EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS IX JORNADAS

VOLUMEN 5 (1999), Nº 5

Eduardo Sota
Luis Urtubey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

La Tesis de Church-Turing y sus repercusiones epistemológicas

*Horacio Faas / Victor Rodríguez**

Las pretensiones de este trabajo son modestas. Es el resultado de una exploración conjunta que hemos realizado en torno del tratamiento que ha recibido la Tesis de Church-Turing por parte de lógicos, matemáticos, filósofos y especialistas en cuestiones cognitivas. Debido a la frondosa literatura existente, nos hemos abocado principalmente a explorar críticamente aspectos de las repercusiones epistemológicas de la tesis. Hemos intentado comparar los supuestos alcances y límites de diferentes enfoques a los fines de dar un panorama del estado de la discusión sobre el tema. La motivación subyacente ha estado vinculada a la importancia que a nuestro entender tiene esta tesis para ámbitos mucho más extensos de la indagación filosófica. En nuestra opinión, es necesario un esclarecimiento de los alcances de la misma para tener una adecuada caracterización de los aspectos epistemológicos que impregnan a las teorías de la computabilidad, teoría de algoritmos, y a los alcances de los procedimientos de decisión en ámbitos tanto formales como de aplicación de lenguajes matemáticos especializados en teorizaciones con alto grado de abstracción.

La Tesis de Church establece una vinculación entre la noción intuitiva de función computable y una definición matemática de tal noción. Debido a la naturaleza distinta de los elementos vinculados, ha sido considerada desde su origen como algo imposible de aceptar como verdad matemática equiparable a un teorema demostrado. La falla en este propósito radica en la vaguedad de la noción intuitiva; en cambio, la definición matemática se ha establecido exitosamente de varias maneras, todas las cuales han resultado ser equivalentes y han terminado coincidiendo en la que parece ser la más utilizada: la basada en las máquinas de Turing.

Dada esa relación tan difícil de conceptualizar entre una noción bien definida de modo formal y otra noción irremediablemente vaga más próxima al lenguaje natural y a aspectos pragmáticos, esta tesis ha sido expuesta de muy diversos modos. A los fines de ilustrar esta gama de versiones, veamos por ejemplo las formulaciones que brinda Hofstädter en su *Gödel, Escher, Bach.*

a) Los problemas matemáticos pueden ser resueltos únicamente mediante el ejercicio de la matemática.
b) Supongamos que existe un método seguido por un ser consciente para distribuir los números en dos clases. Supongamos, asimismo, que este método produce siempre una respuesta dentro de un lapso finito, y que siempre da la misma respuesta con respecto a un número determinado. Luego, existe alguna función recursiva general que proporciona exactamente las mismas respuestas que proporciona el método del ser consciente.
c) Supongamos que existe un método seguido por un ser consciente para distribuir los números en dos clases. Supongamos, asimismo, que este método produce siempre una res-

* Facultad de Filosofía y Humanidades. Universidad Nacional de Córdoba.

Epistemologia e Historia de la Ciencia, vol. 5 (1999) nº 5

puesta dentro de un lapso finito, y que siempre da la misma respuesta con respecto a un número determinado. *Requisito:* Supongamos también que este método puede ser comunicado fidedignamente por un ser consciente a otro, por medio del lenguaje. Luego, existe alguna función recursiva general que proporciona exactamente las mismas respuestas que proporciona el método del ser consciente.

d) En el fondo, todos los matemáticos son isomórficos.

e) Supongamos que existe un método seguido por un ser consciente para distribuir los números en dos clases. Supongamos, asimismo, que este método produce siempre una respuesta dentro de un lapso finito, y que siempre da la misma respuesta con respecto a un número determinado. Luego, existe alguna función recursiva general que proporciona exactamente las mismas respuestas que proporciona el método del ser consciente. Además, el proceso mental y el programa, esto es, la función recursiva general, son isomórficos, en el sentido de que, en algún nivel, hay una correspondencia entre los pasos que son cumplidos en la computadora y en el cerebro.

