Variedades aproximadamente Kähler

Autor: **Carolina Rey**

Directora: **Dra. Isabel Dotti**

Córdoba, 2013

Resumen

En este trabajo estudiamos una clase particular de variedades casi hermitianas, las variedades aproximadamente Kähler. Estas variedades fueron introducidas por Alfred Gray en la década de los 70 y es a partir de sus publicaciones que desarrollamos nuestro estudio. Una variedad casi hermitiana M se dice aproximadamente Kähler si su estructura casi compleja J satisface: $(\nabla_X J)X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, y una variedad hermitiana se dice de Kähler si su estructura casi compleja J satisface: $(\nabla_X J)Y = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde ∇ es la conexión riemanniana en M. El objetivo es dar un teorema de descomposición para variedades NK y resaltar la importancia de las variedades NK en dimensión 6. Luego, terminamos dando algunos ejemplos.

Clasificación (Math. Subject Classification)

32Q60, 53C55.

Palabras Claves

-Variedad Nearly Kähler
-Variedad casi hermitiana
-Variedad casi complejas

Contenidos

Introducción

A lo largo de este trabajo vamos a centrar nuestro estudio en una clase particular de variedades casi hermitianas, las variedades aproximadamente Kähler. Estas variedades fueron introducidas por Alfred Gray en la década de los 70 y es a partir de sus publicaciones que desarrollaremos nuestro estudio.

Una variedad casi hermitiana M se dice aproximadamente Kähler si su estructura casi compleja J satisface: $(\nabla_X J)X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, y una variedad hermitiana se dice de Kähler si su estructura casi compleja J satisface: $(\nabla_X J)Y = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde ∇ es la conexión riemanniana en M. Es fácil ver que toda variedad aproximadamente Kähler de dimensión ≤ 4 es de Kähler. Además, es sabido que toda variedad casi hermitiana tiene dimensión par. Por lo tanto, interesa estudiar las variedades aproximadamente Kähler de dimensión ≥ 6.

El objetivo de este trabajo es estudiar propiedades de estas variedades que nos lleven a descubrir la importancia de las variedades aproximadamente Kähler de dimensión 6. Para ello, vamos a comenzar exponiendo algunos resultados obtenidos por Gray en [**9**],[**10**] y [**11**], que involucran el tensor J y el tensor curvatura asociada a la conexión de Levi Civita. Además, vamos a definir una nueva conexión ∇^1 sobre variedades casi hermitianas que cumple dos propiedades importantes: que tanto la métrica como el tensor J resultan paralelos respecto esta nueva conexión. Una conexión con estas propiedades se dice conexión hermitiana. Las variedades aproximadamente Kähler son un ejemplo natural de variedades casi hermitianas que admiten una conexión hermitiana con torsión totalmente antisimétrica. A partir de esta nueva definición, estudiaremos propiedades del tensor curvatura asociado a ∇^1, al que llamaremos según Gray *tensor curvatura característico.*

Una variedad aproximadamente Kähler M se dice *estricta*, si se cumple que para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_pM$ con $v \neq 0$, $(\nabla_v J) \neq 0$. Es decir, una variedad aproximadamente Kähler estricta es de algún modo, lo contrario de una variedad de Kähler. A partir de esta definición y de los resultados obtenidos en los capítulos 1 y 2, demostraremos en el último capítulo de este trabajo el siguiente teorema de descomposición para variedades aproximadamente Kähler dado por Gray en [**11**]:

Teorema 0.1. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler completa, simplemente conexa tal que $R - R^*$ es paralelo. Entonces $M = M^K \times M^S$ donde M^K es una variedad de Kähler y M^S es una variedad aproximadamente Kähler estricta. La descomposición de de Rham de M^K consiste en el producto de variedades de Kähler irreducibles, y la descomposición de de Rham de M^S consiste en el producto de variedades aproximadamente Kähler irreducibles de Einstein.*

Finalmente, daremos algunos ejemplos de variedades aproximadamente Kähler, poniendo especial énfasis en las de dimensión 6. El motivo de concentrarnos en esta dimensión es un resultado de Nagy, que prueba en [**19**] que una variedad aproximadamente Kähler estricta se puede descomponer como producto riemanniano de cierta clase conocida de variedades, y una aproximadamente Kähler de dimensión 6. Aunque permanece abierta la clasificación de las variedades aproximadamente Kähler de dimensión 6, tenemos una clasificación para aquellas que son homogéneas. Un resultado reciente de Butruille prueba que las únicas variedades aproximadamente Kähler estrictas simplemente conexas homogéneas de dimensión 6 son isomorfas a alguna de las siguientes variedades:

- $S^3 \times S^3$
- La esfera de dimensión seis,
- el espacio proyectivo complejo $CP(3)$,
- el espacio de banderas $F(1, 2)$.

Por este motivo, en la última sección del trabajo nos dedicaremos a estudiar la estructura de variedad aproximadamente Kähler de cada uno de estos espacios.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo enunciamos varios conceptos que serán utilizados a lo largo del trabajo. En la primera sección definimos la derivada covariante de un tensor, que luego será aplicada al tensor J en una variedad aproximadamente Kähler y a la 2-forma F asociada. Además exponemos las nociones de tensor curvatura, curvatura de Ricci y curvatura * de Ricci, con algunos resultados conocidos. Luego, en la sección 3, repasamos el enunciado del teorema de descomposición de Rham, que se aplicará en el capítulo 3 para dar un nuevo teorema de descomposición para variedades aproximadamente Kähler. Las últimas dos secciones introducen el concepto de variedades casi hermitianas.

1. Campos tensoriales

Sean V un K-módulo, K un anillo, y V^* el espacio dual de V. Sean r, s enteros no negativos.

Definición 1.1. Un *tensor de tipo* (r, s) en V es una función K-multilineal $A : (V^*)^r \times V^s \to K$.

Definición 1.2. Sea M una variedad diferenciable. Un *campo tensorial* A en M de tipo (r, s), es un tensor sobre $\mathfrak{X}(M)$ considerado como un $C^\infty(M)$-módulo. Es decir, es una aplicación $C^\infty(M)$-multilineal

$$A : (E^1(M))^r \times (\mathfrak{X}(M))^s \to C^\infty(M),$$

donde $E^1(M)$ es el conjunto de 1-formas en M.

Observación. Si $A : (\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ es $C^\infty(M) - multilineal$, se puede considerar a A como un tensor de tipo $(1, s)$ de la siguiente manera: Definimos $\overline{A} : E^1(M) \times (\mathfrak{X}(M))^s \to C^\infty(M)$ tal que $\overline{A}(\theta, X_1, \ldots, X_s) = \theta(A(X_1, \ldots, X_s))$

Ejemplo 1.3. Una métrica riemanianna es un tensor de tipo $(2, 0)$.

Ejemplo 1.4. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ fijo y ∇ una conexión afín en M, la aplicación

$$Y \to \nabla_Y X,$$

es un tensor de tipo $(1, 1)$.

Ejemplo 1.5. Sea ∇ una conexión afín en M, entonces la torsión:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

es un tensor de tipo $(1, 2)$.

Definición 1.6. Sea ∇ una conexión afín en M. Dado A un tensor de tipo (r, s), su derivada covariante es un tensor ∇A de tipo $(r, s + 1)$ definido como sigue:

(i) si $A = f \in C^\infty(M)$, entonces $\nabla f = df$
(ii) si $A = X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $(\nabla X)V = \nabla_V X$

(iii) si $A = \eta \in E^1(M)$, entonces $(\nabla_V \eta)(X) = \nabla\eta(V, X) = V(\eta(X)) - \eta(\nabla_V X)$, para $V, X \in \mathfrak{X}(M)$.

En general para A un tensor de tipo (r, s)

$$(\nabla_V A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s) = (\nabla A)(\theta_1, \ldots, \theta_r, V, X_1, \ldots, X_s)$$

$$= V(A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)) - \sum_{i=1}^{r} A(\theta_1, \ldots, \nabla_V \theta_i, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, X_s)$$

$$- \sum_{i=1}^{s} A(\theta_1, \ldots, \theta_r, X_1, \ldots, \nabla_V X_i, \ldots, X_s).$$

Consideremos dos casos particulares que serán de utilidad en los próximos capítulos: Sea F una 2-forma y sea A un tensor de tipo $(1, 2)$. Entonces sus derivadas covariantes resultan:

$$\nabla F(X, Y, Z) = \nabla_X F(Y, Z) = XF(Y, Z) - F(\nabla_X Y, Z) - F(Y, \nabla_X Z)$$

$$\nabla^2 F(W, X, Y, Z) = \nabla^2_{W,X} F(Y, Z)$$
$$= W\nabla F(X, Y, Z) - \nabla F(\nabla_W X, Y, Z) - \nabla F(X, \nabla_W Y, Z) - \nabla F(X, Y, \nabla_W Z)$$

$$(\nabla A)(W, X, Y) = (\nabla_W A)(X, Y) = WA(X, Y) - A(\nabla_W X, Y) - A(X, \nabla_W Y)$$

Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n. La diferencia entre la conexión de Levi Civita ∇ y cualquier otra conexión $\overline{\nabla}$ es un campo tensorial A de tipo $(1, 2)$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A(X, Y) \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

La conexión $\overline{\nabla}$ tiene torsión cero si y sólo si A es simétrica. La conexión $\overline{\nabla}$ tiene las mismas geodésicas que la conexión de Levi Civita si y sólo si A es antisimétrica.

2. Tensor curvatura

Sea M una variedad diferenciable con conexión afín ∇.

Definición 2.1. La *curvatura* de ∇ es la aplicación $R : (\mathfrak{X}(M))^3 \to \mathfrak{X}(M)$, dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X,Y]} Z - [\nabla_X, \nabla_Y] Z$$

Notemos que R es un tensor de tipo $(1, 3)$.

Proposición 2.2 (Primera Identidad de Bianchi). *Si ∇ es la conexión de Levi Civita en M, entonces*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Denotamos por R_{WXYZ} el valor del tensor curvatura en los campos $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, es decir:

$$R_{WXYZ} = \langle \nabla_{[W,X]} Y, Z \rangle - \langle [\nabla_W, \nabla_X] Y, Z \rangle$$

Sigue de la definición de R el siguiente lema.

