# EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

## SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XX JORNADAS
## VOLUMEN 16 (2010)

Pío García
Alba Massolo

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

# Hacia una respuesta al *Dilema de Benacerraf*

*Valeria Sol Valiño**

Como es sabido, se considera que la filosofía de la matemática surge en el siglo XIX, con la publicación de los *Grundlagen der Arithmetik*[1] de Frege, obra que indica el nacimiento del programa logicista y que fundamenta la posición de Frege en el debate surgido en el siglo XIX acerca de los fundamentos de la matemática[2]. Allí, emergen ciertas problemáticas que serán claves en el desarrollo posterior, ya en el siglo XX, de la anteriormente mencionada disciplina filosófica, y que se encuentran estrechamente vinculadas, a saber: cuál es la naturaleza de las entidades matemáticas de las que hablan los enunciados matemáticos (ontología matemática), cómo es posible el conocimiento de estas entidades (epistemología matemática), y el problema de la verdad matemática en relación a la elucidación del significado de dichos enunciados (semántica de la matemática).

Como es también sabido, cuando reflexionamos acerca de la verdad matemática, se torna crucial hacer referencia al artículo ya clásico "Mathematical Truths"[3] de Benacerraf. Allí, el autor, retomando aquellas problemáticas fundamentales, establece que un análisis adecuado de la naturaleza de la verdad matemática debe dar cuenta de dos aspectos: por un lado, encontrar una noción de verdad matemática que sea consistente con una noción semántica de verdad para los enunciados matemáticos, y análoga a una semántica para el lenguaje ordinario, que nos dé el significado de los enunciados matemáticos que expresan esas verdades y, por otro lado, dar una respuesta a cómo es posible el conocimiento matemático que nos permita elucidar cómo se conocen las verdades matemáticas. La dificultad de dar con una teoría que contemple, a la vez, ambas dimensiones, ha llevado a denominar el *dictum* benacerrafiano *"el dilema de Benacerraf"*. Ahora bien, ¿hay alguna manera de dar una respuesta a dicho desafío y, de esta manera, evitar dicho dilema?

El objetivo de este trabajo es analizar las consideraciones de Benacerraf, a los fines de evaluar en qué medida constituyen un desafío, más que un dilema propiamente. En este sentido, intentaré mostrar que, si bien se suele considerar que aquello que Benacerraf propone hay que entenderlo como una crítica al realismo matemático, efectivamente habría espacio para establecer la relación entre la verdad y el conocimiento si se considera una concepción de conocimiento alternativa a la planteada originariamente por el autor, a la luz de ciertas ideas fregeanas acerca de la naturaleza de los números naturales y la fundamentación de la aritmética.

* UBA /CONICET

A tales efectos, expondré, en primer lugar, las consideraciones de Benacerraf, en segundo lugar, analizaré los límites y alcances en que lo que respecta a estas consideraciones en general, y a la idea de conocimiento matemático involucrado en la propuesta de dicho autor en particular, para luego establecer, hacia el final del presente trabajo, en qué medida el realismo matemático evitaría dicho dilema, a los fines de sustentar la tesis de que es posible dar con una teoría que explique la relación entre el significado de los enunciados matemáticos y el conocimiento que tenemos de ellos, apelando a ciertas consideraciones de Frege, en especial aquellas presentes en sus *Grundlagen*, de las que se desprende su compromiso con un objetivismo o realismo acerca de los números a la luz de ciertas consideraciones epistemológicas propias de su programa logicista.

