EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVIII JORNADAS

VOLUMEN 14 (2008)

Horacio Faas
Hernán Severgnini

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Contexto de historias en la teoría cuántica

Leonardo Vanni[*] *y Roberto Laura*[†]

En la teoría cuántica, un *contexto* es un conjunto de propiedades que pueden considerarse simultáneamente en la descripción de un sistema. Las propiedades de un contexto forman un reticulado distributivo, y en cada estado del sistema poseen probabilidades bien definidas.

Presentamos en este trabajo la noción de *contexto de historias*, una descripción de un sistema físico que puede incluir propiedades a distintos tiempos, a las que puede aplicarse la lógica convencional y asignarse probabilidades bien definidas.
Postulamos un principio de contextualizad de historias y lo utilizamos para analizar el proceso de medición y el experimento de la doble ranura.

Contextos en la teoría cuántica

Con cada sistema físico, se asocia un espacio de Hilbert H. Todas las posibles propiedades del sistema se representan con subespacios de ese espacio de Hilbert. Dada una propiedad p que se representa con un subespacio H_p, existe un proyector $\hat{\Pi}_p$ tal que $H_p = \hat{\Pi}_p H$. Entonces, una propiedad p puede también representarse con el proyector $\hat{\Pi}_p$.

El universo del discurso acerca del sistema se construye con operaciones y relaciones definidas sobre las propiedades. Si p_1 y p_2 son dos propiedades con subespacios H_{p_1} y H_{p_2}, la propiedad p_1 *implica* la propiedad p_2 ($p_1 \Rightarrow p_2$) si $H_{p_1} \subset H_{p_2}$. La *conjunción* $p_1 \wedge p_2$ es una propiedad que se representa con la intersección $H_{p_1 \wedge p_2} = H_{p_1} \cap H_{p_2}$. La *disyunción* $p_1 \vee p_2$ se define con la suma directa $H_{p_1 \vee p_2} = H_{p_1} \oplus H_{p_2}$. La *negación* $\neg p_1$ se representa con $H_{p_1}^{\perp}$, que es el complemento ortogonal del subespacio H_{p_1}.

No todas las propiedades pueden considerarse simultáneamente en una descripción del sistema físico. Descripciones diferentes involucran distintos conjuntos de propiedades.

Cada descripción "permitida" por la teoría se define a partir de un conjunto de propiedades p_j ($j \in \Sigma$) con proyectores $\hat{\Pi}_{p_j}$ que verifican

$$\hat{\Pi}_{p_i}\hat{\Pi}_{p_j} = \delta_{ij}\hat{\Pi}_{p_i}, \qquad \sum_{i\in\Sigma}\hat{\Pi}_{p_i} = \hat{I}.$$

Por disyunción de las p_j se obtiene un conjunto de propiedades que se denomina *contexto*, y que resulta un reticulado distributivo y ortocomplementado [1].

El estado de un sistema físico en un tiempo t, se representa por un vector $|\varphi_t\rangle$ del espacio de Hilbert H. La *probabilidad* de una propiedad p en el estado $|\varphi_t\rangle$ se define con la regla de Born

$$\Pr_{\varphi_t}(p) = \langle \varphi_t | \hat{\Pi}_p | \varphi_t \rangle$$

[*] Instituto de Astronomía y Física del Espacio (UBA – CONICET)
[†] Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario), Instituto de Física Rosario (CONICET – UNR)

Puede verificarse que esta es una buena definición de probabilidad para el conjunto de propiedades que pertenecen a un contexto[2], ya que se trata de una cantidad positiva, que asigna el valor uno a la propiedad universal, y fundamentalmente que verifica la propiedad aditiva para dos propiedades mutuamente excluyentes

$$\Pr(p_1 \vee p_2) = \Pr(p_1) + \Pr(p_2) \text{ si } p_1 \wedge p_2 = \phi .$$

Cada contexto es entonces una posible descripción del sistema, en términos de un conjunto restringido de propiedades a las que pueden aplicarse las reglas de la lógica Booleana convencional.

La teoría cuántica no admite un universo del discurso en el que se combinen propiedades de distintos contextos. Esta contextualidad, postulada en la teoría, es consistente con la evidencia experimental. Así por ejemplo los posibles valores del spin del electrón en una dirección del espacio pueden explorarse experimentalmente por medio de un campo magnético en esa dirección. Los valores simultáneos del spin en dos direcciones diferentes nunca podrían manifestarse experimentalmente, ya que la superposición de dos campos magnéticos es un único campo en cierta dirección. Es el spin del electrón en la dirección del campo resultante lo que se pondrá a prueba, y no en las direcciones de los campos que se superponen.