LEMA 2.3. *Para todo* $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *se cumple:*

(i) $R_{WXYZ} = -R_{XWYZ}$
(ii) $R_{WXYZ} = -R_{WXZY}$
(iii) $R_{WXYZ} = R_{YZWX}$

Dado $p \in M$, U entorno abierto de p en M y $\{E_1, \ldots, E_{2n}\}$ campos vectoriales tales que $\{E_{1q}, \ldots, E_{2nq}\}$ es base ortonormal de T_qM para todo $q \in U$, definimos la *curvatura de Ricci* como la transformación lineal R dada por:

$$\langle RX, Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iYE_i}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

DEFINICIÓN 2.4. Una variedad riemanniana M se dice *de Einstein* si existe $\lambda \in C^\infty(M)$ tal que $\langle RX, Y\rangle = \lambda\langle X, Y\rangle$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

3. Teorema de descomposición de de Rham

Este teorema fue probado en 1931 por Georges de Rham. Una demostración completa y más moderna aparece en [**16**], aunque en [**3**] se afirma que todavía nos está faltando una prueba buena y rápida. Para una extensión del teorema de de Rham a variedades riemaniannas más generales, ver [**17**], nota 12.

TEOREMA 3.1. *Una variedad riemanniana simplemente conexa y completa se descompone como producto riemanniano* $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_l$ *donde* M_0 *es algún espacio euclídeo (posiblemente el espacio 0 dimensional) y* $M_1, \ldots, M_l$ *son variedades riemannianas simplemente conexas, completas e irreducibles. Esta descomposición es única salvo orden.*

4. Estructuras casi complejas sobre espacios vectoriales

Los resultados de álgebra lineal sobre espacios vectoriales obtenidos en esta sección serán aplicados a espacios tangentes a una variedad en la siguiente sección. En lo que sigue nos basamos en el libro [**17**].

Sea V un espacio vectorial real. Una *estructura compleja* J sobre V es un endomorfismo $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\operatorname{Id}$.

OBSERVACIÓN. Si V es un espacio vectorial real con una estructura compleja J, entonces V tiene dimensión par.

LEMA 4.1. *Sean* V *un espacio vectorial real de* $\dim V = 2n$ *y* J *una estructura compleja sobre* V. *Entonces existen* $x_1, \ldots, x_n \in V$ *tales que* $\{x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n\}$ *es una base de* V.

DEMOSTRACIÓN. Definimos la siguiente operación sobre V:

$$(a + ib)v = av + bJv,$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que con esta operación V resulta un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Sea $x_1, \ldots, x_n$ una base de V como espacio vectorial complejo. Entonces $\{x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n\}$ es una base de V como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En efecto supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} b_k Jx_k = 0,$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Por la definición de la multiplicación en V resulta que $b_k J x_k = i b_k x_k$. Luego queda

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} i b_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + i b_k) x_k = 0.$$

Como $x_1, \ldots, x_n$ es base de V como espacio vectorial complejo, tenemos que $a_k + i b_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $a_k = b_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. □

DEFINICIÓN 4.2. Un *producto interno hermitiano* sobre un espacio vectorial real V con una estructura compleja J es un producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ que satisface,

$$\langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todo $v, w \in V$.

OBSERVACIÓN. Si V es un espacio vectorial real con una estructura compleja J y un producto interno hermitiano $\langle \cdot , \cdot \rangle$, entonces

$$\langle Jv, v \rangle = 0$$

para todo $v \in V$, pues:

$$\langle Jv, v \rangle = \langle J^2 v, Jv \rangle \ = -\langle v, Jv \rangle \ = -\langle Jv, v \rangle$$

LEMA 4.3. *Sea $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un producto interno hermitiano sobre un espacio vectorial real V de dimensión $2n$ con una estructura compleja J. Entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in V$ tales que $\{x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n\}$ es una base ortonormal de V.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos inducción en n. Si $\dim V = 2$, tomamos un vector unitario $x \in V$. Por la observación anterior, $\{x, Jx\}$ son ortogonales. Además Jx es unitario, pues

$$\langle Jx, Jx \rangle = \langle x, x \rangle \ = 1$$

Ahora supongamos que $\dim V = 2n$ y que x_1 es un vector unitario en V. Sea W el subespacio generado por $\{x_1, Jx_1\}$, y $W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W en V. Notemos que $W^{\perp}$ es invariante por J. En efecto: si $v \in W^{\perp}$

$$\langle Jv, x_1 \rangle = -\langle v, Jx_1 \rangle = 0$$

y

$$\langle Jv, Jx_1 \rangle = \langle v, x_1 \rangle = 0$$

Entonces $Jv \in W^{\perp}$. Luego, por hipótesis inductiva, existe una base ortonormal de $W^{\perp}$ de la forma $\{x_2, \ldots, x_n, Jx_2, \ldots, Jx_n\}$. □

5. Estructuras casi complejas sobre variedades diferenciales

DEFINICIÓN 5.1. Una *estructura casi compleja* J sobre una variedad diferenciable real M, es un tensor de tipo $(1, 1)$ $J : TM \to TM$ tal que en cada punto $p \in M$, $J_p : T_pM \to T_pM$ es una estructura compleja. El par (M, J) se dice *variedad casi compleja.*

Notemos que toda variedad casi compleja tiene dimensión par.

DEFINICIÓN 5.2. Una *métrica hermitiana* sobre una variedad casi compleja (M, J) es una métrica riemanniana $\langle \cdot , \cdot \rangle$ tal que

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$$

para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Una variedad casi compleja con una métrica hermitiana se dice *variedad casi hermitiana.*

Observación. Una métrica hermitiana define un producto interno hermitiano en cada espacio tangente T_pM con respecto a la estructura compleja J_p.

Definición 5.3. Sea J una estructura casi compleja en M. Para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se define la *torsión* de J por

$$N_J(X,Y) = [JX, JY] - [X,Y] - J([JX,Y] + [X,JY]).$$

J se dice *integrable* si $N_J(X,Y) = 0$ para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A continuación, veremos que S^6 admite una estructura de variedad casi hermitiana, basados en el trabajo [**14**]. En el capítulo 3 continuaremos estudiando este ejemplo.

Ejemplo 5.4. Vamos a comenzar dando algunas nociones de números de Cayley, para llegar a definir un producto cruz en $\mathbb{R}^7$ con las siguientes propiedades (ver [**8**]):

$$A \times B = -B \times A, \tag{1}$$

$$\langle A \times B, C\rangle = \langle A, B \times C\rangle, \tag{2}$$

$$(A \times B) \times C + A \times (B \times C) = 2\langle A, C\rangle B - \langle B, C\rangle A - \langle A, B\rangle C, \tag{3}$$

$$\overline{\nabla}_A(B \times C) = \overline{\nabla}_A(B) \times C + B \times \overline{\nabla}_A(C), \tag{4}$$

para todo $A, B, C \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^7)$, donde $\overline{\nabla}$ es la conexión riemaniana de $\mathbb{R}^7$.

Sea $H = span_{\mathbb{R}}\{1, i, j, k\}$ el conjunto de *cuaterniones* con su base canónica $1, i, j, k$ que satisface:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i.$$

Un cuaternión $q = a + bi + cj + dk$ se dice *real* si $b = c = d = 0$ y se dice *puramente imaginario* si $a = 0$ y alguno de b,c o d es $\neq 0$. El conjugado de q es $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

Un *número de Cayley* u *octonión* es un par ordenado de cuaterniones $x = (q_1; q_2)$. Sea Ca el conjunto de los números de Cayley. El conjugado de un número de Cayley se define por $\overline{x} = (\overline{q}_1, -q_2)$. Un número de Cayley $x = (q_1, q_2)$ es *real* si q_1 es real y $q_2 = 0$, y es *puramente imaginario* si q_1 es un cuaternion imaginario puro. El conjunto Ca forma un álgebra no asociativa con la suma y la multiplicación dadas por:

$$\begin{aligned} (q_1, q_2) + (q_1', q_2') &= (q_1 + q_1', q_2 + q_2') \\ (q_1, q_2)(q_1', q_2') &= (q_1 q_1' - \overline{q}_2' q_2, q_2' q_1 + q_2 \overline{q}_1'), \end{aligned}$$

Sea $U = \{x \in Ca | x \text{ es puramente imaginario}\} \approxeq \mathbb{R}^7$. Se define un producto cruz $\times$ en U por:

$$x \times x' = \text{ la parte puramente imaginaria de } xx', \quad x, x' \in U.$$

Sea $M = S^6 = \{x \in U : |x| = 1\}$ y sea N el campo vectorial unitario normal a S^6 dado por: $N_p = p$ para todo $p \in M$. Definimos $J : \mathfrak{X}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ por $J(A) = N \times A$, para todo $A \in \mathfrak{X}(M)$. Veamos que $J^2 = -Id$ y que J es ortogonal con respecto a la métrica inducida de $\mathbb{R}^7$:

$$J^2(A) = N \times (N \times A) = 2\langle N, A\rangle N - \langle N, A\rangle N - \langle N, N\rangle A - (N \times N) \times A = -A.$$

$$
\begin{aligned}
\langle JA, JB\rangle &= \langle N \times A, N \times B\rangle \\
&= -\langle A, N \times (N \times B)\rangle \\
&= \langle A, (N \times N) \times B\rangle - 2\langle N, B\rangle\langle A, N\rangle + \langle N, B\rangle\langle A, N\rangle + \langle N, N\rangle\langle A, B\rangle \\
&= \langle A, B\rangle
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(S^6, J, \langle , \rangle)$ resulta una variedad casi hermitiana. Además, se puede ver que la estructura compleja J no es integrable.