f) El comportamiento de los componentes de un ser vivo puede ser simulado en una computadora. Esto es, el comportamiento de cualquier componente (del cual se supone, habitualmente que es la célula) puede ser calculado por un programa, esto es por una función recursiva general, con el grado de exactitud que se requiera, dada una descripción lo suficientemente precisa del estado interno de los componentes y de su ámbito inmediato.

g) Todos los procesos cerebrales se derivan de un sustrato computable.

h) Algunas de las tareas que cumple el cerebro pueden ser objeto de vagas aproximaciones por parte de una computadora, pero no ocurrirá así con las principales, y tampoco, ciertamente, con las interesantes. De todas maneras, aun cuando lo consiguieran, dejarían sin explicar el espíritu, y no hay forma de que las computadoras obtengan un sustento que las habilite para ello.

i) Los procesos mentales de toda índole pueden ser simulados por un programa de computadora cuyo lenguaje subyacente tenga un poder tal que todas las funciones recursivas parciales puedan ser programadas.

El modo de presentación de estas versiones ilustra adecuadamente a nuestro entender las ramificaciones cognitivas y epistemológicas de la tesis. Una versión algo más formal podría ser la siguiente:

(1) Tesis de Church: Todo proceso que permite computar una función puede realizarse en una máquina de Turing.

Llamemos **C** al enunciado que se refiere a todo proceso que permite computar una función, y **M** al enunciado que dice que hay una máquina de Turing que computa esa misma función. Ahora (1) adquiere el siguiente aspecto:

(2) Si **C**, entonces **M**,

que, aceptando la recíproca

(3) Si **M**, entonces **C**,

se transforma en una equivalencia:

(4) **C** sii **M**.

Pero (3) es trivial, cualquiera que analice una máquina de Turing que computa una función admite -intuitivamente- que está haciendo justamente eso. De modo que la cuestión problemática está en (2), y no en su proposición **M**, sino en la **C**.

Para la proposición M, Church propuso su lambda-definibilidad, Gödel y Kleene las funciones recursivas, y otros autores, otras alternativas. Todas estas propuestas son las que han resultado equivalentes y cada una de ellas define una entidad matemática precisa.

La proposición C puede caracterizarse por su efectividad, i.e., la existencia de un número finito de pasos controlables que lleven a un resultado único para cada caso que se compute. Pero, y aquí radica la limitación insalvable, nunca agotaremos esos procesos efectivos. La tesis de Church es tesis, y no teorema, a raíz de (2).

¿Es verdadera la Tesis de Church? La posición dominante con respecto a esta pregunta es la de que no se puede responder. En este sentido ha sido comparada con una ley empírica, en cuanto a que hasta ahora ha sido confirmada cada vez más; sin embargo, su *status* epistemológico parece algo diferente al de una ley empírica ya que bastaría un buen contraejemplo para rechazarla y por el momento no hay indicios en absoluto en tal dirección. La intención de considerarla como verdadera se ha manifestado en que varios de los resultados importantes de la lógica se han producido bajo ese supuesto, entre ellos la indecidibilidad de la lógica elemental. Mendelson, por ejemplo, sostiene:

> todos los teoremas de limitación de la lógica moderna, tales como el teorema de incompletitud de Gödel, dependen, para cobrar significación, de la validez de la Tesis de Church. Por ejemplo, el teorema de Church establece que no hay procedimiento de decisión recursivo para la validez de la lógica de primer orden. Es la Tesis de Church, entonces, la que nos permite obtener la importante conclusión de que no existe ningún procedimiento efectivo para decidir si una fórmula de la lógica de primer orden es válida.

Un recorrido por un libro ya clásico sobre estos temas, *Computability and Logic*, de Boolos y Jeffrey, muestra una gran cantidad de resultados que dependen de la tesis de Church, entre ellos la demostración de que el halting problem, el problema de encontrar una máquina de Turing que diga de cualquier máquina, para cualquier argumento de entrada, si esta máquina se detendrá en algún momento, es insoluble.