Contextos de historias

En el conocido experimento de la doble rendija, se suele argumentar acerca de la posibilidad de que la partícula esté en una ranura determinada en el tiempo t_1, y que ocupe otra posición sobre una pantalla para el tiempo posterior t_2 [3]. También, en el análisis del proceso de medición, se debe relacionar una propiedad del sistema antes de la medición con una propiedad posterior del aparato. En ambos casos surge naturalmente la necesidad de un lenguaje que incluya propiedades asociadas con tiempos diferentes.

Presentaremos a continuación una generalización de la noción de contexto, que denominamos *contexto de historias*, y que nosotros hemos desarrollado para poder incorporar al lenguaje de la teoría cuántica conjunciones de propiedades a distintos tiempos, y poder asignarles probabilidades bien definidas.

Recordemos que en la teoría cuántica el tiempo aparece con la ecuación de Schrödinger, que gobierna la evolución temporal del estado de un sistema aislado. Resolviendo esta ecuación, se obtiene que el vector de estado a un tiempo t se relaciona con el vector de estado a otro tiempo t' por medio de la ecuación:

$$|\varphi_{t'}\rangle = \hat{U}(t',t)\,|\varphi_t\rangle ,$$

donde $\hat{U}(t',t)$ es el operador unitario de evolución entre los tiempos t y t'.

Consideremos la propiedad p con proyector $\hat{\Pi}_p$. Supongamos que el estado del sistema al tiempo t es tal que se verifica

$$\hat{\Pi}_p\,|\varphi_t\rangle = |\varphi_t\rangle$$

Podemos decir entonces que el sistema "posee" la propiedad p, porque su probabilidad calculada con la regla de Born es igual a uno:

$$\Pr(p) = \langle\varphi_t|\,\hat{\Pi}_p\,|\varphi_t\rangle = \langle\varphi_t|\varphi_t\rangle = 1 .$$

A partir de las ecuaciones (1) y (2) podemos demostrar que

$$|\varphi_{t'}\rangle = \hat{U}(t,t')|\varphi_t\rangle = \hat{U}(t,t')\hat{\Pi}_p|\varphi_t\rangle =$$
$$= \hat{U}(t,t')\hat{\Pi}_p\hat{U}^{-1}(t,t')\hat{U}(t,t')|\varphi_t\rangle = \hat{U}(t,t')\hat{\Pi}_p\hat{U}^{-1}(t,t')|\varphi_{t'}\rangle$$

de donde resulta que el estado $|\varphi_t\rangle$ "posee" la propiedad p' representada por el proyector

$$\hat{\Pi}_{p'} = \hat{U}(t,t')\hat{\Pi}_p\hat{U}^{-1}(t,t')\cdot$$

Esta última expresión permite "trasladar" una propiedad desde el tiempo t hasta el tiempo t'. Esta relación, que vincula la propiedad p al tiempo t, con la propiedad p' al tiempo t', resulta transitiva, reflexiva y simétrica. Se trata entonces de una *relación de equivalencia*, que indicaremos simbólicamente en la forma $(\hat{\Pi}_p,t)\equiv(\hat{\Pi}_{p'},t')$. En lo que sigue *designaremos con* $[\hat{\Pi}_p,t]$ *la clase de propiedades equivalentes a* $(\hat{\Pi}_p,t)$. Es esta relación de equivalencia entre propiedades a distintos tiempos la que nos permitirá más adelante definir lo que hemos denominado "contextos de historias", que son esencialmente universos de discurso que se obtienen a partir de conjunciones de propiedades a distintos tiempos. Consideraremos en particular las historias con propiedades a dos tiempos t_1 y t_2. La extensión al caso de historias con N tiempos distintos se puede hacer sin dificultad.

Sea un contexto de propiedades al tiempo t_1, generadas por ciertas propiedades atómicas $p_j^{(1)}$, con proyectores $\Pi_j^{(1)}$, que satisfacen

$$\hat{\Pi}_i^{(1)}\hat{\Pi}_j^{(1)} = \delta_{ij}\hat{\Pi}_i^{(1)}, \qquad \sum_i \hat{\Pi}_i^{(1)} = \hat{I}, \qquad i,j\in\sigma^{(1)}\cdot$$

