EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVI JORNADAS

VOLUMEN 12 (2006)

José Ahumada
Marzio Pantalone
Víctor Rodríguez
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Aspectos visuales en la concepción de los signos de Leibniz: "ver" para "comprender"

Norma B. Goethe

1. Introducción

Existe actualmente un gran interés en el recurso a la visualización en las ciencias formales; ello motiva la reflexión filosófica acerca de los instrumentos cognoscitivos específicos a ese ámbito y el interés en revisar ese tema desde una perspectiva histórica.

El interés actual en la visualización se nutre de desarrollos en ciencias cognitivas y de la computación, y un mayor énfasis en la práctica y enseñanza de las matemáticas; surge en parte como reacción a la filosofía de las matemáticas del siglo veinte con su énfasis en el valor epistémico de una prueba rigurosa desde "la perspectiva puramente lógica". Pero la apreciación de la intuición visual en la matemática en áreas como geometría, topología y análisis complejo, así como la revalorización de los métodos visuales va más allá de una reacción a la *concepción simbólica* de la matemática propuesta por Hilbert.[1] La idea es reconocer el valor heurístico y pedagógico del pensamiento visual, sin denegar la importancia del razonamiento abstracto ni los requisitos de rigor lógico, aunque es un hecho que la apreciación actual de la importancia de la visualización se facilita gracias al abandono de ciertos dogmas de la "concepción simbólica" del conocimiento matemático.

1.1 La "figura" en oposición a la "perspectiva puramente lógica"

Hacia fines del siglo diecinueve, se destaca justamente en el caso de la geometría, la oposición entre "figura (visual)" y "prueba formal" (completamente independiente de la figura). Pash (1882) argumenta que una prueba es "completamente independiente de la figura". Aunque facilita la comprensión y es "una herramienta fructífera para descubrir las relaciones entre el teorema y las construcciones aplicadas en la prueba", sin embargo:

> El teorema está verdaderamente demostrado cuando la prueba es completamente independiente de la figura. (Pash, 1882:43)

Tales ideas se radicalizan con la línea de trabajo que conocemos como la *concepción simbólica* de las matemáticas. Hilbert expresa su desconfianza en el recurso a las "figuras":

> Usaremos figuras, pero nunca depositaremos nuestra confianza en ellas. Nos debemos asegurar de que las operaciones aplicadas a una figura sean correctas desde *la perspectiva puramente lógica*. (Hilbert, 1902)[2]

El punto de partida de este enfoque se relaciona con el hecho de que algunos resultados matemáticos en el siglo diecinueve se habían revelado como incorrectos, a pesar de parecer perfectamente aceptables desde el punto de vista de su "visualización intuitiva". Surge entonces el interés por una rigorización del análisis por medio de pruebas formales rigurosas. Según la concepción simbólica moderna, una prueba rigurosa es una "estructura sintáctica" que aparece como secuencia (o concatenación) de sentencias en la que se apela paso a paso a proposiciones precedentes y definiciones en base a reglas estipuladas. La noción de prueba se da en el contexto de un sistema formal que adopta la forma axiomática.[3]

1.2 Visualización y escritura: aspectos visuales del simbolismo

Pero la perspectiva acerca de la visualización con su oposición entre figura y prueba formal que subyace a este enfoque apenas sugiere la gran complejidad del tema. Pues toda prueba formal requiere una forma de escritura simbólica que se despliega visualmente, casi siempre en forma unidimensional (de izquierda a derecha) sobre una superficie. Por ejemplo, Frege concibe su notación bidimensionalmente insistiendo en que el despliegue bidimensional de las pruebas facilita la "captación" de los contenidos explicitados siendo más apropiada para agentes epistémicos "como nosotros" que una notación unidimensional.

