EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS IX JORNADAS

VOLUMEN 5 (1999), Nº 5

Eduardo Sota
Luis Urtubey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Ideas acerca de una teoría de la demostración para una reconstrucción de razonamientos revocables

*Carlos Lombardi**

1. David Poole presentó, en (Poole 88), una forma de reconstruir algunos razonamientos revocables, en particular aquellos que incluyen la aplicación de enunciados de normalidad o *defaults* del tipo "normalmente, las aves vuelan" o "por lo general, los oficinistas son gente sedentaria".

Poole caracteriza a su propuesta como un "marco lógico". En vez de construir una nueva lógica y definir una relación de consecuencia o un concepto de demostración en los que se refleje la relación entre premisas y conclusión de los razonamientos revocables, opta por definir nuevos tipos de relaciones entre fórmulas, fragmentando al conjunto de premisas de acuerdo al aporte que puede hacer cada una en el razonamiento.[1]

Describiré brevemente la versión simplificada que aparece en (Poole 88).

-El conjunto de premisas se divide en *dos fragmentos*: un conjunto F de fórmulas cerradas, y un conjunto Δ de fórmulas arbitrarias.

En F se incluye la representación del conocimiento que se considera cierto, y en Δ se representan los *defaults* como fórmulas abiertas, dejando libres las variables sobre las que se aplica la característica de normalidad. Los dos enunciados de normalidad dados como ejemplo se representarían como elementos de Δ de la forma $Px \supset Qx$

-Se define como escenario de (F,Δ) a cualquier conjunto consistente $F \cup D$ en el que D es un conjunto de instancias de base[2] de elementos de Δ.

Aquí se ve que el uso de los *defaults* es la generación de instancias de base, lo que puede verse como la aplicación de un *default* a un caso particular. Una aplicación de *default* es permitida si es consistente, primero con el conocimiento cierto, y luego con otras aplicaciones hechas anteriormente.

Al agregar instancias de *defaults*, se generan ampliaciones del conocimiento cierto representado por F. Estas ampliaciones no son arbitrarias. Los *defaults* funcionan como una guía de razonabilidad en la generación de ampliaciones, dándole una base a los enunciados incluidos. El conocimiento que se incorpora no es general, sino que está referido a un caso particular.

-Se dice que una fórmula cerrada g es *explicable* a partir de (F,Δ) si y sólo si existe algún escenario E de (F,Δ) que verifique $E \models g$. Esta es la relación que liga premisas y conclusión de los razonamientos que pueden reconstruirse mediante este marco. Los *defaults* que se incluyen entre las premisas de un razonamiento son aquellos para los que E incluye alguna instancia.

El sistema lógico del cual se utilizan el lenguaje y las nociones de consistencia y consecuencia está en principio abierto, lo que está indicado en (Poole 88), pág. 29. En los artícu-

* Instituto de Investigaciones Administrativas – Facultad de Ciencias Económicas – Universidad de Buenos Aires.

los de Poole y en otros que lo mencionan se utiliza el cálculo de predicados de primer orden, idea que seguirá este trabajo.

Representemos, dentro de este marco, al ejemplo canónico de la literatura sobre razonamiento revocable, extendiéndolo un poco. Se usará una variación del lenguaje de predicados, que hace a la formalización autoexplicable. Los símbolos de predicado y constante comienzan con minúscula, y los de variable con mayúscula.

Las premisas con que contamos son: Normalmente las aves vuelan (*default*). Los objetos que vuelan suelen ser livianos (*default*). Tweety es un ave (conocimiento cierto). Perico es un ave (conocimiento cierto). Pueden representarse en este marco mediante:

F = {ave(tweety) , ave(perico)} y Δ = {ave(X) ⊃ vuela(X) , vuela(X) ⊃ liviano(X)}

Las fórmulas g1 = vuela(tweety) y g2 = liviano(perico) son explicables respectivamente.

a partir de (F,Δ), mediante los escenarios:

E1 = F∪{ave(tweety) ⊃ vuela(tweety)}

E2 = F∪{ave(perico) ⊃ vuela(perico), vuela(perico) ⊃ liviano(perico)}

E1 y E2 amplían el conocimiento expresado en F. Estas ampliaciones no fueron generadas arbitrariamente, sino de acuerdo con Δ. Δ y la noción de consistencia indican de qué formas resulta lícito generar ampliaciones de un conjunto inicial de conocimiento cierto.

