EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVIII JORNADAS
VOLUMEN 14 (2008)

Horacio Faas
Hernán Severgnini

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Incidencia del concepto de información en ciencias

Osvaldo M. Moreschi[*]

1. Introducción

A lo largo de la historia de la ciencia ha habido conceptos que han contribuido significativamente al entendimiento de fenómenos y situaciones permitidas y prohibidas. Por ejemplo, el concepto de *energía* y *energía interna* ha sido de vital importancia para la formulación del *primer principio de la termodinámica*. Se suele asociar este principio a la *imposibilidad de construir un móvil perpetuo de primera especie*.

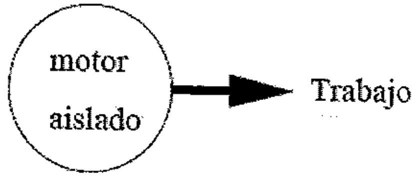

Figura 1. Esquema de un móvil perpetuo de primera especie.

Se denomina así [Isn72] a un dispositivo que realiza procesos cíclicos cuyo único efecto exterior fuera la realización de un cierto trabajo positivo.

Otro concepto importante ha sido el de *entropía*, que permite reformular el *segundo principio de la termodinámica*. Éste a su vez se lo suele asociar a la *imposibilidad de construir un móvil perpetuo de segunda especie*.

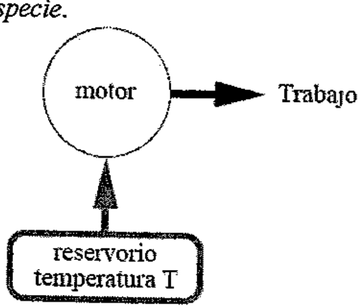

Figura 2. Esquema de un móvil perpetuo de segunda especie.

Se denomina así a un dispositivo que realiza procesos cíclicos cuyo único efecto exterior es la realización de un cierto trabajo positivo y la absorción de calor de una única fuente.

En este trabajo deseamos enfatizar la importancia que tiene el concepto de *medida de información* para el entendimiento de diversas situaciones; tanto en física como en aspectos fundamentales del conocimiento científico.

[*] FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba. Investigador del CONICET moreschi@fis.uncor.edu

2. Medida de información

La palabra *información* puede ser usada para denotar tanto el contenido de un mensaje como la extensión del mismo. Nosotros nos concentraremos en este segundo sentido del término; más específicamente nos preocuparemos por el concepto denominado *medida de información.*

La noción de medida de información que usaremos proviene de un trabajo de Claude Elwood Shannon[Sha59] publicado inicialmente en "The Bell System Technical Journal", Vol. 27, pp.379-423, 623-656, July, October, 1948. En este trabajo Shannon estudiaba la posibilidad de asignar una medida de cuanto sería la libertad de "elección" en la selección de un evento o de cuanto sería la incertidumbre del resultado de un evento donde los posibles eventos $i = 1, .., n$ tiene probabilidades p_i de ocurrir. Él propuso que si hay tal medida $H(p_1, ..., p_n)$, es razonable requerirle que satisfaga las siguientes propiedades:

1. H debe ser continua en los argumentos p_i.
2. Si todos los p_i son iguales, $p_i = \frac{1}{n}$, entonces H debe ser una función monotónicamente creciente de n. Con eventos que son igualmente probables hay más elección, o incertidumbre, cuando hay más eventos posibles.
3. Si una elección se ramifica o divide en dos elecciones sucesivas, la medida H original debería ser la suma pesada de los valores individuales de H.

