

# EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIX JORNADAS

VOLUMEN 15 (2009)

Diego Letzen  
Penélope Lodeyro

Editores



ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA  
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons atribución NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina



# La mecánica clásica como aproximación de la mecánica cuántica

Leonardo Vanni\* y Roberto Laura†

## Propiedades cuánticas

En la teoría de la mecánica cuántica, se asocia un espacio de Hilbert  $H$  con cada sistema físico. Además, cada subespacio  $H_p$  del espacio  $H$  representa una *propiedad*  $p$  del sistema, y cada vector  $|\varphi\rangle$  del espacio de Hilbert  $H$  representa un *estado* del sistema.

La teoría debe permitir descripciones y razonamientos sobre propiedades del sistema, por lo que deben encontrar su lugar en ella expresiones tales como “si ..., entonces...”, “...y...”, “...ó...”, y “no...”. Todas estas expresiones se corresponden con relaciones y operaciones del conjunto de subespacios del espacio de Hilbert. La relación “si  $p_1$ , entonces  $p_2$ ” se corresponde con la inclusión  $H_{p_1} \subset H_{p_2}$ . Las operaciones “ $p$  y  $p'$ ”, “ $p$  ó  $p'$ ” y “no  $p$ ” se corresponden con la intersección  $H_p \cap H_{p'}$ , la suma directa  $H_p \oplus H_{p'}$ , y el complemento ortogonal  $H_p^\perp$  respectivamente.

Cada propiedad  $p$  del sistema físico tiene definida una probabilidad en el estado representado por  $|\varphi\rangle$ , dada por la regla de Born  $\text{Pr}(p) = \langle \varphi | \hat{\Pi}_p | \varphi \rangle$ , donde  $\hat{\Pi}_p$  es el operador de proyección sobre el subespacio  $H_p$  que caracteriza a la propiedad  $p$  ( $H_p = \hat{\Pi}_p H$ ).

Surgen dificultades si se trata de involucrar en la descripción o el razonamiento a todas las posibles propiedades. En primer lugar, el conjunto de todas las propiedades forma un reticulado no distributivo, que es una estructura muy diferente a la de la lógica convencional usada en el lenguaje ordinario. Además, si la regla de Born es aplicada al cálculo de probabilidades sobre esta estructura no distributiva, se obtiene que si  $H_p \cap H_{p'} = \{\bar{0}\}$ , no resulta en general  $\text{Pr}(p \text{ ó } p') = \text{Pr}(p) + \text{Pr}(p')$ . Entonces la probabilidad de la disyunción de dos propiedades mutuamente excluyentes no verifica la aditividad, lo que resulta un inconveniente insalvable si estas probabilidades deben representar frecuencias obtenidas experimentalmente.

Comenzando con los trabajos de Birkhoff y Von Neumann [1], se han venido desarrollando investigaciones para dar un significado a esta lógica no convencional. Pero hay otra forma de abordar este tema, y es eliminando el problema antes de que aparezca. Parece haber consenso entre los físicos en que la teoría cuántica no predica acerca de la conjunción de propiedades que corresponden a operadores que no conmutan entre sí [2]. Esta hipótesis aparece (explícita o implícitamente) en las aplicaciones prácticas de la teoría, y también los libros de texto de mecánica cuántica [3].

\* Instituto de Astronomía y Física del Espacio (UBA – CONICET)

† Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario)  
Instituto de Física Rosario (CONICET – UNR)

Se trata entonces de obtener del conjunto de todas las propiedades posibles, ciertos subconjuntos que formen reticulados distributivos. En el interior de cada uno de estos subconjuntos, las descripciones y razonamientos siguen las reglas de la lógica convencional, y además la regla de Born asigna probabilidades bien definidas. Cada uno de estos subconjuntos de propiedades forma un posible universo del discurso acerca del sistema, que en mecánica cuántica se denomina *contexto*.