## I

Benacerraf plantea que, en general, las elucidaciones acerca de la naturaleza de la verdad matemática se centraron en dos intereses diversos: por un lado, dar con una semántica para los enunciados matemáticos análoga a la semántica para el resto de lenguaje, y, por otro lado, que tal elucidación se realice a la luz de una "epistemología razonable"[4]. A tales efectos, propone dos requisitos que una teoría de la verdad matemática debería satisfacer: un requisito semántico y un requisito epistemológico. Según el primero, toda teoría de la verdad matemática debe estar en conformidad con una teoría general de la verdad, lo cual se puede hacer sobre la base de alguna teoría general para el lenguaje tomado como un todo, aceptando, por ejemplo, la semántica referencial tarskiana. El segundo requisito, en cambio, establece que tenemos que poder conocer que las condiciones de verdad de los enunciados matemáticos son satisfechas. En otras palabras, "el concepto de verdad matemática debe enmarcarse en una explicación general del conocimiento que haga inteligible cómo es que tenemos el conocimiento matemático que tenemos"[5]. Sin embargo, el autor señala que, las explicaciones de la verdad matemática que tratan el discurso matemático y el extra matemático de modo similar, satisfaciendo, de este modo, el requisito semántico, lo hacen con el costo de dejar ininteligible cómo es que podemos tener conocimiento matemático alguno, mientras que aquellas que atribuyen a los enunciados matemáticos el tipo de condiciones de verdad que podemos conocer, lo hacen a expensas de fracasar en conectar esas condiciones con algún análisis de las oraciones que muestre de qué manera las condiciones asignadas son condiciones de verdad. Así, Benacerraf considera que un análisis adecuado de la noción de verdad matemática debe dar cuenta de ambos requisitos y en esto consiste lo que posteriormente ha sido denominado "el dilema de Benacerraf". Como señalan Hale y Wright, tanto el requisito semántico como el requisito epistémico, tomados por separado, son pasibles de ser satisfechos, "el problema radica en dar con una explicación que simultáneamente los satisfaga a *ambos*"[6]

## II

Cuando Benacerraf desarrolla cómo deben concebirse los requisitos anteriormente mencionados que toda teoría acerca de la verdad matemática debería satisfacer, considera que ambos estarían satisfechos si se aceptara, por un lado, la semántica referencial tarskiana y si, por otro lado, dicha semántica "se engrana con una epistemología razonable"[7] Y dado que quien acepta la teoría tarskiana de la verdad, al concebir que las condiciones de verdad están dadas por las referencias de los enunciados, se compromete con la existencia de entidades matemáticas que por ser abstractas u objetivas no-reales no poseen eficacia causal, se torna difícil ver en qué medida es posible para éste explicar el conocimiento matemático. Y aquí surge el problema, cuando consideramos qué entiende Benacerraf por epistemología razonable. Ésta es concebida en términos de una teoría causal del conocimiento, que "dé cuenta del vínculo entre nuestras facultades cognitivas y los objetos conocidos"[8], en virtud de la cual, si un sujeto X cree que *p*, debe haber conexiones causales entre las condiciones de verdad de *p* y los fundamentos de X para creer que *p*[9]. Así, el planteo de Benacerraf descansa en una peculiar concepción de la idea de conocimiento, en virtud de la cual el conocimiento queda circunscripto al ámbito del conocimiento causal, bajo el modelo sujeto cognoscente-objeto conocido, cuyo conocimiento es *causado* por aquello que es conocido, análogo al conocimiento perceptivo que tenemos de los objetos sensibles. Así, la matemática es asimilada a una ciencia empírica, en virtud de lo cual, debería poder dar cuenta del conocimiento en términos causales. Como señala Linnebo, "demandando una conexión causal entre el agente epistémico y el objeto de conocimiento, Benacerraf trata la matemática platonista más bien como la física y las otras variedades de ciencias empíricas"[10]. Por ello, considero que el requisito epistemológico de Benacerraf involucra una respuesta que conlleva una reducción en lo que al conocimiento matemático respecta, apelando a una respuesta *naturalista,* esto es, compatible con la concepción general según la cual todos los hechos, inclusive los hechos intencionales o semánticos, pueden ser reducidos, en última instancia a hechos físicos o naturales. En otros términos, supone una respuesta empírica y acorde con los resultados de la ciencia -como la psicología empírica, por ejemplo-, y es difícil ver hasta qué punto una respuesta naturalista en el terreno de la filosofía de la matemática es pasible de ser dada, sin caer en una reducción del conocimiento matemático a las habilidades cognitivas o procedimientos presentes a la hora de justificar el conocimiento matemático que tenemos.

