

# EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIX JORNADAS

VOLUMEN 15 (2009)

Diego Letzen  
Penélope Lodeyro

Editores



ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA  
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons atribución NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina



# El Método Abstractivo: su influencia en el razonamiento matemático de W. J. M. Rankine

Raúl Dean\*

## La propuesta de razonamiento geométrico de Rankine

William John Macquorn Rankine (1820-1872), ingeniero y profesor de nacionalidad escocesa, publica en el año 1854 un trabajo sobre la representación geométrica de la acción expansiva del calor y la teoría de los motores termodinámicos [1]. Analiza el comportamiento energético de un gas durante su evolución cíclica basándose en una interpretación geométrica de las transformaciones energéticas efectuadas por el gas. El trabajo mecánico realizado por un gas que evoluciona realizando procesos cíclicos estaba representado geoméricamente por el área de una figura curvilínea cerrada correspondiente a un ciclo termodinámico. En el inicio de su trabajo expresa:

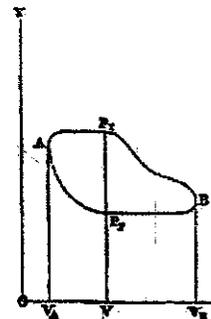
La primer aplicación de un diagrama geométrico para representar la acción expansiva del calor fue realizada por James Watt, cuando inventa el bien conocido Indicador del Motor de Vapor, subsecuentemente alterado y mejorado por otros en varias formas. Como los diagramas descriptos por el indicador de Watt es el tipo de todos los diagramas que representan la acción expansiva del calor, su naturaleza general es exhibida en la Fig. 1'

Sea que la abscisa, medida a lo largo, o paralela al eje OX, represente el volumen sucesivamente asumido por una cierta masa de una sustancia elástica, por expansiones alternadas y contracciones de calor realizadas para producir potencia motriz; siendo  $OV_A$  y  $OV_B$  el menor y el mayor volumen que la sustancia es asumido a realizar, y  $OV$  cualquier volumen intermedio. Por brevedad, estas cantidades serán denotadas por  $V_A$ ,  $V_B$ , y  $V$ , respectivamente. Entonces  $V_B - V_A$  puede representar el espacio recorrido por el pistón de un motor durante una única carrera.

Sea que las ordenadas, medidas paralelas al eje OY y en ángulo recto a OX, denoten las presiones expansivas sucesivamente ejercidas por la sustancia en los volúmenes denotados por la abscisa. Durante el incremento de volumen desde  $V_A$  hasta  $V_B$ , la presión, para que la potencia motriz pueda ser producida, deberá ser, en conjunto, mayor que durante la disminución de volumen desde  $V_B$  hasta  $V_A$ ; de tal manera que por ejemplo, las ordenadas  $VP_1$  y  $VP_2$  o los símbolos  $P_1$  y  $P_2$ , puedan representar las presiones correspondientes a un dado volumen  $V$  durante la expansión y contracción de la sustancia respectivamente.

Entonces el área de la figura curvilínea, o Indicador-diagrama,  $AP_1BP_2A$ , representará la potencia motriz, o "Energía Potencial", desarrollada o dada al medio exterior durante una carrera completa, o ciclo de cambio de volumen de la sustancia elástica. La expresión algebraica para esta área es

Fig. 1.



\* Universidad Nacional de Río Cuarto

$$\int_{V_A}^{V_B} (P_1 - P_2) dV$$

El uso práctico de tales diagramas, al determinar la potencia y el modo de acción del vapor en los motores de vapor, donde la curva  $AP_1BP_2A$  es descripta por un lápiz unido a un medidor de presión, sobre una tarjeta cuyo movimiento corresponde con aquel del pistón, es suficientemente bien conocido (Rankine, 1854:115-116)

Charles Wheatstone [2], comentarista del trabajo de Rankine, destaca entre otros, el siguiente párrafo que aquí se transcribe en su forma original

