EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XI JORNADAS

VOLUMEN 7 (2001), Nº 7

Ricardo Caracciolo
Diego Letzen
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Aspectos estructurales de la inferencia con predicados vagos

*Luis Urtubey**

Introducción

En este trabajo consideraremos un planteo estructural de la inferencia con predicados vagos, tomando sobre todo en cuenta, por un lado, la propiedad señalada por Copeland, quien encuentra que el razonamiento que conduce a las paradojas de la vaguedad, al tipo de la conocida como "sorites" y "la paradoja del hombre calvo", depende de la aceptación de la regla de corte (cut) y también de la contracción; y por otro, la función que parece asumir la regla 'cut' o de corte, señalada por Boolos, especialmente a través de la incidencia del *modus ponens*. Resaltaremos, asimismo, algunas semejanzas con la inferencia probabilista, y una especie de fundamento compartido para la paradoja de la 'lotería', caso típico de la aplicación de la lógica deductiva en ese contexto y las paradojas que produce la vaguedad. Finalmente intentaremos poner en relación también la orientación modelística con la más propia de la teoría de la demostración en este ámbito.

Las paradojas de la vaguedad y las reglas estructurales

Veamos en primer lugar la relación entre las paradojas al tipo del *sorites* y la aplicación de algunas reglas estructurales de la inferencia deductiva, como la "contracción" y la conocida como "cut" o "corte", en la inferencia que origina estas paradojas, tal como la presenta Jack Copeland.[1] Partiremos para esto de una versión de la "paradoja del hombre calvo" (*fálakros*), análoga a la del "sorites" o montón. Cabe advertir que, en aras de la brevedad del trabajo, asumiremos algunos conocimientos elementales de lógica de primer orden.

(1) $\forall n$ (x no es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza $\rightarrow$ x no es calvo cuando tiene n-1 cabellos en su cabeza)

(2) x no es calvo cuando x tiene un millón de cabellos en su cabeza.

Por lo tanto, (3) x no es calvo cuando x tiene 0 cabellos en su cabeza.

En primer lugar, (1) no puede ser completamente verdadera, pues la paradoja reduce al absurdo este supuesto. Como se sabe la otra posibilidad, que (1) sea completamente falsa, tiene como consecuencia que $\exists n$ (x no es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza y x es calvo cuando tiene n-1 cabellos en su cabeza), es completamente verdadera, lo cual parece algo irreal.

Sea entonces, $v(1)$, el valor de (1), igual a 1-δ, para algún $\delta > 0$. La idea es que para algunos propósitos prácticos, se puede ignorar el valor δ. Supongamos, de este modo, que el valor de cada instancia de eliminación de una cuantificación universal $\forall x P$ es idéntico al valor de $\forall x P$ mismo. Representemos 'x es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza' con 'B_n'. El valor de la conclusión del primer paso del argumento se obtiene resolviendo la ecuación:

$1-\delta = 1-(1-v(\sim B999{,}999))$

y el segundo paso, $\sim B999{,}998$ resolviendo:

* Universidad Nacional de Córdoba.

$1 - \delta = 1 - ((1 - \delta) - v(\sim B999{,}998))$

y el tercer paso resolviendo:

$1 - \delta = 1 - ((1 - 2\delta) - v(\sim B999{,}997))$

y así sucesivamente. Los valores de los elementos de esta secuencia: ~B1,000,000, ~B999,999, ... descienden de modo continuo hacia 0. Sin embargo este decrecimiento es localmente despreciable:

~B100,000,000	1
~B999,999	$1-\delta$
~B999,998	$1-2\delta$
~B999,997	$1-3\delta$

Cada iteración del *modus ponens* preserva la verdad *bastante*, en cuanto que el valor de la conclusión siempre difiere sólo en una cantidad 'despreciable' del valor de la conjunción de las premisas. Pero al encadenar suficientes pasos, una cantidad que es despreciable después de una única iteración, comienza a hacer sentir su presencia. Esto explica lo que uno esta inclinado a decir "preteoréticamente" sobre la paradoja: cada paso individual parece correcto, sin embargo de algún modo resulta un desastre.