Este último punto se puede clarificar con un ejemplo. Si inicialmente se tiene dos eventos con probabilidad $p_1 = p_2 = ½$; se tendrá una medida $H(½ , ½)$. Si posteriormente el segundo evento se ramifica o divide en dos subeventos con probabilidades $p_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}$ y $p_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ (de tal forma que $p_2 + p_3 = \frac{1}{2}$ y $p_1 + p_2 + p_3 = 1$); se requiere que

$$H(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}) = H(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}H(\frac{2}{3},\frac{1}{3}). \tag{1}$$

El coeficiente ½ se debe a que el segundo conjunto de elecciones ocurre la mitad de las veces. Con este requerimiento Shannon prueba

Teorema 2.1 La única medida H que satisface las tres condiciones anteriores es de la forma

$$H = -K\sum_{i}^{n} p_i \ln p_i; \tag{2}$$

donde K es una constante positiva.

Reconociendo la semejanza con la entropía termodinámica, Shannon llamó a H la entropía de la distribución de probabilidades $p_1, ..., p_n$.

Esta medida de información tiene varias propiedades[Sha59] interesantes; alguna de ellas son:

• $H = 0$ si y sólo si todas las p_i se anulan excepto una que tiene el valor unidad. O sea, sólo cuando se tiene certeza del resultado se tiene que H se anula. De otra forma H es positiva.

• Para un dado n, H/K es máximo e igual a $\ln n$ cuando todas las p_i son iguales (o sea $p_i = \frac{1}{n}$). Esta es intuitivamente la situación de mayor incerteza.

• Sean dos eventos x e y, con la probabilidad conjunta $p(i, j)$ que ocurra i para el primero y j para el segundo. Si los eventos son independientes, se tiene $p(i, j) = p_x(i)p_y(j)$ y además

$$H(x, y) = H(x) + H(y). \tag{3}$$

Si los eventos no son independiente se tiene[Sha59]

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y). \tag{4}$$

En lo que sigue mostraremos una serie de situaciones en las cuales el concepto de medida de información tiene aplicación.

3. Aplicación al lenguaje escrito

El alfabeto castellano tiene 27 letras cuando se consideran solamente los caracteres simples. Tomando en cuenta otros 4 símbolos de puntuación (, |; |.| :), el espacio y el cambio de línea, se completa un conjunto de 33 caracteres. Aplicando la medida de información al siguiente escrito, que aparece en el Martín Fierro:

Hay hombres que de su cencia
tienen la cabeza llena;
hay sabios de todas menas,
mas digo, sin ser muy ducho:
es mejor que aprender mucho
el aprender cosas buenas.

y tratándolo como si cada carácter tuviese la misma probabilidad de aparecer que cualquier otro, independientemente de la aparición de los otros, se obtiene que su medida de información está dado por

$$I = 162 \times \ln_2 33 \text{ bits} = 817{,}2 \text{ bits}; \tag{5}$$

donde hemos elegido medir la medida de información en bits usando la constante $K = \frac{1}{\ln 2}$, que es equivalente a usar el logaritmo en base 2. Se puede llegar a esta expresión de dos formas. La más rápida es notar que estamos asumiendo que la elección de cada caracter es independiente de los otros; por lo que en cada elección se tiene una medida de información dada por $h = -\sum_{i=1}^{33} \frac{1}{33} \ln_2 \frac{1}{33} = \ln_2 33$ Luego como hay 162 eventos independientes, y debido a la propiedad de aditividad (3) se deduce (5).

La otra forma de llegar a (5), es partiendo de (2) y notar que la probabilidad para cada mensaje de longitud 162 es $p_i = \left(\frac{1}{33}\right)^{162}$ y que hay $N = 33^{162}$ posibles eventos; luego la aplicación de (2) da (5).

Tal vez conviene remarcar que si bien la noción de bit invita a pensar en múltiplos enteros de ellos, la fórmula de la medida de información en general nos da un número real; como en este ejemplo.

Si se toma en cuenta más estructura del lenguaje, las probabilidades que aparecen en el cálculo de I son menores, por lo que el valor de I sería menor. En otras palabras el cálculo que hemos hecho es una cota máxima de la medida de información contenida en el trozo de texto.

4. Información en termodinámica

Puede resultar curioso que esta noción de medida de información, que inicialmente apareció como un concepto conveniente en el estudio de la teoría de comunicaciones, también tiene gran utilidad en el estudio de la física estadística.