Como los principios de la acción expansiva del calor son capaces de ser presentados a la mente más claramente por la ayuda de diagramas de energía que por medio de palabras y símbolos solamente, propongo, en el presente trabajo, aplicar tales diagramas, parcialmente para la ilustración y demostración de proposiciones previamente probadas por otros medios, pero principalmente para la solución de nuevas cuestiones, especialmente aquellas relacionadas a la acción del calor en todas las clases de motores, tanto trabajen por aire, o por vapor, o por cualquier otro material; de manera de presentar, en una forma sistemática, aquellos principios teóricos que son aplicables a todos los métodos de transformar el calor a potencia motriz por medio de los cambios de volumen de una sustancia elástica. ([1], 116)

Del contenido de su trabajo se observa una doble elección matemática efectuada por Rankine. Por un lado utiliza una matemática analítica, por ejemplo por medio del cálculo integral, y por otro, propone utilizar una perspectiva matemática diferente con fines heurísticos, una representación geométrica.

### Una cuestión relacionada

La predilección de Rankine por la representación geométrica nos relaciona con una cuestión intrigante que plantea Richard Olson en conexión con la ciencia británica durante el siglo XVIII y comienzo del XIX: ¿por qué la geometría sintética continuó dominando el pensamiento matemático británico durante el período mencionado, cuando la matemática analítica estaba siendo rápidamente desarrollada en el continente? [3].

Si bien Olson analiza el período 1750–1830, anterior al trabajo citado de Rankine (1854), esta cuestión tiene validez en el proceder de Rankine. Se tratará de reflexionar acerca de tal cuestión en el caso particular citado, considerando un elemento esencial de su metodología: el método abstractivo.

### El método abstractivo en la concepción metodológica de W. J. M. Rankine

W. J. M. Rankine mantenía que había dos métodos para formar una teoría física, los cuales podían ser distinguidos principalmente por la manera en la cual las clases de fenómenos eran definidas. Según Rankine eran el método ABSTRACTIVO y el método HIPOTÉTICO, a los cuales caracterizaba de la siguiente manera:

Acorde al método ABSTRACTIVO, una clase de objetos o fenómenos es definida describiéndola, o haciéndola comprensible, y asignándole un nombre o símbolo al conjunto de propiedades comunes a todos los objetos o fenómenos que componen la clase, como es percibido por los sentidos, sin introducir nada hipotético.

Acorde al método HIPOTÉTICO, una clase de objetos o fenómenos es definida, acorde a una concepción conjetural de su naturaleza, como estando constituida, en una manera no aparente a los sentidos, por una modificación de alguna otra clase de objetos o fenómenos cuyas leyes son ya conocidas. Debieran las consecuencias de tal definición hipotética ser encontradas a estar en acuerdo con los resultados de observaciones y experimentos, servir como los medios de deducción de leyes de una clase de objetos o fenómenos a partir de aquellas otras ([4], Sección II p.210).

Rankine ejemplifica la aplicación del método abstractivo haciendo referencia a la ciencia de la mecánica considerada como una ilustración de este método ([4], Sección III, p.210).

En su actividad de investigación utilizó ambos métodos. El primero en su ciencia energética y en la ciencia de la mecánica. El segundo lo ejerció, entre otros, con su hipótesis mecánica de los vórtices moleculares, con la cual discutió la naturaleza de la relación entre calor y temperatura como una consecuencia deducible desde una hipótesis respecto a la constitución molecular de la materia y con la ayuda de datos suministrados por los experimentos de Messrs. Thomson, Joule y M. Regnault.

Básicamente Rankine concibe al primero como un método basado en la inducción al cual incorpora la abstracción como un proceso esencial para hacer comprensible una clase de objetos o fenómenos; y al segundo como un método Hipotético-Deductivo- Empírico, característico de la ciencia cuyo propósito es describir las cosas como son, en donde, para Rankine las hipótesis son planteadas por analogía a algo ya conocido.