De este modo, si aceptamos el requisito semántico, nos comprometemos con una ontología platonista en virtud de la cual los enunciados matemáticos refieren a entidades objetivas, pero que carecen de poder causal por estar fuera del espacio y del tiempo, por lo que no podremos dar cuenta de cómo entramos en relaciones causales con dichas entidades. De ello se sigue que no podremos satisfacer el requisito epistemológico, al ser concebido en términos causales, por lo que los enunciados matemáticos resultarán incognoscibles. En otros términos, si concebimos, tal como hace el realista matemático, que los enunciados matemáticos son o bien verdaderos, o bien falsos, y que las condiciones de verdad están dadas por las referencias de los enunciados, nos comprometemos con la existencia de entidades matemáticas que por ser objetivas no-reales, no poseen eficacia causal, y ello parecería inexorablemente involucrar el problema del acceso epistémico a dichas entidades. ¿Cómo es entonces que tenemos conocimiento de ellas? Diversos autores que se hacen eco de algún tipo de realismo platonista han tratado de ofrecer una respuesta al problema del acceso epistémico. desde Frege con su programa logicista, Gödel con la postulación de la intuición como aquella capacidad que nos permite acceder a los objetos matemáticos, línea de pensamiento que ha sido retomada por Parsons, hasta el estructuralismo neoplatonista de Shapiro. En un escrito contemporáneo al de Benacerraf, Steiner distingue dos tipos de platonismo. por un lado, el platonismo ontológico, según el cual "las verdades matemáticas describen infinitamente muchos objetos matemáticos reales" y, por otro lado, el platonismo epistemológico, según el cual "tenemos conocimiento de las entidades matemáticas por medio de una facultad similar a la percepción sensible"[11] Como es sabido, Gödel adhería a ambos tipos de platonismo. No obstante, si queremos mantener la idea de que los enunciados matemáticos son verdaderos (o falsos), pero no queremos aceptar una concepción empirista del conocimiento, ni queremos apelar a la postulación de alguna facultad como la intuición que, de modo análogo a la percepción sensible, nos asegure el conocimiento matemático por medio de alguna suerte de visión subjetiva que nos pone en contacto directo con aquellas entidades objetivas a las que refieren los enunciados matemáticos, ¿podemos dar cuenta del conocimiento que tenemos de los enunciados matemáticos? En otros términos, si adherimos sólo al platonismo ontológico, ¿se torna imposible dar cuenta de conocimiento matemático alguno? Creo que una vía de respuesta posible al desafío planteado por Benacerraf encuentra su origen en ciertas consideraciones que se enmarcan en el programa logicista de Frege.

## III

Las ideas fregeanas acerca de la naturaleza de los números naturales y la fundamentación de la aritmética, en su vínculo con la naturaleza de los objetos y leyes de la lógica, están expuestas en diversas obras que Frege escribió a lo largo de toda su vida: *Begriffsschrift*, *Grundlagen*, los primeros escritos semánticos, y en *Grundgesetze*, núcleo del programa logicista y obra en la que culmina su proyecto. Así, su *corpus* se constituye como una respuesta a dos preguntas fundamentales que guiaron su investigación filosófica en torno de la fundamentación de la aritmética: ¿cuál es la fuente fundante de nuestro conocimiento de la verdad de los enunciados matemáticos (aritméticos)? y ¿cuál es el estatus ontológico de *aquello* que hace que los enunciados aritméticos sean verdaderos?

Como es sabido, el interés del programa logicista de Frege, esto es, su intento de reducir la aritmética a la lógica, fue justificar, en tanto fundamentar, la matemática pura a partir de la lógica pura y ciertas definiciones, elucidando cómo podíamos derivar las verdades analíticas y a-priori de la aritmética, a partir de definir las nociones aritméticas por medio de nociones lógicas y de deducir los axiomas de la aritmética por medio de principios lógicos. Su objetivo fue examinar las verdades matemáticas para así "encontrar la prueba y retrotraerla hasta sus verdades originarias"[12] y, de este modo, fundamentar la aritmética a la luz de un interés epistemológico: comprender la naturaleza de nuestro conocimiento aritmético, bajo la idea de dar con la razón última que nos justifica a tener un enunciado por verdadero. Como es también sabido, Frege adhirió a una tesis objetivista acerca de los números: estos son objetos lógicos que existen independientemente en un tercer reino -que se distingue tanto del reino objetivo y real de los objetos físicos como del reino subjetivo e individual de las ideas o las imágenes mentales-: "Pues el número es un objeto de la psicología o el resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte ... el número es algo objetivo... Distingo lo objetivo de lo que es palpable, espacial o real". [13] "¿pero dónde está el número 4? No está ni fuera ni dentro de nosotros. Entendida en sentido espacial, esta afirmación es correcta. No tiene ningún sentido una determinación local del número 4; pero de ello solamente se sigue que no es un objeto espacial, no que no sea ninguno objeto en absoluto" [14]

Dichos objetos, son atemporales, no espaciales, causalmente inertes y objetivos en tanto no necesitan de portador alguno dado que son independientes de que alguien los piense o los capte. Por ello, son descubiertos y no creados por los individuos, y son intersubjetivos[15]. Este compromiso con el objetivismo acerca de los números (como así también acerca de los conceptos y los pensamientos) ha llevado a que se lo considere un platonista o realista acerca de las entidades matemáticas y lógicas.