Es de notar que toda forma de escritura simbólica incluye importantes aspectos visuales. Aún considerando que la prueba "es independiente de la figura" (geométrica), ella no es independiente de toda visualización, pues requiere ser concebida simbólicamente y el diseño de una notación incluye una forma o estilo de presentación visual. ¿Podríamos prescindir totalmente del recurso a una notación simbólica con sus formas de escritura? Frege sostiene que es posible concebir "otros seres" que sean capaces de realizar sus razonamientos sin recurrir a una escritura simbólica. Pero para nosotros, el recurso a una forma de expresión del pensamiento que se visualiza es imprescindible.[4] La escritura simbólica del matemático es lo que vincula el razonamiento abstracto con lo visual. Sostendremos que esta idea proviene de Leibniz.

En 1879, Frege presenta su "Begriffsschrift" como un instrumento comparable a otros instrumentos científicos como el microscopio que permite visualizar cosas demasiado pequeñas para poder ser "captadas" por el ojo desnudo. Como toda notación matemática, la notación simbólica de Frege es una forma de "escritura" esencialmente diferente de un lenguaje natural (hablado), pues es diseñada exclusivamente para "el ojo". Al igual que otros instrumentos científicos, su diseño persigue fines muy específicos. Frege concibe su notación como una forma de "característica" comparándola con el ideal leibniziano de *característica,*[5] y establece una comparación con el microscopio en su relación con el ojo humano:

> Para la mayoría de nuestros propósitos el ojo es muy superior al microscopio, sin embargo, en el caso en que algún objetivo científico exija un alto grado de resolución, el ojo se muestra insuficiente. El microscopio, por otra parte, se presta precisamente para esos objetivos a la perfección, mientras que justamente es inútil para todos los demás. (1879: Prefacio v)

El arquitecto principal de la concepción simbólica de la matemática, Hilbert, aunque en profundo desacuerdo con Frege en cuanto al formalismo, también legitimaría su propuesta apoyándose en la concepción leibniziana del simbolismo.

1.3 "Ver", "comprender" conceptualmente y ofrecer pruebas

La propuesta de rigorización de los resultados matemáticos del enfoque hilbertiano opera con una separación metodológica entre dos aspectos de la investigación. Por una parte, se plantea la cuestión de la invención y creatividad teórica; por otra parte, está la cuestión de la justificación fundada en pruebas rigurosamente "formalizadas". Es en este último plano que aparece la noción de "prueba formal", mientras que el recurso a las imágenes y visualizaciones, en general, aparece relegado al plano heurístico como algo que puede facilitar el proceso cognoscitivo por vincularse con la psicología humana pero que puede llegar a descaminarnos, pues las imágenes nunca son totalmente confiables.

Podemos vincular la estrategia metodológica de la concepción simbólica del conocimiento matemático con una distinción introducida por Kant (1781/1787: A84-85/B116-117) que en la visión neo-kantiana del conocimiento llevaría al divorcio entre cuestiones empírico-psicológicas y cuestiones de justificación.

En cuanto a la visualización en matemáticas, parecería haber involucrada una distinción básica entre "ver" (captar visualmente) y "comprender" (reconocer conceptualmente / analíticamente).[6] Pero hacia fines del siglo diecinueve, los matemáticos interesados en la rigorización del análisis no sólo legitimaban sus enfoques apoyándose en la concepción simbólica leibniziana, también argumentaban contra el recurso a la "intuición pura" en la concepción kantiana de la aritmética; esto sugiere que la complejidad del tema va más allá de la oposición "ver"/"comprender conceptualmente.

Esta última distinción ya presupone la escisión entre la capacidad de "ver" con el ojo desnudo sin intervención de elemento teórico alguno y "comprender" analíticamente auxiliado por conceptos. Dicha escisión con sus respectivas valoraciones se perfila ya en la teoría moderna de las facultades, según la cual, la comprensión por medio de conceptos es más confiable que la "capacidad de formar imágenes". Menos confiable aún es la memoria, cuya función consiste en almacenar los resultados cognoscitivos. Tales valoraciones de las facultades son justamente las que contribuyen a motivar la introducción del simbolismo en Leibniz para quien todo razonamiento abstracto va ligado a la visualización: no es posible "comprender analíticamente" sin "visualizar".