La física estadística o mecánica estadística tiene por objeto explicar los sistemas termodinámicos partiendo del conocimiento de la estructura microscópica del sistema bajo estudio.

La entropía es una función termodinámica que permite entender, desde un punto de vista microscópico, el segundo principio de la termodinámica.

Lo notable, es que es posible entender a la entropía como la medida de información necesaria para caracterizar al estado estadístico del sistema. O sea si denotamos con S la entropía del sistema bajo estudio: que estará determinada por una distribución de probabilidad de encontrar al sistema en un estado microscópico dado; distribución que por otro lado tiene asociada una medida de información I; entonces se encuentra que

$$S = I. \tag{6}$$

Además, usando argumentos naturales de la teoría de información se puede determinar la distribución de probabilidad para cada sistema. En realidad, como en la física aparecen unidades termodinámicas, en realidad en vez de usar la última igualdad, más precisamente se usa

$$S = k_B \ln(2)\, I; \tag{7}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann e I se asume en bits.

Es posible entonces leer la relación entre entropía e información de derecha a izquierda; esto es, como todo sistema termodinámico tiene asociado una entropía, entonces también tiene asociada una medida de información termodinámica tal que $I = S$ (en unidades de bits).

Para tomar una noción de esta medida, apliquémosla a algo familiar, como por ejemplo, a un metro cúbico de aire, en condiciones normales. Podemos modelar este sistema por un metro cúbico de un gas ideal monoatómico, con la masa del oxígeno molecular a 300°K y una atmósfera de presión. La ecuación de estado de los gases ideales nos permite estimar que el número de moléculas en estas condiciones es aproximadamente $N = 2{,}4 \times 10^{23}$. Usando este modelo, la medida de información de este sistema se puede calcular usando la ecuación de Sackur-Tetrode[Hua87] y se obtiene

$$I = S = \frac{1}{\ln 2}\left\{\frac{3}{2}N - N\ln\left[\frac{N}{V}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}\right)\right]\right\} \approx 6 \times 10^{26}\text{bits}; \tag{8}$$

donde V es el volumen, T la temperatura y $\hbar$ la constante de Planck.

5. Medida de información de los agujeros negros

El nombre de agujero negro se adjudica a una concentración de materia lo suficientemente compacta, tal que ni la luz puede escapar de este sistema, debido a los fuertes campos gravitatorios.

Como la luz en el vacío tiene la velocidad máxima de las interacciones, se deduce que no sólo la luz, pero ningún objeto material o campo puede escapar de un agujero negro.

Un agujero negro está caracterizado por cantidades globales del mismo, como por ejemplo su masa. Si uno arroja un objeto a un agujero negro; digamos una silla, el agujero negro incrementará su masa; pero no podremos extraer información sobre el objeto. Esto es, luego que arrojamos la silla, no podremos obtener información sobre su color, o si estaba tapizada o no. O sea, se produce una pérdida de información.

Haciendo uso de esta pérdida de información, para el sistema fuera del agujero negro, cuando cae una partícula elemental al mismo, J.D. Bekenstein[Bek73] realizó una estimación de la *entropía de un agujero negro*.

Posteriormente, S. Hawking publica un trabajo en el que investiga la incidencia de la naturaleza cuántica de los agujeros negros; donde descubre que éstos deben emitir radiación y que esta radiación está termalizada. La temperatura de la misma está determinada por su masa y está dada por

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B G M}, \tag{9}$$

donde c es la velocidad máxima de las interacciones, G es la constante de la gravitación y M la masa del agujero negro. Los cálculos de Hawking corroboraron las estimaciones de Bekenstein estableciendo que la entropía de un agujero negro (sin carga eléctrica ni momento angular) está dada (en bits) por

$$S = \frac{4\pi l_B G M^2}{\hbar c}\left(\frac{1}{k_B \ln 2}\right) \tag{10}$$

Para el caso de un agujero negro con la masa del sol, esta relación da una medida de información de

$$I_{\text{a.n. sol}} = 1.5 \times 10^{77}\text{bits}. \tag{11}$$

6. Información en todo sistema finito

Tomando a la entropía de un agujero negro como una cantidad física real se llega a la formulación del llamado segundo *principio generalizado de la termodinámica*. Este afirma que la entropía de un sistema compuesto por un agujero negro más materia en su exterior, no puede decrecer con el tiempo.