Sea también otro contexto de propiedades al tiempo t_2, que son generadas por propiedades atómicas $p_\mu^{(2)}$ con proyectores $\Pi_\mu^{(2)}$ que satisfacen

$$\hat{\Pi}_\mu^{(2)}\hat{\Pi}_\nu^{(2)} = \delta_{\mu\nu}\hat{\Pi}_\mu^{(2)}, \qquad \sum_\mu \hat{\Pi}_\mu^{(2)} = \hat{I}, \qquad \mu,\nu\in\sigma^{(2)}\cdot$$

Queremos ahora construir un universo del discurso que incorpore expresiones tales como "la propiedad $p_j^{(1)}$ al tiempo t_1 *y también* la propiedad $p_\mu^{(2)}$ al tiempo t_2"

Para ello, notemos que las propiedades asociadas con los tiempos diferentes t_1 y t_2 pueden convertirse en propiedades asociadas a un único tiempo t_0, usando la relación de equivalencia definida anteriormente

$$(\hat{\Pi}_i^{(1)},t_1)\equiv(\hat{\Pi}_i^{(1,0)},t_0), \qquad \hat{\Pi}_i^{(1,0)} = \hat{U}(t_0,t_1)\hat{\Pi}_i^{(1)}\hat{U}^{-1}(t_0,t_1),$$
$$(\hat{\Pi}_\mu^{(2)},t_2)\equiv(\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)},t_0), \qquad \hat{\Pi}_\mu^{(2,0)} = \hat{U}(t_0,t_2)\hat{\Pi}_\mu^{(2)}\hat{U}^{-1}(t_0,t_2).$$

Nos parece entonces natural *definir* la conjunción entre las clases de equivalencia $[\hat{\Pi}_i^{(1)},t_1]$ y $[\hat{\Pi}_\mu^{(2)},t_2]$ como la clase de equivalencia de la propiedad que al tiempo único t_0 es la conjunción de las propiedades $p_i^{(1,0)}$ y $p_\mu^{(2,0)}$ representadas por los proyectores $\hat{\Pi}_i^{(1,0)}$ y $\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)}$. La conjunción de propiedades a un solo tiempo ya está definida en la teoría cuántica, para el caso de dos observables que conmutan. Si los proyectores $\hat{\Pi}_i^{(1,0)}$ y $\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)}$ conmutan entre sí, definimos entonces

$$h_{i\mu} = [\hat{\Pi}_i^{(1)},t_1]\wedge[\hat{\Pi}_\mu^{(2)},t_2] = [\hat{\Pi}_i^{(1,0)},t_0]\wedge[\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)},t_0] = [\hat{\Pi}_i^{(1,0)}\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)},t_0] = [\hat{\Pi}_{i\mu}^{(0)},t_0]$$

Esta última expresión define una *historia elemental* $h_{i\mu}$, que está caracterizada por la propiedad $p_i^{(1)}$ al tiempo t_1 y la propiedad $p_\mu^{(2)}$ al tiempo t_2. Esta historia también se puede caracterizar con la clase de equivalencia de la única propiedad $p_{i\mu}^{(0)}$, representada con el proyector $\hat{\Pi}_{i\mu}^{(0)} = \hat{\Pi}_i^{(1,0)}\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)}$ al tiempo t_0.

Si los proyectores $\hat{\Pi}_i^{(1,0)}$ y $\hat{\Pi}_\mu^{(2,0)}$ conmutan entre sí, es sencillo demostrar que se verifica

$$\hat{\Pi}_{i\mu}^{(0)}\hat{\Pi}_{j\nu}^{(0)} = \delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\hat{\Pi}_{i\mu}^{(0)}, \qquad \sum_{i,\mu}\hat{\Pi}_{i\mu}^{(0)} = \hat{I}$$

Vemos entonces que las *historias elementales* $h_{i\mu}$, representadas al tiempo t_0 por los proyectores $\hat{\Pi}_{i\mu}^{(0)}$, son las propiedades atómicas que generan un contexto usual, en el sentido en que fue definido en la sección anterior. La disyunción entre historias elementales distintas $h_{i\mu}$ y $h_{j\nu}$ la *definiremos* entonces en la siguiente forma:

$$h_{i\mu} \vee h_{j\nu} = [\Pi_{i\mu}^{(0)} + \Pi_{j\nu}^{(0)}, t_0]$$

Se obtiene así un reticulado distributivo y ortocomplementado, que hemos denominado *contexto de historias*.

Como ya vimos en la sección anterior, en la teoría cuántica hay un *principio de contextualidad* que solo considera como descripciones validas, a aquellas que involucran propiedades que están dentro de un mismo contexto. Por este principio, no es legítimo incluir en el discurso expresiones que combinen propiedades pertenecientes a contextos diferentes.