### **El Método Abstractivo en el Pensamiento Matemático Escocés de los Siglos XVIII y XIX**

La abstracción, como método, se encontró incluida en una de tres aproximaciones epistemológicas discutidas por filósofos escoceses, entre 1750-1830, con relación a la naturaleza de la matemática [3].

En un primer período, la matemática fue considerada fundamentalmente de naturaleza platónica. Las ideas matemáticas estaban separadas de la existencia física y la certeza matemática fue vista como independiente de cualquier necesidad de verificación empírica; se mantenía que había una total separación entre los objetos matemáticos y los objetos físicos, la matemática estaba divorciada de la experiencia sensorial.

Una segunda posición, discutida pero no adoptada por los filósofos escoceses, relacionaba la matemática directamente con la experiencia física y demandaba una verificación empírica de cualquier proposición matemática. La aproximación empirista de la matemática mantenía que las ciencias matemáticas eran ciencias experimentales y observacionales, basadas sobre el mismo tipo de inducción desde los hechos particulares como la mecánica o la química.

Una tercera posición, adoptada por la mayor parte de los filósofos escoceses, argumentaba que las ideas matemáticas estaban amarradas a las experiencias a tal grado que las sugerencias originales para los conceptos matemáticos podrían venir solamente de los datos sensoriales, pero también sostenían que se encontraban separadas del contexto sensorial por un proceso de abstracción el cual de algún modo transformaba la naturaleza de las entidades bajo consideración. Esta era una posición que se situaba en un punto medio entre las dos anteriores y estaba de acuerdo con la perspectiva de la filosofía del sentido común. De acuerdo a Olson, la naturaleza del principio abstractivo y sus implicaciones para el razonamiento matemático se

encuentran en un ensayo anónimo sobre matemáticas en *Hume Papers* en la Royal Society de Edimburgo, que en su comienzo dice: “Razonar abstractivamente es razonar desde ciertas propiedades, afectaciones o relaciones de objetos, sin considerar las restantes de los mismos objetos; tanto que las que omitimos sean, o no, separables de aquellas que consideramos...” [3] pág.33.

Adoptando esta tercera posición para el análisis del presente caso histórico, las siguientes preguntas constituyen una guía de investigación: la idea matemática contenida en la representación geométrica de Rankine: ¿tuvo su origen en la experiencia “sensorial”?, ¿fue separada del contexto sensorial por un proceso de abstracción? Y por último, este caso histórico ¿permite dar una respuesta a la cuestión de por qué la geometría sintética predominó en esa época sobre la matemática analítica?

### **El origen de la representación geométrica de la acción expansiva del calor y una base empírica metodológica**

De acuerdo al propio Rankine, su trabajo estuvo precedido por la fundamental tarea empírica de James Watt (1736–1819). Debido a una destreza manual evidente, fue entrenado para ser constructor de instrumentos, y como tal fue llamado para reparar un modelo de la máquina de Newcomen. Mientras trabajó en la misma, juzgó que se podía mejorar, con el resultado que a lo largo de su vida concibió la mayoría de las características básicas de la moderna máquina de vapor. Antes que construyera su primer modelo de máquina, Watt efectuó amplias investigaciones acerca de las propiedades del vapor, sobre las cuales, prácticamente, no se conocía nada en aquella época. (Faires:386)[5][6][7].

Entre los instrumentos que diseñó se encuentra el *Indicador de Watt*, [8] cuyos registros toma como base Rankine en el trabajo citado. Un instrumento de este tipo se muestra en la Fig. 2.