Existen argumentos en la literatura[Bek81] que indican que si esto es así, entonces dado un sistema de dimensiones R con energía E, su entropía no puede exceder el siguiente valor

$$S \leq \frac{2\pi k_B R E}{\hbar c}. \tag{12}$$

Luego, identificando la entropía con la medida de información del sistema, se concluye que para cada sistema existe una cota máxima de la cantidad de información que puede contener. Por ejemplo, para un cuerpo de 100kg de masa de dimensiones no mayores que 1 metro, su medida de información debe ser menor que

$$I_{100\text{kg},1\text{m}} \leq \frac{2\pi R E}{\ln(2)\hbar c} = \frac{2\pi R M c}{\ln(2)\hbar} \approx 2.6 \times 10^{45}\text{bits} \tag{13}$$

En otra oportunidad[Mor99] hemos hecho uso del siguiente principio:

P 6.1 Todo sistema finito puede ser descripto completamente (o equivalentemente puede ser representado perfectamente) por medio de una expresión finita de un lenguaje formal.

Notemos que la desigualdad anterior da soporte a este principio.

7. Información y principio de causalidad

Es posible formular el principio de causalidad en término de la noción de información, de la siguiente manera[Mor99]

P 7 1 La información asociada a cualquier región finita del espaciotiempo, sólo puede depender de la información asociada al pasado causal de la misma.

Donde la noción de pasado causal está adaptada a la estructura del espaciotiempo en el marco teórico que se esté empleando. Por ejemplo, en un espaciotiempo discreto[Mor99], se usará la estructura causal del mismo.

8. Información en cosmología

La aplicación del enunciado anterior del principio de causalidad a un universo con una singularidad inicial, tiene implicaciones importantes. Consideraciones generales[Mor99] muestran que la densidad de entropía en un universo tal, debe tender a cero a medida que uno se acerca a la singularidad inicial. Esto como consecuencia implicaría que desde el punto de vista de la física estadística, el universo debería asintóticamente, para tiempos tempranos, tener un comportamiento homogéneo e isotrópico.

El hecho que nuestro universo muestra precisamente dicho comportamiento, nos induce a tomar la existencia de la singularidad inicial y el principio antes mencionado como reales.

9. Información y la concepción de los números reales

Es usual hacer modelos matemáticos de la realidad. Por ejemplo, las formulaciones del espaciotiempo de la relatividad general, es en término de variedades diferenciables con estructura métrica. La definición de variedades diferenciables, se basa en conceptos básicos como el de función de variable real. Es así que la noción de la recta real se emplea en casi cualquier descripción matemática de sistemas físicos.

Sin embargo, es interesante señalar la siguiente observación. Si asumimos, como se mencionó en la sección anterior, que vivimos en un universo con una singularidad inicial; tenemos como consecuencia que el universo observable, o nuestro pasado causal, es siempre finito. O sea que si quisiésemos utilizar toda la masa cósmica disponible para un determinado fin; esta masa tendría un valor muy grande pero sería finito. Por ejemplo, podríamos desear representar físicamente un número irracional, digamos el número π. Entonces, nos encontramos ante la situación que si bien la definición de un número como π se puede expresar por una sentencia finita de un lenguaje formal; su representación explícita implica un número infinito de dígitos. Pero como sólo disponemos de una cantidad finita de información, dada la desigualdad (13), concluimos que la representación física de un número irracional no existe.

Esto más bien invitaría a intentar construir una representación de la realidad, sólo en término de entidades matemáticas que tengan una representación física completa real.