El razonamiento que lleva a g1, puede reproducirse de la siguiente forma, en la que se resalta la utilización del *default*.

(1) Normalmente, las aves vuelan.

Si Tweety es un ave, entonces Tweety vuela.
Tweety es un ave.

Tweety vuela.

Este razonamiento es revocable. Supongamos

F' = F∪{∀X pingüino(X) ⊃ ¬vuela(X) , pingüino(tweety)}

g1 no es explicable a partir de (F',Δ). E1 no es escenario de (F',Δ), pues la instancia agregada no es consistente con F'. El razonamiento (1) fue anulado, pues ya no puede hacerse su primer paso. Esto no invalida al *default* en su totalidad. Observamos, p. ej., que E2 es escenario de (F',Δ), y por lo tanto g2 resulta explicable.

2. En (Poole 88) se describen los conceptos de escenario y explicabilidad como la semántica de su "marco lógico" (pág. 29). En este trabajo intento aportar elementos para la construcción de una teoría de la demostración que sea adecuada al mismo.

En varios artículos de Poole aparecen elementos relacionados con la teoría de la demostración. Estos elementos son funcionales a su interés por construir una implementación computacional de la explicabilidad extendiendo un demostrador de teoremas basado en el principio de resolución. Por esto sus definiciones y demostraciones, que están (dentro de la bibliografía de este trabajo) en (Poole 89) sección 5 y en (Poole 91) sección 3, aparecen mezcladas con cuestiones relacionadas específicamente con el tipo de demostrador que Poole quiere extender. Este trabajo, aunque basado en los elementos descriptos por Poole, sigue un enfoque distinto. El interés aquí es definir una teoría de la demostración adecuada a una reconstrucción de razonamientos revocables que no es puramente lógica, independientemente de las cuestiones ligadas a deducción automática.

¿Cómo debería ser una *teoría de la demostración* para la reconstrucción de razonamientos revocables descripta en **1.**? Describamos algunas características:

-Como la relación definida que liga premisas y conclusión es la explicabilidad, la adecuación de un concepto de demostración[3] debe verificarse con respecto a la misma.

-Una demostración de una fórmula dentro de este marco debería partir de un determinado (F,Δ), pues una fórmula no es explicable por sí, sino con respecto a un (F,Δ).

-Una definición puede considerarse adecuada si cumple la siguiente condición:

existe una demostración de g a partir de (F,Δ) si y sólo si g es explicable a partir de (F,Δ).

-Una demostración sería más útil si, además de indicar que una fórmula es explicable, generara un escenario que la explique.

3. Se presenta en esta sección una definición de demostración para la reconstrucción de razonamientos revocables definida en **1.** Esta definición está basada en las demostraciones por resolución lineal, descriptas en (Chang-Lee 73) pág. 131. Se usarán elementos asociados a las demostraciones por resolución, como el cálculo de la forma clausal de un conjunto de fórmulas, y el concepto de resolvente. Esto coincide con los elementos de teoría de la demostración definidos por Poole y mencionados en **2.**, que también se basan en resolución lineal.

Dadas una fórmula cerrada g, y un par (F,Δ), y si llamamos CF al conjunto de cláusulas que resulta de calcular la forma clausal de F, y CNG al conjunto de cláusulas que resulta de calcular la forma clausal de la fórmula ¬g, definimos como *demostración de g a partir de (F,Δ)* a cualquier secuencia de pares $(R_0,D_0),\ldots,(R_k,D_k)$ que cumplan las siguientes condiciones:

1) $R_0 \in CNG$

2) $D_0 = \varnothing$

3) para i desde 1 hasta k, R_i es resolvente de R_{i-1} y C_{i-1}, con

   a) $C_{i-1} \in (CF \cup CNG)$, ó

   b) $C_{i-1} \in \{R_0,\ldots,R_{i-1}\}$, ó

   c) C_{i-1} pertenece al conjunto resultante de calcular la forma clausal de D_{i-1}, ó

   d) C_{i-1} es una cláusula que resulta de calcular la forma clausal de d, siendo d una instancia de base de δ, con $\delta \in \Delta$, tal que $F \cup D_{i-1} \cup \{d\}$ es consistente y $d \notin D_{i-1}$.