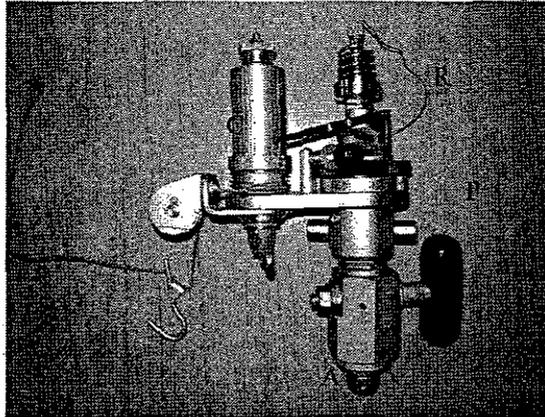


Fig. 2 Indicador de Watt<sup>2</sup>

(Instrumento perteneciente al Laboratorio de Máquinas Térmicas – Facultad de Ingeniería – UNRC)

Este indicador registra simultáneamente los valores de la presión de un vapor o de un gas en cada instante, y del volumen del mismo desplazado por el pistón, indicando como resultado una medida del trabajo externo realizado en el interior de los cilindros de las máquinas a vapor o motores de combustión interna. Básicamente este instrumento consta de los siguientes elementos

y su funcionamiento puede ser explicado de la siguiente manera. Un pequeño cilindro provisto de un pistón P se pone en comunicación con el cilindro de la máquina en A y a través de la llave de paso L se permite el ingreso de vapor o gas. Un resorte calibrado R contrarresta el efecto de la presión, de modo que el conjunto forma un manómetro cuyas indicaciones son registradas por una punta trazadora T, sobre una hoja de papel. Esta hoja está adherida a un cilindro C que puede girar sobre un eje vertical con un movimiento alternativo accionado indirectamente por el pistón de la máquina. De esta manera los desplazamientos verticales que marca el trazador son proporcionales a las presiones, y los desplazamientos horizontales son proporcionales a los volúmenes desplazados por el pistón de la máquina.

Instalado sobre una máquina en marcha, la punta trazará un diagrama formado por una curva cerrada que corresponderá a una revolución completa del árbol motor o a dos revoluciones si se trata de un motor de cuatro tiempos.



Fig. 3. Registro gráfico del Indicador de Watt de varios ciclos termodinámicos a diferentes presiones máximas

Al registrar simultáneamente la presión y el volumen del gas que evoluciona en el interior del cilindro de la máquina, el marcador ha trazado la curva figurativa de las sucesivas transformaciones tanto cuando su volumen aumenta como cuando disminuye, como se muestra en la figura 3, por lo tanto el área comprendida dentro del diagrama será proporcional al trabajo desarrollado en una revolución. Para evaluarlo, hay que conocer las escalas en que están registrados ambos valores como se indica, por ejemplo, en la figura 4. Retirada la hoja de papel con el diagrama trazado, se mide su área S por cualquiera de los procedimientos conocidos.

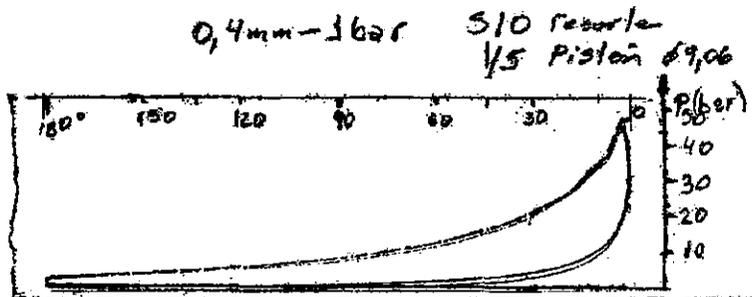


Fig. 4 Registro gráfico del indicador de Watt en soporte papel y escalas graduadas. Los datos obtenidos a través de la lectura del registro gráfico del Indicador de Watt, cuyo funcionamiento puede ser explicado con el recurso a teorías que no se cuestionan con referencia a la construcción de dicho instrumento, forman parte de una base empírica metodológica [9].

En tal sentido los datos que dispuso Rankine en su época eran resultado de una observación en “sentido amplio”, puesto que en ese período histórico las teorías que legitimaban el funcionamiento del instrumento de medición estaban bien establecidas. A partir de esta base empírica metodológica, los resultados de James Watt fueron interpretados y generalizados por Rankine a través del método abstractivo. El particular diseño del indicador y los similares registros obtenidos en diferentes motores, le llevó a concluir que el diagrama de energía trazado por este indicador presentaba una naturaleza general exhibida por una figura geométrica tipo, la cual representaba la acción expansiva del calor para todos los casos, independientemente de la sustancia que evolucionaba. Se interpreta que obtuvo esta conclusión por un proceso de inducción – abstracción y que tuvo su correspondencia con un formalismo operacional (operación de integración) de la matemática analítica.

