EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVI JORNADAS

VOLUMEN 12 (2006)

José Ahumada
Marzio Pantalone
Víctor Rodríguez
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

La relación parte - todo en la geometría de los sólidos de A. Tarski

Diego Letzen[*]

En 1965 Tarski termina un sistema de geometría, una presentación general de la geometría euclideana en el marco de la Lógica. De distintas maneras es posible rastrear el interés de Tarski en estos temas hasta llegar a algunos de los temas y posiciones planteados por Brentano para la indagación filosófica. En esta tarea casi arqueológica el primer hito en aparecer es la figura de S. Lesniewski, padre de la mereología, de quien Tarski fuera único discípulo. Por un encargo de su maestro es que este último esboza las líneas de una geometría sin puntos como noción primitiva, de inspiración mereológica. tomando la relación diádica de parte y la noción de sólido como únicas primitivas. Sin embargo el elegante sistema de geometría mencionado al comienzo del párrafo no es éste. Es un sistema de geometría elemental cuyo principal rasgo es estar expresada exclusivamente en el lenguaje de la lógica de primer orden. Exploramos en este trabajo esta primera aproximación a la geometría realizada por Tarski, intentando justificar la hipótesis que ambos acercamientos a la geometría están estrechamente vinculados, a pesar del prolongado lapso temporal que intermedia, por la inquietud por las nociones primitivas de la geometría he incluso por ciertos aspectos metodológicos.

1 Pre-historia de la mereología: la línea Brentano – Tarski: Twardowski

Entre algunos de los discípulos de Franciszek Brentano (A. Meinong, E. Husserl etc.) K. Twardowski, trabajando desde el año 1895 en Lvov, elabora una distinción entre acto contenido y objeto de la representación en el marco del problema de acto y contenido del fenómeno psicológico de Brentano, aunque progresivamente va separándose del psicologismo de Brentano. Toma también de éste, el interés por temas aristotélicos y escolásticos referidos al realismo y objetivismo y, si bien en lo referente a los conceptos metafísicos no es tan estricto como Brentano en suponer que la filosofía tiene la última palabra, adscribe a la teoría que los conceptos metafísicos son de una naturaleza precientífica en el sentido de contener verdades que serán probadas al ser incorporadas en una disciplina científica particular. La escuela por él fundada se caracteriza en general por la aceptación del realismo ontológico, el objetivismo y la teoría de la correspondencia absoluta.

El rasgo central de abordaje de todos estos temas es el criterio que los temas de la metafísica deben ser tratados en forma no ambigua y precisa trasmitiendo a todos los discípulos de la escuela de Lvov-Warsaw el afecto por el rigor de la semántica, la sintaxis y pragmática del lenguaje.

2 Geometría de Tarski -1

En 1965 Tarski termina de dar forma a un elegante sistema de geometría que había comenzado a estudiar casi 40 años antes, en el período 26-27 de clases en la universidad de Varsovia: una

---

[*] UNC

presentación axiomática de la geometría euclideana elemental (la parte de geometría plana euclideana que puede ser desarrollada en el marco de la lógica de primer orden.)

Con el correr de los años, primero con Szmielew y luego con Schwabhäuser se completó una presentación general de la geometría euclideana sobre esta base: una presentación desarrollada en el marco de la lógica.

Por contraste con otros sistemas de la geometría (por ejemplo el sistema de Hilbert para la geometría del espacio) en que punto, línea, plano etc., son "objetos geométricos" primitivos, en el sistema de Tarski hay sólo un tipo de objeto geométrico primitivo: los puntos. Es decir, todas las variables (de primer-orden) a, b, c,... (denotadas por letras minúsculas) tienen su recorrido sobre puntos. Hay dos nociones geométricas primitivas (es decir, no-lógicas): la relación ternaria B "estar-entre" y la relación cuaternaria de "equidistancia" o "congruencia de segmentos".

La relación B es definible en términos de equidistancia. Para ello, es necesario definir primero un relación cuaternaria entre segmentos (menor o igual) expresada mediante $xy \geq zu$.

Una de las características importantes del desarrollo de Tarski es la distinción clara entre la geometría completa y su parte elemental. Por "elemental" entendemos esa porción de la geometría que, hablando rápidamente, puede ser desarrollada sin la ayuda de nociones de teoría de conjuntos. El sistema de la geometría completa requiere como marco una lógica de orden superior o, si no una lógica de primer orden enriquecida por algún fragmento (axiomático) de la teoría de conjuntos.