Como se sabe, una máquina de Turing es un dispositivo ideal que sobre una cinta compuesta de celdas cuadradas contiguas puede computar mediante operaciones sumamente simples cualquier función recursiva parcial. Es ideal porque no supone limitaciones de tiempo ni de prolongación hacia uno o hacia los dos costados. Las operaciones simples son correrse un lugar a la derecha, o a la izquierda, borrar o escribir un símbolo. Una máquina universal de Turing incluye en la cinta la codificación del programa que la máquina ejecuta, además del argumento de entrada. Cabe acotar que desde hace algunos años, existen programas de computación que permiten diseñar y hacer funcionar máquinas de Turing. Actualmente uno de nosotros (H.F.) está explorando variantes de estos programas.

En otro enfoque, la Tesis de Church, y especialmente el trabajo de Turing, han inspirado la línea de investigación del azar realizada por G. Chaitin. Su definición de Ω como un número incomputable de manera absoluta, ni siquiera intuitivamente, se basa en la noción del menor programa necesario para expresarlo, medido en cantidad de bits. Ω resulta absolutamente incompresible.

Chaitin se considera un continuador de Turing por haber descubierto un número cuya incomputabilidad es mucho mayor que la de los incomputables de Turing: el número Ω, que define así:

$$0 < \Omega = \Sigma_{p \text{ se detiene}} 2^{-|p|} < 1$$

y es igual a la probabilidad de detención. Esta noción corresponde a la probabilidad de que uno genere al azar -por ejemplo, mediante el resultado de tirar reiteradamente una moneda- un programa de computación (como una cadena de bits) que se detenga (Σ es sumatoria, y los términos de la sumatoria son las probabilidades de que cada uno de los programas que se detiene se haya obtenido de la manera aleatoria indicada, de modo que cada programa que se detiene aporta a la suma la inversa de $2^{|p|}$, siendo $|p|$ la longitud de ese programa en bits). Según muestra Chaitin, no hay algoritmo posible que compute ese número, para sistemas numéricos de ninguna base, ya que previamente se habían encontrado algunos resultados para otra base, por ejemplo Champernowne, en base 10. Mediante una adecuada ecuación diofántica, esta situación azarosa puede llevarse a la teoría de números (aunque hace falta aceptar variables en los exponentes). Sin duda se trata de un campo que presenta serias dificultades de interpretación, ya que el nivel técnico de los trabajos de Chaitin los hace realmente difíciles de ubicar en un contexto más general y de extraerles fácilmente consecuencias epistemológicas. En cualquier caso, estos resultados muestran insospechadas relaciones entre ciertos conceptos, en particular, entre azar y computabilidad.

Lo que ha sido frecuente en la literatura científico-filosófica es extraerle a la tesis alguna interpretación de la idea general con fines de aplicarla en otros contextos. Hay algunas utilizaciones de la tesis que deben tomarse con precaución. Por ejemplo, Dennett 1991 expresa: "Turing ha demostrado -y ésta es probablemente su mayor contribución- que su Máquina Universal de Turing puede computar cualquier función que cualquier computadora, con cualquier arquitectura, puede computar".

Paul Churchland a su vez, dice que: "Lo interesante acerca de una máquina universal de Turing es que, para cualquier procedimiento computacional bien definido, de cualquier tipo, hay una máquina universal de Turing capaz de simular una máquina que ejecutará esos procedimientos. Lo hace reproduciendo exactamente el comportamiento de la máquina a la cual está simulando".

En otro lugar, Paul y Patricia Churchland opinan que: "los resultados [de Turing] implican algo destacable, esto es, que una computadora digital, con un programa correcto, memoria y tiempo suficientemente largos, puede computar cualquier función de entrada-salida gobernada por reglas. Es decir, puede desplegar cualquier estructura sistemática de respuestas a un entorno cualquiera".