Nosotros vamos a extender este principio y *postularemos* un *principio de contextualidad de historias* , por el cual solo consideraremos validas las descripciones que involucren historias pertenecientes a un mismo contexto de historias. Para esta clase de historias, queda bien definido un lenguaje que las combina con las reglas de la lógica convencional, en la estructura de un reticulado distributivo y ortocomplementado.

En un contexto de historias, la regla de Born puede adaptarse para obtener probabilidades bien definidas. Si $|\varphi_0\rangle$ es el vector de estado del sistema para el tiempo t_0, y $\hat{\Pi}_h^{(0)}$ es el proyector que, también para el tiempo t_0, representa un elemento h del contexto de historias, hemos generalizado la regla de Born para *definir* la probabilidad de la historia h como

$$\Pr(h) = \langle\varphi_0|\hat{\Pi}_h^{(0)}|\varphi_0\rangle$$

Contextos de historias en el proceso de medición

Consideremos la descripción de una medición con la teoría cuántica, donde al sistema microscópico S a ser medido le corresponde un espacio de Hilbert H_S, y al aparato de medición M le corresponde un espacio H_M. Consideremos en el sistema H_S una base de vectores $|q_n\rangle$, que son los estados a ser medidos por el aparato, y ciertos estados $|a_n\rangle$ del aparato que corresponden a diferentes valores indicados en su display. El proceso de medición se representa con una transformación unitaria $\hat{U}$ en el espacio de Hilbert $H = H_S \otimes H_M$, que describe la evolución del sistema compuesto S+M entre un tiempo t_1 anterior a la medición y otro tiempo posterior t_2. La transformación unitaria verifica

$$|q_n\rangle|a_0\rangle \xrightarrow{\hat{U}} |q_n\rangle|a_n\rangle$$

En la expresión anterior $|a_0\rangle$ es el estado inicial del aparato, que es siempre el mismo (el valor cero del display), y los estados $|a_n\rangle$ del aparato M están en correspondencia con los estados $|q_n\rangle$ del sistema S[4].

Una adecuada descripción del proceso de medición se logra utilizando un contexto de historias construido con el procedimiento de la sección anterior, a partir de considerar como contexto de propiedades al tiempo t_1 los distintos estados $|q_n\rangle$ del sistema S, y como contexto de propiedades al tiempo t_2 a los estados $|a_n\rangle$ del aparato M.

Las propiedades al tiempo t_1 se representan con los proyectores $\hat{\Pi}_{q_n} = |q_n\rangle\langle q_n| \otimes \hat{I}_M$, mientras que las propiedades al tiempo t_2 se representan con los proyectores $\hat{\Pi}_{a_n} = \hat{I}_S \otimes |a_n\rangle\langle a_n|$.

El espacio de Hilbert relevante para representar el proceso de medición es el de los vectores de H que al tiempo t_1 son el producto tensorial de un vector arbitrario de H_S con el vector fijo $|a_0\rangle$ de H_M.

Cuando los proyectores de ambos contextos son trasladados al tiempo común t_1 se verifica que conmutan al actuar sobre estos vectores relevantes

$$[\hat{\Pi}_{q_n}, \hat{U}^{-1}\hat{\Pi}_{a_m}\hat{U}]\,|\varphi\rangle|a_0\rangle = 0 \,,\; |\varphi\rangle = \sum_n c_n |q_n\rangle$$

Consideremos ahora las historias elementales

$$h_{nm} = [\hat{\Pi}_{q_n}, t_1] \wedge [\hat{\Pi}_{a_m}, t_2] = [\hat{\Pi}_{q_n}\hat{U}^{-1}\hat{\Pi}_{a_m}\hat{U}, t_1] = [\delta_{nm}\hat{\Pi}_{q_n}, t_1] = [\hat{\Pi}^{(1)}_{h_{nm}}, t_1]$$

Las historias elementales h_{nm} son los átomos de un reticulado distributivo y ortocomplementado de historias. Este reticulado es un ejemplo de lo que hemos llamado un "contexto de historias".

Todo lo que necesitamos decir acerca del proceso de medición tiene cabida como un elemento de este reticulado, que es un lenguaje para representar propiedades del sistema antes de la medición (los posibles valores q_n de un observable Q), conjuntamente con propiedades del aparato después de la medición (los registros a_n en el display).

Con las relaciones de equivalencia nos ha sido posible trasladar las dos propiedades a tiempos distintos, que forman la historia h_{nm}, hasta el tiempo común t_1 donde esta historia se representa con el proyector $\hat{\Pi}^{(1)}_{h_{nm}} = \delta_{nm}\hat{\Pi}_{q_n}$.