10. Información en la física de campos cuánticos

Existen en la física tres constantes universales que en otra oportunidad hemos usado para caracterizar los distintos marcos teóricos. Ellas son, la velocidad máxima de las interacciones [c], la constante de Planck [h] y la constante de la gravitación [G]. Es posible hacer una combinación algebraica de estas constantes que permiten definir una longitud característica y un tiempo característico. Más concretamente, se define la distancia de Planck por $l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.616 \times 10^{-35}\mathrm{m}$ y el tiempo de Planck por $t_P = \frac{l_P}{c} = 5,391 \times 10^{-44}\mathrm{s}$, donde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Normalmente se entiende que si se quisiese hacer experimentos que resolviesen longitudes menores a la distancia de Planck, implicarían incertidumbres en los momentos que implicarían una incertidumbre en la curvatura, lo que a su vez afectaría a la noción de espacio tiempo al punto de impedir resoluciones menores a la escala de Planck. Este efecto combinado de la física gravitatoria y la física cuántica que aparenta imponer un límite de pequeñez a las escalas de distancia (y tiempo), nos invita a pensar que para todo campo físico debe existir una cota superior para la densidad de información que puedan albergar los campos físicos.

Si bien es posible que la estructura microscópica del espacio-tiempo sea discreta; es posible tratar la posibilidad de que haya estas cotas en los campos, como se ha estudiado en la literatura[Kem04a, Kem04b] aún en el límite de una descripción continua del mismo.

Una consecuencia importante de admitir este límite en la densidad de la información que un campo pueda albergar, es que cuando expresados en término de sus componentes energéticas, se debería tener un límite máximo de las mismas; lo que en la literatura se lo suele llamar 'ultraviolet cutoff'. Al usar este límite máximo con la técnica de muestreo; se deduce que se puede reproducir completamente el valor del campo en todo punto, haciendo uso de su valor en una red de puntos finitos. Esta relación a su vez provee de una conexión natural entre una descripción de campos en un espacio continuo con la descripción de campos (equivalentes) en espacios discretos; que tuviesen existencia sólo en los puntos de la red antes mencionada. En esta visión, el espacio continuo sería la extrapolación no real del espacio discreto de existencia física real.

11. Información en lógica

Brevemente señalamos aquí que la noción de información también tiene implicaciones en la lógica formal. Por ejemplo, hemos notado en otra oportunidad[Mor06] que según Chaitin[Cha82b] el teorema de Gödel[Göd62] se puede entender en término del concepto de medida de información. Básicamente, Chaitin afirma que si un teorema contiene más información que un dado conjunto de axiomas, entonces es imposible que se deduzca el teorema de los axiomas.

12. Información en ciencias de la computación

Nuevamente G.J. Chaitin está asociado al trabajo de relacionar la idea de longitud de un programa con la teoría de información[Cha75, Cha77, Cha82a]. Esta línea de pensamiento está asociado a lo que se conoce como teoría de información algorítmica, que Chaitin asocia a los nombres de R.J. Solomonoff y A.N. Kolmogorov.

Si bien en la teoría de información algorítmica el concepto primario es el de *contenido de información*; que tiene el objeto de medir cuán difícil es la tarea de especificar el cálculo de un objeto; la definición del contenido de información *I(x)* de una lista binaria *x* se define como el tamaño en bits del programa más pequeño, para una computadora canónica universal *U*, que calcule *x*. Por falta de espacio no podemos entrar en los detalles de la definición; para ello ver por ejemplo [Cha82a]; sin embargo deseamos enfatizar que esta definición está relacionada con la noción de medida de información.

La versatilidad de este concepto ha hecho que Chaitin haya aplicado el mismo a temas como: la definición matemática de la vida[Cha79], la realidad de los números reales y epistemología como teoría de información entre otros.