Dada la relevancia de estos autores en ámbitos filosóficos y cognitivistas, es natural suponer una propagación de estas versiones a contextos mucho más indirectamente relacionados con aquellos de la filosofía de la lógica y la filosofía de la matemática.

La faceta empírica de la tesis, mencionada antes, ha dado lugar a versiones fisicalistas que merecen atención dado que en última instancia lo que interesa al sector computacional y a aquellos interesados en esclarecer las relaciones entre física y computabilidad, es establecer criterios y estrategias para analizar las bases computacionales de la física y las bases físicas de la computabilidad. Deutsch es a nuestro entender el autor que ha expresado más claramente el estado de la reflexión sobre la tesis, considerada como principio fisicalista. Declara su apartamiento de la interpretación habitual, y la formula como un principio físico: "Puedo ahora establecer la versión física del principio de Church-Turing: 'Todo sistema físico accesible finitamente puede ser perfectamente simulado por un modelo de máquina de computar que opera por medios finitos'. Esta formulación es a la vez mejor definida y más física que la propia manera de Turing de expresarla."

La interacción intelectual entre Deutsch y Penrose es visible en el último libro del primero: *The Fabric of Reality*. Allí se expone una suerte de gradación en los componentes fisicalistas. Enunciado como una versión más fuerte de la tesis de Church-Turing, Deutsch elabora el Principio de Turing de los siguientes modos:

Existe una computadora abstracta universal cuyo repertorio incluye cualquier computación que puede llevar a cabo cualquier objeto físicamente posible. El principio así formulado es para computadoras abstractas que simulan objetos físicos.

Da una versión diferente para computadoras físicas que se simulan entre sí:

Es posible construir una computadora universal: una máquina que puede ser programada para llevar a cabo cualquier computación que pueda llevar a cabo cualquier otro objeto físico.

Extiende el principio para generadores de realidad virtual que se interpretan entre sí:

Es posible construir un generador de realidad virtual cuyo repertorio incluye el de todo otro generador de realidad virtual físicamente posible.

Finalmente, basado en la auto-similaridad de la realidad física, da una versión final del principio en el modo siguiente:

Es posible construir un generador de realidad virtual cuyo repertorio incluya todo medio ambiente físicamente posible.

La base conjetural más interesante en nuestra opinión para los argumentos de Deutsch es su reflexión sobre la naturaleza de las leyes físicas y nuestras posibilidades de captación de ellas. No encuentra razón a priori para justificar que las leyes físicas deberían respetar las limitaciones de los procesos matemáticos que llamamos algoritmos, ni tampoco es obvio de antemano para él que cualquiera de las funciones recursivas familiares sea computable en la realidad física. El modo como ilustra este punto de vista es realmente interesante: "La razón de por qué las encontramos posibles de construir, por decir, a las calculadoras electrónicas, y en efecto por qué podemos llevar a cabo aritmética mental, no puede ser hallado en la matemática o en la lógica. La razón es que las leyes de la física "suceden" para permitir la existencia de modelos físicos para las operaciones de la aritmética tales como la adición, substracción y multiplicación. Si no lo hicieran, estas operaciones familiares serían funciones no computables. Podríamos todavía conocer acerca de ellas e invocarlas en demostraciones matemáticas (que presumiblemente serían llamadas "no-constructivas") pero no podríamos llevarlas a cabo."

Creemos que este punto de vista es digno de todo un programa de investigación en filosofía de la ciencia. Dado que en los últimos años han comenzado a aparecer cuestiones de limitaciones formales en la articulación de teorías de considerable grado de abstracción, parece razonable considerar que la cuestión planteada por Deutsch jugará un rol verdaderamente importante en la indagación filosófica en torno a la física y a la computabilidad. Si es así, tendremos plausiblemente numerosas versiones adicionales de la tesis bajo análisis.