El conjunto de axiomas de Pieri de 1898 para la geometría completa euclideana de 3 dimensiones. Consiste de 24 axiomas. La única noción primitiva utilizada en el sistema es la relación ternaria entre puntos a, b, c si, y sólo si, b y c son equidistantes de a. La mayor parte de los axiomas de Pieri se formulan con la ayuda de algunas nociones definidas. Sin embargo, después de cada uno de ellos, a excepción de los dos axiomas no-elementales XXIII y XXIV, él da un reformulación en la que todas las nociones definidas se han eliminado. La extensión de cada una de las reformulaciones de estos axiomas es muchísimo más larga de lo que podría suponerse.

2 Geometría de Tarski -2

Especialmente en los comienzos del siglo XX se produjeron numerosas propuestas para el tratamiento de manera formal de teorías del espacio, con la característica general de tomar como nociones primitivas específicas regiones espaciales (por ejemplo cuerpos sólidos) antes que el punto. Tal vez la motivación fundamental detrás de muchos de estos intentos fue la de proveer teorías adecuadas a la percepción espacial del sentido común y correlativamente la de aplicar nociones mereológicas en su formulación. Algunos ejemplos de estas teorías son: De Laguna (1922), Tarski (1929) y Whitehead (1920), (1929).

Así por ejemplo en 1927 Tarski (impreso en Tarski (1929)) presenta en el primer congreso de matemática polaca los *fundamentos de la geometría de los sólidos*[1]. Esta obra es una de las primeras aplicaciones de la mereología o teoría del todo y las partes, recientemente desarrollada por S. Lesniewski en sus *fundamentos de una teoría general de las totalidades*[2] (Lesniewski 1916). En ella Tarski toma la esfera como único concepto primitivo específico conjuntamente con la noción mereológica primitiva de *parte* "Entendiendo por Geometría de Sólidos un sistema de geometría desprovisto de figuras geométricas como puntos, líneas y superficies, y admitiendo como figuras sólo sólidos –el correlato intuitivo de conjuntos regulares abiertos (cerrados) de la geometría euclideana de tres dimensiones." (FGS p. 24) En general podemos afirmar que la utilización de estas teorías permite entre otras cosas poner de relieve aspectos filosóficos y formales relacionados con las nociones espaciales en juego (por ejemplo límite, ubicación, región etc...)

El procedimiento utilizado por Tarski consiste en basar la geometría en la mereología de Lesniewski. La relación de parte es incluida en el sistema como primitiva y la noción de esfera como única primitiva específica.

En la construcción del sistema es posible identificar tres etapas:

Construcción de una colección de objetos (sólidos: conjuntos regulares cerrados de $\mathbb{R}^3$).
Selección de una colección de relaciones sobre los objetos.
Decisión sobre el lenguaje subyacente: lógica de predicados de segundo orden.

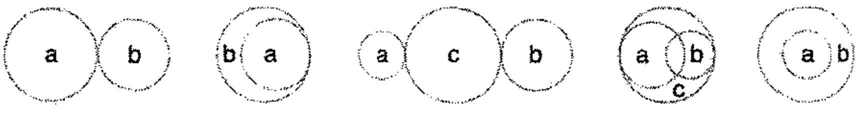
Postulado I. Si A es parte de B y B es parte de C, entonces A es parte de C.
Def. MI. Un individuo A es una parte propia de un individuo B si A es parte de B y B no es idéntico a A.
Def. MII. Un individuo A es disjunto de un individuo B si ningún Z es parte de ambos.
Def. MIII. Un individuo A es la suma de los elementos de una clase α no vacía de individuos si cada elemento de α es parte de A y ninguna parte A es disjunta de los elementos de α.
Postulado II. Para toda clase α no vacía de individuos, existe exactamente un individuo X que es la suma de todos los elementos de α.

$$\mathsf{DR}(x,y) \equiv_{def} \neg\exists z[\mathsf{P}(z,x) \wedge \mathsf{P}(z,y)]$$
$$\mathsf{SUM}(X,x) \equiv_{def} \forall y[X(y) \rightarrow \mathsf{P}(y,x)] \wedge \neg\exists z[\mathsf{P}(z,x) \wedge \forall y[X(y) \rightarrow \mathsf{DR}(y,z)]]$$