Sea M una variedad casi hermitiana. Dado $p \in M$, U entorno abierto de p en M y $\{E_1, \dots, E_{2n}\}$ campos vectoriales tales que $\{E_{1q}, \dots, E_{2nq}\}$ es base de T_qM para todo $q \in U$, definimos la *curvatura de Ricci** como la transformación lineal R^* dada por:

$$\langle R^*X, Y\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R_{XJYE_iJE_i}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación. Si J una estructura casi compleja en M, para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumplen:

(5) $$N_J(X, JX) = 0,$$

pues por la antisimetría del corchete de Lie se tiene

$$N_J(X, JX) = [JX, -X] - [X, JX] - J([JX, JX] + [X, -X]) = 0.$$

(6) $$N_J(JX, Y) = -JN_J(X, Y),$$

pues:

$$
\begin{aligned}
N_J(JX, Y) &= [-X, JY] - [JX, Y] - J([-X, Y] + [JX, JY]) \\
&= -J([JX, JY] - [X, Y] - J([JX, Y] + [X, JY])) \\
&= -JN_J(X, Y)
\end{aligned}
$$

(7) $$N_J(X, Y) = -N_J(Y, X).$$

Lema 5.5. *Si M es una variedad casi compleja con conexión ∇ sin torsión, entonces N_J se escribe en términos de la conexión como:*

$$N_J(X, Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
N_J(X, Y) &= [JX, JY] - [X, Y] - J([JX, Y] + [X, JY]) \\
&= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X - J(\nabla_{JX}Y) + J(\nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY) + J(\nabla_{JY}X) \\
&= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX
\end{aligned}
$$

□

LEMA 5.6. *Sean (M, J) una variedad casi compleja, $p \in M$, U entorno abierto de p en M, y $\{X_1, \dots, X_n, JX_1, \dots, JX_n\}$ campos vectoriales tales que $\{X_{1q}, \dots, X_{nq}, J_qX_{1q}, \dots, J_qX_{nq}\}$ es base de T_qM para todo $q \in U$. Entonces $N_J|_U = 0$ si y sólo si $N_J(X_i, X_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $N_J|_U = 0$ es inmediato que $N_J(X_i, X_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Supongamos que $N_J(X_i, X_j) = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Entonces, por la observación anterior:

$$N_J(JX_i, X_j) = -JN_J(X_i, X_j) = 0 \quad \text{y}$$
$$N_J(JX_i, JX_j) = -JN_J(X_i, JX_j) = JN_J(JX_i, X_j) = 0.$$

□

DEFINICIÓN 5.7. Sea M una variedad diferenciable real con una estructura casi compleja J y una métrica hermitiana $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Si J es integrable, M se dice *variedad hermitiana.*

OBSERVACIÓN. Toda estructura casi compleja J sobre una variedad diferenciable real M de dimensión 2 es integrable. En efecto, sean $p \in M$, U entorno abierto de p y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\{X_q, J_qX_q\}$ forman una base de T_qM para cada $q \in U$. Luego por (5) $N_J(X, JX) = 0$.

CAPÍTULO 2

Introducción

Las variedades casi hermitianas fueron clasificadas en 16 clases por Gray y Hervella en [**13**]. En este trabajo, centramos nuestro estudio en una clase especial de variedades casi hermitianas, las variedades aproximadamente Kähler, exponiendo principalmente algunos resultados obtenidos por Gray en [**9**],[**10**] y [**11**]. En la primera sección de este capítulo, damos algunas definiciones importantes y estudiamos propiedades del tensor J y su derivada covariante. Luego, probamos algunos resultados que relacionan el tensor curvatura, la curvatura de Ricci y la curvatura * de Ricci con el tensor J en variedades aproximadamente Kähler. Finalmente en la sección 3 definimos el tensor curvatura característico R^1. Muchas propiedades importantes de las variedades aproximadamente Kähler dependen del tensor R^1, en particular, la identidad de Watanabe y Takamatsu (Teorema 4.5).

1. Variedades aproximadamente Kähler

Dada una estructura casi compleja J en una variedad riemanniana M con ∇ la conexión riemanniana, se define la derivada covariante del tensor J por:

$$\nabla J(X, Y) = (\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Notemos que ∇J es un tensor de tipo $(1, 2)$. Entonces su derivada covariante resulta:

$$\nabla^2 J(W, X, Y) = (\nabla^2_{W,X} J)Y = W\nabla J(X, Y) - \nabla J(\nabla_W X, Y) - \nabla J(X, \nabla_W Y)$$

Definición 1.1. Una variedad casi hermitiana M se dice *aproximadamente Kähler* si su estructura casi compleja J satisface:

$$(\nabla_X J)X = 0,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.2. Una variedad hermitiana M se dice *de Kähler* si su estructura casi compleja J satisface:

$$(\nabla_X J)Y = 0,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.3. *Sea $(M, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ una variedad hermitiana. Entonces M es aproximadamente Kähler si y sólo si*

$$(\nabla_X J)Y = -(\nabla_Y J)X \tag{8}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Supongamos que M es aproximadamente Kähler. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{X+Y} J)X + Y \\ &= (\nabla_X J)X + (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X + (\nabla_Y J)Y \\ &= (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X \end{aligned}$$

Ahora, si suponemos que vale (8) para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, en particular vale para $X = Y$ y M resulta aproximadamente Kähler. □

Proposición 1.4. *Sea $(M, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ una variedad casi hermitiana. Entonces para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple:*

(i) $\langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle = -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle$

(ii) $(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y$

Demostración.

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} \langle(\nabla_X J)Y, Z\rangle &= \langle\nabla_X JY - J(\nabla_X Y), Z\rangle \\ &= \langle\nabla_X JY, Z\rangle + \langle\nabla_X Y, JZ\rangle \\ &= X\langle JY, Z\rangle - \langle JY, \nabla_X Z\rangle + X\langle Y, JZ\rangle - \langle Y, \nabla_X JZ\rangle \\ &= \langle Y, J(\nabla_X Z)\rangle - \langle Y, \nabla_X JZ\rangle \\ &= -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle. \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad -J(\nabla_X J)Y = -J(\nabla_X JY) - \nabla_X Y = -J(\nabla_X JY) + \nabla_X J^2 Y = (\nabla_X J)JY$$

□

Lema 1.5. *Sea $(M, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ una variedad aproximadamente Kähler. Entonces para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple:*

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$$

Demostración. Por (8) y la proposición 1.4 resulta:

$$\begin{aligned} \langle(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY, Z\rangle &= -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \langle JY, (\nabla_{JX} J)Z\rangle \\ &= -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle + \langle JY, (\nabla_Z J)JX\rangle \\ &= -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \langle JY, J(\nabla_Z J)X\rangle \\ &= -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \langle Y, (\nabla_Z J)X\rangle \\ &= -\langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle + \langle Y, (\nabla_X J)Z\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo tanto, $\langle(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$. □

PROPOSICIÓN 1.6. *Si M es una variedad aproximadamente Kähler con estructura casi compleja J, entonces para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene*

$$N_J(V, W) = -4(\nabla_W J)JV.$$

En particular, si J es integrable, entonces M es de Kähler.

DEMOSTRACIÓN. Como ∇ es la conexión de Levi Civita en M, por el lema 5.5 del capítulo 1, la torsión de J queda:

$$N_J(X, Y) = (\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_{JY} J)X + (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX$$

Luego, como M es aproximadamente Kähler, resulta:

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= 2\{(\nabla_{JX} J)Y - (\nabla_Y J)JX\} \\ &= -2\{(\nabla_Y J)JX + (\nabla_Y J)JX\} \\ &= -4(\nabla_Y J)JX \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. En particular, si J es integrable,

$$0 = N_J(X, Y) = -4(\nabla_Y J)JX = 4J(\nabla_Y J)X$$

Entonces: $(\nabla_Y J)X = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y M resulta de Kähler. □

TEOREMA 1.7. *Si M es una variedad aproximadamente Kähler de dimensión 4, entonces M es de Kähler.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in M$ y U un entorno abierto de p en M. Como M tiene dimensión 4, existen campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\{X_q, Y_q, J_q X_q, J_q Y_q\}$ es una base de $T_q M$ para todo $q \in U$. Por el lema 5.6 del capítulo 1, basta ver que $N(X, Y) = 0$. En efecto:

$$\begin{gathered} \langle N_J(X, Y), Y\rangle = -4\langle(\nabla_Y J)JX, Y\rangle = 4g\langle JX, (\nabla_Y J)Y\rangle = 0 \\ \langle N_J(X, Y), JY\rangle = -4\langle(\nabla_Y J)JX, JY\rangle = -4\langle(\nabla_{JY} J)X, JY\rangle = 4\langle X, (\nabla_{JY} J)JY\rangle = 0 \\ \langle N_J(X, Y), X\rangle = -4\langle(\nabla_Y J)JX, X\rangle = 4\langle(\nabla_X J)JY, X\rangle = -\langle JY, (\nabla_X J)X\rangle = 0 \\ \langle N_J(X, Y), JX\rangle = -4\langle(\nabla_Y J)JX, JX\rangle = 4\langle(\nabla_{JX} J)Y, JX\rangle = -4\langle Y, (\nabla_{JX} J)JX\rangle = 0 \end{gathered}$$

□

2. Subvariedades casi complejas

El objetivo de esta sección es demostrar que toda subvariedad casi compleja de una variedad aproximadamente Kähler es aproximadamente Kähler. Vamos a comenzar introduciendo preliminares para su prueba, basados en el trabajo de Gray [**8**].

Sean M y $\overline{M}$ dos variedades riemannianas con M inmersa en $\overline{M}$. Denotamos por $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ el álgebra de las restricciones a M de campos vectoriales en $\overline{M}$. Entonces $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ se puede escribir como:

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^{\perp},$$

donde $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ consiste de todos los campos vectoriales perpendiculares a M. Sea P la proyección ortogonal $P : \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Denotamos por ∇ la conexión Riemanniana de M determinada por la métrica inducida, y $\overline{\nabla}$ la conexión Riemanniana de $\overline{M}$ restringida a $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

En [**8**] se define el *tensor configuración* $T : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ por:

$$T_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad \text{si } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad \text{y}$$
$$T_X Z = P(\overline{\nabla}_X Z) \quad \text{si } X \in \mathfrak{X}(M), Z \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}.$$

LEMA 2.1. *Sean $A \in \mathfrak{X}(M)$, $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$. Entonces:*
(i) *T es $C^{\infty}(M)-$bilineal,*
(ii) $\langle T_A(X), Y\rangle = -\langle T_A(Y), X\rangle$,
(iii) $T_A(\mathfrak{X}(M)) \subseteq \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, *y* $T_A(\mathfrak{X}(M)^{\perp}) \subseteq \mathfrak{X}(M)$.