4) para i desde 1 hasta k, D_i se define de acuerdo a cómo se obtiene C_{i-1}

   $D_i = D_{i-1}$ si C_{i-1} se obtiene mediante las opciones a), b) o c).

   $D_i = D_{i-1} \cup \{d\}$ si C_{i-1} se obtiene mediante la opción d).

5) R_k es la cláusula vacía.

Una demostración de g a partir de (F,Δ) es similar a una demostración, por resolución lineal de la lógica de predicados, de la inconsistencia de CF ∪ CNG, o lo que es lo mismo, una demostración de la forma $F \vdash g$, donde el símbolo $\vdash$ indica "es deducible por resolución lineal". Las diferencias son dos:

-se acompaña la secuencia de resolventes $R_0,...,R_k$ con una nueva secuencia $D_0,...,D_k$ de conjuntos de instancias de base de *defaults*.

-se amplía el conjunto del cual se pueden elegir las cláusulas laterales $C_0,...,C_{k-1}$ (condición 3) de la definición).

Además de las cláusulas en CF $\cup$ CNG y los resolventes anteriores (opciones a) y b)), que son las opciones permitidas en resolución lineal, se admite en cada paso (opción d)) incorporar una instancia de base de algún *default*, si es consistente con F y con las instancias incorporadas en los pasos anteriores, y si su forma clausal incluye alguna cláusula que resuelva con el resolvente actual.

Este es el reflejo, en la demostración, de la ampliación del conjunto de premisas que permite llegar a la conclusión deseada, en este caso la fórmula g. La ampliación está guiada por Δ y por la noción de consistencia, como se indica en **1.**

Al incorporarse una instancia al conjunto de premisas, las cláusulas que genera pueden ser utilizadas luego como cláusulas laterales (opción c)).

La siguiente es una demostración de g2 a partir de (F,Δ), según la representación del ejemplo canónico de **1.**

$R_0 = \neg$liviano(perico) $\quad D_0 = \varnothing$

$\quad C_0 = \neg$vuela(perico) $\vee$ liviano(perico) $\quad$ (opción d))

$R_1 = \neg$vuela(perico) $\quad D_1 = \{$vuela(perico) $\supset$ liviano(perico)$\}$

$\quad C_1 = \neg$ave(perico) $\vee$ vuela(perico) $\quad$ (opción d))

$R_2 = \neg$ave(perico) $\quad D_2 = \{$vuela(perico) $\supset$ liviano(perico), ave(perico) $\supset$ vuela(perico)$\}$

$\quad C_2 =$ ave(perico) $\quad$ (opción a))

$R_3 =$ cláusula vacía. $\quad D_3 = D_2$

La definición presentada en esta sección coincide en varios aspectos con las demostraciones *top-down* para lógica *default*, presentadas en las secciones 5 y 7.2 de (Reiter 80). En particular, el estar basada en resolución lineal. El concepto de demostración presentado aquí es más simple que el de Reiter. Una demostración de explicabilidad está basada en una demostración por resolución lineal clásica, en vez de necesitar una secuencia de demostraciones como es el caso de la lógica *default*.

4. Una vez definido qué se entiende por demostración, se plantea la cuestión acerca de si esta definición es *adecuada*, de acuerdo a lo planteado en **2.** Al mostrar esta adecuación, se mostrará también que el conjunto D_k de instancias de base de *defaults* es una explicación para g, o sea que $F \cup D_k$ es consistente y $F \cup D_k \models g$.

Por lo tanto, las demostraciones definidas en **3.** brindan la utilidad adicional planteada en **2.**

Para reflexionar acerca de la adecuación, me basaré en que, al hacer algunos cambios mínimos sobre una demostración de g a partir de (F,Δ), se obtiene una demostración por resolución lineal de la lógica clásica de primer orden de la forma $F \cup D_k \vdash g$.