2. Aspectos visuales en la concepción de los signos de Leibniz

Desde muy joven Leibniz percibe la importancia de una forma de escritura ("escritura filosófica") que articule, fije y facilite la expresión del pensamiento. Concibe su idea de una "gran ciencia de los símbolos"que llegaría a identificar con su concepción madura de *arte combinatoria*. Esa idea aparece como una visión dinámica de gran valor heurístico: se transforma con el progreso de sus estudios, al mismo tiempo que constituye una guía constante en sus múltiples proyectos.

La transformación más profunda de su visión acerca del simbolismo es la que se sigue de sus estudios matemáticos en París (1672-1676) que le conducirían al desarrollo del cálculo.[7]

2.1 "Pensar es calcular" y la indispensabilidad de los signos

Una idea fundamental acerca de las operaciones cognoscitivas a la que Leibniz adhiere desde su juventud, proviene de Hobbes:

> Thomas Hobbes (...) establece correctamente que *toda actividad mental es una forma de computación*, por la cual se entiende la adición de una suma o la substracción de una diferencia (*De Corpore*, I.1.2). Así como hay dos signos primitivos del álgebra y análisis, + y – (...)[8]

A partir de este supuesto, Leibniz comienza a desarrollar una idea que no era obvia para su época: así como nos servimos de signos en el álgebra y análisis, también nos servimos de símbolos en la articulación de todos los procesos cognoscitivos, tanto en las ciencias exactas como en las artes y ciencias prácticas.

Tanto Hobbes como Locke entienden el razonamiento como discurso mental y la introducción de signos se explica sea por su función nemotécnica, sea a los fines de transmisión del discurso mental. Leibniz se interesa en la búsqueda de un "lenguaje perfecto" un tema recurrente en su época, con sus estudios matemáticos, sus intereses evolucionan y cuando su idea del simbolismo se afianza toma distancia definitiva de aquellos.

En geometría, Descartes (1637) había introducido un simbolismo innovador que iría a ser estudiado por Leibniz en Paris, quien explota al máximo la idea del valor heurístico del simbolismo y adoptando el nuevo marco teórico introduce sus propias innovaciones. Sus estudios matemáticos le conducirían, a su vez, a la transformación de su idea acerca del papel que juegan los símbolos en el plano cognoscitivo. Finalmente, esta evolución le lleva a reafirmar su convicción de que en cuanto al razonamiento "el espíritu humano no sería capaz de avanzar un paso sin recurrir a símbolos ('caracteres')".

2.2 Las formas de expresión del pensamiento y sus "huellas visibles" sobre el papel

Reconocer la "dinámica simbólica" del pensamiento le permite a Leibniz poner el énfasis en los aspectos visuales de sus formas de expresión vinculando el razonamiento abstracto con el carácter tangible del signos. Una notación aparece como un instrumento "tangible", y fácilmente reconocible por todos.

A diferencia de la perspectiva de Hobbes y Locke, Leibniz parece llegar a defender la idea de la estructura simbólica del pensamiento. El ideal leibniziano de una "escritura filosófica" evoluciona de acuerdo con el progreso de sus estudios matemáticos transformándose en la idea de "notación" como instrumento del pensamiento, con cuyo auxilio, y a modo de hilo conductor ("*filum meditandi*"), se haría posible conducir los razonamientos en forma *explícita*, es decir, *tangible* y, en algún sentido, mecánicamente, de suerte que cualquiera pudiese *reconocerlo* y hacer uso de él.[9]

Leibniz emplea el término "característica" en forma ambivalente refiriéndolo sea a una forma determinada de notación – en este sentido concibe un espectro ilimitado de características como hay ilimitadas formas de expresión humana - sea al ideal de una ciencia general de los símbolos que también llama "*ars combinatoria*". La visión de una ciencia general acerca de la que Leibniz especula desde su juventud es amplia e incluye elementos metodológicos que recién con Kant pasarían a ser considerados en forma independiente.