DEMOSTRACIÓN. (i) sigue de la definición del tensor configuración.
(ii) resulta del hecho de que:

$$\langle \overline{\nabla}_A X, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_A Y\rangle = A\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_A X, Y\rangle + \langle X, \nabla_A Y\rangle$$

(iii) La primer afirmación es consecuencia de que $\nabla_A B$ se define como la componente tangencial de $\overline{\nabla}_A B$ para todo $A, B \in \mathfrak{X}(M)$. Luego, la diferencia $\overline{\nabla}_A B - \nabla_A B$ es normal a M. Además, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, se tiene:

$$\langle T_A X, Y\rangle = \langle P(\overline{\nabla}_A X), Y\rangle = 0.$$

Por lo tanto $T_A(\mathfrak{X}(M)^{\perp}) \subset \mathfrak{X}(M)$.

□

TEOREMA 2.2. *Sean $\overline{M}$ una variedad aproximadamente Kähler con estructura compleja J y M una subvariedad casi compleja de $\overline{M}$ (o sea, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ $JX \in \mathfrak{X}(M)$). Entonces M es aproximadamente Kähler.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que:

$$0 = (\overline{\nabla}_X J)X = (\nabla_X J)X + T_X JX - JT_X X$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación es tangente a M (porque es subvariedad casi compleja) y el resto es normal a M, entonces: $(\nabla_X J)X = 0$ y $T_X JX - JT_X X = 0$ □

3. El tensor curvatura en una variedad aproximadamente Kähler

En esta sección vamos a demostrar algunas propiedades inportantes del tensor curvatura que van a ser necesarias para las pruebas del teorema 3.5 y del teorema de Watanabe y Takamatsu (4.5) en la siguiente sección. También vamos a exponer algunas identidades que involucran a las curvaturas de Ricci y Ricci * en una variedad aproximadamente Kähler. En lo que resta de la sección, vamos a suponer que $(M, J, \langle,\rangle)$ es una variedad aproximadamente Kähler.

OBSERVACIÓN. Sea F la 2-forma definida por:

$$F(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces las derivadas covariantes de F resultan:

$$\nabla F(X, Y, Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z\rangle, \quad \text{y}$$
$$\nabla^2 F(W, X, Y, Z) = W\langle (\nabla_X J)Y, Z\rangle - \langle (\nabla_{\nabla_W X} J)Y, Z\rangle - \langle (\nabla_X J)\nabla_W Y, Z\rangle - \langle (\nabla_X J)Y, \nabla_W Z\rangle$$

Definimos $R_{WX}(F)$ por:

$$R_{WX}(F)(Y,Z) = -F(R_{WX}Y,Z) - F(Y,R_{WX}Z)$$

La demostración del siguiente lema está basada en el trabajo de Gray [**12**]. Los resultados de las dos proposiciones que siguen se fundamentan en [**9**] y [**10**].

Lema 3.1. *Para todo* $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$R_{XYXY} - R_{XYJXJY} = \| (\nabla_X J)Y \|^2$$

Demostración. Notemos que

$$R_{WX}(F)(Y,Z) = -\nabla^2 F(W,X,Y,Z) + \nabla^2 F(X,W,Y,Z)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 F(X,X,Y,JY)\\
&= X\langle(\nabla_X J)Y, JY\rangle - \langle(\nabla_{\nabla_X X}J)Y, JY\rangle - \langle(\nabla_X J)\nabla_X Y, JY\rangle - \langle(\nabla_X J)Y, \nabla_X JY\rangle\\
&= X\langle X, (\nabla_Y J)JY\rangle - \langle\nabla_X X, (\nabla_Y J)JY\rangle + \langle\nabla_X Y, (\nabla_X J)JY\rangle - \langle(\nabla_X J)Y, \nabla_X JY\rangle
\end{aligned}$$

Como M es aproximadamente Kähler, los dos primeros términos se anulan y queda:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 F(X,X,Y,JY) &= \langle J\nabla_X Y, (\nabla_X J)Y\rangle - \langle\nabla_X JY, (\nabla_X J)Y\rangle\\
&= - \| (\nabla_X J)Y \|^2
\end{aligned}$$

Usando las propiedades de J de la proposición (1.4), se prueba que

$$\nabla^2 F(W,X,Y,Z) = -\nabla^2 F(W,Y,X,Z) \quad \text{y que} \quad \nabla^2 F(Y,X,X,JY) = 0$$

para todo $W,X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Finalmente resulta que

$$\begin{aligned}
\| (\nabla_X J)Y \|^2 &= -\nabla^2 F(X,X,Y,JY)\\
&= \nabla^2 F(X,Y,X,JY)\\
&= -R_{XY}(F)(X,JY)\\
&= \langle R_{XY}X, Y\rangle - \langle R_{XY}JX, JY\rangle
\end{aligned}$$

□

Más generalmente, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Para todo* $W,X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ *se cumple:*

(i) $R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ} = \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle$

(ii) $R_{WXWZ} + R_{WJXWJZ} - R_{WJWXJZ} = 2\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle$

(iii) $R_{WXYZ} = R_{JWJXJYJZ} = R_{JWJXYZ} + R_{JWXJYZ} + R_{JWXYJZ}$

Demostración. (i) A partir del resultado del lema anterior, usando la linealidad de R y la primera identidad de Bianchi, resulta:

(9)
$$\begin{aligned}
&3R_{WXYZ} - R_{WYJXJZ} + R_{WZJXJY} - 2R_{WXJYJZ}\\
&= \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y\rangle + 2\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle
\end{aligned}$$

Reemplazando Y y Z por JY y JZ en (9) y usando la identidad de Bianchi otra vez, queda:

$$\begin{aligned}(10)\qquad & 3R_{WXJYJZ} + R_{WJYJXZ} - R_{WJZJXY} - 2R_{WXYZ} \\ &= \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y\rangle - 2\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle\end{aligned}$$

Ahora a (9) le restamos (10) y tenemos que:

$$(11)\qquad 5R_{WXYZ} - 5R_{WXJYJZ} - R_{WJXJYZ} - R_{WJXYJZ} = 4\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle$$

pues:

$$\begin{aligned}&-R_{WYJXJZ} + R_{WZJXJY} - R_{WJYJXZ} + R_{WJZJXY} \\ &= -R_{WYJXJZ} - R_{YJXWJZ} + R_{WZJXJY} + R_{ZJXWJY} \\ &= R_{JXWYJZ} - R_{JXWZJY}\end{aligned}$$

Finalmente, en (11) reemplazamos X e Y por JX y JY, y sumando $\frac{1}{5}$ del resultado a (11) obtenemos:

$$\frac{24}{5}(R_{WXYZ} - R_{WXJYJZ}) = \frac{24}{5}\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle$$

(iii) Usando (i) resulta:

$$\begin{aligned}R_{WXYZ} &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle + R_{WXJYJZ} \\ &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle + R_{JYJZJ(JW)J(JX)} \\ &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle - \langle(\nabla_{JY} J)JZ, (\nabla_{JW} J)JX\rangle + R_{JYJZJWJX} \\ &= R_{JWJXJYJZ}\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}R_{JWJXYZ} + R_{JWXJYZ} + R_{JWXYJZ} &= R_{YZJWJX} + R_{JWXJYZ} - R_{JWXJ(JY)JZ} \\ &= -\langle(\nabla_Y J)Z, (\nabla_W J)X\rangle + R_{YZWX} + \langle(\nabla_{JW} J)X, (\nabla_{JY} J)Z\rangle \\ &= R_{WXYZ}\end{aligned}$$

(ii) Usando la identidad de Bianchi resulta:

$$\begin{aligned}&R_{WXWZ} + R_{WJXWJZ} - R_{WJWXJZ} \\ &= R_{WXWZ} + R_{WJXWJZ} - R_{WJWXJZ} - (R_{WXJWJZ} + R_{JWWXJZ} + R_{XJWWJZ})\end{aligned}$$

Luego por (i) y (iii) tenemos que:

$$\begin{aligned}&R_{WXWZ} + R_{WJXWJZ} - R_{WJWXJZ} \\ &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle + R_{JWXJWZ} - R_{XJWWJZ} + R_{JWWXJZ} - R_{JWWXJZ} \\ &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle + R_{JWXWJZ} - R_{JWXJWJ(JZ)}\end{aligned}$$

Usando el resultado obtenido en (i) otra vez queda:

$$\begin{aligned}R_{WXWZ} + R_{WJXWJZ} - R_{WJWXJZ} &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle + \langle(\nabla_{JW} J)X, (\nabla_W J)JZ\rangle \\ &= \langle(\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle + \langle J(\nabla_W J)X, J(\nabla_W J)Z\rangle \\ &= 2\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.3. *Para todo* $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *se cumple:*

(i) $\langle 2\nabla^2 F(W,X,Y,Z)\rangle = -\langle(\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)JZ\rangle - \langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)JY\rangle - \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_Z J)JX\rangle$

(ii) $\langle \nabla^2 F(W,W,Y,JZ)\rangle = \langle \nabla^2 F(Y,Z,W,JW)\rangle = -\langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_W J)Z\rangle$

DEMOSTRACIÓN. (i) Por la demostración del lema 3.1 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^2 F(W,X,Y,Z)\rangle - \langle \nabla^2 F(X,W,Y,Z)\rangle &= -R_{WX}(F)(Y,Z) \\
&= F(R_{WX}Y,Z) + F(Y,R_{WX}Z) \\
&= \langle JR_{WX}Y,Z\rangle - \langle JY,R_{WX}Z\rangle \\
&= -R_{WXYJZ} - R_{WXJYZ}
\end{aligned}$$

Además sabemos que:

$$-\langle \nabla^2 F(W,Y,W,Z)\rangle + \langle \nabla^2 F(Y,W,W,Z)\rangle = \langle \nabla^2 F(W,W,W,Z)\rangle + \langle \nabla^2 F(Y,W,W,Z)\rangle$$

Pero $\langle \nabla^2 F(Y,W,W,Z)\rangle = 0$ pues M es aproximadamente Kähler, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^2 F(W,W,W,Z)\rangle &= -\langle \nabla^2 F(W,Y,W,Z)\rangle + \langle \nabla^2 F(Y,W,W,Z)\rangle \\
&= -R_{YWWJZ} - R_{YWJWZ} \\
&= -\langle(\nabla_Y J)W, (\nabla_W J)JZ\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos probado que:

$$\langle \nabla^2 F(W,W,W,Z)\rangle = -\langle(\nabla_W J)Y, J(\nabla_W J)Z\rangle. \tag{12}$$

Por la linealidad de los tensores en (12) tenemos:

$$\langle \nabla^2 F(W,X,Y,Z)\rangle - \langle \nabla^2 F(X,W,Y,Z)\rangle = -\langle(\nabla_W J)Y, J(\nabla_X J)Z\rangle - \langle(\nabla_W J)Z, J(\nabla_X J)Y\rangle. \tag{13}$$

Finalmente, de (12) y (13) obtenemos el resultado deseado.