El modo de generar un contexto es a partir de un conjunto de propiedades  $p_j$ , cuyos correspondientes proyectores  $\hat{\Pi}_j$  son ortogonales y completos, es decir que verifican

$$\hat{\Pi}_i \hat{\Pi}_j = \delta_{ij} \hat{\Pi}_j, \quad \sum_j \hat{\Pi}_j = \hat{I}.$$

Todas las propiedades que se obtienen por disyunción de las  $p_j$  forman un contexto.

En general no será posible involucrar dos propiedades que pertenecen a distintos contextos en una misma descripción o razonamiento. Por ejemplo, para un electrón, los operadores de posición y de impulso lineal no conmutan entre sí, y no existe un contexto en el que sea posible hablar simultáneamente de valores definidos de estos dos observables.

Pero en el mundo macroscópico, en el de nuestra experiencia cotidiana, las nociones de posición y de velocidad se usan con éxito en forma simultánea. Durante mucho tiempo esto fue considerado como una evidencia de que la teoría de la mecánica cuántica era aplicable solamente al dominio de los fenómenos microscópicos, mientras que la teoría de la mecánica clásica era la que debía usarse en los fenómenos macroscópicos. En particular, los aparatos de medición utilizados para acceder al mundo microscópico pertenecerían al dominio de la mecánica clásica [4].

Esta posición dejaba sin respuesta a la pregunta acerca de donde debía ponerse el límite entre lo microscópico y lo macroscópico. Por otra parte, como los objetos del mundo macroscópico parecen estar hechos de la misma clase de átomos que constituyen el mundo microscópico, es deseable que sea la teoría cuántica la que pueda dar cuenta de los fenómenos microscópicos y también de los macroscópicos.

Describiremos y analizaremos a continuación cuales son los aportes de la teoría de la decoherencia [5] [6] y del análisis microlocal [7] [8] [9] a solucionar los problemas de compatibilidad entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica.

### **Propiedades clásicas en la mecánica cuántica**

La representación clásica de una propiedad es mediante una región del espacio de las fases. Por simplicidad supondremos que el espacio de las fases es bidimensional, con una coordenada  $q$  de posición y otra  $p$  de impulso lineal.

Consideremos un dominio simplemente conexo  $C$  de este espacio, con borde regular, y cuya área es mucho mayor que la constante de Planck. Con este dominio se puede asociar una función  $f_C(q, p)$ , definida sobre el espacio de las fases, que vale uno en el interior de la región  $C$ , cero en el exterior, y que varía con continuidad entre estos dos valores en una franja suficientemente delgada que cubre el contorno del dominio.

En la correspondiente teoría cuántica, los posibles estados del sistema físico se representan con funciones de onda, que pertenecen al espacio de Hilbert  $L^2(R)$  de las funciones de cuadrado integrable de variable real.

A partir de la función  $f_C(q, p)$  se puede construir un operador autoadjunto  $\hat{F}_C$ , que actúa en el espacio  $L^2(R)$  y que verifica

$$\langle x' | \hat{F}_C | x'' \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} f_C\left(\frac{x'+x''}{2}, p\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot (x''-x')\right),$$

$$f_C(q, p) = \int dy \langle q + \frac{y}{2} | \hat{F}_C | q - \frac{y}{2} \rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot y\right).$$

Existen proyectores suficientemente próximos a  $\hat{F}_C$ , entre los cuales puede elegirse uno que denominaremos  $\hat{\Pi}_C$ . Este proyector es la representación en la teoría cuántica de la propiedad que en la teoría clásica se representa con el dominio  $C$ .