En *Grundlagen*, Frege comienza analizando los enunciados de la aritmética, y en contra de posiciones empiristas, formalistas y psicologistas, señala que su interés radicará en investigar el concepto de número, en tanto los enunciados que involucran números contienen aserciones no sobre las cosas sino de los conceptos. Los conceptos, se diferencian de los objetos, en que estos últimos caen bajo aquellos y constituyen su extensión. Mediante un enunciado numérico, adscribimos un número a un concepto.[16] Ahora bien, ¿cómo es que conocemos los enunciados que involucran números? En virtud del logicismo fregeano, debemos preguntarnos: ¿cómo es que conocemos las verdades lógicas primitivas, que son analíticas y a-priori, y las reglas de inferencia de las que se deriva nuestro conocimiento matemático? La respuesta de Frege es que conocemos dichas verdades básicas que fundamentan la aritmética, ya no mediante una facultad como la intuición, sino por medio de la razón o el pensar. En un escrito tardío[17], Frege distingue tres fuentes de conocimiento: la percepción sensible, la fuente de conocimiento geométrico y temporal y la fuente de conocimiento lógico. Y dado que el conocimiento matemático, en sentido estricto de la aritmética, es conocimiento lógico, este tendrá lugar también en virtud de la razón o el pensar: "[En] la aritmética... el objeto propio de la razón es la razón. En la aritmética nos ocupamos de objetos que no nos vienen dados desde afuera, como algo extraño, gracias a la mediación de los sentidos, sino que son dados directamente a la razón, la cual los puede contemplar como lo más propio de sí misma"[18] Es por medio de nuestra comprensión de las verdades lógicas básicas, a las que se remontan las verdades aritméticas, que estamos justificados a creer en ellas. Los objetos matemáticos, que en última instancia son objetos lógicos, a los que refieren los enunciados matemáticos, son conocidos por medio de la lógica como fuente de conocimiento, y no mediante la percepción sensible ni mediante la intuición geométrica y temporal.

Sin embargo, las reflexiones fregeanas acerca de aquello involucrado en nuestro conocimiento aritmético van más allá del mero detenerse en el análisis acerca de la cognición, ya que este debe ser realizado a la luz de ciertas consideraciones de índole linguísticas, analizando las expresiones en el contexto oracional en el que aparecen, y evitando, de este modo, dar una explicación de la objetividad de la verdad de los enunciados de la aritmética en términos de correspondencia con un mundo separado de entidades abstractas, basada en la noción de referencia, e independiente de nuestro juzgar o inferir, ya que la fuente de conocimiento lógico está "íntimamente vinculada al lenguaje"[19]. Frege se pregunta: "¿Pero cómo puede sernos dado un número, si no podemos tener de él ninguna imagen o intuición? Solamente en el contexto de un enunciado se refieren las palabras a algo. De lo que se tratará, pues, es de determinar el sentido de un enunciado en el que entre un numeral ... ya hemos establecido que por numerales hay que entender objetos independientes" [20] Y en otros pasajes afirma: "... será bueno considerar el número en el contexto de un juicio"[21] y "la autonomía que pretendo que exista para el número no significa que un numeral designe algo fuera del contexto de un enunciado". [22] De este modo, Frege vincula conceptualmente su investigación acerca de los números con el juzgar, esto es, con el reconocimiento de la verdad de los pensamientos: dado que los enunciados expresan pensamientos, debemos captar los pensamientos, o en términos más generales, el sentido de una oración, esto es, aquello que es relevante para su verdad o falsedad, pero la mera captación no constituye conocimiento, ya que el conocimiento supone el reconocimiento de dicho pensamiento como verdadero –un juicio.[23] Así, la fuente de conocimiento lógico, que nos justifica a reconocer un pensamiento como verdadero, descansa en el análisis del lenguaje, el cual revela la forma lógica que subyace a las expresiones lingüísticas. Por medio del lenguaje accedemos a las estructuras del pensamiento: por medio del análisis semántico -y mediante las inferencias deductivas- tenemos conocimiento a-priori de las verdades matemáticas.

