EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS IX JORNADAS

VOLUMEN 5 (1999), Nº 5

Eduardo Sota
Luis Urtubey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Sobre la posible naturaleza discreta del espaciotiempo y sus implicaciones en cosmología

*Osvaldo M. Moreschi**

1. Introducción

El conjunto de temas que trataremos concierne aspectos fundamentales de la concepción física que tenemos de la naturaleza y merecería por lo tanto de una extensa introducción. Sin embargo las limitaciones del espacio disponible nos imposibilita de la misma. De todas formas es necesario mencionar las suposiciones básicas sobre las que construiremos nuestra propuesta, que describimos más abajo.

La descripción física más completa que tenemos de la naturaleza está basada en la utilización de campos sobre variedades diferenciales suaves. Los campos pueden o no estar descriptos cuánticamente (estar cuantizados), dependiendo de las características del sistema que se desea describir. Normalmente la variedad diferenciable a la que se hace referencia es el espaciotiempo, cuya dimensión depende del modelo teórico que se esté empleando. En lo que sigue adoptaremos la actitud de que si bien pueden existir dimensiones extras, a las cuatro dimensiones usuales, estas dimensiones siempre están asociadas a distancias extremadamente pequeñas, del orden de la escala de Planck, y su existencia será tratada como parte de la estructura efectiva, que detectamos con las observaciones físicas, de las cuatro dimensiones usuales del espaciotiempo. O sea que en el resto del artículo, la variedad diferenciable mencionada más arriba será la del espaciotiempo de cuatro dimensiones y admitiremos la existencia de dos regímenes; una escala fundamental que denominaremos microscópica y otra mayor a la que llamaremos macroscópica.

Otro aspecto que necesitamos definir es el relacionado al principio de causalidad. Adoptaremos la visión estándar de la formulación del principio de causalidad como es expresado en teorías geométricas de la gravitación como la relatividad general. Esto en particular, implica que el espaciotiempo tiene una estructura Lorentziana en donde no son admitidas las curvas temporales cerradas. O sea las *causas* siempre se encuentran en el pasado de los *efectos*.

Como se menciona en el título, se desea al final hacer una relación con la visión cosmológica presente; por lo que expondremos brevemente aquí cual es nuestro punto de partida. La observación de que vivimos en un Universo en expansión, trae como consecuencia, cuando se lo describe en forma completa por medio de la teoría geométrica de la gravitación, usando la ecuación de Einstein, que existe una singularidad cósmica inicial. Es conocida esta propiedad en los modelos cosmológicos sencillos, representados por las geometrías de Friedmann, que hacen uso del llamado principio cosmológico, que asume un Universo isótropo y homogéneo. Inicialmente se creyó que esta propiedad de estas geometrías era sólo consecuencia de la suposición demasiado simplista de un espacio homogéneo e isótropo. Sin embargo se probó luego, a través de los llamados teoremas de singularidades[1], que la singularidad cósmica inicial es una propiedad ineludible que aparece en el pasado de un Universo en expansión con contenido de materia estándar.

* Miembro del CONICET. FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

En consecuencia asumiremos que nuestro espaciotiempo de cuatro dimensiones, causalmente bien comportado, tiene una singularidad cósmica en nuestro pasado.

2. Una pregunta fundamental

En ocasiones no es importante los caminos que han llevado a formular una teoría o concepción de un marco teórico; pero sin embargo consideramos que es interesante introducir nuestra propuesta que detallaremos más adelante, a través de una pregunta fundamental. La pregunta es: ¿Es posible describir completamente (o equivalentemente: representar perfectamente) un sistema finito por medio de una expresión finita de un lenguaje formal?

Aunque la pregunta es suficientemente general y vale para todo tipo de sistemas, en este caso nos interesa estudiarla en el contexto de los puntos de partida mencionados en la Introducción. Es así que por "un sistema finito" se puede entender, muy generalmente, una región finita del espaciotiempo, con los posibles campos físicos definidos sobre esta porción.

Es harto conocido que las expresiones más concretas de la física son a través de expresiones matemáticas. En relación con la pregunta fundamental, toda expresión matemática, necesaria para describir un sistema finito, la podemos entender como una expresión dentro de un lenguaje formal.

Pero la pregunta apunta a la cuestión de si es posible describir **completamente** un sistema finito por una expresión finita.

