EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VIII JORNADAS

VOLUMEN 4 (1998), Nº 4

Horacio Faas
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Consecuencia lógica graduada y analiticidad

*Carlos A. Oller**

*Sandra A. Visokolskis***

§1. La implicación analítica de Parry

William Parry [8] [9] concibió en los años treinta una teoría de la implicación lógica (o *entailment*), la teoría de la implicación analítica (IA), que se proponía evitar las paradojas de la implicación estricta. Parry denominó al principio básico de la IA "principio proscriptivo": ninguna fórmula con la implicación analítica como relación principal vale universalmente si tiene una variable que aparezca en el consecuente pero no en el antecedente. La idea intuitiva, de inspiración kantiana, detrás de este principio es que, para que A implique lógicamente a B, B debe estar contenido en A.

La intención de Parry era ofrecer una teoría de la consecuencia lógica pero, como también lo hizo C.I. Lewis, formalizó su noción de implicación como una conectiva del lenguaje de la lógica proposicional que admite anidamiento, en lugar de tratarla como una relación metalingüística entre expresiones del lenguaje que no lo admite.

Parry proporcionó una axiomatización para su cálculo proposicional de la implicación analítica, y probó, usando una matriz de cuatro elementos, que las tesis de su sistema satisfacen el requerimiento del principio proscriptivo. Se han proporcionado semánticas algebraicas y de mundos posibles, junto con pruebas de completitud y decidibilidad, tanto para extensiones del sistema de Parry como para su sistema original [4] [6][10].

Una caracterización semántica particularmente perspicua de la noción de Parry ha sido ofrecida por Richard Epstein [5]; esta caracterización es esencialmente la interpretación intuitiva que Robert Meyer sugirió para la semántica algebraica de Michael Dunn [4] [1] para una extensión del sistema de Parry. La lógica clásica tiene en cuenta sólo la forma y el valor de verdad de las proposiciones, pero podemos tener en cuenta también otros aspectos de ellas, como por ejemplo su contenido referencial. Si, además, acordamos que las conectivas lógicas no afectan el contenido referencial de una proposición, entonces un modelo de IA será un par ordenado (v, s), donde v es una valuación booleana y s es una

* Instituto de Filosofía. Facultad de Filosofía y Letras. Universidad de Buenos Aires.

** Escuela de Filosofía. Facultad de Filosofía y Humanidades. Universidad Nacional de Córdoba.

función que asigna a cada fórmula bien formada un subconjunto de un conjunto no-vacío S, que puede considerarse como un conjunto de unidades de contenido. La función de asignación de contenidos cumple con las siguientes cláusulas:

S1. $s(\neg A) = s(A)$

S2. $s(A \wedge B) = s(A \vee B) = s(A) \cup s(B)$

S3. $s(\Gamma) = \bigcup_{A_i \varepsilon \Gamma} s(A_i)$

Esto es, el contenido referencial de una proposición negada es el mismo que el de la proposición sin negar; el contenido referencial de una conjunción (disyunción) es la unión de los contenidos de los conyuntos (disyuntos). El contenido referencial de un conjunto de fórmulas es la unión del contenido referencial de todos sus miembros. Un conjunto de premisas Γ implica analíticamente a una proposición A sii A es verdadera bajo toda valuación booleana v que haga verdadera a todos los miembros de Γ, y, dada cualquier asignación de contenidos s, el contenido de A resulta incluido en el contenido de Γ.

El\La lector\a habrá notado que el tipo de analiticidad requerido por Parry para que exista la relación de consecuencia lógica consiste en la inclusión de los temas o tópicos de la conclusión en los de las premisas. Por ello resulta adecuado, siguiendo a David Makinson [7], llamar a la implicación analítica "implicación tautópica".