Def. 1 La esfera *a* es tangente externamente a la esfera *b* si 1- la esfera *a* es disjunta de la *b*; 2- dadas dos esferas *x*, *y* disjuntas de *b*, que contienen la esfera *a* como parte, al menos una es parte de la otra.
Def. 2 La esfera *a* es tangente internamente a la esfera *b* si 1- la esfera *a* es parte propia de la *b*; 2- dadas dos esferas *x*, *y* partes de *b*, que contienen la esfera *a* como parte, al menos una es parte de la otra.
Def. 3 Las esferas *a* y *b* son diamétricas externamente a la esfera c si 1- *a* y *b* son tangentes externamente a c; 2- dadas dos esferas *x*, *y* disjuntas de c, tales que *a* es parte de *x* y *b* es parte de *y*, *x* es disjunta de *y*
Def. 4 Las esferas *a* y *b* son diamétricas internamente a la esfera c si 1- *a* y *b* son tangentes internamente a c, 2- dadas dos esferas *x*, *y* disjuntas de c, tales que *a* es tangente externamente a *x* y *b* a *y*, la esfera *x* es disjunta de *y*.

Def. 5 La esfera a es concéntrica con la esfera b si una de las siguientes se cumple: 1- a y b son idénticas, 2- a es parte propia de b y dadas dos esferas x, y diamétricas externamente a a y tangentes internamente a b, estas esferas son diamétricas internamente a b; 3- la esfera b es parte propia de a y dadas dos esferas x, y diamétricas externamente a b y tangentes internamente a a, estas esferas son diamétricas internamente a a

$$\begin{aligned}
\mathsf{ET}(a,b) \ &\equiv_{def}\ (\mathsf{S}(a) \wedge \mathsf{S}(b) \wedge \mathsf{DR}(a,b) \wedge \\
&\qquad \forall^{\circ} xy[(\mathsf{P}(a,x) \wedge \mathsf{P}(a,y) \wedge \mathsf{DR}(b,x) \wedge \mathsf{DR}(b,y)) \rightarrow (\mathsf{P}(x,y) \vee \mathsf{P}(y,x))])\\
\mathsf{IT}(a,b) \ &\equiv_{def}\ (\mathsf{S}(a) \wedge \mathsf{S}(b) \wedge \mathsf{PP}(a,b) \wedge \\
&\qquad \forall^{\circ} xy[(\mathsf{P}(a,x) \wedge \mathsf{P}(a,y) \wedge \mathsf{P}(x,b) \wedge \mathsf{P}(y,b)) \rightarrow (\mathsf{P}(x,y) \vee \mathsf{P}(y,x))])\\
\mathsf{ED}(a,b,c) \ &\equiv_{def}\ (\mathsf{ET}(a,c) \wedge \mathsf{ET}(b,c) \wedge \\
&\qquad \forall^{\circ} xy[(\mathsf{DR}(x,c) \wedge \mathsf{DR}(y,c) \wedge \mathsf{P}(a,x) \wedge \mathsf{P}(b,y)) \rightarrow \mathsf{DR}(x,y)])\\
\mathsf{ID}(a,b,c) \ &\equiv_{def}\ (\mathsf{IT}(a,c) \wedge \mathsf{IT}(b,c) \wedge \\
&\qquad \forall^{\circ} xy[(\mathsf{DR}(x,c) \wedge \mathsf{DR}(y,c) \wedge \mathsf{ET}(a,x) \wedge \mathsf{ET}(b,y)) \rightarrow \mathsf{DR}(x,y)])\\
a \circledcirc b \ &\equiv_{def}\ \mathsf{S}(a) \wedge \mathsf{S}(b) \wedge [\, (a = b)\\
&\qquad \vee (\mathsf{PP}(a,b) \wedge \forall^{\circ} xy[(\mathsf{ED}(x,y,a) \wedge \mathsf{IT}(x,b) \wedge \mathsf{IT}(y,b)) \rightarrow \mathsf{ID}(x,y,b)])\\
&\qquad \vee (\mathsf{PP}(b,a) \wedge \forall^{\circ} xy[(\mathsf{ED}(x,y,b) \wedge \mathsf{IT}(x,a) \wedge \mathsf{IT}(y,a)) \rightarrow \mathsf{ID}(x,y,a)])\ ]
\end{aligned}$$



ET(a,b) IT(a,b) ED(a,b,c) ID(a,b,c) a ◎ b

Relaciones entre esferas.

Def. 6 Un punto es la clase de las esferas concéntricas con una esfera determinada.
Def. 7 Los puntos α y β, son equidistantes de δ, si existe una esfera a elemento de δ tal que ninguna esfera y es elemento de α o β es parte de x.
Def. 8 Un sólido es una suma arbitraria de esferas.
Def. 9 El punto α es interior al sólido b si existe una esfera a que es al mismo tiempo elemento de α y parte de b.