Se ha consultado adicionalmente para este trabajo la *Enciclopedia Stanford de Filosofía*. Algunas de las citas expuestas han sido tomadas de allí y adaptadas para nuestros fines. En ella se expone además un enfoque ortodoxo de la cuestión, pero que no siempre ha sido adecuadamente comprendido por los divulgadores, esto es, que es necesario destacar que Turing no demostró que sus máquinas pueden resolver cualquier problema que puede resolverse "por instrucciones, reglas explícitamente establecidas, o procedimientos", ni tampoco demostró que una máquina universal de Turing "puede computar cualquier función que cualquier computadora, con cualquier arquitectura, puede computar." A nuestro modo de ver, bajo esta precisión conceptual, correcta en nuestra opinión, versiones como las de Dennett y Churchland citadas arriba deberían ser tomadas con cuidado, dado que permiten interpretaciones que manifiestan una extrapolación no necesariamente válida. Turing demostró, sí, que su máquina universal puede computar cualquier función que cualquier máquina de Turing pueda computar. Pero una tesis que se refiere al alcance de los métodos efectivos -esto es, al alcance de los procedimientos de un cierto tipo que un ser humano sin ayuda de ninguna máquina puede realizar- no conlleva ninguna implicación sobre el alcance de los procedimientos que pueden realizar las máquinas, aún las máquinas que actúan de acuerdo con "reglas explícitamente establecidas". Pues dentro del repertorio de operaciones elementales de una máquina puede haber algunas que ningún ser humano sin ayuda de máquinas podría realizar.

Por otra parte, hay quienes proponen considerarla en el mismo nivel que tantas otras proposiciones de la matemática, y dejar de referirse a ellas como algo indemostrable. Para Mendelson, por ejemplo, esas proposiciones deberían también ser llamadas tesis, por lo menos, y entre ellas se contarían: (1) la condición en que se apoya la definición contemporánea de función como conjunto de pares ordenados, que terminó reemplazando a la versión existente hasta el siglo XIX, considerada como demasiado estrecha: Si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$, entonces $y = z$. A diferencia de la noción tradicional de función, no se explicita en este caso con qué operación uno obtendría los resultados. (2) La definición de verdad de Tarski, basada en teoría de conjuntos, que nos ha convencido de que se corresponde con la noción intuitiva. (3) La definición de límite por Weierstrass, apoyada en el valor absoluto de una diferencia que se puede hacer tan chica como uno quiera, y que se corresponde, también con la noción intuitiva de límite. Como esas tres, hay otras: medida como explicitación de área y volumen, dimensión en topología, implicación y equivalencia lógicas en lógica de primer orden. Aún cuando argumentos de este estilo resultan persuasivos, nos parece que, en el mejor de los casos, su alcance estaría limitado esencialmente ámbito de las matemáticas.

Siguiendo con su línea argumental, sostiene que no hay garantías de la indemostrabilidad de la Tesis de Church por el hecho de que establece una equivalencia entre una noción vaga e imprecisa (la de efectivamente computable) y una noción matemática precisa (la de función recursiva parcial), por tres razones: i) los conceptos y supuestos en que se apoya la noción de función recursiva parcial son tan vagos como la noción de efectivamente computable, y cuestiones similares aparecen con respecto a las consideraciones que él expresara en el párrafo anterior, las nociones de "función" y "verdad", elaboradas bajo la teoría de conjuntos no superan este nivel de vaguedad. ii) Puede haber demostraciones que conectan nociones intuitivas y nociones precisas. Negarlo es asumir una noción de demostración demasiado estrecha, referida a un determinado sistema axiomático, p. ej., Zermelo Fraenkel, cuando para el caso de la Tesis de Church sería necesaria una demostración más amplia. iii) En algunas proposiciones matemáticas, la cuestión de su verdad puede verse sin necesidad de demostración. Esta es una posición discutible, pero en el caso de la proposición indemostrable de Gödel, p.ej, uno reconoce su verdad sabiendo que no hay demostración. De cualquier modo, en lo referido a la tesis, siempre queda ese margen de cautela y escepticismo al estilo de aquella caracterización del problema formulada por H. Wang en

1974 de que se escucha a menudo que en lógica matemática se ha desarrollado un concepto preciso que corresponde exactamente con nuestra noción vaga e intuitiva de computabilidad. Pero, se pregunta, ¿Cómo podría una noción precisa corresponder con una noción vaga?