Para entender en profundidad la naturaleza de la pregunta, consideremos por ejemplo campos electromagnéticos clásicos en una región finita del espaciotiempo; más aun, con el objeto de fijar ideas digamos que es una región (globalmente hiperbólica) determinada por datos en una hipersuperficie espacial. Esto es, los campos en toda la región cuadridimensional son determinados por el valor de los campos en una hipersuperficie espacial, contenida en la región. La pregunta aplicada a este sistema entonces se puede entender como el interrogante sobre si es posible describir completamente los campos electromagnéticos en la mencionada hipersuperficie espacial. La suposición implícita hecha en el estudio del electromagnetismo es que en un sistema como este se tiene infinitos grados de libertad; por lo que para describir completamente los datos iniciales sobre una superficie espacial, aun si es de extensión finita, se necesitaría en general una cantidad de información infinita, la cual no sería posible describir por medio de una expresión finita de un lenguaje formal.

Vemos entonces que la tendencia tradicional de un físico sería responder negativamente a la pregunta fundamental.

Sin embargo nosotros proponemos que la respuesta correcta es la afirmativa y en lo que sigue deseamos estudiar las consecuencias de esta repuesta.

Por lo tanto ahora podemos darle el rango de principio a la afirmación: *Todo sistema finito puede ser descripto completamente (o equivalentemente: puede ser representado perfectamente) por medio de una expresión finita de un lenguaje formal.*

3. Sobre la factibilidad de la afirmación

Antes de estudiar las consecuencias de la afirmación, debemos asegurarnos de que es una afirmación posible; esto es de que no está en contradicción con ningún aspecto fundamental de nuestro conocimiento o de la realidad.

La primera observación está asociada a que toda medición física, puede ser codificada, como una expresión finita de un lenguaje formal; debido a que toda medición da como resultado un conjunto finito de dígitos. Como la información contenida en un conjunto finito de números enteros es finita; se concluye que el principio no está en contradicción con las observaciones.

Uno podría argumentar en contra, volviendo al ejemplo de los campos electromagnéticos en una región finita, que si bien en cada medición uno obtiene una cantidad finita de información, uno podría pensar en ir refinando el sistema de medición y realizar una sucesión de mediciones con precisión cada vez mayor que obtuviese en cada una de ella como resultado una cantidad mayor de información. De esta forma uno pensaría que es posible construir una sucesión donde la información asociada a cada elemento no tendría cota superior, para una dada medida de información.

Sin embargo la misma física nos afirma que la construcción de esta sucesión no es posible; pues si comenzamos estudiando un sistema, que debido a sus características se puede describir adecuadamente por campos clásicos, esto es sin cuantificar, en cuanto intentamos realizar observaciones cada vez más detalladas y precisas del sistema, ineludiblemente nos confrontamos con la naturaleza cuántica del mismo. Por lo que tarde o temprano nos vemos forzados a realizar una descripción cuántica de dichos campos. No es la ocasión para ahondar demasiado sobre las implicaciones de la naturaleza cuántica de un sistema en los posibles resultados experimentales; pero conviene recordar que en la versión no relativista de la física cuántica, se encuentran inmediatamente las desigualdades de Heisenberg[2] asociadas a mediciones de observables conjugados. Por otro lado en el régimen relativista de la cuántica uno encuentra otro tipo de limitaciones, cuando por ejemplo se desea medir la posición de una partícula elemental y se emplea más energía en la observación que la asociada a su energía de reposo; en este caso la producción de otras partículas idénticas a la original, cambia el sistema a tal punto que cuestiona la legitimidad de preguntarse sobre la posición de la partícula en este régimen.

De todas formas uno todavía podría pensar en alguna clase de medición, no necesariamente la posición, de la cual se pudiese extraer más información a expensas de introducir más energía en la misma. Aún esta construcción mental tiene objeciones, esta vez desde las observaciones cosmológicas. Hemos mencionado anteriormente que de las observaciones del Universo en expansión se deduce la existencia de una singularidad inicial cósmica; lo cual implica que en cada instante sólo podemos detectar en nuestro pasado una cantidad finita de materia, que es la materia total observada. Si pudiésemos dirigir toda la materia (o energía) observada con los fines de realizar una medición, dispondríamos de una cantidad inmensa de energía pero finita.

Vemos entonces que análisis detallados del proceso de medición en física, en realidad, justifican el principio enunciado anteriormente.

Además se puede también mencionar algunas consideraciones metafísicas que dan soporte al principio.

Por ejemplo en la referencia [3] se afirma, en relación con el principio de causalidad, que se puede objetar que una infinidad de conexiones que están fuera del alcance de control experimental no son en realidad causales; agregándose también que para que una conexión pueda ser considerada causal debe involucrar conjuntos finitos en las causas y los efectos.