(ii) Usando (i) resulta que:

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla^2 F(W,W,Y,JZ)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\{-\langle(\nabla_W J)W, (\nabla_Y J)Z\rangle + \langle(\nabla_W J)JZ, (\nabla_W J)JY\rangle + \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_{JZ} J)JW\rangle\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\langle(\nabla_W J)Z, (\nabla_W J)Y\rangle - \langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_Z J)W\rangle\} \\
&= -\langle(\nabla_W J)Y, (\nabla_W J)Z\rangle
\end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla^2 F(Y,Z,W,JW)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\{-\langle(\nabla_Y J)Z,(\nabla_W J)W\rangle + \langle(\nabla_Y J)JW,(\nabla_Z J)JW\rangle + \langle(\nabla_Y J)W,(\nabla_{JW} J)JZ\rangle\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\langle(\nabla_W J)Y,(\nabla_W J)Z\rangle - \langle(\nabla_Y J)W,(\nabla_W J)Z\rangle\} \\
&= -\langle(\nabla_W J)Y,(\nabla_W J)Z\rangle
\end{aligned}$$

□

Las siguientes fórmulas que involucran a los tensores R y R^* son debidas a Koto [**18**].

Sean $p \in M$, U entorno abierto de p y $\{E_1,\dots,E_{2n}\}$ campos vectoriales tales que $\{E_{1q},\dots,E_{2nq}\}$ es base de T_qM para todo $q \in U$, entonces

Lema 3.4. *R y R^* cumplen que:*

(i) $RJ = JR$

(ii) $R^*J = JR^*$

(iii) *Para todo $X.Y \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple:*

$$\langle(R-R^*)X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n}\langle(\nabla_X J)E_i,(\nabla_Y J)E_i\rangle \tag{14}$$

(iv) *Para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:*

$$-(R-R^*)JY = \sum_{i=1}^{2n}(\nabla^2_{E_iE_i}J)Y \tag{15}$$

Demostración. Observemos que $\{J_qE_{1_q},\dots,J_qE_{2n_q}\}$ también es base de T_qM para todo $q \in U$. Luego, para todo $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad \langle RJX,Y\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} R_{JXE_iYE_i} \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} R_{XJE_iJYJE_i} \\
&= -\langle RX,JY\rangle \\
&= \langle JRX,Y\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \langle R^*JX, Y\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R_{JXJYE_iJE_i} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R_{XYJE_iE_i} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} R_{XJ(JY)JE_iJ(JE_i)} \\
&= -\langle R^*X, JY\rangle \\
&= \langle JR^*X, Y\rangle
\end{aligned}$$

(iii) Usando la proposición 3.2 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\langle RX, Y\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} R_{XE_iYE_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} R_{E_iXE_iY} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} 2\langle(\nabla_{E_i}J)X, (\nabla_{E_i}J)Y\rangle - R_{E_iJXE_iJY} + R_{E_iJE_iXJY} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} 2\langle(\nabla_{E_i}J)X, (\nabla_{E_i}J)Y\rangle - \sum_{i=1}^{2n} R_{XJE_iYJE_i} + \sum_{i=1}^{2n} R_{XJYE_iJE_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2n} 2\langle(\nabla_{E_i}J)X, (\nabla_{E_i}J)Y\rangle - \langle RX, Y\rangle + 2\langle R^*X, Y\rangle
\end{aligned}$$

(iv) Veamos que $\sum_{i=1}^{2n}\langle(\nabla^2_{E_iE_i}J)Y, Z\rangle = -\langle(R - R^*)JY, Z\rangle$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n}\langle(\nabla^2_{E_iE_i}J)Y, Z\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} -\langle(\nabla^2_{E_iE_i}J)Y, J(JZ)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{2n}\langle(\nabla_{E_i}J)Y, (\nabla_{E_i}J)JZ\rangle \\
&= \langle(R - R^*)Y, JZ\rangle \\
&= \langle -J(R - R^*)Y, Z\rangle \\
&= \langle -(R - R^*)JY, JZ\rangle
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema expresa un resultado muy útil que involucra al tensor $R - R^*$ y a su derivada covariante. Estas fórmulas aparecen en [**18**] de una manera ligeramente diferente.

TEOREMA 3.5. *Para todo $U, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:*

$$\langle \nabla_U (R - R^*)X, Y\rangle = \frac{1}{2}\{\langle (R - R^*)(\nabla_U J)X, JY\rangle + \langle (R - R^*)JX, (\nabla_U J)Y\rangle\}$$

DEMOSTRACIÓN. Derivando la ecuación (14) tenemos:

$$\langle \nabla_U (R - R^*)X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{2n}\{\langle \nabla_U(\nabla_{E_i} J)X, (\nabla_{E_i} J)Y\rangle +$$

$$\langle (\nabla_{E_i} J)X, \nabla_U(\nabla_{E_i} J)Y\rangle - \langle (\nabla_{E_i} J)X, (\nabla_{E_i} J)\nabla_U Y\rangle - \langle (\nabla_{E_i} J)\nabla_U X, (\nabla_{E_i} J)Y\rangle\}.$$

Entonces, si $X = Y$ queda:

$$\begin{aligned}\langle \nabla_U (R - R^*)X, X\rangle &= 2\sum_{i=1}^{2n}\{\langle \nabla_U(\nabla_{E_i} J)X, (\nabla_{E_i} J)X\rangle - \langle (\nabla_{E_i} J)\nabla_U X, (\nabla_{E_i} J)X\rangle\}\\ &= 2\sum_{i=1}^{2n}\nabla^2 F(U, E_i, X, (\nabla_{E_i} J)X).\end{aligned}$$

Usando la proposición 3.3 resulta:

$$\langle \nabla_U (R - R^*)X, X\rangle = \sum_{i=1}^{2n}\{-\langle (\nabla_U J)E_i, (\nabla_X J)J(\nabla_{E_i} J)X\rangle$$

$$-\langle (\nabla_U J)(\nabla_{E_i} J)X, (\nabla_{E_i} J)JX\rangle + \langle (\nabla_U J)X, (\nabla_{JE_i} J)(\nabla_{E_i} J)X\rangle\}.$$

Pero los dos primeros términos de la suma se cancelan y nos queda:

$$\langle \nabla_U (R - R^*)X, X\rangle = \sum_{i=1}^{2n}\langle (\nabla_U J)X, (\nabla_{JE_i} J)(\nabla_{E_i} J)X\rangle. \tag{16}$$

Polarizando (16) obtenemos el resultado buscado.

□

4. El tensor curvatura característico

Una nueva conexión de importancia especial se define en una variedad casi hermitiana M por:

$$\begin{aligned}\nabla^1_X Y &= \nabla_X Y + \frac{1}{2}(\nabla_X J)JY\\ &= \frac{1}{2}(\nabla_X Y - J\nabla_X JY)\end{aligned}$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, donde ∇ es la conexión de Levi Civita en M. Sea T^1 la torsión de la conexión ∇^1.

Esta nueva conexión es una *conexión hermitiana*, es decir, satiface que tanto la métrica como el tensor J resultan paralelos. En efecto, $(\nabla^1_X J)Y = 0$, pues:

$$\begin{aligned}(\nabla^1_X J)Y &= \nabla^1_X JY - J\nabla^1_X Y \\ &= \frac{1}{2}\{\nabla_X JY + J\nabla_X Y - J\nabla_X Y - \nabla_X JY\} = 0.\end{aligned}$$

Y además, $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla^1_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^1_X Z\rangle$, pues:

$$\begin{aligned}\langle \nabla^1_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla^1_X Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \frac{1}{2}\langle(\nabla_X J)JY, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, (\nabla_X J)JZ\rangle \\ &= X\langle Y, Z\rangle + \frac{1}{2}\{\langle Y, (\nabla_X J)JZ\rangle - \langle Y, (\nabla_X J)JZ\rangle\} \\ &= X\langle Y, Z\rangle.\end{aligned}$$

Sea r el tensor de tipo $(0, 2)$ dado por:

$$r(X, Y) = \langle (R - R^*)X, Y\rangle, \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Una consecuencia importante de lo observado anteriormente es el resultado de la siguiente proposición. Para la demostración nos basamos en el trabajo de Nagy [**20**].

Proposición 4.1. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler. Entonces el tensor r es paralelo con respecto a ∇^1, es decir, $\nabla^1 r = 0$.*

Demostración. Como el tensor r es de tipo $(0, 2)$, su derivada covarinte es el tensor de tipo $(0, 3)$ dado por:

$$\begin{aligned}(\nabla^1_V r)(X, Y) &= Vr(X, Y) - r(\nabla^1_V X, Y) - r(X, \nabla^1_V Y) \\ &= V\langle (R - R^*)X, Y\rangle - \langle (R - R^*)\nabla^1_V X, Y\rangle - \langle (R - R^*)X, \nabla^1_V Y\rangle\end{aligned}$$

Usando la definición de ∇^1 y el teorema 3.5 resulta:

$$\begin{aligned}(\nabla^1_V r)(X, Y) &= \langle \nabla_V (R - R^*)X, Y\rangle - \frac{1}{2}\{\langle (R - R^*)(\nabla_V J)X, JY\rangle + \langle (R - R^*)JX, (\nabla_V J)Y\rangle\} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 4.2. *Si M es una variedad aproximadamente Kähler, la torsión T^1 es totalmente antisimétrica.*

DEMOSTRACIÓN. Usando que ∇ es sin torsión y que M es aproximadamente Kähler resulta que:

$$\begin{aligned}
T^1(X,Y) &= \nabla^1_X Y - \nabla^1_Y X - [X,Y] \\
&= \frac{1}{2}\{\nabla_X Y - J\nabla_X JY - \nabla_Y X + J\nabla_Y JX - 2[X,Y]\} \\
&= \frac{1}{2}\{-\nabla_X Y + \nabla_Y X - J\nabla_X JY + J\nabla_Y JX\} \\
&= \frac{1}{2}\{(\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX\} \\
&= (\nabla_X J)JY
\end{aligned}$$

Luego, es inmediato que $T^1(X,Y) = -T^1(Y,X)$. Además:

$$\langle T^1(X,Y), Z\rangle = \langle (\nabla_X J)JY, Z\rangle = -\langle Y, (\nabla_X J)JZ\rangle = -\langle T^1(X,Z), Y\rangle$$

□

Más aún, se puede probar que ∇^1 es la única conexión hermitiana sobre M con torsión totalmente antisimétrica (ver [**7**]). Un resultado no trivial probado por Kirichenko es que T^1 es paralela respecto ∇^1(ver [**15**]).