Con nuestra generalización de la regla de Born se puede calcular la probabilidad de que el estado de S sea $|q_n\rangle$ al tiempo t_1 y que el estado de M sea $|a_m\rangle$ al tiempo t_2.

$$\Pr(h_{nm}) = Tr(\hat{\rho}_{t_1}\hat{\Pi}^{(1)}_{h_{nm}}) = \langle\varphi|\langle a_0|\delta_{nm}\hat{\Pi}_{q_n}|\varphi\rangle|a_0\rangle = \delta_{nm}|\langle q_n|\varphi\rangle|^2,$$

Como el contexto de historias es distributivo, las probabilidades condicionales están bien definidas. Para la probabilidad de que el display del aparato indique a_m después de la medición, *condicional* a que el sistema tenga la propiedad q_n antes de la medición, se obtiene

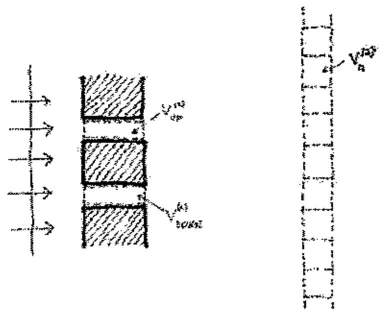
$$\Pr(A = a_m\ en\, t_2 \,|\, Q = q_n\ en\, t_1) = \frac{\Pr(h_{nm})}{\Pr(\vee_m h_{nm})} = \frac{\Pr(h_{nm})}{\sum_n \Pr(h_{nm})} = \delta_{nm}$$

Esta expresión da cuenta en términos de probabilidades de que la propiedad "$Q = q_n \; en \, t_1$" *implica* la propiedad "$A = a_m \; en \, t_2$".

Vemos entonces como el contexto de historias elegido es un lenguaje adecuado para dar cuenta de la lógica del proceso de medición.

Experimento de la doble rendija sin aparatos de medición

Consideremos una descripción ideal de un experimento de interferencia, en que una partícula pasa a través de una doble rendija. Indicaremos con t_1 un valor del tiempo en que la función de onda de la partícula está localizada en el interior de las ranuras, y con t_2 al tiempo en que en que la función de onda ha evolucionado y tiene un valor significativamente distinto de cero en una franja vertical situada a la derecha de las ranuras. Esta franja se indica con líneas de puntos en la figura.



No supondremos la presencia de ningún aparato de medición para registrar el paso de la partícula, pero queremos discutir la posibilidad de construir un universo del discurso en el que tenga sentido hablar de "la partícula en la ranura superior $V_{up}^{(1)}$ al tiempo t_1, y en la región $V_n^{(2)}$ al tiempo t_2" (ver figura). Mostraremos a continuación que es imposible incluir esta expresión en un contexto de historias, y por lo tanto la misma no forma parte del discurso que permite la teoría cuántica.

Para ello consideremos en primer lugar las propiedades relevantes para los dos tiempos. Para el tiempo t_1 son las propiedades $p_{up}^{(1)}$ y $p_{down}^{(1)}$ que corresponden a la partícula en la ranura superior o inferior, y que se representan con los proyectores

$$\hat{\Pi}_{up} = \int_{V_{up}^{(1)}} d^3r \, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|, \quad \hat{\Pi}_{down} = \int_{V_{down}^{(1)}} d^3r \, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}|$$

El espacio sobre el que interesa la acción de estos proyectores es el de las funciones de onda $|\varphi_{t_1}\rangle$ que al tiempo t_1 son distintas de cero solamente en el espacio interior de las ranuras. Para esta clase de funciones de onda, los dos proyectores resultan ortogonales y completos, ya que verifican

$$\hat{\Pi}_{up}\hat{\Pi}_{down} = \hat{\Pi}_{down}\hat{\Pi}_{up} = 0, \qquad \hat{\Pi}_{up} + \hat{\Pi}_{down} = \hat{I}$$

Para el tiempo t_2 serán necesarias las propiedades $p_n^{(2)}$ que corresponden a la partícula en alguna de las regiones $V_n^{(2)}$, representadas por los proyectores

$$\hat{\Pi}_n = \int_{V_n^{(2)}} d^3r \,|\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|,$$

En el tiempo t_2 la clase de funciones de onda relevantes toman valores no nulos solamente en la franja vertical que se indica en la figura. Para estas funciones de onda los proyectores $\hat{\Pi}_n$ forman un sistema ortogonal y completo

$$\hat{\Pi}_n \hat{\Pi}_{n'} = \delta_{nn'} \hat{\Pi}_n, \qquad \sum_n \hat{\Pi}_n = \hat{I}$$

Veremos que los proyectores correspondientes a las ranuras y los que corresponden a las regiones de la franja vertical, no conmutan al ser trasladados a un tiempo común.