En su idea de un "arte combinatoria". Leibniz incluye análisis y síntesis que corresponden a los principios del arte inventivo que permitiría llegar a nuevas verdades, así como los principios de sistematización y *prueba* de los conocimientos de los que ya se dispone. Concibe tales principios como instrumentos metodológicos; aunque el arte inventivo es supremo para Leibniz identificándolo con el arte combinatoria misma en su etapa madura. Pero la distinción misma entre invención y prueba, análisis y síntesis aparece como una distinción dinámica; el análisis que lleva a verdades, en otro momento, puede contribuir a la síntesis. La distinción estricta entre invención y prueba no era obvia en el siglo XVII.[10]

Leibniz compara incansablemente el alcance de este tipo de "instrumento metodológico" con la invención de otros instrumentos científicos: su invención aumentaría nuestra capacidad cognoscitiva más allá de lo que la invención de instrumentos como el microscopio y el telescopio ha logrado en cuanto a la extensión de la visión.[11]

2.3 Rigor formal, valor heurístico y cómo "razonar con poco esfuerzo"

Leibniz (1674) vincula "rigor formal" con el valor heurístico del simbolismo. Está interesado en requisitos metodológicos que permitan la unificación en el tratamiento de una multiplicidad de casos, cuestiones que se presentan en los ámbitos de investigación a los que está abocado durante sus estudios en Paris. De Descartes adopta la idea de que la *generalización* de los problemas es lo que permite disminuir la complejidad de la investigación aumentando el valor cognoscitivo de un instrumento metodológico.[12]

Leibniz plantea la cuestión de la *generalización* como un problema que se sitúa en el plano simbólico. En el plano numérico, se trata de buscar una ecuación que a modo de definición nos permita *expresar* a través de una única formula la multiplicidad de todas las soluciones posibles, mientras que en el plano geométrico, vemos el intento de *reducir* todas las figuras a un tipo de figura que a modo de noción común, nos permita extraer de ella las propiedades de las diversas figuras particulares por medio del cálculo.[13] Según Leibniz, su método de generalización de los problemas posee superior valor cognoscitivo y ello radica en su uso de *nuevos* instrumentos, una estructura algorítmica que denomina "caracteres ambiguos".[14]

En ese contexto Leibniz nos habla de la visión filosófica que le guía, su idea de una ciencia de los signos de la cual, nos dice, su "método de la universalidad" representa solamente una "muestra", habla de esa ciencia como el arte que:

> ...le da las palabras a las lenguas, las letras a las palabras, las cifras a la aritmética, las notas a la música, es ella la que nos enseña *el secreto de fijar el razonamiento, obligándolo a dejar sus huellas visibles sobre el papel,* a fin de poder examinarlo cuando nos convenga, es finalmente ella la que nos permite *razonar con poco esfuerzo remplazando las ideas por los símbolos, a fin de no tener que depender de la imaginación*[15]

Vemos aquí el énfasis en la importancia de la escritura apropiada para la expresión del pensamiento en sus diversas formas; la importancia del aspecto "visual" de los signos que al dejar sus "huellas visibles sobre el papel" contribuye a fijar el razonamiento facilitando su expresión.

2.4 La presentación de la verdad "cual si fuese una pintura"

En 1675 Leibniz retoma el tema del *rigor formal* insistiendo en tratar las nociones de infinito, máximo y mínimo, de perfección, y totalidad, con suma cautela antes de poseer los instrumentos formales a cuya luz ellas puedan ser estudiadas.[16] Motivado por sus trabajos en álgebra Leibniz explicita su idea de que son los instrumentos formales del simbolismo, los que a través de la naturaleza casi mecánica de sus procedimientos, pueden *mostrar* la verdad como algo "estable", "visible" e "irresistible".

El álgebra es sólo una "muestra" de tal procedimiento formal que por representar la verdad casi físicamente, "cual si fuese una pintura", la presenta de forma claramente reconocible para todos.[17] El cálculo no debe ser simplemente identificado con el ideal de "simbolismo formal" y esa "fuerza demostrativa" de la que nos habla no está exclusivamente ligada al procedimiento algebraico o analítico, aunque toda contribución a ese ámbito contribuye por supuesto a la ciencia superior.