1) Para analizar la adecuación de las demostraciones definidas, son necesarios los siguientes resultados acerca de D_k: a) D_k es un conjunto de instancias de base de *defaults*.

b) $F \cup D_k$ es consistente. c) $D_i \subseteq D_k$ para todo i entre 0 y k.

Demuestro a) y b) para todo D_j con i entre 0 y k, por inducción sobre j, en particular queda demostrado para D_k.

D_0 verifica trivialmente a) y b). Si D_{j-1} verifica a) y b), entonces si $D_j = D_{j-1}$, entonces D_j verifica obviamente a) y b) si $D_j = D_{j-1} \cup \{d\}$, entonces D_j verifica a) pues todos los elementos de D_{j-1} verifican a) por hip. inductiva, y d verifica a) por su definición como una instancia de base de un *default* verifca b) por la condición explícita de que

$F \cup D_j = F \cup D_{j-1} \cup \{d\}$ debe ser consistente.

c) es obvio, por cómo se define cada D_i incluyendo a D_{i-1} en la condición 4) de la definición de **3.**

2) Se define como *demostración clásica asociada* a la demostración de g a partir de (F,Δ) a la secuencia $R_0,...,R_k$ de resolventes de la segunda.

Veremos en seguida que esta es una demostración por resolución lineal de la lógica clásica de primer orden de la forma $F \cup D_k \vdash g$. Si llamamos CD al conjunto de cláusulas que resulta de calcular la forma clausal de D_k, entonces lo anterior equivale a una demostración por resolución lineal de que $CF \cup CNG \cup CD$ es inconsistente.

Para verificar lo recién afirmado, alcanza con mostrar que todas las cláusulas laterales C_i para i entre 0 y k-1 cumplen con $C_i \in (CF \cup CNG \cup CD)$ ó $C_i \in \{R_0,...,R_i\}$.

Analicemos los posibles C_{i-1} según la definición de **3.**, condición 3).

opción a)

como $(CF \cup CNG)$ ($(CF \cup CNG \cup CD)$, si C_{i-1} es obtenido mediante esta opción entonces cumple la primera condición

opción b)

coincide con la segunda condición

opción c)

$D_{i-1} \subseteq D_k$ (resultado 1)c)), por lo tanto el conjunto resultante de calcular la forma clausal de D_{i-1} está incluido en CD. En consecuencia, si C_{i-1} es obtenido mediante esta opción, entonces cumple con la primera condición.

opción d)

la instancia $d \in D_i \subseteq D_k$ (otra vez, resultado 1)c), lo que permite un razonamiento análogo al de la opción c).

Con respecto a las otras características de las demostraciones por resolución lineal:

$R_0 \in CF \cup CNG \cup CD$	$R_0 \in CNG$ por la condición 1).
R_k es la cláusula vacía	esta es la condición 5)
R_i es resolvente de R_{i-1} y C_{i-1}	lo afirma la condición 3).

3) Muestro que $F \cup D_k$ es una explicación para g, de acuerdo a lo definido en **1.** Para esto debo demostrar que $F \cup D_k$ es un escenario. La definición de escenario coincide con los resultados 1)a) y 1)b), ya demostrados en 1) $F \cup D_k \models g$.. Como la resolución lineal es un procedimiento adecuado para la lógica clásica de primer orden, alcanza con mostrar una demostración por resolución lineal de la forma $F \cup D_k \vdash g$. La demostración clásica asociada a la demostración de g a partir de (F,Δ) tiene exactamente esta forma, por lo que hallamos la demostración deseada.

4) Con los elementos reunidos hasta ahora, podemos abordar la cuestión acerca de la adecuación.

Con respecto a la *corrección*: supongamos que existe una demostración de g a partir de (F,Δ). Debo demostrar que g es explicable a partir de (F,Δ), o sea que existe un escenario E que verifique $E \models g$.

Por lo demostrado en 3), el conjunto $F \cup D_k$ es un escenario que cumple con esta condición. Por lo tanto, g resulta explicable, y las demostraciones resultan correctas.