Es posible restringir la teoría de la implicación analítica a las implicaciones analíticas de primer grado, que se considerarán como expresiones de una relación entre fórmulas clásicas. Las implicaciones analíticas de primer grado son las expresiones $\Gamma \models^a B$, donde tanto B como los miembros de Γ son puramente veritativo-funcionales o clásicos, que responden a la caracterización semántica dada más arriba. Se desprende de esta caracterización que las siguientes fórmulas, los llamados "principios de Lewis", no son implicaciones válidas en el sistema de Parry:

(1) $\{A \wedge \neg A\} \models^a B$

(2) $\{A\} \models^a B \vee \neg B$

(3) $\{A \vee \neg A\} \models^a B \vee \neg B$

(4) $\{A \wedge \neg A\} \models^a B \wedge \neg B$

La ley de adición

(5) $\{A\} \models^a A \vee B$

no es una implicación válida en este cálculo, mientras que el silogismo disyuntivo:

(6) $\{A \vee B\ ,\ \neg A\}\ \models^a\ B$

sí lo es.

Es interesante notar que la definición de consecuencia analítica dada más arriba implica que el conjunto de los teoremas es vacío, aunque naturalmente el conjunto de las inferencias analíticas válidas no lo es.

§2. Relaciones de consecuencia clásica

Una relación de consecuencia para un lenguaje L es un conjunto de pares ordenados cuyo primer elemento es un conjunto, posiblemente vacío, de fórmulas de L (las premisas) y cuyo segundo elemento es una fórmula de L (la conclusión). La relación de consecuencia será indicada mediante el símbolo $\models$ flanqueado a su izquierda por un símbolo de conjunto y a su derecha por un símbolo de fórmula. Dado que la relación de implicación es la relación recíproca de la de consecuencia, en lo que sigue usaremos una u otra noción dependiendo del contexto.

Una relación de consecuencia es clásica si y sólo si satisface las siguientes tres propiedades:

Reflexividad:	Si $A \varepsilon \Gamma$, entonces $\Gamma \models A$
Corte:	Si $\Gamma \models A$, para todo $A \varepsilon \Delta$, y $\Gamma \cup \Delta \models B$, entonces $\Gamma \models B$
Monotonía:	Si $\Gamma \models A$, entonces para todo Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Delta \models A$

La propiedad de reflexividad pide que toda fórmula que pertenezca al conjunto de las premisas sea una consecuencia lógica de este conjunto. La propiedad de corte establece que si todos las fórmulas de un conjunto Δ son consecuencia lógica de otro conjunto Γ, entonces no hay ninguna fórmula que sea consecuencia de la unión de ambos conjuntos que no sea consecuencia de Γ sólo, estableciéndose así una suerte de transitividad de la relación de consecuencia lógica. La propiedad de monotonía establece que lo que se sigue de un conjunto de premisas continúa siendo una consecuencia lógica de cualquier conjunto de premisas mayor que incluya al conjunto original de premisas. Se suele agregar a estas tres propiedades la de compacidad: una relación de consecuencia es compacta si y sólo, si una fórmula A es consecuencia lógica de un conjunto infinito de premisas Γ entonces es una consecuencia lógica de un subconjunto finito Γ' de Γ.

La relación de consecuencia analítica que fue caracterizada semánticamente en §1 satisface, como es fácil comprobar, las propiedades de reflexividad, corte y monotonía. De modo que es, en el sentido definido en el párrafo anterior, una relación de consecuencia clásica.

§3. Relaciones de consecuencia graduada

En los años ochenta M. K. Chakraborty [3] propuso una generalización de la noción de consecuencia clásica definida en la sección anterior, caracterizando las relaciones de consecuencia graduada en el marco de la lógica difusa (*fuzzy*). En el caso de las relaciones de consecuencia habituales, dado un par ordenado formado por un conjunto de fórmulas de un lenguaje L y una fórmula de L, o bien este par ordenado pertenece a una relación de consecuencia para L o bien no pertenece a esa relación. Pero, es posible generalizar la noción de consecuencia admitiendo que la pertenencia (o la no pertenencia) de un par ordenado de ese tipo a una relación de consecuencia puede ser una cuestión de grados. El grado con el que el par ordenado pertenezca a la relación de consecuencia indicará la "fuerza" con la cual la conclusión se sigue de las premisas.