Hay que decir que en esta versión de la paradoja se asume también la vaguedad de *orden superior*, porque es parte de la naturaleza de las cosas que no podemos especificar el mínimo j tal que $\forall n>j$ ($\sim Bn \rightarrow \sim Bn\text{-}1$), es completamente verdadero. Y no podemos especificar tampoco el máximo k tal que $v(\forall n<k\ (\sim Bn \rightarrow \sim Bn\text{-}1)) < 1$.

Ahora bien, parece haber un amplio consenso entre quienes adscriben a la idea que la lógica difusa resuelve las paradojas, de este tipo, que la culpa recae en la regla del *modus ponens*. La inferencia:

$\sim Bn \rightarrow \sim Bn\text{-}1, \sim Bn \vdash \sim Bn\text{-}1$

es inválida. Se piensa que una inferencia es válida si y sólo si el valor de la conclusión *no puede ser menor que* el valor de la premisa más débil; y como vimos hay muchos puntos en la secuencia del argumento en que el valor de la premisa ~B*n* excede el valor de ~B*n-1*. Sin embargo, como Dorothy Edgington observa, 'decir que el *modus ponens* es inválido no hace sino obscurecer una distinción importante: entre el caso donde la caída del valor de la conclusión esta restringido por los valores de las premisas, y el caso en que no lo está'.

En la lógica difusa, cada aplicación del *modus ponens* en el argumento es bastante buena, ya que la medida en que el valor de la conclusión se desvía por debajo del valor de la premisa más débil nunca excede δ, y por hipótesis δ es despreciable. En general, donde $A \rightarrow B$ es casi verdadero, el valor de B, aunque menor que el de A, siempre será casi el mismo que el de A. El *modus ponens* preserva *bastante* la verdad.[2]

No obstante, en la lógica difusa –dice Copeland– la iteración irrestricta de inferencias válidas puede generar problemas. Un análisis sintáctico del razonamiento presente en la paradoja, resalta el problema y sugiere un modo de enfrentarlo.

Veamos entonces el análisis de Copeland. Abreviaremos la premisa (1) del argumento, la premisa mayor, con la letra 'M'. La primera iteración en la cadena de razonamiento puede representarse de este modo:

$M \vdash \sim B\mathit{1{,}000{,}000} \rightarrow \sim B\mathit{999{,}999}$

$\sim$B*1,000,000* $\rightarrow$ $\sim$B*999,999*, $\sim$B*1,000,000* $\vdash$ $\sim$B*999,999*

M, $\sim$B*1,000,000* $\vdash$ $\sim$B*999,999* por Cut.

La segunda iteración es

M $\vdash$ $\sim$B*999.999* $\rightarrow$ $\sim$B*999,998*

$\sim$B*999,999* $\rightarrow$ $\sim$B*999,998*, $\sim$B*999,999* $\vdash$ $\sim$B*999,998*

M, $\sim$B*999,999* $\vdash$ $\sim$B*999,998* por Cut.

Fundiendo estos resultados por una aplicación posterior de Cut, resulta:

M, M, $\sim$B*1,000,000* $\vdash$ $\sim$B*999,998*

Hay que notar que la regla cut no proporciona un medio por el cual librarse de la segunda ocurrencia de M generada de este modo. En la lógica clásica, cualquier repetición de una fórmula puede borrarse una vez obtenida, mediante la aplicación de la regla denominada 'contracción': A, A, $\Gamma \vdash \Delta$: A, $\Gamma \vdash \Delta$.