La parte que respecta a la *completud* es un poco más larga. Supongamos que g es explicable a partir de (F,Δ). Debo demostrar que existe alguna demostración de g a partir de (F,Δ), lo que voy a hacer exhibiendo una tal demostración.

g es explicable a partir de (F,Δ), por lo tanto existe un escenario $E = F \cup D$ tal que $F \cup D \models g$. Como la resolución lineal es un procedimiento adecuado para la lógica clásica de primer orden, entonces existe una demostración por resolución lineal de la forma $F \cup D \vdash g$ con secuencia de resolventes $R_0,\ldots,R_k$ y cláusulas laterales $C_0,\ldots,C_{k-1}$.

Defino la secuencia $D_0,\ldots,D_k$ de la siguiente manera:

$D_0 = \varnothing$

y para i desde 1 hasta k-1:

$D_i = D_{i-1} \cup \{d\}$ si C_{i-1} resulta de calcular la forma clausal de d, con $d \in D$ y $d \notin D_{i-1}$

$D_i = D_{i-1}$ en caso contrario.

Observo que para todo i entre 0 y k, se verifica $D_i \subseteq D$, pues los elementos agregados a los D_i son siempre elementos de D.

La secuencia de pares $(R_0, D_0),\ldots,(R_k, D_k)$ resulta ser una demostración de g a partir de (F,Δ), y en consecuencia es la demostración que debo exhibir. Esto completa la demostración de adecuación.

El resto de esta sección muestra lo recién afirmado, de acuerdo a la definición de 3..
Las condiciones 1), 2) y 5) se cumplen trivialmente. Con respecto a la condición 3), observamos que cada cláusula lateral C_{i-1} verifica:

$$C_{i-1} \in CF \cup CNG \cup CD \text{ ó } C_{i-1} \in \{R_0,\ldots,R_{i-1}\}.$$

Si $C_{i-1} \notin CD$, está cubierto por las opciones a) o b).

Si $C_{i-1} \in CD$, deben distinguirse dos casos:

C_{i-1} pertenece al conjunto resultante de calcular la forma clausal de D_{i-1}, lo que está cubierto por la opción c)

C_{i-1} no pertenece a dicho conjunto, con lo cual es una cláusula resultante de calcular la forma clausal de algún d que verifica $d \in D$ y $d \notin D_{i-1}$. Como por hipótesis $F \cup D$ es un escenario, entonces d es una instancia de *default* que verifica $F \cup D_{i-1} \cup \{d\}$ consistente (pues $F \cup D$ consistente y $D_{i-1} \cup \{d\} \subseteq D$), estando cubierta entonces C_{i-1} por la opción d).

Con respecto a la condición 4), se observa que los casos en que se agrega una instancia en D_i coinciden con los cubiertos por la opción d) de la condición 3), por lo que la definición de D_i coincide con esta condición.

5. En principio, la tarea de construir un escenario que explique un determinado enunciado g puede verse como problemática. En efecto, ¿cómo conocer a priori cuáles, entre las instancias de los *defaults*, servirán para construir un escenario que implique g?

Una demostración de g a partir de (F,Δ) determina un escenario que explica g. Este escenario es $F \cup D_k$, como se mostró en **4.**. La forma en que está definida la demostración en **3.**, además de determinar tal escenario, brinda una guía para abordar su construcción.

En efecto, para cada i entre 1 y k, en la generación del par (R_i,D_i) se genera, a lo sumo, una nueva instancia de *default* (se genera una instancia si se elige la opción d) en la condición 3), y ninguna en caso contrario). Se acotan en gran medida las posibles instancias a generar. Tiene sentido generar sólo las instancias que resuelven con R_{i-1}. P. ej., no tiene sentido analizar los *defaults* que no coinciden en ningún símbolo de predicado con R_{i-1}.

En el ejemplo en el que se demuestra la fórmula liviano(perico) en **3.**, cada vez que se genera una instancia, es la única instancia de base de *default* que resuelve con el resolvente actual.