Los proyectores, trasladados al tiempo común t_1, se transforman en

$$\hat{\Pi}_{up}^{(1)} = \hat{\Pi}_{up}, \qquad \hat{\Pi}_{down}^{(1)} = \hat{\Pi}_{down}, \qquad \hat{\Pi}_n^{(1)} = \hat{U}^{-1}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_n \hat{U}(t_2,t_1),$$

donde $U(t_2,t_1)$ es el operador unitario que convierte el vector de estado al tiempo t_1 en el vector de estado al tiempo t_2 ($\hat{U}(t_2,t_1)|\varphi_{t_1}\rangle = |\varphi_{t_2}\rangle$).

Analicemos en primer lugar

$$\Pi_{up}^{(1)}\Pi_n^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle = \hat{\Pi}_{up}\hat{U}^{-1}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_n \hat{U}(t_2,t_1)|\varphi_{t_1}\rangle = \hat{\Pi}_{up}\hat{U}^{-1}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_n|\varphi_{t_2}\rangle$$

Al obtener la función de onda $|\varphi_{t_2}\rangle$ a partir de $|\varphi_{t_1}\rangle$ usando la ecuación de Schrödinger, se encuentra que $|\varphi_{t_2}\rangle$ tiene zonas de interferencia destructiva, de modo que se anula en algunas regiones $V_n^{(2)}$ de la franja vertical. Eligiendo $n = n^*$ como una de las regiones de interferencia destructiva, se obtiene que

$$\hat{\Pi}_{up}^{(1)}\hat{\Pi}_{n^*}^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle = 0$$

Ahora consideremos el producto de proyectores en orden inverso, para el que se obtiene

$$\hat{\Pi}_{n^*}^{(1)}\hat{\Pi}_{up}^{(1)}|\varphi_{t_1}\rangle = \hat{U}^{-1}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_{n^*}\hat{U}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_{up}|\varphi_{t_1}\rangle.$$

En la expresión anterior $\hat{\Pi}_{up}|\varphi_{t_1}\rangle$ es la función de onda que se hubiera obtenido con el orificio inferior tapado. En consecuencia la función de onda $\hat{U}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_{up}|\varphi_{t_1}\rangle$ no tiene términos de interferencia, y no se anulará al aplicarle el proyector $\hat{\Pi}_{n^*}$. Tampoco se anulará entonces $\hat{U}^{-1}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_{n^*}\hat{U}(t_2,t_1)\hat{\Pi}_{up}|\varphi_{t_1}\rangle$, y por lo tanto los proyectores $\hat{\Pi}_{n^*}^{(1)}$ y $\hat{\Pi}_{up}^{(1)}$ no conmutan.

No es posible entonces obtener un contexto de historias que permita hablar de por cual ranura pasó la partícula antes de llegar a alguna región de la franja vertical. La aplicación del principio que hemos denominado de contextualizad de historias excluye esa expresión del universo del discurso de la teoría cuántica.

Experimento de la doble rendija con aparatos de medición

A diferencia de lo que hicimos en la sección anterior, ahora no nos interesa hablar de las posiciones de la partícula en los tiempos t_1 y t_2, sino de la posibilidad de que sea detectada por aparatos que miden la posición.

Consideraremos un detector A en la zona de las ranuras, cuya variable indicadora toma los valores a_{up} ó a_{down}, según que el aparato detecte la partícula saliendo de la ranura superior o de la inferior. Este aparato interacciona con la partícula en un pequeño intervalo de tiempo entre t_1 y $t_1+\Delta_1$.

También se coloca un detector B en la franja vertical a la derecha de las ranuras, de modo que su variable indicadora registra con valores b_n el paso de la partícula por los volúmenes $V_n^{(2)}$. La interacción entre la partícula y el segundo aparato ocurre entre los tiempos t_2 y $t_2+\Delta_2$.

El sistema $S+A+B$ compuesto por la partícula y los dos aparatos está inicialmente en un estado que se representa con el vector $|\varphi_{t_1}\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle$ del espacio de Hilbert $H_S\otimes H_A\otimes H_B$, donde $|a_0\rangle$ y $|b_0\rangle$ son los estados iniciales de cada aparato.