Postulado: Las nociones de punto y equidistancia de dos puntos de un tercero satisfacen todos los postulados de la geometría euclideana ordinaria de tres dimensiones.
Es decir que todos los conceptos de la geometría euclideana pueden definirse por medio de los de punto y equidistancia de dos puntos de un tercero.

Teorema: El sistema de postulados de la geometría de los sólidos tiene un modelo en la geometría ordinaria euclideana de tres dimensiones interpretando esferas como interiores de las esferas euclideanas y la relación de parte como la de inclusión restringida a conjuntos abiertos regulares no vacíos.

Conversamente el sistema de geometría ordinaria euclideana de tres dimensiones tiene un modelo en la geometría de los sólidos interpretando punto y equidistancia en la forma indicada.

Conclusión

Hemos podido observar la estructura de la geometría de los sólidos de Tarski, en una reconstrucción bastante esquemática. En esta tarea se pudo destacar el papel que la noción mereológica de parte desempeña junto con la de esfera para la definición de punto como clase de las esferas concéntricas con una esfera determinada. Esta relación primitiva cumple un rol muy similar al de la relación de equidistancia en la versión acabada de 1965. Esta última relación permite definir la relación ternaria B "estar-entre"[3] y en general, considerando las distancias como esferas generadas por los segmentos reconstruir las nociones geométricas por un procedimiento similar al de Pieri que ya vimos aparecer en la geometría de los sólidos.

Notas

[1] En adelante FGS

[2] El empleo de la palabra inglesa '*sets*' en el título original de la traducción no es muy acertada (más bien equívoca) teniendo en cuenta el sentido técnico asociado a esa palabra en la literatura sobre el tema. Por ese motivo preferimos traducir en su lugar 'totalidades' (tal vez colectivos...) con un sentido más parecido a la palabra inglesa '*manifolds*' para 'mnogosci'

[3] $B(xyz) \leftrightarrow \forall u(ux \leq xy \wedge uz \leq zy \rightarrow u = y)$

Bibliografía

De Laguna, T., 1922 Point, Line and Surface, as Sets of Solids. *The Journal of Philosophy*, XIX(17). 449-461.

Lesniewski, S., 1916, Podstawy ogolnej teoryi mnogosci. I, Moscow: Prace Polskiego Kola Naukowegow Moskwie (Traducción inglesa de D. I. Barnett, 'Foundations of the General Theory of Sets. I', en S. Lesniewski, *Collected Works*, ed. por S. J. Surma et al., Dordrecht, Boston, y Londres: Kluwer Academic Publishers, 1992, Vol. 1, pp. 129 -173).

Lesniewski, S., 1927/1931, O podstawach matematyki, Przeglad Filozoficzny 30, 164 -206,(Traducción Inglesa de D. I. Barnett, 'On the Foundations of Mathematics', en S. Lesniewski, *Collected Works*, ed. por S. J. Surma et al., Dordrecht, Boston, y Londres: Kluwer Academic Publishers, 1992, Vol. 1, pp. 174-382). Especialmente el capítulo III pp. 206-226

W. Schwabhäuser, W. Szmielew, and A. Tarski, 1983, *Metamathematische Methoden in der Geometrie*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin, viii+482 pp.

L. W. Szczerba y A. Tarski, 1965, Metamathematical properties of some affine geometries, Proceedings of the 1964 *International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science* (Y. Bar-Hillel, editor), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 166–178.

Tarski, A., 1929, Les fondements de la géométrie des corps, *Ksiega Pamiatkowa Pierwszkego Polskiego Zjazdu Matematycznego*, suppl. to *Annales de la Société Polonaise de Mathématique* 7. 29-33 (Traducción inglesa de J. H. Woodger: Foundations of the Geometry of Solids, en A. Tarski, *Logics, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford: Clarendon, 1956, pp. 24-29).

A. Tarski, 1959, What is elementary geometry?, *The axiomatic method, with special reference to geometry and physics* (L. Henkin, P. Suppes, and A. Tarski, editors), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 16–29

A. Tarski, 1967, *The completeness of elementary algebra and geometry*, Institut Blaise Pascal, Paris, iv+50 pp.

A. N. Whitehead, 1920, *The Concept of Nature*, Cambridge University Press, Cambridge.

A. N. Whitehead, 1929, *Process and Reality*. Macmillan, Nueva York.