Para ello consideremos un estado cuántico representado por un vector  $|\varphi\rangle$  que es un autoestado del proyector  $\hat{\Pi}_C$ , con autovalor uno ( $\hat{\Pi}_C |\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ ). Es posible demostrar que este vector representa un estado para el cual hay casi la certeza de que posición e impulso estén dentro del dominio  $C$ . Esto se expresa en lenguaje matemático de la siguiente forma

$$\langle \hat{x} \rangle_\varphi = \int dx \varphi^*(x) x \varphi(x) = q, \quad \langle \hat{p} \rangle_\varphi = \int dx \varphi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = p,$$

$$\Delta q = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle_\varphi - \langle \hat{x} \rangle_\varphi^2}, \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle_\varphi - \langle \hat{p} \rangle_\varphi^2}, \quad [q - \Delta q, q + \Delta q] \times [p - \Delta p, p + \Delta p] \subset C.$$

Vemos entonces que en la teoría cuántica hay ciertos estados que se pueden describir también clásicamente, no como un punto, sino como una región del espacio de las fases. Esta región debe necesariamente ser mucho mayor que la constante de Planck, pero esto no suele ser un inconveniente para la descripción de sistemas a escala macroscópica. En este sentido podemos decir que las descripciones cuántica y clásica de ciertos estados resultan posibles: hay ciertos "estados cuánticos" (no todos), que son también "estados clásicos".

### Estadística clásica y estadística cuántica

Para que la descripción clásica sea compatible con la descripción cuántica, deben también ser compatibles las correspondientes estadísticas. Debiera entonces anularse de alguna manera la interferencia entre estados cuánticos que admitan una descripción clásica.

Consideremos dos regiones disjuntas del espacio de las fases  $C_1$  y  $C_2$ , y sean  $\hat{\Pi}_{C_1}$  y  $\hat{\Pi}_{C_2}$  los correspondientes proyectores. Consideremos además dos vectores  $|\varphi_1\rangle$  y  $|\varphi_2\rangle$  que pertenecen respectivamente a cada uno de los dos espacios generados por los proyectores. Estos vectores verifican entonces

$$\hat{\Pi}_{C_1} |\varphi_1\rangle = |\varphi_1\rangle, \quad \hat{\Pi}_{C_2} |\varphi_2\rangle = |\varphi_2\rangle,$$

La regla de Born permite deducir que las probabilidades de ambas propiedades tienen el valor uno, ya que  $\langle \varphi_1 | \hat{\Pi}_{C_1} | \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 | \hat{\Pi}_{C_2} | \varphi_2 \rangle = 1$ .

Podemos decir entonces que el vector  $|\varphi_1\rangle$  representa un estado del sistema físico que tiene la propiedad representada por el proyector  $\hat{\Pi}_{C_1}$ , y el vector  $|\varphi_2\rangle$  representa un estado que tiene la propiedad representada por el proyector  $\hat{\Pi}_{C_2}$ <sup>[1]</sup>.

Los vectores  $|\varphi_1\rangle$  y  $|\varphi_2\rangle$  representan estados cuánticos que en una descripción clásica tienen la propiedad de tener su posición y su momento lineal en las regiones  $C_1$  y  $C_2$  del espacio de las fases. Pero si la teoría cuántica debe incluir como caso especial a la teoría clásica, las probabilidades que se calculen con la primera teoría, debieran también coincidir con las que se obtienen de la estadística clásica.

Consideremos el estado representado por el vector  $|\varphi\rangle = \mu_1 |\varphi_1\rangle + \mu_2 |\varphi_2\rangle$ , que es una combinación lineal de estados que también admiten la descripción clásica. Consideremos también un observable representado por el operador  $\hat{O}$ , que es una función regular de los operadores posición y momento lineal ( $\hat{O} = O(\hat{x}, \hat{p})$ ). En la teoría cuántica, el valor medio de este observable en el estado representado por el vector  $|\varphi\rangle$  resulta