Para resumir, a partir de sus estudios en Paris, Leibniz destaca el valor heurístico del rigor formal, tanto para el arte de evaluar resultados, como para la búsqueda de nuevas verdades. Las virtudes del simbolismo incluyen sus aspectos perceptibles, de suerte que una verdad aparece como "tangible" e "irresistible".

2 5 El arte de la escritura y la verdad objetiva

La verdad se presenta en forma "tangible" gracias a su expresión simbólica. ¿Cuál es la relación de la "verdad objetiva" con su expresión en un sistema simbólico? Si toda articulación de los procesos cognoscitivos se realiza a través de símbolos cuya naturaleza es convencional, cabe preguntarse acerca de las consecuencias filosóficas de esta posición.

Leibniz rechaza la posición "nominalista" de Hobbes; sostiene que éste reduce la verdad a una categoría arbitraria de relaciones dependiente de las definiciones lingüísticas empleadas para su expresión.[18] Según Leibniz existe un orden de verdades que es inmutable e independiente del progreso del conocimiento y sus instrumentos metodológicos; pero esto no impide reconocer la naturaleza convencional de la expresión de la verdad en este u otro sistema simbólico.

¿Pero qué papel juegan las definiciones en los procesos cognoscitivos y cuál es su relación con la verdad? Leibniz sostiene que las definiciones son importantes instrumentos metodológicos para el descubrimiento de nuevas verdades. Su valor cognoscitivo es indudable y no se ve disminuido por su carácter convencional:

> (...) La definición es el instrumento más poderoso del que puede servirse el hombre a fin de llegar al conocimiento de las esencias y verdades eternas.[19]

A fin de tomar en cuenta esta idea, Leibniz distingue entre el orden objetivo de la verdad y su expresión: las definiciones no constituyen el principio de existencia de la verdad, en tanto principios que rigen para su formulación sólo cumplen una función *expresiva*.[20] Es esta función expresiva la que establece el vínculo cognoscitivo entre la verdad "objetiva" y las definiciones.

Que la definición constituye un instrumento de gran valor cognoscitivo se ve, por el papel que juega tanto en la demostración como en la invención. Por ejemplo, una ecuación es, para Leibniz, un tipo particular de definición. Se trata de una estructura de "relaciones" entre símbolos, en la cual cada una de ellas se *expresa* como una función de todas las demás, pero eso basta, escribe Leibniz, para entender "la cuestión de la que se trata"[21] En otras palabras, el uso de "caracteres" es indispensable para la expresión de la verdad, pero este hecho no compromete la verdad de las relaciones establecidas. De lo contrario deberíamos negarle valor cognoscitivo a la matemática. El joven Leibniz había partido de una idea clásica que parecería estar en tensión con su pensamiento maduro: la función expresiva del lenguaje tiene sus raíces en un momento a-simbólico del pensamiento, éste constituye la base de "objetividad" de la definición de una idea cuyos contenidos son los mismos para todos.

Por otra parte, la importancia del simbolismo no queda restringida a la mera dimensión *expresiva*, pues toda articulación simbólica pasa a formar parte de la dinámica misma de la creatividad y conocimiento humanos. Leibniz había comenzado afirmado un vínculo estrecho entre lenguaje y pensamiento describiendo el lenguaje (natural) como el "instrumento más próximo al pensamiento".[22] Posteriormente su noción de lenguaje se amplía hasta incluir la escritura simbólica matemática, de la cual el álgebra es un paradigma. Su interés crece con el creciente reconocimiento del valor heurístico del simbolismo, que en sus ojos posee dos virtudes: al mismo tiempo que garantiza el rigor metodológico lleva a resultados fructíferos.[23] Esto se ve en el caso del álgebra donde cada verdad adquirida se deriva por transposición de signos, y aunque no agregue elementos nuevos a nuestro conocimiento, nos "muestra" los objetos en sus relaciones estructurales, en toda su "desnudez".[24]

El razonamiento se amalgama con sus instrumentos de expresión adquiriendo su propia dinámica hasta aparecer finalmente como una especie de "mecanismo mental" que se despliega en un espacio público, el cual en virtud de su carácter "tangible" se transforma en garantía de rigor y precisión, al mismo tiempo que por adoptar formas visuales alivia la imaginación "dejando sus huellas visibles sobre el papel" y haciendo posible el intercambio racional y público.[25]

Notas

[1] Mancosu (2005), pp.13-17

[2] Cf. Mancosu (2005). Las citas de las notas de clase de Hilbert son de Mancosu.