La siguiente tabla indica la evolución del estado del sistema compuesto por la partícula y los dos aparatos. En esa tabla, el operador $\hat{U}(t_2,t_1+\Delta_1)$ representa la evolución de la partícula libre entre los tiempos $t_1+\Delta_1$ y t_2, un período de tiempo en que no hay interacción con los aparatos.

TIEMPO	VECTOR DE ESTADO
t_1	$\lvert\varphi_{t_1}\rangle\lvert a_0\rangle\lvert b_0\rangle$
$t_1+\Delta_1$	$(\hat{\Pi}_{up}\lvert\varphi_{t_1}\rangle)\lvert a_{up}\rangle\lvert b_0\rangle+(\hat{\Pi}_{down}\lvert\varphi_{t_1}\rangle)\lvert a_{down}\rangle\lvert b_0\rangle$
t_2	$(\hat{U}(t_2,t_1+\Delta_1)\hat{\Pi}_{up}\lvert\varphi_{t_1}\rangle)\lvert a_{up}\rangle\lvert b_0\rangle+(\hat{U}(t_2,t_1+\Delta_1)\hat{\Pi}_{down}\lvert\varphi_{t_1}\rangle)\lvert a_{down}\rangle\lvert b_0\rangle$
$t_2+\Delta_2$	$\sum_n(\hat{\Pi}_n\hat{U}(t_2,t_1+\Delta_1)\hat{\Pi}_{up}\lvert\varphi_{t_1}\rangle)\lvert a_{up}\rangle\lvert b_n\rangle+$ $+\sum_n(\hat{\Pi}_n\hat{U}(t_2,t_1+\Delta_1)\hat{\Pi}_{down}\lvert\varphi_{t_1}\rangle)\lvert a_{down}\rangle\lvert b_n\rangle$

Ahora vamos a construir un contexto de historias que permita hablar de los registros del aparato A al tiempo $t_1+\Delta_1$ y de los registros del aparato B al tiempo $t_2+\Delta_2$.

Para el tiempo $t_1+\Delta_1$ interesan las propiedades que se representan con los proyectores

$$\hat{\Pi}_{a_{up}}=\hat{I}_S\otimes|a_{up}\rangle\langle a_{up}|\otimes\hat{I}_B,\qquad \hat{\Pi}_{a_{down}}=\hat{I}_S\otimes|a_{down}\rangle\langle a_{down}|\otimes\hat{I}_B,$$

que forman un sistema ortonormal y completo actuando sobre la clase de vectores de estado para el tiempo $t_1+\Delta_1$.

Para el tiempo $t_2+\Delta_2$ interesan las propiedades que se representan con los proyectores

$$\hat{\Pi}_{b_n}=\hat{I}_S\otimes\hat{I}_A\otimes|b_n\rangle\langle b_n|,$$

que forman un sistema ortonormal y completo actuando sobre la clase de vectores de estado para el tiempo $t_2+\Delta_2$.

Para saber si las indicaciones de los dos aparatos pueden integrar un contexto de historias, habrá que verificar si los correspondientes proyectores conmutan al ser trasladados a un tiempo común. Eligiendo a t_1 como tiempo común resulta

$$\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{up}}\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n}=\hat{U}^{-1}(t_1+\Delta_1,t_1)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{U}(t_1+\Delta_1,t_1)\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_1+\Delta_1,t_1)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{U}(t_1+\Delta_1,t_2+\Delta_2)\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_1+\Delta_1,t_1)\hat{U}(t_1+\Delta_1,t_2+\Delta_2)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1),$$
$$\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n}\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{up}}=\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{U}^{-1}(t_1+\Delta_1,t_1)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{U}(t_1+\Delta_1,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1+\Delta_1)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{U}(t_1+\Delta_1,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{b_n}\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1+\Delta_1)\hat{U}(t_1+\Delta_1,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{b_n}\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1)$$
$$=\hat{U}^{-1}(t_2+\Delta_2,t_1)\hat{\Pi}_{a_{up}}\hat{\Pi}_{b_n}\hat{U}(t_2+\Delta_2,t_1)$$

Vemos entonces que $\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{up}}$ y $\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n}$ conmutan. El mismo resultado se obtiene para $\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{down}}$ y $\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n}$.

En consecuencia, existe un contexto de historias generado por los elementos atómicos $h_{up,n}=[\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{up}}\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n},t_1]$ y $h_{down,n}=[\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{down}}\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n},t_1]$. La historia elemental $h_{up,n}$ ($h_{down,n}$) representa a la partícula detectada en la ranura superior (inferior) al tiempo t_1, y en el volumen $V^{(2)}_n$ a la derecha de las ranuras en el tiempo t_2.