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_{\text{cuántico}} &= \langle \varphi | \hat{O} | \varphi \rangle = \\ &= |\mu_1|^2 \langle \varphi_1 | \hat{O} | \varphi_1 \rangle + |\mu_2|^2 \langle \varphi_2 | \hat{O} | \varphi_2 \rangle + \mu_1^* \mu_2 \langle \varphi_1 | \hat{O} | \varphi_2 \rangle + \mu_1 \mu_2^* \langle \varphi_2 | \hat{O} | \varphi_1 \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

Si los estados  $|\varphi_1\rangle$  y  $|\varphi_2\rangle$  corresponden a "regiones clásicas"  $C_1$  y  $C_2$  que son suficientemente pequeñas (aunque con un área mucho mayor que  $\hbar$ ), podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 | \hat{O} | \varphi_1 \rangle &\equiv O(p_1, q_1), & (p_1, q_1) &\in C_1, \\ \langle \varphi_2 | \hat{O} | \varphi_2 \rangle &\equiv O(p_2, q_2), & (p_2, q_2) &\in C_2. \end{aligned}$$

Claramente, los dos primeros sumandos de la ecuación (1) se corresponden con los resultados estadísticos clásicos para un estado que tenga la propiedad representada por la celda  $C_1$  con probabilidad  $|\mu_1|^2$  y la propiedad representada por la celda  $C_2$  con probabilidad  $|\mu_2|^2$ . Un estado con estas características se representa en la teoría clásica con una densidad de probabilidad en el espacio de las fases dada por

$$\begin{aligned} \rho(q, p) &= |\mu_1|^2 \frac{1}{A_1} \chi_1(q, p) + |\mu_2|^2 \frac{1}{A_2} \chi_2(q, p), & (2) \\ \chi_j(q, p) &= 1 \text{ si } (q, p) \in C_j, & \chi_j(q, p) = 0 \text{ si } (q, p) \notin C_j, & A_j = \int_{C_j} dq dp, \quad j=1,2. \end{aligned}$$

El valor medio clásico del observable puede entonces identificarse con los dos primeros sumandos del valor medio cuántico dado en la ecuación (1):

$$\langle O \rangle_{\text{clásico}} = \int dq dp \rho(q, p) O(q, p) \equiv |\mu_1|^2 \langle \varphi_1 | \hat{O} | \varphi_1 \rangle + |\mu_2|^2 \langle \varphi_2 | \hat{O} | \varphi_2 \rangle.$$

Los dos últimos sumandos de la ecuación (1) hacen incompatibles las estadísticas cuántica y clásica, pero veremos que el fenómeno conocido con el nombre de *decoherencia* es el que resuelve este problema.

## Decoherencia

Casi siempre, cuando se recurre a una descripción clásica, se trata de sistemas macroscópicos, formados por un número muy grande de partículas. En estos casos no se pretende la descripción clásica de todas las propiedades del sistema, sino solamente de un número reducido de variables que son relevantes para la descripción macroscópica. Así, por ejemplo, la descripción clásica de la evolución de un proyectil arrojado por un cañón consiste en representar la posición y la velocidad como las coordenadas de un punto que se mueve en el espacio de las fases, gobernado por las leyes de Newton, descartándose la descripción del estado de las moléculas que componen el proyectil. También, la descripción clásica del movimiento de un líquido en las tuberías de una instalación industrial consiste en representarlo con campos clásicos de densidad, presión y velocidad gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes. No interesa en este caso la descripción detallada (clásica ni cuántica) de la evolución que experimentan todas las moléculas que componen el líquido.

Supongamos que en la descripción cuántica de un sistema macroscópico se puede separar las variables del problema en las relevantes o macroscópicas y las irrelevantes o microscópicas. Una función de onda para el sistema completo de variables (relevantes e irrelevantes) será un vector del espacio de Hilbert  $H = H_{rel} \otimes H_{irrel}$ , donde  $H_{rel}$  es el espacio de Hilbert para las variables relevantes, y  $H_{irrel}$  el espacio para las variables irrelevantes.