Esto sin embargo, no podría hacerse aquí. Al final de una cadena de inferencias que forma un argumento de esta clase, arribamos a:

M, M, ..., M, $\sim$B*1,000,000* $\vdash$ $\sim$B*0*

(¿Cuántas ocurrencias de 'M'? ¿1.000.000, quizás?) En ausencia de la contracción irrestricta, esto no puede transformarse en la indeseada:

M, $\sim$B*1,000,000* $\vdash$ $\sim$B*0*

Podemos pensar que el número de ocurrencias de 'M' es un registro del número de iteraciones del *modus ponens*. Cuando el número de iteraciones es pequeño, la contracción puede aplicarse en forma segura (siempre asumiendo que la situación es tal que cada iteración preserva 'bastante' la verdad, en el sentido que vimos antes). Pero cuando una derivación está señalizada con una larga secuencia de repeticiones, la contracción se torna peligrosa.

El análisis de Boolos

En su análisis Boolos se vale de otra versión de la paradoja.[3] Llamemos 'premisa inductiva' al enunciado que para todo número natural *n*, si *n* es pequeño, *n+1* es pequeño. Ya que 0 es pequeño, pero mil millones no lo es, 'es pequeño' es un contraejemplo para el principio de inducción matemática si y sólo si la premisa inductiva es verdadera. ¿Cuál sería el carácter de las razones que tenemos para considerarla falsa? Un aspecto importante es que su falsedad no es obvia. El argumento:

> Cero es pequeño
> Si cero es pequeño, entonces mil millones es pequeño.
> Por lo tanto, mil millones es pequeño.

no presenta ninguna paradoja; es un argumento válido aunque no es interesante, cuya segunda premisa es obviamente falsa.

La premisa inductiva, es falsa –dice Boolos– debe serlo, ya que en conjunción con una verdad implica una falsedad. El problema es que parece verdadera.. Boolos señala que, gran parte de lo que hace que sean paradojas las paradojas de la vaguedad es que, aunque sabemos que las premisas problemáticas tienen consecuencias falsas, estas parecen de algún modo verdaderas, y nos vemos forzados a aceptar la conclusión que son falsas. Boolos pregunta si se puede hacer obvia de algún modo la falsedad de la premisa inductiva.

Tomemos un sistema estándar de deducción natural, ¿cuántas líneas diría que contiene la derivación más corta de S#[1000000]a partir de S# y $\forall x(Sx \rightarrow Sx')$?[4] La respuesta es menos de 70. El hecho de que la respuesta más frecuente esta muy por arriba de este número, se explica por cierta 'explosividad' de las sentencias con la forma de la premisa inductiva que, cuando se ve en acción, hace que la premisa se manifieste como la falsedad que estamos convencidos que debe ser. De este modo, concluye Boolos, *ver* que una evidente falsedad, que se sabe que es consecuencia de un enunciado, es una consecuencia menos remota de lo que habíamos sospechado, puede hacernos cambiar de opinión sobre la obviedad de la falsedad del enunciado.

En general, si $n < 2^k$, hay una derivación de S#[n] a partir de S# y $\forall x(Sx \rightarrow Sx')$ en un sistema como el de Mates, que contiene $\leq 4k + 1$ líneas. Y la compresión no se altera mucho si se restringe la aplicación de T (tautologías), de modo que ninguna aplicación contenga más de dos premisas; la cota $4k + 1$ no necesita entonces aumentarse más allá de $5k$.

Vale la pena hacer notar que en cualquier forma razonable que entendamos 'efectuar' o desarrollar la derivación, estas derivaciones 'comprimidas' no pueden efectuarse en las formulaciones usuales del método de *tableax* o árboles. Este método es por supuesto completo, como los métodos estándar de deducción natural, pero decir que un método (correcto) es completo simplemente es decir que puede generar alguna demostración de cada argumento válido; no es lo mismo que decir que pueda generar una réplica de cada demostración que puede generarse por medio de cualquier otro método correcto.