Consideremos ahora el tensor curvatura asociado a ∇^1: $R^1{}_{WX} = \nabla^1_{[W,X]} - [\nabla^1_W, \nabla^1_X]$.

Llamamos a $R^1{}_{WXYZ} = \langle R^1{}_{WX}Y, Z\rangle$ el *tensor curvatura característico* de M.

LEMA 4.3. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler. Para todo $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple que:*

(i) $R^1{}_{WXYZ} = R_{WXYZ} - \frac{1}{2}\langle (\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle + \frac{1}{4}\{\langle (\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle - \langle (\nabla_W J)Z, (\nabla_X J)Y\rangle\}$

(ii) $R^1{}_{WXYZ} = \frac{1}{4}\{3R_{WXYZ} + 2R_{WXJYJZ} + R_{WYJZJX} + R_{WZJXJY}\}$

(iii) $R^1{}_{WXYZ} = -R^1{}_{XWYZ} = -R^1{}_{WXZY} = R^1{}_{YZWX} = R^1{}_{WXJYJZ} = R^1{}_{JWJXJYJZ}$

DEMOSRACIÓN. (i) Usando la definición de R^1 y de ∇^1 resulta que:

$$R^1{}_{WXYZ} = \langle \nabla^1_{[W,X]}Y, Z\rangle - \langle \nabla^1_W \nabla^1_X Y, Z\rangle + \langle \nabla^1_X \nabla^1_W Y, Z\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\{\langle \nabla_X\nabla_W Y - \nabla_W\nabla_X Y + 2\nabla_{[W,X]}Y - 2J\nabla_{[W,X]}JY - J\nabla_X J\nabla_W Y + J\nabla_W J\nabla_X Y$$
$$-\nabla_X J\nabla_W JY + \nabla_W J\nabla_X JY - J\nabla_X\nabla_W JY + J\nabla_W\nabla_X JY, Z\rangle\}.$$

Luego, por la definición del tensor R tenemos:

$$R^1{}_{WXYZ} = \frac{1}{4}\{R_{WXYZ} + \langle \nabla_{[W,X]}Y, Z\rangle + 2\langle \nabla_{[W,X]}JY, JZ\rangle + \langle \nabla_X J\nabla_W Y, JZ\rangle - \langle \nabla_W J\nabla_X Y, JZ\rangle$$

$$-\langle \nabla_X J\nabla_W JY, Z\rangle + \langle \nabla_W J\nabla_X JY, Z\rangle + \langle \nabla_X\nabla_W JY, JZ\rangle - \langle \nabla_W\nabla_X JY, JZ\rangle\}.$$

$$= \frac{1}{4}\{R_{WXYZ} + R_{WXJYJZ} + \langle \nabla_{[W,X]}Y, Z\rangle + \langle \nabla_{[W,X]}JY, JZ\rangle + \langle (\nabla_X J)\nabla_W Y, JZ\rangle$$

$$+\langle J\nabla_X\nabla_W Y, JZ\rangle - \langle (\nabla_W J)\nabla_X Y, JZ\rangle - \langle J\nabla_W\nabla_X Y, JZ\rangle - \langle (\nabla_X J)\nabla_W JY, Z\rangle$$

$$+\langle \nabla_X\nabla_W JY, JZ\rangle + \langle (\nabla_W J)\nabla_W J)\nabla_X JY, Z\rangle - \langle \nabla_W\nabla_X JY, JZ\rangle\}.$$

$$= \frac{1}{4}\{2R_{WXYZ} + 2R_{WXJYJZ} - \langle (\nabla_X J)(\nabla_W J)Y, Z\rangle + \langle (\nabla_W J)(\nabla_X J)Y, Z\rangle\}.$$

Finalmente, usando la proposición (3.2) resulta:

$$R^1{}_{WXYZ} = \frac{1}{4}\{4R_{WXYZ} - 2\langle (\nabla_W J)X, (\nabla_W J)Z\rangle + \langle (\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle + \langle (\nabla_X J)Y, (\nabla_W J)Z\rangle\}.$$

(ii) Usando (i) tenemos que:

$$R^1{}_{WXYZ} = \frac{1}{4}\{4R_{WXYZ} - 2\langle (\nabla_W J)X, (\nabla_Y J)Z\rangle + \langle (\nabla_W J)Y, (\nabla_X J)Z\rangle + \langle (\nabla_X J)Y, (\nabla_W J)Z\rangle\}$$

Luego, por la proposición (3.2) resulta:

$$R^1{}_{WXYZ} = \frac{1}{4}\{2R_{WXYZ} + 2R_{WXJYJZ} + R_{WYXZ} - R_{WYJXJZ} - R_{WZXY} + R_{WZJXJY}\}.$$

$$= \frac{1}{4}\{2R_{WXYZ} + 2R_{WXJWJZ} - R_{YWXZ} - R_{WYJXJZ} - R_{XYWZ} + R_{WZJXJY}\}.$$

Finalmente, usando la identidad de Bianchi, queda:

$$R^1{}_{WXYZ} = \frac{1}{4}\{3R_{WXYZ} + 2R_{WXJYJZ} - R_{WYJXJZ} + R_{WZJXJY}\}.$$

(iii) es un caso particular de (ii).

(iv) Es consecuencia de (i) y de las propiedades del tensor R que ya probamos.

□

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler. Para todo $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:*

$$(\nabla_V R^1)_{WXYZ} + (\nabla_X R^1)_{VWYZ} + (\nabla_W R^1)_{XVYZ}$$
$$= -\frac{1}{4}\langle (\nabla_Y J)Z, (\nabla_V J)(\nabla_W J)X + (\nabla_X J)(\nabla_V J)W + (\nabla_W J)(\nabla_X J)V\rangle$$

La prueba de esta proposición se encuentra en [**11**]. El siguiente resultado fue probado por Watanabe y Takamatsu en [**24**]. Aquí damos una demostración más simple, dada por Gray en [**11**].

TEOREMA 4.5. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler. Para todo $W, X \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple:*

$$\sum_{i,j=1}^{2n} \langle (R - R^*)E_i, E_j\rangle (R_{WE_iXE_j} - 5R_{WE_iJXJE_j}) = 0$$

Demostración. Usando las propiedades de R^1 del lema (4.3) resulta:

$$\sum_{i=1}^{2n} R^1{}_{WXE_i(\nabla_V J)E_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\{R^1{}_{WXE_i(\nabla_V J)E_i} - R^1{}_{WXJE_i(\nabla_V J)JE_i}\} = 0. \tag{17}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_U R^1)_{WXE_i(\nabla_V J)E_i} = \sum_{i=1}^{2n}\{UR^1{}_{WXE_i(\nabla_V J)E_i} - R^1{}_{\nabla_U WXE_i(\nabla_V J)E_i}$$
$$-R^1{}_{W\nabla_U XE_i(\nabla_V J)E_i} - R^1{}_{WX\nabla_U E_i(\nabla_V J)E_i} - R^1{}_{WXE_i(\nabla_{UV} J)E_i}\}.$$

Luego por (17) esta ecuación queda:

$$\sum_{i=1}^{2n}(\nabla_U R^1)_{WXE_i(\nabla_V J)E_i} = -\sum_{i=1}^{2n} R^1{}_{WXE_i(\nabla^2_{UV} J)E_i}. \tag{18}$$

Ahora tomemos $U = V = E_j$ y sumemos. Usando (15) obtenemos:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} R^1{}_{WXE_i(\nabla^2_{E_jE_j} J)E_i} = -\sum_{i=1}^{2n} R^1{}_{WXE_i(R-R^*)JE_i}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{2n} R^1{}_{WXE_iJE_j}\langle (R-R^*)E_i, E_j\rangle$$

Tomando $X = JW$ y usando el lema (4.3) resulta:

$$\sum_{i,j=1}^{2n} R^1{}_{WJWE_i(\nabla^2_{E_jE_j} J)E_i} = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{2n}(R_{WE_iWE_j} - 5R_{WE_iJWjE_j})\langle (R-R^*)E_i, E_j\rangle. \tag{19}$$

Por otro lado tenemos que:

$$\sum_{i,j=1}^{2n}(\nabla_{E_j} R^1)_{WJWE_i(\nabla_{E_j} J)E_i} = \sum_{i,j,k=1}^{2n}\langle (\nabla_{E_i} J)E_j, E_k\rangle (\nabla_{E_i} R^1)_{E_jE_kWJW}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{2n}\{\langle (\nabla_{E_i} J)E_j, E_k\rangle (\nabla_{E_i} R^1)_{E_jE_kWJW} + \langle (\nabla_{E_k} J)E_i, E_j\rangle$$
$$(\nabla_{E_k} R^1)_{E_iE_jWJW} + \langle (\nabla_{E_j} J)E_k, E_i\rangle (\nabla_{E_j} R^1)_{E_kE_iWJW}\}.$$

Usando que $\langle (\nabla_{E_i} J)E_j, E_k\rangle$ es antisimétrica con respecto a i, j, k y la proposición 4.4 resulta:

$$\sum_{i,j=1}^{2n}(\nabla_{E_j} R^1)_{WJWE_i(\nabla_{E_j} J)E_i} = 0. \tag{20}$$

Luego, por (18), (19) y (20) llegamos al resultado deseado.