### **La separación del contexto “sensorial”**

Y el proceso de abstracción le permite a Rankine desarrollar once proposiciones, con sus corolarios, como representaciones geométricas de la teoría de las transformaciones mutuas de calor y potencia motriz por medio de los cambios de volumen de una sustancia elástica homogénea que no cambia su condición. Rankine expresa que:

... todas estas proposiciones están virtualmente comprendidas en dos que son la representación geométrica de la aplicación, al caso particular del calor y su potencia expansiva, de dos axiomas con respecto a la Energía en lo abstracto, a saber: I) La suma de energía en el Universo es inalterable, II) El efecto, en la transformación de la energía, de la cantidad total de la energía existente presente en una sustancia, es la suma de los efectos de todas sus partes. La aplicación de estos axiomas al calor y a la potencia expansiva involucra la siguiente definición del calor expansivo: -El calor expansivo es una especie de Energía existente, la presencia de la cual en una sustancia afecta, y en general incrementa, su tendencia a expandir. Y esta definición, arribada por inducción desde la experiencia, es el fundamento de la teoría de la acción expansiva del calor. (Rankine, 1854: §31.p.146)

Con la aplicación del método abstractivo Rankine independizó el razonamiento matemático de su origen empírico.

### **Razones para la preferencia matemática de la representación geométrica**

Rankine consideraba que los principios de la acción expansiva del calor eran capaces “de ser presentados a la mente más claramente por la ayuda de diagramas de energía que por medio de palabras y símbolos solamente” (Rankine, 1854:116) ¿Por qué un “diagrama de energía”, utilizado como medio para la obtención e interpretación de conocimientos, tendría esta superioridad frente a lo analítico? De acuerdo al análisis del caso histórico los siguientes aspectos son relevantes para dar una respuesta a esta cuestión. Un primer aspecto a resaltar es que el diagrama funcionó como un nexo entre el mundo físico y el mundo matemático, constituyéndose en una herramienta valiosa para el sujeto que interpretaba e investigaba el mundo físico; un segundo ítem es que con el diagrama se afirmaba la existencia de algo más allá del mismo, en este caso de un proceso de transformación de la energía; un tercer ítem relevante es que con el diagrama se tenía la posibilidad de chequear si una afirmación referente a una determinada transformación de energía era correcta, puesto que la cuantificación del área encerrada por una

curva que representaba el proceso de transformación permitía realizar este chequeo. Un cuarto aspecto a destacar es que en ese período histórico existía una relación relevante entre este tipo de diagramas y el intérprete, puesto que contemporáneamente se poseían leyes de correspondencia tales que le proveían al diagrama el significado físico correspondiente. Particularmente el principio fundamental establecido en 1850 por Joule (1818-1889) sobre la equivalencia de calor y trabajo proveía este significado físico. Estos cuatro ítems que se destacan en el caso histórico constituyen razones para afirmar como adecuada la postura que Rankine mantenía acerca de la mayor capacidad de interpretación que brindaban estas representaciones geométricas, en comparación a palabras y símbolos solamente, puesto que estos diagramas constituían algo más que un símbolo.