Supongamos que llamamos a esta relación Rpv. Pues bien, es realmente extensa la literatura sobre los intentos de caracterización de R. Desde intentos de aflojar la noción precisa hasta aquellos de ajustar y precisar la noción vaga. Estos ejercicios de definición encuentran sus problemas desde la misma década del 30, donde parecen haberse planteado los obstáculos epistemológicos con suficiente fuerza y claridad. A título de ejemplo, veamos las citas siguientes, tomadas de Antony Galton:

> la noción de computación finita no está definida, sino que sirve como un principio heurístico. (Gödel, 1934)

> Church, 1936, al definir la noción de una función de enteros positivos efectivamente calculable observa que "Esta definición se piensa como justificada por las consideraciones que siguen, hasta donde una justificación positiva puede obtenerse alguna vez para la selección de una definición formal que corresponda a una noción intuitiva."

> todos los argumentos que pueden darse para la tesis de Church se acotan a ser, fundamentalmente, apelaciones a la intuición, y por esta razón más bien matemáticamente insatisfactorios. (Turing, 1936)

A pesar de todo esto, la tesis ha mostrado ser tan fértil que además de servir de supuesto para varios de los resultados más sorprendentes de la lógica, ha inspirado opiniones que renuevan el enfoque de las nociones de demostración y de verdad matemáticas y puede servir de base y guía heurística para una futura caracterización del fisicalismo. De acuerdo con la ponderación que hemos podido realizar hasta el momento de las bifurcaciones interpretativas de la misma, estimamos que involucra una trama de nociones que trascienden por lejos al ámbito de una sola disciplina; sea ella formal, lingüística, o de naturaleza empírica. Por ello, en nuestra opinión se trata de un punto central para el abordaje de los supuestos epistemológicos de las disciplinas que confluyen en esta trama. Si esto es así, cualquier estrategia organizativa de carácter epistemológico de las mismas deberá incluir en algún momento un tratamiento explícito de la tesis y un intento de esclarecimiento de cuáles aspectos relevantes de la misma corresponden a cada conceptualización elaborada, ya sea esta formal, cognitivista o fisicalista.

Referencias

BOOLOS 1980: Boolos, George, & Jeffrey, Richard: *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1980.

CHAITIN, Gregory 1998: *The Limits of Mathematics*, Springer-Verlag, Singapore.

CHURCHLAND 1988: Churchland, P. M.: *Matter and Consciousness*, Cambridge, Mass, MIT Press.

CHURCHLAND 1990: Churchland, P.M. y Churchland, P.S.: Could a Machine Think?, *Scientific American*, 262 (Jan), pp.26-31.

DENNETT 1991: Dennett, D.C.: *Consciousness Explained*, Boston, Little, Brown.

DEUTSCH D. 1985: Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer. *Proceedings of the Royal Society*, Series A, 400, pp. 97-117.

DEUTSCH D. 1997: *The Fabric of Reality*, Allen Lane, The Penguin Press, N. York.

GALTON A.1996: The Church Turing Thesis: Its Nature and Status, en *Machines and Thought*, ed. by P. Millican, A. Clark, Clarendon Press, Oxford.

HOFSTÄDTER D.1987: *Gödel, Escher, Bach*, Tusquets Eds., Barcelona.
MENDELSON 1990: Mendelson, Elliott: Second Thoughts about Chuch's Thesis and Mathematical Proofs, en *The Journal of Philosophy*, Volume LXXXVII, N° 5, May 1990.
WANG H. 1974: *From Mathematics to Philosophy*, Routledge & Kegan Paul, London.