6. Un aspecto en el que las definiciones de **3.** pueden ser de especial utilidad es el desarrollo de una implementación computacional para la relación de explicabilidad. El desarrollo de una implementación puede verse favorecido por el hecho de que las demostraciones definidas son variaciones de las demostraciones por resolución lineal, de las cuales existen varias implementaciones y abundante literatura.

Poole desarrolló varias implementaciones de su "marco lógico", que están basadas en un demostrador de teoremas que implementa resolución lineal clásica. (Poole 91) describe extensamente una de ellas. Es para estas implementaciones que desarrolló los elementos relacionados con teoría de la demostración mencionados en **2.**.

Uno de los objetivos de haber separado los aspectos relacionados con teoría de la demostración (presentados en este trabajo) de los ligados a problemas de deducción automática es obtener una base a partir de la cual se puedan desarrollar implementaciones más claras y más robustas. Cualquier implementación deberá tener en cuenta que las demostraciones definidas no son semidecidibles aplicadas a la lógica clásica de primer orden, al no ser decidible la verificación de la consistencia de un conjunto de fórmulas, necesaria en la generación de una nueva instancia de base de *default* (opción d) de la condición 3) de la definición de **3.**). En una implementación deberá utilizarse un concepto debilitado de consistencia, sin salir por esto del "marco lógico" definido por Poole. Se implementa una aplicación del mismo distinta a la indicada por la lógica clásica de primer orden (ver **1.**).

Las demostraciones resultan decidibles en los contextos en los que la verificación de consistencia lo es, p. ej. para la lógica proposicional.

Existen otras cuestiones a resolver, relacionadas con qué instancia de un determinado *default* es la que debe generarse en algunos casos, y en qué momento se puede decidir esto con seguridad. Esto está tratado en (Poole 91), secciones 3.2 y 3.3.

Conclusión

En el artículo se brindan algunos elementos relacionados con la teoría de la demostración, aplicada a reconstrucciones de razonamientos que no están basadas exclusivamente en relaciones de consecuencia. En particular, se exhibe un concepto de demostración que, en mi opinión, permite abordar en forma sencilla la construcción de un escenario que explique a un determinado enunciado; o sea, de una ampliación razonable de un conjunto inicial de conocimiento que respalde a dicho enunciado. La definición expuesta puede servir de base para una eventual implementación computacional, aunque quedan aspectos a resolver.

Notas

[1] Para una discusión acerca de distintos criterios para representar los razonamientos revocables, puede verse (Legris 95).

[2] Una ***instancia de base*** de una fórmula F es el resultado de aplicarle una sustitución de todas sus variables libres por términos que no contienen variables, o sea, elementos del universo de Herbrand del conjunto de fórmulas en el que F está inscripta. En (Chang-Lee 73) este concepto es llamado *instancia ground* (pág. 53).

[3]En este artículo se usará el término *demostración* en un sentido puramente sintáctico. Lo que se definirá está basado en las demostraciones por resolución; en este contexto puede llamarse "demostración" a una derivación que, en particular, termina en la cláusula vacía, como lo hace (Chang-Lee 73), pág. 73.
Las demostraciones que se definen en este artículo no son deductivas, al usar el término "demostración" no pretendo indicar que existe alguna relación de tipo deductivo.

Bibliografía

(Chang-Lee 73) Chin-Liang Chang y Richard Lee, *Symbolic logic and mechanical theorem proving*, Academic Press, 1973.

(Legris 95) Javier Legris, "Diferentes criterios para analizar la inferencia revocable: observaciones sobre el punto de vista lógico", comunicación a la *Primera Jornada de Epistemología en las Ciencias Económicas*, FCE - UBA, 1995.

(Poole 88) David Poole, "A Logical Framework for Default Reasoning", en *Artificial Intelligence* 36, pp.27-47, 1988.

(Poole 89) David Poole, "Explanation and prediction: an architecture for default and abductive reasoning", en *Computational Intelligence* 5(2), 97-110, 1989.

(Poole 91) David Poole, "Compiling a Default Reasoning System into Prolog", en *New Generation Computing*, 9(1), pp.3-38, 1991.

(Reiter 80) Raymond Reiter, "A Logic for Default Reasoning", en *Artificial Intelligence* 13, pp.81-132, 1980.