[3] Los exponentes de esta posición son Pash (1882) y Hilbert (1891-1902); que la concepción de Frege difícilmente podría entenderse desde esta perspectiva.

[4] Frege (1979), pp.269-70.

[5] Según Frege (1879), su « Begriffsschrift » es un instrumento que permitiría evaluar (a) la *legitimidad* de las inferencias en todo ámbito del pensamiento, y (b) gracias a su rigor permitiría *explicitar* los supuestos relevantes que entren en juego en cada caso.

[6] Mancosu (2005)

[7] Lamarra (1978) discute la evolución de la 'logica inventiva' de Leibniz durante sus estudios parisinos.

[8] Leibniz (1880), p. 64.

[9] Leibniz (1987), p. 241

[10] Kant (1971, BVIII-IX) cuestiona la búsqueda de una 'lógica inventiva' como *Organum* de la verdad. ella se basa en una confusión entre ampliación del conocimiento y validación.

[11] Leibniz (1999), p.7

[12] La cuestión de la generalización de los problemas se plantea en *La Méthode de l'Universalité* (1674), que discute un paso importante hacia el desarrollo del cálculo. Couturat (1903), p.122.

[13] Ibid., p.123-124.

[14] Ibid., p.125. "Caracteres ambiguos" son signos o letras. "las letras expresan las magnitudes y los signos muestran las relaciones entre las magnitudes"

[15] Ibid., pp 98-99

[16] Leibniz (1987), pp.250-1

[17] Ibid., p.250

[18] Leibniz (1880), pp.127-176.

[19] Leibniz (1987), p.270, p.246.

[20] Ibid., p.271

[21] Ibid

[22] Leibniz (1880), p. 150.

[23] Leibniz (1999), pp. 3-7

[24] Leibniz (1987), p. 228. Lamarra (1978), p. 59

[25] Leibniz (1880), p. 35

Bibliografía

Couturat, L. . 1903, *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris. (Hildesheim. G Olms, 1966)

Frege, G.: 1879, *Begriffsschrift, eine der Arithmetik nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* en. I.Angelelli (ed.), Hildesheim: G. Olms, 1964.

Frege, G.: 1979, *Posthumous* Writings, Chicago: University Press.

Hilbert, D.: 1891-1902, Lectures on the Foundations of Geometry, Vol. I, Hallet, M. & Majer U (eds.), Berlin, Heidelberg, New York: Springer 2004.

Lamarra, A.: 1978, "The Development of the theme of the 'logica inventiva' during the stay of Leibniz in Paris", Leibniz a Paris, Vol. II, *Studia Leibniziana* Supp. XVIII, Stuttgart: Steiner Verlag, p. 55-71

Leibniz, W G : 1987, *Sämtliche Schriften und Briefe*, Reihe II, Band 1, Berlin: Akademie Verlag.

Leibniz, W G : 1999, *Sämtliche Schriften und Briefe*, Reihe VI, Band 4, Teil A, Berlin: Akademie Verlag.

Leibniz, W G : 1880, *Die philosophischen Schriften von W.G Leibniz*, Gerhardt (ed.), Band IV (Hildesheim. G. Olms, 1966.)

Mancosu, P.: 2005, "Visualization in Logic and Mathematics", en P Mancosu et al. (eds.), *Visualizations, Explanations and Reasoning Styles in Mathematics*, Dordrecht: Springer, 2005, pp. 13-30.

Pasch, M.: 1882/1926, *Vorlesungen über neuere Geometrie* Berlin: Springer, 1976.