Desde otro punto de vista en la referencia [4] se afirma que mientras *grande* y *pequeño* sean sólo conceptos relativos, no es ninguna ayuda explicar lo grande en término de lo pequeño. Se necesita entonces modificar las ideas clásicas (tradicionales) de tal forma de dar un significado absoluto al tamaño. Estas afirmaciones que Dirac hizo en referencia a la naturaleza cuántica de la materia, entendemos que conduce también a un replanteamiento de nuestro entendimiento de la estructura del espaciotiempo; de tal forma que se deduce que debería existir una escala absoluta que indique un tamaño fundamental. Luego sería necesario sólo realizar la descripción de los campos físicos con respecto a correspondientes celdas fundamentales; lo que requeriría solamente de expresiones finitas para cada elemento.

4. Implicaciones de la afirmación

A toda frase de un lenguaje formal se le puede asignar una cantidad de información, asociada con una medida de información dada. Luego como a toda frase finita le corresponderá una cantidad finita de información, se deduce que la afirmación antes presentada puede ser refraseada en los siguientes términos: "Todo sistema finito puede ser descripto completamente (o equivalentemente: puede ser representado perfectamente) por medio de una cantidad finita de información."

Este principio nos enfrenta con la dicotomía por un lado de haber asumido inicialmente un espaciotiempo efectivo como una variedad diferenciable suave de cuatro dimensiones con una estructura Lorentziana; mientras que por otro lado se afirma que una porción del espaciotiempo puede ser descripto completamente en termino de una cantidad finita de información. Una manera de entender esta dicotomía es que la estructura última del espaciotiempo es discreta, a escalas muy pequeñas (digamos la escala de Planck); pero que todas las observaciones de las que tenemos conocimiento solo experimentan la estructura del mismo a escalas mucho mayores, en donde se presenta, para todo fin práctico de cálculo, como una variedad suave.

La expectativa de que a escalas muy pequeñas la estructura del espaciotiempo presente una naturaleza discreta, aparece mas o menos naturalmente en todo pensamiento profundo que intenta asociar la naturaleza cuántica a una teoría geométrica de la gravitación. En particular, recientemente se han realizado cálculos de operadores cuánticos que miden la superficie de regiones dos dimensionales cerradas (en otras palabras de esferas), obteniéndose un espectro discreto[5]. También los operadores que miden longitudes presentan la misma propiedad. Si bien los cálculos se realizaron usando una variedad efectiva suave de fondo, un criterio de consistencia estricto implicaría que se debiese realizar la construcción teórica en término de un espaciotiempo de naturaleza discreta.

Puede parecer difícil que una estructura causal Lorentziana aparezca como el límite macroscópico de una naturaleza discreta; sin embargo existen trabajos en la literatura[6] que han adjudicado una estructura causal, compatible con la Lorentziana, a espacios discretos.

El concepto de medida de información, usado en el enunciado del principio al comienzo de esta sección, no es ajeno a la física ni a la relatividad general específicamente. En particular, este concepto ha tenido una profunda influencia en el estudio de la física estadística y de agujeros negros. Existen diversos puntos de vista sobre la injerencia de este concepto en la física[7][8][9][10][11], pero es innegable que fue fundamental en los primeros cálculos de la entropía de agujeros negros[12].

Aunque hemos deducido del principio aquí presentado, que la naturaleza última del espaciotiempo debe ser discreta, continuaremos con la discusión en término de escalas macroscópicas para las cuales el espaciotiempo se nos presenta como una variedad suave con estructura Lorentziana. Es así que asociada a una región finita U del espaciotiempo, por un lado tenemos que se necesita una cantidad finita de información para caracterizar su estructura y contenido de materia, mientras que al mismo tiempo están bien definido conceptos como el pasado causal[1], $J^{-}(U)$, del mismo.

En este contexto es conveniente dejar en claro cómo se entiende el principio de causalidad. Diremos que: la información asociada a cualquier región finita del espaciotiempo, sólo puede depender de la información asociada al pasado causal de la misma.

Otra cuestión que se debe dejar en claro antes de proseguir, es cómo se entiende la existencia de una singularidad inicial cósmica en término de un espaciotiempo que en escalas microscópicas pueda tener una estructura discreta. Existen básicamente dos posibles actitudes; en una de las cuales se puede esperar que la singularidad inicial se desvanezca a la luz de una teoría de gravedad cuántica; en la otra visión se puede esperar que en realidad la singularidad inicial no desaparecerá incluso cuando dispongamos de una teoría completa de gravedad cuántica, y permanecerá como un aspecto distintivo de nuestro Universo.