13. Información en el biología

Unos de los avances más extraordinarios en el ámbito de la biología ha sido el análisis del genoma humano. Sin entrar en detalles del genoma humano, tomemos sólo en cuenta que el tamaño del genoma se puede caracterizar por el número total de pares de bases; que en el caso del humano es de aproximadamente 3×10^9 bp. Como hay 4 tipos de bases disponibles en el ADN; se encuentra que una estimación grosera de la medida de información del genoma es aproximadamente

$$I_g \approx \ln_2 4^{3\times 10^9} \approx 6 \times 10^9 \approx 750\text{Mb}, \tag{14}$$

donde Mb significa mega-bytes (recordemos que un byte son ocho bits). Este número, que puede impresionar por lo pequeño que es, nos podría indicar la eficiencia biológica en codificar la información necesaria para la creación de un ser tan complejo como el ser humano.

14. Información y limitaciones de nuestro entendimiento

Una curiosidad de la observación anterior sobre el genoma humano, es que si bien la cantidad de información contenida en el genoma, es tan pequeña; con dicha información se crea un cuerpo con funcionalidad tan compleja, y en particular un cerebro que aparenta manejar mucha más información que la medida asociada al genoma.

Sin embargo, debido a las consideraciones anteriores resulta claro que la cantidad de información que puede manejar nuestro cerebro en un estado dado, es necesariamente finita.

Para hacer una estimación muy aproximada de la cantidad de información que podría manejar un cerebro humano en un instante tomaremos en cuenta lo siguiente. En el cerebro hay aproximadamente 10^{11} neuronas; para trabajar con una cota superior tomemos 10^{12}. Cada una de ellas tiene aproximadamente unas 7000 conexiones sinápticas. Se ha estimado que un niño de 3 años tiene aproximadamente 10^{16} sinapsis. Este número declina con la edad estabilizándose en alrededor de 10^{15} sinapsis. Estas son probablemente cotas superiores.

Cada neurona transmite información a otras por medio del llamado potencial de acción[LBM$^+$05]. Este potencial puede tener distintas frecuencias; pero en algunos estudios se ha medido capacidades de hasta[PR00] 102 bits/segundo.

Considerando entonces el estado típico del cerebro como aquel que se puede lograr en el lapso de tiempo de 1 segundo llegamos a la estimación de que la cantidad de información que puede manejar el cerebro en un estado dado es de aproximadamente

$$I_c \approx 102 \times 10^{12}\text{bits} \approx 13 \times 10^{12}\text{b} \approx 13 \times 10^6\text{Mb} \approx 13000\text{Gb}, \tag{15}$$

donde hemos expresado la medida en término de bits, bytes, megabytes y gigabytes respectivamente.

En realidad el valor del número encontrado no es muy importante. Tampoco presentamos esta estimación como muy realista. Lo que probablemente debería enfatizarse, es que con este ejercicio hemos encontrado un número que pareciese ser no de magnitudes astronómicas, sino más bien ponderable en término de lo que estamos acostumbrados con la tecnología actual en el ámbito de las computadoras.

Pero más allá del valor encontrado, lo que probablemente se debería enfatizar, es que nuestro entendimiento está limitado por la cantidad máxima de información que pueda manejar el cerebro en un estado dado.

Si queremos ser extremos, podríamos multiplicar el número anterior *Ic* por la edad de un individuo, expresada en segundos, para obtener una cota superior a la medida de información para el estado de su cerebro. De este modo se tendría un número mayor, pero todavía finito.

Podemos remarcar esto en forma de un principio:

P 14.1 Sin importar en qué estado de la evolución biológica se encuentre, todo ser vivo tiene una capacidad finita de entendimiento. Más concretamente, siempre existirá un sistema o situación cuya descripción acabada emplee mayor cantidad de información que la que puede manejar el ser vivo.

15. Comentarios finales

En lo anterior hemos mencionado sólo algunas de las aplicaciones que puede tener la medida de información. En cada caso es posible perfeccionar tal aplicación; pero no hemos deseado entrar en demasiado detalle por limitaciones de espacio.