□

CAPÍTULO 3

La Estructura de variedades aproximadamente Kähler

En la primera sección de este capítulo seguiremos fundamentalmente el trabajo de Gray [**11**], para llegar a demostrar el teorema de descomposición de variedades aproximadamente Kähler. En la segunda sección daremos algunos ejemplos bien conocidos.

1. Descomposición de variedades aproximadamente Kähler

DEFINICIÓN 1.1. Sea M una variedad aproximadamente Kähler. Decimos que M es *estricta* si para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_pM$ con $v \neq 0$ se cumple que $(\nabla_v J) \neq 0$.

Así, una variedad aproximadamente Kähler estricta es, por así decir, lo contrario de una variedad de Kähler. El objetivo de esta sección es dar condiciones bajo las cuales una variedad aproximadamente Kähler tiene una descomposición, ya sea localmente o globalmente, de la forma: $M = M^K \times M^S$, donde M^K es una variedad de Kähler y M^S es una variedad aproximadamente Kähler estricta. Para ello, precisaremos los siguientes lemas.

LEMA 1.2. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler y sea $p \in M$. Denotamos por $S_1(p), \ldots, S_s(p)$ a los autoespacios de $R - R^*$ asociados a los autovalores no nulos de $R - R^*$, y sea $\mathcal{H}(p) = \{v \in T_pM | (R - R*)v = 0\}$. Entonces $\mathcal{H}(p) = \{v \in T_pM | \nabla_v J = 0\}$ y la distribución $p \to \mathcal{H}(p)$ es integrable sobre cualquier subvariedad abierta de M en el que la $dim\mathcal{H}(p)$ es constante. Además, se puede descomponer el espacio tangente como una suma directa de la siguiente forma: $T_pM = \mathcal{H}(p) \oplus S_1(p) \oplus \cdots \oplus S_s(p)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $(\nabla_v J)Y = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, por (14), $(R - R^*)v = 0$. Recíprocamente, si $v \in \mathcal{H}(p)$, por (14), $\sum_{i=1}^{2n} \langle (\nabla_v J)E_i, (\nabla_Y J)E_i \rangle = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. En particular, $\sum_{i=1}^{2n} \parallel (\nabla_v J)E_i \parallel^2 = 0$. Entonces $(\nabla_v J)E_i = 0$ para todo i. Por lo tanto, $(\nabla_v J) = 0$.

Sea N una subvariedad abierta de M en el que la $\dim\mathcal{H}(p)$ es constante para todo $p \in N$. Veamos que la distribución $p \to \mathcal{H}(p)$ es integrable sobre N. Por el teorema de Frobenius basta ver que la distribución es involutiva.

Sean $W, X \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $W_p, X_p \in \mathcal{H}(p)$ para todo $p \in N$, y sean $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Queremos ver que $[W, X] \in \mathcal{H}(p)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{[W,X]} J)Y, Z \rangle &= \langle \nabla_{[W,X]} JY, Z \rangle + \langle (\nabla_{[W,X]} Y, JZ \rangle \\
&= R_{WXJYZ} + \langle [\nabla_W, \nabla_X] JY, Z \rangle + R_{WXYJZ} + \langle [\nabla_W, \nabla_X] Y, JZ \rangle \\
&= \langle (\nabla_W J)X, (\nabla_{JY} J)Z \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

A partir de ahora, asumamos que M es una variedad aproximadamente Kähler simplemente conexa. Sea $M = M^0 \times M^1 \times \cdots \times M^l$ la descomposición de de Rham de M. Aquí M^0 denota algún espacio euclídeo, y $M^1, \ldots, M^l$ son variedades riemannianas irreducibles.

Consideremos una nueva descomposición a partir de la descomposición de deRham: $M = M^K \times M^S$ donde, M^K denota el producto de todos los factores M^i tales que $(\nabla_X J) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M^i)$, y M^S es el producto de los factores restantes.

En los siguientes lemas asumimos también que $R - R^*$ es paralelo en M, o sea, que $\nabla(R - R^*) = 0$. En [**11**] está probado que en cualquier variedad aproximadamente Kähler de $dim \leq 8$ $\nabla(R - R^*) = 0$. Además en el mismo trabajo se dan condiciones de para que se satisfaga que $R - R^*$ es paralelo.

Lema 1.3. *Para cada factor M^i de la descomposición de de Rham de M existe una constante λ_i tal que $(R - R^*)X = \lambda_i X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M^i)$.*

Demostración. Por el teorema de de Rham el grupo de holonomía de M actúa irreduciblemente sobre cada espacio tangente T_pM^i. Además $R - R^*$ conmuta con el grupo de holonomía de M en p pues es paralelo. Luego, por el lema de Schur, $R - R^* = \lambda_i(p)I : T_pM^i \to T_pM^i$. Como $R - R^*$ es paralelo, $\lambda_i(p)$ es una función constante. □

Lema 1.4. *$M^i \subset M^K$ si y sólo si $\lambda_i = 0$*

Demostración. Sabemos que $M^i \subset M^K$ si y sólo si $(\nabla_X J) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M^i)$. Luego, por el lema (1.2) $(\nabla_X J) = 0$ si y sólo si $X_p \in \mathcal{H}(p)$, es decir, si $(R - R^*)X = 0$. Por el lema (1.3), resulta:

$$M^i \subset M^K \text{si y sólo si } (R - R^*)X = \lambda_i X = 0 \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M^i) \text{si y sólo si } \lambda_i = 0.$$

□

Lema 1.5. *Sea $p \in M$. Entonces $T_pM^K = \mathcal{H}(p)$.*

Demostración. Dado $x \in T_pM^K$, podemos escribir: $x = \sum_{M^i \subset M^K} x_i$ con cada $x_i \in T_pM^i$. Luego:

$$(\nabla_x J) = \sum_{M^i \subset M^K} (\nabla_{x_i} J) = 0,$$

entonces $x \in \mathcal{H}(p)$.

Si $x \in \mathcal{H}(p)$,

$$0 = (R - R^*)x = \sum_{M^i \subset M^K} \lambda_i x_i.$$

Como los $\{x_i\}$ son linealmente independientes, $\lambda_i x_i = 0$ para todo i tal que $M^i \subset M^K$. Entonces $x \in T_pM^K$. □

Lema 1.6. *M^K es una subvariedad de Kähler de M y M^S es una subvariedad aproximadamente Kähler de M.*

Demostración. Notemos que $(M^K, J, \langle , \rangle)$ y $(M^S, J, \langle , \rangle)$ son variedades casi hermitianas, pues:

Si $x \in T_pM^K$, $(R - R^*)J_p x = J(R - R^*)x = 0$ y entonces $J_p x \in T_pM^K$.

Luego, para todo $X \in \mathfrak{X}(M^K)$ $\nabla_X J = 0$, entonces M^K es de Kähler. Además M^S es aproximadamente Kähler porque es subvariedad casi compleja de una variedad aproximadamente Kähler, por el teorema 2.2 del capítulo anterior. $\square$

Notemos que la restricción de la curvatura de Ricci R a cualquier factor M^i en la descomposición de deRham es la curvatura de Ricci de M^i. Lo mismo ocurrre con la curvatura * de Ricci. Por lo tanto, denotamos R, R^*, y $R - R^*$ en ambos casos.

LEMA 1.7. *En M^S se cumple que $R = 5R^*$. Además R y R^* son paralelos en M^S.*

DEMOSTRACIÓN. Para $\lambda_j \neq 0$, consideremos $M(\lambda_j)$ el producto de todos los M^i tales que $R - R^* = \lambda_j I$ en M^i. Entonces $M(\lambda_j)$ es una subvariedad casi compleja de M y por lo tanto, es aproximadamente Kähler. Luego, por el teorema 4.5, tenemos:

$$0 = \sum_{k,l} \langle (R - R^*)E_k, E_l \rangle (R_{YE_kZE_l} - 5RYE_kJZJE_l)$$

para todo $Z, Y \in \mathfrak{X}(M(\lambda_j))$.

Como $R - R^* = \lambda_j I$ en M^i y $\lambda_j \neq 0$, entonces

$$0 = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_j (R_{YE_kZE_k} - 5R_{YE_kJZJE_k})$$

$$\sum_{k=1}^{2n} R_{YE_kZE_k} = \sum_{k=1}^{2n} 5R_{YE_kJZJE_k}$$

$$\langle RY, Z \rangle = 5\langle R^*Y, Z \rangle$$

Por lo tanto, $R = 5R^*$ en M^S.

Además como $R - R^*$ es paralelo y $R = 5R^*$ en M^S, entonces R y R^* son paralelos en M^S. $\square$

Para demostrar el lema 1.9, vamos a necesitar el siguiente resultado, que está probado en [**17**].

TEOREMA 1.8. *Sea M una variedad de Kähler simplemente conexa y completa y sea $M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_l$ su descomposición de de Rham. Entonces $M_0, \ldots, M_l$ son variedades de Kähler.*

LEMA 1.9. *M^K y cualquier $M^i \subset M^K$ son subvariedades de Kähler de M; M^S y cualquier $M^i \subset M^S$ son subvariedades aproximadamente Kähler estrictas de M.*

PROOF. Por el lema 1.5 sabemos que M^K es una variedad de Kähler. Luego, por el teorema anterior, cualquier $M^i \subset M^K$ es subvariedades de Kähler de M. Veamos ahora que cualquier $M^i \subset M^S$ es subvariedad aproximadamente Kähler de M. Para esto, basta ver que $M^i \subset M^S$ es una subvariedad casi compleja.