Nosotros adheriremos a esta segunda visión, y argumentaremos en favor de ella más adelante.

Esta última es una cuestión muy delicada y distintos físicos tienen posiciones fuertes por una u otra postura. Para algunos la singularidad inicial cósmica es un problema de la teoría que debe ser subsanado por una teoría más completa; mientras que para otros (incluido el autor) el esfuerzo por asumir la existencia de la singularidad inicial puede ser la única posibilidad para entender una variedad de temas[13].

También necesitamos especificar un poco más las propiedades de la medida de información usada. Requeriremos sólo un par de propiedades:

A) No negatividad: la medida de la información $I(S)$ del sistema S es no negativa, o sea:

$$I(S) \geq 0$$

B) Subaditividad: la medida de la información de un sistema U que es la unión disjunta de dos conjuntos, esto es, $U = S_1 \cup S_2$, está acotada por la suma de las medidas de información $I(S_1)$ y $I(S_2)$, o sea:

$$I(U) \leq I(S_1) + I(S_2) \quad .$$

Notemos que estas propiedades son satisfechas por la medida de Shannon[14].

Dada una medida de información con estas características y un punto x del espaciotiempo, es posible definir la noción de densidad escalar de información, con respecto al elemento de volumen cuadridimensional ε de la siguiente manera:

$$I_{(4)}(x) = \lim_{\substack{U \to \phi \\ V_U \to 0}} \frac{I(U)}{V_U}$$

donde $V_U \equiv \int_U \varepsilon$ es el volumen de una secuencia de entornos cuadridimensionales U que contienen al punto x; ϕ denota al conjunto vacío.

Sea x_τ el punto $\gamma(\tau)$ en la curva temporal γ y sea $U(x_\tau)$ un entorno pequeño de x_τ. Luego, si $J^{-}(U(x_\tau))$ denota el pasado causal de $U(x_\tau)$, se deduce del principio de causalidad que

$$I(U(x_\tau)) \le I\left(J^-(U(x_\tau)) - U(x_\tau)\right) \le \int_{J^-(U(x_\tau))-U(x_\tau)} I_4 \quad \varepsilon \quad ;$$

donde la primera desigualdad se deduce del principio de causalidad y la segunda se deduce de las propiedades de la medida de información.

Supongamos que la curva $\gamma(\tau)$ es una geodésica temporal de longitud máxima del punto x a la singularidad inicial; de tal forma que el punto frontera[15] en la singularidad se alcanza en el límite cuando el tiempo propio tiende al valor $\tau = 0$. Desde un punto de vista macroscópico el valor de los campos físicos en el punto $x_\tau = \gamma(\tau)$ se puede pensar determinado por la información disponible en un pequeño entorno $U(x_\tau)$. Por pequeño se quiere significar que sus dimensiones son del orden de la escala fundamental; digamos la escala de Planck. Luego, para fijar ideas, consideremos δ del orden de la escala fundamental y entornos $U_\delta(x_\tau)$ de la forma $U_\delta(x_\tau) = J^-(x_{\tau+\delta}) \cap J^+(x_{\tau-\delta})$; o sea son la intersección del pasado causal del punto $\gamma(\tau+\delta)$ con el futuro causal del punto $\gamma(\tau-\delta)$. Desde un punto de vista macroscópico, estos entornos tienen un volumen cuadridimensional despreciable; pero su contenido de información es no trivial, pues determina el valor posible de los campos físicos en el punto $x_\tau = \gamma(\tau)$.

Luego cuando se toma el límite macroscópico del punto x_τ aproximándose a la singularidad inicial, se observa que la región $J^-(U_\delta(x_\tau)) - U_\delta(x_\tau)$ se reduce en tamaño más y más, de donde se deduce que en el límite macroscópico para τ tendiendo a cero se tiene que

$$\lim_{\tau \to 0} I(U_\delta(x_\tau)) = 0 \quad ; \qquad (1)$$

dado que en el límite no queda ningún pasado causal macroscópico.