En este contexto de historias se puede calcular la probabilidad de que se registre la partícula a la salida de la ranura superior en el tiempo $t_1+\Delta_1$, y en el volumen $V^{(2)}_n$ de la franja vertical al tiempo $t_2+\Delta_2$

$$\Pr(h_{up,n})=\langle\varphi_{t_1}|\langle a_0|\langle b_0|\hat{\Pi}^{(1)}_{b_n}\hat{\Pi}^{(1)}_{a_{up}}|\varphi_{t_1}\rangle|a_0\rangle|b_0\rangle=\langle\varphi_{up,t_2}|\hat{\Pi}_n|\varphi_{up,t_2}\rangle$$
$$\hat{\Pi}_n=\int_{V^{(2)}_n}d^3r\,|\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|,\qquad |\varphi_{up,t_2}\rangle=\hat{U}(t_2,t_1+\Delta_1)\hat{\Pi}_{up}|\varphi_{t_1}\rangle,\qquad \hat{\Pi}_{up}=\int_{V^{(1)}_{up}}d^3r\,|\bar{r}\rangle\langle\bar{r}|$$

Esta última expresión muestra que la presencia de los aparatos de medición ha eliminado la interferencia en los registros del aparato en la franja vertical.

Vemos entonces que el contexto de historias elegido es adecuado para discutir el experimento de la doble ranura con aparatos de medición.

Conclusiones

Hemos definido la noción de *contexto de historias*, que permite incorporar a la descripción de un sistema, propiedades que corresponden a tiempos diferentes. El contexto de historias es considerado por los autores de este trabajo como una generalización natural del concepto de usual de contexto en la teoría cuántica.

Postulamos un *principio de contextualidad de historias*, que considera como descripciones válidas sólo a aquellas que involucran historias del mismo contexto. No es legítimo incluir en el discurso expresiones que combinen historias que pertenecen a contextos de historias diferentes.

Hemos aplicado este principio al análisis en general del proceso de medición, y a la discusión del experimento de la doble ranura. En estas aplicaciones hemos visto su utilidad como un procedimiento sistemático para generar universos de discurso válidos en la descripción de un sistema con la teoría cuántica.

Nuestro método se muestra particularmente eficaz en el análisis del experimento de la doble ranura, donde es posible evitar los argumentos intuitivos usuales que apelan por ejemplo a imágenes clásicas para explicar la imposibilidad de decidir por cual ranura pasa la partícula.

El análisis del experimento de la doble ranura que incluye la descripción cuántica de los aparatos de medición, utilizando contextos de historias, resulta particularmente simple y explicativo.

Existe otro formalismo para abordar propiedades a distintos tiempos, que se conoce como la teoría de historias consistentes, y que fue desarrollada por R. B. Griffiths[5], M. Gell-Mann y J. B. Hartle [6]. En ese enfoque del problema, se considera una definición de probabilidad que es diferente a la que postulamos nosotros, y se postula que solo son posibles las denominadas historias consistentes, que se construyen de modo tal que las probabilidades resulten aditivas.

Nuestra construcción apela directamente a construir las historias de modo que resulten propiedades de un reticulado distributivo y ortocomplementado, para el cual las probabilidades resultan bien definidas.

A diferencia del formalismo de las historias consistentes, en que la condición de consistencia resulta difícil de verificar, en nuestra teoría la condición de contextualizad se reduce a verificar la conmutación de proyectores.

Estamos trabajando en otras aplicaciones que ya se han estudiado con el formalismo de historias consistentes, para poder lograr una mejor comparación entre ambas teorías.

Notas

[1] D. W. Cohen, *An introduction to Hilbert space and quantum logic*, Springer-Verlag, New York (1989).

[2] L. E. Ballentine, Am. J. Phys. **54**, 883-889 (1986).

[3] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics. Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1965).

[4] Por simplicidad, hemos considerado solamente el caso de las mediciones ideales, también denominadas de tipo I. El análisis de esta sección puede extenderse sin dificultades al caso de un a medición no ideal.

[5] R. B. Griffiths, J. Stat. Phys. **36**, 219 (1984)

[6] M. Gell-Mann and J. B. Hartle, in *Complexity, Entropy and Physics of Information*, W. H. Zurek, ed., Santa Fe Institute Studies in Science of Complexity, No. 8, Addison-Wesley, Redwood City, Calif. (1980).