Para que estas derivaciones tengan una réplica en el método de las tablas, debemos agregar a la formulación estándar del método alguna regla como la versión del *modus ponens* que Jeffrey denomina XM, por 'tercero excluido': dividir en dos toda rama abierta y agregar cualquier sentencia a una de las dos ramas y su negación a la otra. En ausencia de XM o alguna regla semejante, una derivación de S#[1000000] a partir de S# y $\forall x(Sx \rightarrow Sx')$, *i.e.*, un árbol cerrado con S#[1000000], S# y $\forall x(Sx \rightarrow Sx')$ y $\neg$S#[1000000] en el origen, contendría *circa* dos millones de líneas. Pero con el agregado de XM podemos inmediatamente hacer que $\phi = \forall x(Sx \rightarrow Sx'')$ use $\forall x(Sx \rightarrow Sx')$ para cerrar la subtabla, comenzando con $\neg\forall x(Sx \rightarrow Sx'')$, entonces volver a aplicar XM con $\phi = \forall x(Sx \rightarrow Sx'''')$, usar $\forall x\ (Sx \rightarrow Sx'')$ para cerrar la subtabla originada con $\neg\forall x(Sx \rightarrow Sx'''')$, etc. Vemos así una vez más que al agregar el *modus ponens* o XM permite el desarrollo y subsecuente empleo de información capaz de disminuir notoriamente la distancia inferencial entre ciertas premisas y las conclusiones que se siguen de ellas.

El Sorites y la paradoja de la lotería

La paradoja de la lotería –dice Edgington– representa un problema para una concepción no gradualista de las creencias. Parece forzoso que una creencia que A y una creencia que B justifican una creencia que A&B. Pero la iteración de este principio conduce a la paradoja: Para cada *n*, que es el número de un billete de alguna lotería, creo que el billete *n* no ganará. Pero no creo en la conjunción de todas estas proposiciones.

En general, la paradoja de la lotería arroja dudas sobre el uso de argumentos válidos, en nuestra práctica inferencial, cuando hacemos deducciones a partir de premisas que son menos que ciertas. Muchas aplicaciones de &-introd. nos llevan de premisas que están cerca de la certeza a una conclusión que es ciertamente falsa. Inclusive una aplicación de la regla da una conclusión menos cierta que cada premisa: 'Ni B_1 ni B_2 ganarán' es menos cierta que 'B_1 no ganará' y que 'B_2 no ganará'. En este sentido, la validez no preserva la creencia racional. Moraleja: los argumentos válidos proporcionan buenos métodos de formación de creencias solamente cuando las premisas son ciertas; no se puede confiar en ellos cuando se hacen inferencias a partir de más de una premisa de la que no se tiene certeza.

Como se aprecia enseguida, esto significa una restricción notoria en el uso de la deducción. Obtenemos información a partir de diferentes fuentes, por testimonio, percepción, etc. La retenemos en la memoria. Sabemos que no tenemos garantías de que estas fuentes estén libres de error. No obstante, el valor de la deducción en cuestiones contingentes radica justamente en poder juntar distintos elementos de información.

Otra desventaja de este rechazo, señala Edgington, es que funda un cambio preciso en la práctica inferencial, en una distinción vaga. Tenemos muchas creencias en la región de la certidumbre, por llamarla de algún modo, respecto de los cuales nos veríamos en apuros para decir si son estrictamente ciertas o meramente muy próximas. Sería desafortunado entonces, que una gran diferencia en el potencial de nuestras creencias respecto a la inferencia se apoyase en esta diferencia para nada clara.

Al igual que en el caso que analizamos antes, el problema con la paradoja de la lotería parece hallarse en que un gran número de minúsculas incertidumbres se incrementan; la conclusión en el peor de los casos hereda la incertidumbre de cada premisa, y de allí la suma de las incertidumbres de cada una. Consideremos una serie de '&-intrd.', en que cada paso agrega una creencia casi cierta. Ningún paso particular hace una diferencia significativa. No obstante, bastantes pasos nos pueden arrastrar muy lejos "cuesta abajo en la rodada".

