actitudes intelectuales variadas ante las tesis, es suficiente razonar sobre las mismas discriminando aceptación (o rechazo) de los ítems a) y b). Un análisis más fino – en términos de implicación – puede encontrarse en Shapiro (1991), pág. 42. El propósito aquí es mostrar el punto general y extraer algunas consecuencias.

¹⁰ Véase Shapiro (1991) pág. 35.

¹¹ El peso del argumento depende, obviamente, del valor atribuido a tales concepciones.

¹² Naturalmente no se pretende sostener que sean éstas las únicas alternativas que se tienen para usar completud en la vindicación de primer orden.

¹³ Un ejemplo elocuente de ello es Tarski (1936).

¹⁴ Debe advertirse que no se trata de la mera precedencia temporal del cálculo respecto de la semántica formal sino de una relativamente clara diferencia de status entre los sistemas formales y sus semánticas respectivas.

¹⁵ Véase Alchourrón (1995).

¹⁶ Dado que Shapiro discrimina corrección y completud, habla de 'completud pre-formal' en un sentido más estricto que el que usamos aquí pero la idea es exactamente la misma.

¹⁷ Véase Shapiro (1991), pág. 42.

¹⁸ Véase Etchemendy (1990).

¹⁹ Véase Chateaubriand (1999).

Referencias

- Alchourrón, C. E. (1995), "Concepciones de la lógica", en Alchourrón, C.E., Méndez, J.M. y Orayen, R. (editores), *Lógica*, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Trotta, pp. 11-47.
- Chateaubriand, O. (1999), "Proof and Logical Deduction", en Hauesler, H. and Pereira, Luiz C. (eds.), *Pratica, Types and Categories*, Rio de Janeiro, PUC-RJ, pp. 79-98.
- Coffa, A. (1975), "Dos concepciones de la elucidación filosófica", *Critica*, VII, 21, 43-67.
- Etchemendy, J. (1990), *The Concept of Logical Consequence*, Cambridge, Harvard University Press.
- Seoane, J. (2000), "Perspectivas lógicas y conceptos pre-formales".
- Shapiro, S. (1991), *Foundations without Foundationalism*, Oxford, Clarendon Press.
- Tarski, A. (1936), "On the Concept of Logical Consequence", en Tarski (1956), *Logic, Semantic, Metamathematics*, Clarendon Press, pp. 409-20.
- Wagner, S. (1987), "The Rationalist Conception of Logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 28, 1, 3-35.