### **A manera de conclusión - Una posible respuesta a la cuestión**

En el caso de estudio, el proceder de Rankine se correspondió con el método abstractivo. La representación geométrica del diagrama de energía estuvo aferrada originalmente a la experiencia. Luego de un proceso inductivo basado en datos aportados por las experiencias de Watt, propone que los diagramas obtenidos con un indicador de Watt exhibían una naturaleza general representada por una figura curvilínea cerrada. Con esta figura se podía describir y hacer comprensible un fenómeno físico, el de las transformaciones energéticas efectuadas por el vapor o gas, que ocurría en una clase de objetos, los motores termodinámicos. Posteriormente la representación geométrica del diagrama de energía fue separada del contexto sensorial por medio del método de abstracción. Luego de un proceso inductivo, por abstracción arriba a la definición del calor expansivo que fundamenta la teoría de la acción expansiva del calor. En las experiencias de James Watt estuvo la idea matemática de integración asociada con el diagrama trazado por su indicador. Y esta idea, unida inicialmente a la experiencia, pudo ser separada del contexto sensorial. Rankine tenía el pleno convencimiento de que la perspectiva geométrica contribuía a que los principios de la acción expansiva pudieran ser presentados a la mente en una forma más clara. El proceder de Rankine estuvo acorde con la tercera posición epistemológica de la matemática.

Este caso histórico permite afirmar que la geometría sintética estuvo en el pensamiento matemático por un convencimiento de que estas representaciones contribuyen a un fin heurístico, tal como lo manifiesta Rankine, y por una razón instrumental, operacional y técnica. La geometría estaba presente en los registros del instrumento de medición diseñado por Watt, y permitía que los datos de salida de este instrumento fuesen rápidamente interpretados y evaluados, en forma efectiva y sin ambigüedades a través de esta representación geométrica.

Actualmente el pensamiento geométrico sigue vigente, y no solamente en el ámbito de la ingeniería, por lo cual la propuesta de Rankine, acerca del empleo de representaciones geométricas, merece ser analizado más detalladamente. Y un punto adecuado de analizar es qué tipo de nexo entre el mundo físico y el intérprete, constituye este tipo de diagramas.

### **Agradecimientos**

Se agradece la colaboración de los ingenieros Cotella, G. N. y Antonelli S., del Laboratorio de Máquinas Térmicas e Hidráulicas de la Fac. de Ingeniería de la UNRC, por el material gráfico e instrumental puesto a disposición para el presente trabajo.

## Notas

<sup>1</sup> La Figura 1 corresponde al trabajo original de W.J.M. Rankine en ref. [1]

<sup>2</sup> Maibak Engine Indikator Type 30. Germany. Este instrumento permite obtener diagramas en motores de vapor y cualquier motor de combustión interna, compresores, sopladores, bombas y otros motores alternativos.

## Bibliografía

- [1] Rankine W.J.M., "On the Geometrical Representation of the Expansive Action of Heat, and the Theory of Thermo-Dynamic Engines", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (1776-1886)*, **144**(1), (1854), 115-175 (Read January 19, 1854)
- [2] Wheatstone Ch., Esq., V.P., in the chair. "On the Geometrical Representation of the Expansive Action of Heat, and the Theory of Thermo-Dynamic Engines", *Proceedings of the Royal Society*, **VI**, (1854), 388-392.
- [3] Olson R., "Scottish Philosophy and Mathematics 1750-1830", *Journal of the History of Ideas*, **32**(1), (1971), 29-44.
- [4] Rankine W.J.M., "Outlines of the Science of Energetics." *Miscellaneous Scientific Papers*, Londres 1881 págs. 209-28. Publicado por primera vez en *Proceedings of Philosophical Society of Glasgow*, 3(6).
- [5] Carnegie A., *James Watt*; (Doubleday, Page & Company, N.Y., 1905). [www.history.rochester.edu](http://www.history.rochester.edu)
- [6] Faires, V.M., *Termodinámica*, (UTEHA, Mx, 1978), 386
- [7] Fox, R., "Watt's Expansive Principle in the work of Sadi Carnot and Nicolas Clement". En. *Notes and Records of the Royal Society of London*, **24**(2) (Apr, 1979), pp.233-253
- [8] Ninci, M., *Termodinámica Técnica*, (Ed. Assandri, Cba.,1963), 109-110
- [9] Klimovsky G., *Las desventuras del conocimiento científico*, (A-Z editora, Bs.As., 1994), 31-52