Consideremos los dos vectores  $|\varphi_1\rangle$  y  $|\varphi_2\rangle$  del espacio  $H_{rel}$ , que se corresponden con las regiones regulares macroscópicamente distintas  $C_1$  y  $C_2$  (por lo demás arbitrarias) de una descripción clásica, y un vector  $|\varepsilon_0\rangle$  del espacio  $H_{irrel}$ . El fenómeno de decoherencia es una interacción entre los dos tipos de variables, que se representa con una transformación unitaria que verifica

$$|\varphi_1\rangle|\varepsilon_0\rangle \rightarrow |\varphi_1\rangle|\varepsilon_1\rangle, \quad |\varphi_2\rangle|\varepsilon_0\rangle \rightarrow |\varphi_2\rangle|\varepsilon_2\rangle, \quad \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle=0,$$

donde los tiempos necesarios para que se produzcan estas transformaciones son extraordinariamente pequeños.

Un observable macroscópicamente relevante se representa con un operador en el espacio de Hilbert  $H = H_{rel} \otimes H_{irrel}$ , que es de la forma

$$\hat{O} = \hat{O}_{rel} \otimes \hat{I}_{irrel},$$

donde  $\hat{O}_{rel}$  es un operador en el espacio de Hilbert  $H_{rel}$ , y  $\hat{I}_{irrel}$  es el operador identidad en el espacio de Hilbert  $H_{irrel}$ .

Consideremos ahora un estado del sistema completo, de la forma

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle|\varepsilon_0\rangle = (\mu_1|\varphi_1\rangle + \mu_2|\varphi_2\rangle)|\varepsilon_0\rangle$$

En este estado, el valor medio de un observable macroscópicamente relevante resulta

$$\langle\Psi|\hat{O}|\Psi\rangle = \langle\varphi|\langle\varepsilon_0|(\hat{O}_{rel} \otimes \hat{I}_{irrel})|\varphi\rangle|\varepsilon_0\rangle = \langle\varphi|\hat{O}_{rel}|\varphi\rangle$$

Este valor medio, obtenido con la teoría cuántica, tendrá términos de interferencia análogos a los que ya obtuvimos en la ecuación (1), y por lo tanto no admite ser reinterpretado con una

teoría clásica. Pero el fenómeno de decoherencia hace que un estado representado por el vector  $|\Psi\rangle$  evolucione muy rápidamente en el estado representado por

$$|\Psi'\rangle = \mu_1 |\varphi_1\rangle |\varepsilon_1\rangle + \mu_2 |\varphi_2\rangle |\varepsilon_2\rangle$$

La ortogonalidad entre los vectores  $|\varepsilon_1\rangle$  y  $|\varepsilon_2\rangle$  permite demostrar fácilmente que el valor medio de un observable relevante, en este nuevo estado, no tiene términos de interferencia

$$\begin{aligned} \langle \Psi' | \hat{O} | \Psi' \rangle &= (\mu_1^* \langle \varphi_1 | \langle \varepsilon_1 | + \mu_2^* \langle \varphi_2 | \langle \varepsilon_2 |) (\hat{O}_{rel} \otimes \hat{I}_{irrel}) (\mu_1 |\varphi_1\rangle |\varepsilon_1\rangle + \mu_2 |\varphi_2\rangle |\varepsilon_2\rangle) = \\ &= |\mu_1|^2 \langle \varphi_1 | \hat{O}_{rel} | \varphi_1 \rangle + |\mu_2|^2 \langle \varphi_2 | \hat{O}_{rel} | \varphi_2 \rangle \end{aligned}$$

Entonces, el valor medio del observable relevante se puede reescribir en la forma

$$\langle \Psi' | \hat{O} | \Psi' \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}'_{rel} \hat{O}_{rel}), \quad \hat{\rho}'_{rel} = |\mu_1|^2 |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| + |\mu_2|^2 |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2|,$$

donde  $\hat{\rho}'_{rel}$  es un operador estadístico en el espacio  $H_{rel}$  que representa un estado cuántico del sistema..