## IV

En virtud de lo anteriormente desarrollado, considero que la concepción fregeana evita "el dilema de Benacerraf", en tanto su concepción acerca de la verdad matemática satisface el requisito semántico y, además, ofrece una respuesta al problema de conocer la verdad de los enunciados de la aritmética. La propuesta fregeana, si bien involucra un compromiso con un objetivismo acerca de los números, da cuenta de nuestro acceso a dichas entidades, por lo que el dilema planteado por Benacerraf parece evitarse. En otros términos, si bien se hace eco de un realismo acerca de los objetos lógicos y matemáticos, no obstante da cuenta del conocimiento que tenemos de la verdad de los enunciados matemáticos: conocemos las verdades analíticas y a-priori de la aritmética por medio de la fuente de conocimiento lógico la cual, por medio del análisis del lenguaje, revela la objetividad inmanente a las expresiones lingüísticas. De este modo, la solución fregeana se desplaza, de alguna manera, desde lo epistemológico hacia lo lingüístico, en virtud de lo cual el problema del acceso epistémico encuentra su solución en el análisis lógico-lingüístico de los enunciados aritméticos como método de descubrimiento. Por ello, creo que el camino hacia una respuesta al dilema de Benacerraf, si no queremos rechazar el requisito semántico, estriba en considerar una concepción de conocimiento alternativa a la planteada originariamente por Benacerraf, esto es, ya no en términos causales y análogos a la percepción sensible, ni apelando a la intuición, y una posibilidad es concebirla en términos de conocimiento lógico, de razón, cuyo herramienta es el análisis del lenguaje, tal como lo desarrolla Frege en el marco de su programa logicista.

## Notas

1 Frege (1884)

2 Por parte no sólo del programa logicista fregeano, sino también de otros dos grandes programas fundacionistas: el formalismo, cuyo origen se remonta a Hilbert, y el intucionismo inaugurado por Brouwer.

3 Benacerraf (1973).

4 Véase Benacerraf (1973), pág. 403-404.

5 Benacerraf (1973), pág. 409

6 Hale & Wright (2002); pág. 103.

7 Véase Benacerraf (1973), pág. 403.

8 Véase Benacerraf (1973), pág. 414.

9 Véase Benacerraf (1973), pág. 413.

10 Véase Linnebo (2006), pág. 546.

11 Steiner (1973), pág. 57
12 Frege (1884), § 3, pág. 27
13 Frege (1884), § 26, pág. 52-53.
14 Frege (1884), § 61, pág. 85.
15 Véase Frege (1918)
16 Véase Frege (1884) § 46, pag. 72-73.
17 Véase Frege (1924/1925)
18 Frege (1884) § 105, pág. 123.
19 Frege (1924/1925), pág. 269
20 Frege (1884) § 62, pág. 86.
21 Frege (1884) § 46, pág. 72-73.
22 Frege (1884) § 60, pág. 85.
23 Véase Frege (1918) y Frege (1924/1925)

## Bibliografía

Benacerraf, P. (1973), "Mathematical truth", en P. Benacerraf, H. Putnam (Comps), en *Philosophy of Mathematics Selected Readings* (2Ed), Cambridge, Cambridge University Press, 1983

Hale, B. & Wright, C. (2002), **"Benecerraf' s Dilemma Revisited"**, en *European Journal of Philosophy*, Vol. 10, Nro.1, 2002.

*Reason: Essays on Frege*, Oxford, Oxford University Press, 2005.

Frege, G. (1918), "Der Gedanke . Eine logische Untersuchung", trad. por L. M. Valdèz Villanueva "El Pensamiento: Una investigación lógica" en *Escritos de semántica y filosofía de la lógica*; Madrid, Tecnos, 1998.

Frege, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*, trad. por U. Moulines *Fundamentos de la Aritmética*, Barcelona, Laia, 1972.

Frege, G. (1924/1925), "Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft", trad. ingl."Sources of Knowledge of Mathematics and Mathematical Natural Sciences", en *Posthumous Writings*, Oxford, Blackwell, P. Long & R. White (trad), 1979, p. 267-274.

Hale, B. & Wright, C. (2002), **"Benecerraf' s Dilemma Revisited"**, en *European Journal of Philosophy*, Vol. 10, Nro.1, 2002.

Linnebo, Ø (2006), "Epistemological Challenges to Mathematical Platonism", en *Philosophical Studies* 129, Nro. 3, 2006.

Steiner, M. (1973), "Platonism and the Causal Theory of Knowledge", en *The Journal of Philosophy* 70, Nro. 3, 1973.