Supongamos que p y q son dos puntos de la frontera causal[15] asociada a la singularidad inicial que están en el cono de luz pasado del punto x_τ. Luego sean $\gamma_p(\tau')$ y $\gamma_q(\tau'')$ geodésicas temporales de longitud máxima de los puntos x_p y x_q, respectivamente, a la singularidad inicial; de tal forma que los puntos frontera en la singularidad se alcanzan en el límite cuando los tiempos propios tienden al valor cero; esto es $p = \lim_{\tau' \to 0} \gamma_p(\tau')$ y $q = \lim_{\tau'' \to 0} \gamma_q(\tau'')$. Como la propiedad deducida en el párrafo anterior es un característica genérica del Universo en las cercanías de la singularidad inicial, se deduce que el resultado (1) se aplica también a las curvas $\gamma_p(\tau')$ y $\gamma_q(\tau'')$. Entonces, un observador en el punto x_τ ve que, desde un punto de vista macroscópico del espacio-tiempo, la información disponible para describir localmente los campos físicos en las vecindades de los puntos p y q se anulan en ese límite. Una manera de entender este resultado es que si pensamos en un ensamble estadístico de los posibles valores de campos físicos cuando uno se acerca a puntos frontera de la singularidad inicial; entonces vemos que el valor posible de los campos físicos para dos puntos distintos p y q son estadísticamente indistinguibles. En otras palabras, el observador en el punto x_τ cuando mira en la dirección de p, o de q, observa los mismos valores asintóticos de los campos físicos; lo que quiere decir que observa un Universo que es asintóticamente isótropo, en el límite cuando uno se acerca a la singularidad inicial. Y como estas consideraciones valen para cualquier curva $\gamma(\tau)$, se deduce que el Universo también es asintóticamente homogéneo en este límite.

Ambas propiedades indican que asintóticamente, para $\tau \to 0$ se tiene que el tensor de Weyl debe anularse; siendo esta una propiedad que fue puesta ad-hoc en la literatura[16].

Otro aspecto, que tal vez merezca ser remarcado, es que las consideraciones anteriores explican que existe un orden temporal para el desarrollo de la complejidad[17] en el Universo.

Por último deseamos señalar que el hecho de poder describir, basados en pocos argumentos fundamentales, un aspecto importante del Universo, como es el comportamiento homogéneo e isotrópico en tiempos cósmicos tempranos, da un sustento importante a estos argumentos.

Bibliografía

[1] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *"The large scale structure of space-time"*, Cambridge University Press, (1973).

[2] W. Heisenberg, *"The Physical Principles of the Quantum Theory"*, Dover Pub. Inc. (1949).

[3] M. Bunge, *"Causality and Modern Science"*, Dover Pub. Inc., third Ed., (1973).

[4] P.A.M. Dirac, *"The Principles of Quantum Mechanics"*, Oxford University Press, fourth revised edition (1967).

[5] A. Ashtekar and J. Lewandowski. *"Quantum Theory of Geometry I: Area Operators."*, Class. Quan. Grav. 14, A55-A81, 1997.

[6] L. Bombelli, J. Lee, D. Meyer and R. Sorkin, *Phys. Rev. Lett.*, 59, 521, (1987).

[7] J.D. Bekenstein, *"How fast does information leak out from a black hole?"*, preprint, (1993).

[8] J.D. Bekenstein, *"Entropy bound and black hole remnants"*, preprint, (1993).

[9] J.A. Wheeler, "Information, Physics, Quantum: The Search for Links", in *"Complexity, Entropy and the Physics of Information"*, Ed. W.H. Zurek, Addison-Wesley Publishing Company, (1990).

[10] B. Schumacher, "Information from Quantum Measurements", in *"Complexity, Entropy and the Physics of Information"*, Ed. W.H. Zurek, Addison-Wesley Publishing Company, (1990).

[11] J.J. Halliwell, "Information Dissipation in Quantum Cosmology and the Emergence of Classical Spacetime", in *"Complexity, Entropy and the Physics of Information"*, Ed. W.H. Zurek, Addison-Wesley Publishing Company, (1990).

[12] J.D. Bekenstein, *Phys. Rev.* D, 7, 2333, (1973).

[13] R. Penrose, "Some remarks on gravity and quantum mechanics", in *"Quantum structure of space and time"*, Eds. M.J. Duff and C.J. Isham, Cambridge University Press, (1982).

[14] C.E. Shannon, "The Mathematical Theory of Communication", in *"The Mathematical Theory of Communication"*, C.E. Shannon and W. Weaver, The University of Illinois Press, (1949), Eighth printing: 1959.

[15] L.B. Szabados, *"Causal boundary for strongly causal spacetimes: II"*, Class. Quantum Grav., 6, 77-91, (1989).

[16] R. Penrose, "Gravity and Quantum Mechanics", in *"General Relativity and Gravitation 1992"*, Eds.: R.J. Gleiser, C.N. Kozameh and O.M. Moreschi, IOP Publishing Ltd, (1993).

[17] M.D. Davis and E.J. Weyuker, *"Computability, Complexity, and Languages"*, Academic Press, Inc., (1983).