Las propiedades de reflexividad, corte y transitividad que caracterizan a la relación de consecuencia clásica pueden generalizarse para definir una relación de consecuencia graduada (clásica) de la siguiente manera:

Reflexividad graduada:	Si $A \in \Gamma$, entonces $gr(\Gamma \models A)=1$
Corte graduado:	$gr(\Gamma \models B) \geq \min\left(gr(\Gamma \cup \Delta \models B)\ ,\ \inf_{A \in \Delta}\ gr(\Gamma \models A)\right)$
Monotonía graduada:	Si $\Gamma \models A$, entonces para todo Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$, $gr(\Gamma \models A) \leq gr(\Delta \models A)$

En la formulación de estos principios, $gr(\Gamma \models A)$ indica el grado con el cual Γ implica a A, siendo 1 el grado que indica implicación completa y 0 el que señala ausencia completa de implicación. La interpretación de los principios de reflexividad graduada y monotonía graduada es obvia. Por su parte, el principio de corte graduado puede enunciarse de la siguiente manera: el mínimo entre el grado en que una fórmula B se infiere de la unión de dos conjuntos de fórmulas Γ y Δ, y el ínfimo de los grados en que los elementos de Δ se infieren de Γ, es menor o igual que el grado en que B se infiere únicamente a partir de Γ.

§4. Relaciones de consecuencia graduada analítica

La intersección de una relación de consecuencia graduada con la relación de consecuencia analítica definida en §1 da como resultado una relación de consecuencia graduada analítica. Así como la relación de consecuencia graduada clásica es una generalización de la relación de consecuencia clásica, la relación de consecuencia graduada analítica es una generalización de la relación de consecuencia analítica -la que a su vez es una restricción de la relación de consecuencia clásica.

Un conjunto de premisas y una conclusión pertenecen o no pertenecen a la relación de consecuencia analítica definida más arriba, pero es posible generalizar esta noción admitiendo grados de analiticidad que dependerán de cuánto del contenido referencial de la conclusión esté contenido en las premisas. El grado en el cual el contenido referencial de la conclusión está incluido en el de las premisas se medirá por la "proporción" de variables de la conclusión que aparezcan en las premisas. Por lo tanto, el grado de analiticidad o de tautopía de la consecuencia se indicará mediante una fracción cuyo denominador es el número de variables que aparecen en la conclusión y cuyo numerador es el número de las variables que comparten las premisas y la conclusión. Desde el punto de vista de la lógica difusa, esta fracción indica el grado de pertenencia de un par ordenado formado por el conjunto de las premisas y la conclusión a una relación de consecuencia analítica graduada [3].

Los siguientes ejemplos ilustran distintos casos de consecuencia graduada analítica:

Ejemplo 1 (ausencia total de implicación analítica): $gr(\{p \wedge \neg p\} \models^{a} q)=0$

Ejemplo 2 (implicación analítica completa): $gr(\{p \vee q , \neg p\} \models^{a} q)=1$

Ejemplo 3 (implicación analítica parcial): $gr(\{p \wedge q\} \models^{a} p \vee q \vee r)=2/3$

Esta relación de consecuencia graduada analítica satisface, como es fácil comprobar, reflexividad y monotonía graduadas. Sin embargo, esta relación de consecuencia graduada analítica no es una relación (graduada) clásica porque no satisface la propiedad de corte graduado, como puede comprobarse en el siguiente contraejemplo en el cual los conjuntos Γ y Δ (que aparecen en la formulación de esta regla en §3) son conjuntos unitarios:

Contraejemplo de Corte Graduado para la implicación analítica graduada: Sean $\Gamma=\{p \wedge q\}$, $\Delta=\{p \vee r\}$, $B=p \vee r \vee s$, entonces $gr(\Gamma \models^{a} B)=1/3$ y $\min(gr(\Gamma \cup \Delta \models^{a} B) , \inf_{A \in \Delta} gr(\Gamma \models^{a} A))=1/2$. Pero, como es obvio, $1/3 \not\geq 1/2$.