Para los observables relevantes, se puede entonces caracterizar el estado del sistema con un operador estadístico del espacio  $H_{rel}$ , que en el proceso de decoherencia experimenta la transformación no unitaria

$$\rho_{rel} = |\varphi\rangle \langle \varphi| \rightarrow \hat{\rho}'_{rel} = |\mu_1|^2 |\varphi_1\rangle \langle \varphi_1| + |\mu_2|^2 |\varphi_2\rangle \langle \varphi_2|.$$

El estado que en la teoría cuántica se representa con el operador estadístico  $\hat{\rho}'_{rel}$  se puede también representar en la teoría clásica con la densidad de probabilidad en el espacio de las fases dada en la ecuación (2). Llegamos entonces a la importante conclusión de que el proceso de decoherencia hace posible la compatibilidad entre las descripciones clásica y cuántica, eliminando las interferencias entre estados microscópicamente diferentes.

## Conclusiones

Existen propiedades de la mecánica cuántica que pueden representarse como propiedades de la mecánica clásica, aunque solo de una manera aproximada. Esto sucede cuando las propiedades clásicas se corresponden con regiones del espacio de las fases suficientemente pequeñas para una razonable descripción clásica, pero con un volumen mucho mayor que la constante de Planck.

Pero la combinación lineal de dos estados cuánticos que se corresponden con dos estados clásicos no puede interpretarse en términos de la estadística de la mecánica clásica. Esto es debido a la aparición de términos de interferencia en las probabilidades cuánticas. Estos términos de interferencia son eliminados por la decoherencia.

Hemos visto en este trabajo cuales son las condiciones que hacen posible compatibilizar las descripciones clásicas y cuánticas.

Por un lado es necesario que sea razonable aproximar un estado clásico, que se representa con un punto en el espacio de las fases, con una región de ese espacio, pequeña por comparación con los valores involucrados de posición y momento lineal, pero grande por comparación con la constante de Planck.

Por otra parte, también es necesario que en la descripción cuántica haya un número muy grande de variables. Unas pocas de ellas son las que se corresponden con la descripción clásica,

pero las demás, irrelevantes para la descripción clásica, son las que se encargan de eliminar la interferencia en las variables macroscópicas, y de que sea posible interpretar la estadística cuántica como una estadística clásica.

Estrictamente, la mecánica cuántica no puede reducirse a la clásica, ni al revés, porque son teorías diferentes. No obstante, hemos visto en este trabajo cuales son las condiciones para establecer correspondencias aproximadas entre una y otra teoría.

---

### Nota

<sup>1</sup> Para que sea posible considerar simultáneamente las propiedades cuánticas representadas por los proyectores  $\hat{\Pi}_{C_1}$  y  $\hat{\Pi}_{C_2}$ , estas propiedades deben formar parte de un contexto. Los proyectores deben entonces conmutar entre sí, lo que se consigue si las regiones clásicas  $C_1$  y  $C_2$  están suficientemente separadas.

### Bibliografía

- [1] G. Birkhoff and J. Von Neumann, *Ann. Math.* **37**, 823 (1936)
- [2] L. Ballentine, *Am. J. Phys.* **54**, 883-889 (1986)
- [3] L. Ballentine, *Quantum Mechanics, A Modern Development*. World Scientific (1988)
- [4] L. Landau, E. Lifshitz, *Mecánica Cuántica (Teoría no relativista)*. Editorial Reverté (1967)
- [5] R. Omnès, *Phys. Rev. A*, **56**, 3383-3393 (1997)
- [6] R. Omnès, *Phys. Rev. A*, **65**, 052119 (2002)
- [7] C. Fefferman, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **9**, 129-205 (1983)
- [8] L. Hörmander, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **32**, 359-443 (1979)
- [9] R. Omnès, *J. Math. Phys.* **38**, 697-707 (1997)