El principio 'Una creencia que A y una creencia que B justifica una creencia que A&B' es verdadera cuando se trata de certezas; y es aproximadamente verdadera cuando las creencias son aproximadamente ciertas. Al igual que antes, no necesitamos preocuparnos en deducciones cortas del hecho que las premisas no sean bastante ciertas, o que la línea entre la certeza y sus vecinos más cercanos no sea clara; bastante cerca es bastante bueno.

El siguiente argumento de Edgington, muestra que se trata de una reacción exagerada a la paradoja de la lotería, cuando se excluye toda deducción válida en este contexto.

Sea p(A) la probabilidad de A. $p(\neg A) = 1 - p(A)$. Llamemos a $p(\neg A)$ la improbabilidad de A, i(A). En un argumento válido, cualquier asignación consistente de probabilidades a sus premisas y conclusión tiene esta propiedad:

Propiedad restrictiva o limitativa: La improbabilidad de la conclusión no excede la suma de las improbabilidades de las premisas. (Adams y Levine).

A modo de ejemplo, adoptemos algunas creencias autóctonas.

A: River obtendrá una mejor ubicación que Talleres.
B: Talleres obtendrá una mejor ubicación que Belgrano.
C: River obtendrá una mejor ubicación que Belgrano.

Sea $p(A) = 0.9$ y $p(B) = 0.9$. Que podemos decir sobre p(C). Como A & B implica C, $\neg C$ implica $\neg A \vee \neg B$. Así $p(\neg C)$ no puede ser mayor que $p(\neg A \vee \neg B)$ (Si D implica E, $p(D \,\&\, \neg E) = 0$. Es un teorema de la teoría de la probabilidad que si $p(D \,\&\, \neg E) = 0$, $p(D) \leq p(E)$

[si $p(D \,\&\, \neg E) = 0$, $p(E) = p(D \,\&\, E)$. $p(E) = p(D \,\&\, E) + p(\neg D \,\&\, E) = p(D) + p(\neg D \,\&\, E) \geq p(D)$.] Pero con $p(\neg A) = 0.1$ y $p(\neg B) = 0.1$, $p(\neg A \vee \neg B)$ no puede superar 0.2 (Será igual a 0.2 si $p(\neg A \,\&\, \neg B) = 0$; de otro modo será menor que 0.2 [por aplicación de $p(D \vee E) = p(D) + p(E) - p(D \,\&\, E)$]. Así, si $i(A) = 0.1$ y $i(B) = 0.1$, $i(C) \leq 0.2$, $p(C) \geq 0.8$.

Por el contrario, según el planteo de Edgington que estamos siguiendo, si un argumento no es válido, *i.e.*, hay una situación posible en que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, entonces hay una asignación de probabilidades, consistente con las leyes de la teoría de la probabilidad, que da a sus premisas probabilidad 1 y a su conclusión probabilidad 0. De modo que no tiene la propiedad restrictiva (limitativa).

Se puede ver en consecuencia, que la creencia, idealizada como precisa, esta limitada de modo similar. Sustituyendo p(A) por c(A), y i(A) por u(A) [la incertidumbre de A], la incertidumbre de la conclusión no puede superar la suma de las incertidumbres de las premisas, en un argumento válido.

Para Edgington, es posible tratar las paradojas de la vaguedad en forma análoga a la paradoja de la lotería y de este modo el *modus ponens* resulta válido en ese contexto. El problema con los argumentos de este tipo, no es el *modus ponens*, sino que un gran número de minúsculas desviaciones de la verdad se incrementan; la conclusión en el peor de los casos hereda la desviación de cada premisa, y de allí la suma de la desviación de cada una. Por esto también resultaba falsa la premisa inductiva, que ignoraba este hecho, aunque no obviamente falsa. En el caso de la creencia no es incorrecta la regla &-introd., pero si lo es el proceder sin restricciones, como lo expresaría la premisa inductiva en el caso anterior.