Esta relación de consecuencia graduada analítica satisface también la siguiente propiedad de compacidad fuerte:

Compacidad fuerte: $gr(\Gamma \models^{a} A)=gr(\Gamma' \models^{a} A)$ para algún Γ' finito tal que

$\Gamma' \subseteq \Gamma$

Esta propiedad exige que toda vez que una fórmula sea implicada por un conjunto infinito de premisas en un determinado grado, exista un subconjunto finito de ese conjunto de premisas que implique a la fórmula con el mismo grado. La prueba de que nuestra noción de consecuencia graduada analítica satisface esta propiedad es sencilla y hace uso de la compacidad para la noción de consecuencia clásica junto con el hecho de que en A puede aparecer sólo un número finito de variables.

Una característica interesante de esta noción de consecuencia graduada analítica es que los siguientes principios de reemplazo de fórmulas lógicamente equivalentes *no* son válidos para ella:

Principios de reemplazo de equivalentes:

Si $\{A\} \models B$ y $\{B\} \models A$, entonces $gr(\{A\} \models^a C) = gr(\{B\} \models^a C)$.

Si $\{A\} \models B$ y $\{B\} \models A$, entonces $gr(\{C\} \models^a A) = gr(\{C\} \models^a B)$.

Nótese que estos principios tampoco son válidos cuando el grado de la relación de consecuencia analítica graduada es 1, i.e. los correspondientes principios de reemplazo no son satisfechos por la relación de consecuencia analítica no-graduada.

Sin embargo, los siguientes principios de reemplazo de fórmulas analíticamente equivalentes sí son válidos para esta noción de consecuencia analítica graduada:

Principios de reemplazo de fórmulas analíticamente equivalentes:

Si $gr(\{A\} \models^a B)=1$ y $gr(\{B\} \models^a A)=1$, entonces $gr(\{A\} \models^a C)=gr(\{B\} \models^a C)$.

Si $gr(\{A\} \models^a B)=1$ y $gr(\{B\} \models^a A)=1$, entonces $gr(\{C\} \models^a A)=gr(\{C\} \models^a B)$.

Las lógicas intensionales habituales, a diferencia de la lógica de la implicación analítica, satisfacen los principios de reemplazo de fórmulas lógicamente equivalentes y, en este sentido es posible calificar a ésta última como una lógica hiperintensional.

Referencias

[1] **Anderson, A. R. y Belnap, N. D.**, *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, vol. I, Princeton, Princeton University Press, 1975.

[2] **Castro, J. L., Trillas, E. y Cubillo, S.**, "On Consequence in Approximate Reasoning", *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 4 (1994), pp. 91-103.

[3] **Chakraborty, M. K.**, "Use of Fuzzy Set Theory in Introducing Graded Consequence in Multiple Valued Logic", en M.M. Gupta y T. Yamakawa (eds.), *Fuzzy Logic in Knowledge-Based Systems, Decision and Control*, Dordrecht, North Holland, 1988, pp. 247-257.

[4] **Dunn, J. M.**, "A modification of Parry's analytic implication", *Notre Dame Journal of Symbolic Logic*, 13 (1972), pp. 195-205.

[5] **Epstein, R. L.**, *The Semantic Foundations of Logic. Volume 1: Propositional Logics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1990.

[6] **Fine, K.**, "Analytic implication", *Notre Dame Journal of Symbolic Logic*, 27 (1986), pp. 169-179.

[7] **Makinson, D. C.**, *Topics in Modern Logic*, Londres, Methuen and Co., 1973.

[8] **Parry, W. T.**, "Ein Axiomensystem für eine neue Art von Implikation (analytische Implikation)", *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4 (1933), pp. 5-6.

[9] **Parry, W. T.**, "Comparison of entailment theories", *The Journal of Symbolic Logic*, 37 (1972), pp. 441-442.

[10] **Urquhart, A.**, "A semantical theory of analytical implication", *Journal of Philosophical Logic*, 2 (1973), pp. 212-219.