Nuestra intención ha sido el llamar la atención sobre este concepto que entendemos puede clarificar una variedad de situaciones. En particular en física y en cuestiones fundamentales de las ciencias.

Por ejemplo, Chaitin argumenta[Cha03]: "¿Qué es una ley de la naturaleza? De acuerdo a Leibniz, una teoría debe ser más sencilla que los datos que explica. ¡Pues si una ley física puede ser tan complicada como los datos experimentales que explica, entonces siempre hay una ley y la noción de ley se torna sin significado!" Si bien en este pasaje se acentúa la noción de complejidad; podemos reescribir este pasaje usando medida de información. La versión abreviada diría:

Cualquier medida de información de una ley debería ser menor que la medida de información aplicada a los datos experimentales que pretende explicar.

Si bien existen nociones de medida de información que han sido construidas con motivaciones específicas; la medida de Shannon presenta una herramienta de aplicación muy extendida que nos permite un primer análisis de casi cualquier sistema. Entendemos que probablemente no se le esté dando el lugar que merece.

Agradecimientos

Agradecemos a un Evaluador anónimo por correcciones, críticas y sugerencias que aportaron a un mejoramiento de este trabajo.

Referencias

[Bek73] J.D. Bekenstein. Black holes and entropy. Phys.Rev D, 7:2333, 1973

[Bek81] J.D. Bekenstein. Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems. Phys.Rev.D, 23:287, 1981

[Cha75] Gregory J. Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory. J. of ACM, 22.329–340, 1975.

[Cha77] Gregory J. Chaitin. Algorithmic information theory. IBM J. of Research and Development, 21:350–359, 1977

[Cha79] Gregory J. Chaitin. Toward a mathematical definition of "life". In R.D.Levine and M. Tribus, editors, The maximum entropy formalism, pages 477–498. MIT Press, 1979.

[Cha82a] Gregory J. Chaitin. Algorithmic information theory. In Encyclopedia of Statistical Sciences, volume 1, pages 38–41. Wiley, 1982.

[Cha82b] Gregory J. Chaitin. Gödel's theorem and information. Int.J. of Th.Phys., 21:941–954, 1982.

[Cha03] Gregory J. Chaitin. From philosophy to program size. key ideas and methods. In Lecture Notes on Algorithmic Information Theory from the 8th Estonian Winter School in Computer Science, EWSCS'03. 2003.

[Göd62] Kurt Gödel. On Formally Undecidable Propositions Of Principia Mathematica And Related Systems. Basic Books, Inc., New York, 1962. Translated by B. Meltzer, with Introduction by R.B. Braithwaite.

[Hua87] K. Huang. Statistical Mechanics. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1987.

[Isn72] Teófilo Isnardi. Termodinámica. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1972.

[Kem04a] Achim Kempf. Covarian information-density cutoff in curved space-time. Phys.Rev.Lett., 92:221301–221301, 2004.

[Kem04b] Achim Kempf. Fields with finite information density. Phys.Rev.D, 69:124014–1–124014–15, 2004.

[LBM+05] Lodish, Bert, Matsudaira, Kaiser, Kriger, Scott, Zipursky, and Darnell. Biología Celular y Molecular. Editorial Médica Panamericana, 5ta edición edition, 2005.

[Mor99] Osvaldo M. Moreschi. Sobre la posible naturaleza discreta del espaciotiempo y sus implicaciones en cosmología. Epistemología e Historia de la Ciencia, 5(317), 1999.

[Mor06] Osvaldo M. Moreschi. Implicaciones del teorema de Gödel en ciencias. Epistemología e Historia de la Ciencia, 12:426–432, 2006.

[PR00] Reinagel Pamela and Reid Clay R. Temporal coding of visual information in the thalamus. The Journal of Neuroscience, 20:5392–5400, 2000.

[Sha59] Claude E. Shannon. The mathematical theory of communication. In C.E. Shannon and W. Weaver, editors, The Mathematical Theory of Communication, pages 3–91. The University of Illinois Press, 1959.