El resultado reivindica la formación de creencias sobre la base de la deducción a partir de premisas de las que no se tiene certeza, siempre que no haya demasiadas premisas, y que se hallen bastante cerca de la certeza. Aunque no se puede esperar mucho de un argumento válido con 100 premisas cada una de las cuales es 99% cierta.

Conclusión: de ilusiones se vive y...

Barwise y Etchemendy señalan que el dominio natural de la lógica es el estudio de las formas válidas de razonamiento, *i.e.*, de los métodos para extraer nueva información a partir de información ya obtenida, sin importar como se la represente. Ubicándonos en esta perspectiva de la lógica, y a partir de lo visto, se sostiene entonces que el *modus ponens* permite obtener información inclusive cuando hay vaguedad e imprecisión. Para Copeland propiamente el problema estaba en permitir la contracción en estas inferencias. En el análisis que hace Boolos, es necesario el *modus ponens* para mostrar la falsedad de la premisa inductiva. Se puede entender la idea de Boolos en congruencia con Edgington, en el sentido que debe tomarse estas inferencias con ciertos recaudos. Al tiempo de resultar falsa la premisa inductiva, habría que considerar que cobra sentido porque crea una 'ilusión de verdad'. Al producir la contracción, se ignora un hecho importante: los numerosos pasos en que se aplica la premisa inductiva, lo que aumenta la desviación produciendo el resultado paradójico. La contracción produce esta ilusión, de modo que al impedirla, ya no se presenta. De modo análogo, la validez no preserva la creencia racional, de modo directo. Pero esto no debería significar que no haya formación de creencias deductiva. La propiedad que denominamos como 'limitación' da una forma diferente que permite la formación de creencias en este caso, apoyándose en inferencias válidas. También aquí se crea una ilusión respecto a la factibilidad de la conjunción, sin total certeza. En el peor caso, la conclusión hereda la incertidumbre de las premisas y de ahí la suma de estas. Esto evita la ilusión que se produce al pasar a la conjunción sin recaudos, *i.e.*, la ilusión de que se hereda la certeza.

En cada caso, la conjunción y la premisa inductiva, crean una ilusión de verdad que luego se desenmascara. Para la conjunción, esto se da por la preservación de incertidumbre, en el peor de los casos.

De hecho lo que sucedería con los predicados vagos y la incertidumbre es que hemos aprendido o podemos manejarnos dentro de los límites, en un equilibrio. Esto es lo que los modelos lógicos tratan de capturar (idealizadamente) y constituye el criterio de validez a explorar. Edgington observa que 'en la mejor alternativa, normalmente podemos permitir la casualidad respecto a donde terminan las verdades claras: usamos el mismo razonamiento, dentro del límite o fuera de este, con los mismos resultados aproximadamente'. Este es el aspecto que explotan también los modelos gradualistas: la flexibilidad para acomodar las estimaciones casuales y restablecer el equilibrio.

Notas

[1] Contracción. $A, A, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta$. Cut: $\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Theta \vdash \Sigma \Rightarrow \Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Sigma$. Como de costumbre, las letras griegas representan secuencias de fórmulas separadas por comas o fórmulas simples, o bien una secuencia vacía. Las letras latinas, a su vez, representan fórmulas.

[2] Esto, en general, depende del condicional elegido.

[3] Se trata de la conocida como "Paradoja de Wang".

[4] En el argumento, Boolos utiliza "'" y "#" para designar la función sucesor y cero, respectivamente. A su vez, S[*i*] indica el resultado de escribir *i* ocurrencias consecutivas de "'".

Referencias

Boolos, G., "Zooming down the slippery slope", *Nous*, 25, 1991, 695-706.

Copeland, J., "Vague identity and fuzzy logic", *J. Ph.*, 1997, 514-534.

Edgington, D., "Vagueness by degrees", en Keefe, R., y Smith, P., *Vagueness: A Reader*, MIT Press, Massachusetts, 1997, 294-316.