En efecto, supongamos que $J(T_pM^i) \neq T_pM^i$ para algún $M^i \subset M^S$, y algún $p \in M^i$. Entonces existe $v \in T_pM^i$ tal que $v \neq 0$ y $\langle Jv, y \rangle = 0$ para todo $y \in T_pM^i$. Luego:

$$\langle R^*v, v \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} R_{vJve_jJe_j} = 0.$$

Por el lema 1.7, resulta que $0 = \langle (R - R^*)v, v\rangle = \lambda_i \parallel v \parallel^2$. Pero esto contradice al lema 1.4. Por lo tanto, M^i es una subvariedad casi compleja de M^S, y en consecuencia, es aproximadamente Kähler. Además es estricta pues M^S es el producto de los factores M^i tales que $(\nabla_X J) \neq 0$. □

LEMA 1.10. *Todo $M^i \subset M^S$ es una variedad de Einstein.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M^i \subset M^S$. Entonces $R - 5R^* = 0$ y $R - R^* = \lambda_i I$ en M^i. Por lo tanto, $R = \frac{5}{4}\lambda_i I$. □

LEMA 1.11. *M^S y $M^i \subset M^S$ tienen la curvatura de Ricci R y la curvatura * de Ricci R^* positivas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \neq 0 \in T_pM^i$. Entonces

$$0 < \lambda_i \parallel x \parallel^2 = \langle (R - R^*)x, x\rangle = \frac{4}{5}\langle Rx, x\rangle = 4\langle R^*x, x\rangle$$

□

Ahora resumimos los resultados de los lemas anteriores en el siguiente teorema dado por Gray en [**11**].

TEOREMA 1.12. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler completa, simplemente conexa tal que $R - R^*$ es paralelo. Entonces $M = M^K \times M^S$ donde M^K es una variedad de Kähler y M^S es una variedad aproximadamente Kähler estricta. La descomposición de de Rham de M^K consiste en el producto de variedades de Kähler irreducibles, y la descomposición de de Rham de M^S consiste en el producto de variedades aproximadamente Kähler irreducibles de Einstein.*

A continuación daremos algunas condiciones suficientes para que $R - R^*$ sea paralelo.

TEOREMA 1.13. *$R - R^*$ es paralelo si se cumple alguna de las siguiente situaciones:*

(i) *$R - R^*$ tiene sólo un autovalor.*

(ii) *$R - R^*$ tiene exactamente dos autovalores y uno de ellos es cero.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $R - R^*$ tiene sólo un autovalor $\lambda \neq 0$. Sea $p \in \mathfrak{X}(M)$, entonces por el lema 1.2 podemos escribir:

$$T_pM = \mathcal{H}(p) \oplus S(p),$$

donde $S(p)$ es el autoespacio asociado al autovalor λ y $\mathcal{H}(p) = \{0\}$. Es decir, para todo $x \in T_pM$, $(R - R^*)x = \lambda x$. Luego por el teorema 3.5 tenemos que para todo $x, y \in T_pM$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla_U(R - R^*)x, y\rangle &= \frac{1}{2}\{\langle (R - R^*)(\nabla_U J)x, Jy\rangle + \langle (R - R^*)Jx, (\nabla_U J)y\rangle\} \\ &= \frac{1}{2}\lambda\{\langle (\nabla_U J)x, Jy\rangle + \langle Jx, (\nabla_U J)y\rangle\} \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $R - R^*$ es paralelo.

(ii) se prueba análogamente.

□

OBSERVACIÓN. Nagy prueba en [**20**] el teorema 1.12 sin la hipótesis de que $R - R^*$ sea paralelo.

En el capítulo anterior caracterizamos las variedades aproximadamente Kähler de $dim \leq 4$. Ahora vamos a poner mayor énfasis en las variedades aproximadamente Kähler de dimensión 6, donde los tensores ∇J y $R - R^*$ también son bastantes simples.

TEOREMA 1.14. *Sea M una variedad aproximadamente Kähler con $dimM = 6$. Supongamos que M no es de Kähler. Entonces se cumple que:*

(i) *Para todo $X, U \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\| (\nabla_X J)U \|^2 = \alpha\{\| X \|^2 - \langle X, U\rangle^2 - \langle JX, U\rangle^2\} \tag{21}$$

donde α es una constante positiva;

(ii) $R - R^* = 4\alpha\,\mathrm{Id}$,

(iii) *M es una variedad aproximadamente Kähler estricta;*

(iv) *M es una variedad de Einstein.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in M$ y sean $\{e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$ vectores ortonormales en T_pM. Es fácil ver que $(\nabla_{e_1} J)e_2$ es perpendicular a cualquiera de esos cuatro vectores. Podemos escribir $(\nabla_{e_1} J)e_2 = \alpha e_3$, donde $\alpha =\| e_3 \|^2$ y resulta que $\{e_1, e_2, e_3, Je_1, Je_2, Je_3\}$ es una base ortonormal de T_pM. Luego tenemos que: $(\nabla_{e_2} J)e_3 = \alpha e_1$ pues:

$$\begin{gathered}
\langle(\nabla_{e_2} J)e_3, e_1\rangle = -\langle e_3, (\nabla_{e_2} J)e_1\rangle = \langle e_3, (\nabla_{e_1} J)e_2\rangle = \alpha\\
\langle(\nabla_{e_2} J)e_3, Je_1\rangle = -\langle Je_3, (\nabla_{e_2} J)e_1\rangle = \langle Je_3, e_3\rangle = 0\\
\langle(\nabla_{e_2} J)e_3, e_2\rangle = -\langle e_3, (\nabla_{e_2} J)e_2\rangle = 0\\
\langle(\nabla_{e_2} J)e_3, Je_2\rangle = -\langle Je_3, (\nabla_{e_2} J)e_2\rangle = 0\\
\langle(\nabla_{e_2} J)e_3, e_3\rangle = -\langle(\nabla_{e_3} J)e_2, e_3\rangle = \langle e_2, (\nabla_{e_3} J)e_3\rangle = 0\\
\langle(\nabla_{e_2} J)e_3, Je_3\rangle = -\langle(\nabla_{e_3} J)e_2, Je_3\rangle = \langle Je_2, (\nabla_{e_3} J)e_3\rangle = 0
\end{gathered}$$

Análogamente se prueba que $(\nabla_{e_i} J)e_j = \alpha e_k$ donde (ijk) es cualquier permutación par de (123). Luego, resulta inmedito que se cumple la ecuación (21). Sólo falta ver que α es una función constante.

Usando (14) y (21) tenemos que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
\langle(R - R^*)X, X\rangle &= \sum_{i=1}^{2n} \| (\nabla_X J)E_i \|^2\\
&= \alpha \sum_{i=1}^{2n} \{\| X \|^2 - \langle X, E_i\rangle^2 - \langle JX, E_i\rangle^2\}\\
&= 4\alpha \| X \|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto $R - R^* = 4\alpha I$, donde $\alpha > 0$. Luego $M^K = \{0\}$, o sea, M es estricta, y por el lema 1.10, es de Einstein. Entonces, α es constante.

□

Un resultado de Nagy publicado en [**19**] generaliza el teorema de descomposición de Gray, en el sentido que especifica la parte estricta y además resalta la importancia de las variedades aproximadamente Kähler de dimensión 6. Dice que una variedad aproximadamente Kähler estricta y completa es localmente un producto riemanniano de variedades aproximadamente Kähler homogéneas, espacios twistor sobre variedades de Kähler cuaterniónicas y variedades aproximadamente Kähler de dimensión 6.

Por lo antes visto, la geometría aproximadamente Kähler estricta está concentrada en la dimensión 6. Butruille clasifica en [**4**] las variedades aproximadamente Kähler homogéneas de dimensión 6. El resultado es el siguiente.

TEOREMA 1.15. *Las únicas variedades aproximadamente Kähler estrictas homogéneas simplemente conexos de dimensión 6 son isomorfas a G/H donde G y H están dados en la siguiente lista:*

(1) $G = S^3 \times S^3$ *y* $H = 1$.

(2) $G = G_2$ *y* H *es* $SU(3)$ *(en este caso* G/H *es una esfera de dimensin seis) o sus subgrupos finitos.*

(3) $G = Sp(2)$ *y* $H = S^1 \times SU(2)$ *(de este modo* G/H *es el espacio proyectivo complejo* $CP(3)$*) o uno de sus subgrupos finitos.*

(4) $G = SU(3)$, $H = S^1 \times S^1$ *y* G/H *es el espacio de banderas* $F(1, 2)$.

Más aún, sobre cada uno de estos espacios homogéneos existe una única estructura casi compleja aproximadamente Kähler invariante por isomorfismos.

Permanece abierta la clasificación de la variedades aproximadamente Kähler de dimensión 6 en general.

2. Ejemplos de variedades aproximadamente Kähler

En esta sección vamos a dar algunos ejemplos de variedades aproximadamente Kähler. En el primer ejemplo vemos que, si G es un grupo de Lie compacto con una métrica bi-invariante, entonces $G \times G$ admite una estructura de variedad aproximadamente Kähler. De esta forma resulta que el primer grupo del teorema de Butruille, $S^3 \times S^3$, es aproximadamente Kähler. En el siguiente ejemplo nos ocuparemos del segundo espacio dado en el teorema de clasificación de variedades homogéneas, la esfera S^6. Finalmente, en los últimos ejemplos construimos dos familias de variedades aproximadamente Kähler, la primera a partir de submersiones riemannianas con fibras totalmente geodésicas, y la segunda, a partir de una clase especial de variedades homogéneas reductivas.

EJEMPLO 2.1. El siguiente ejemplo fue propuesto por K. Sekigawa, según [**1**].

Sea G un grupo de Lie compacto con $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y una métrica bi-invariante g. Consideremos los siguientes campos en el grupo de Lie producto $G \times G$:

$$X^v = (0, X), \quad X^h = (\frac{2}{\sqrt{3}}X, \frac{1}{\sqrt{3}}), \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Notemos que $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ donde $\mathcal{V} = \{X^v | X \in \mathfrak{g}\}$ y $\mathcal{H} = \{X^h | X \in \mathfrak{g}\}$. Definimos la estructura casi compleja J y la métrica $\langle , \rangle$ invariante a izquierda en $G \times G$ por:

$$J(X^v) = X^h, \quad J(X^h) = -X^v, \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g},$$
$$\langle X^v, Y^v \rangle = g(X, Y), \quad \langle X^v, Y^h \rangle = 0, \quad \langle X^h, Y^h \rangle = g(X, Y) \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Notemos las siguientes relaciones que cumplen los corchetes de Lie:

$$[X^v, Y^v] = [X, Y]^v, \tag{22}$$

$$[X^v, Y^h] = [X^h, Y^v] = \frac{1}{\sqrt{3}}[X, Y]^v, \tag{23}$$

$$[X^h, Y^h] = -\frac{1}{3}[X, Y]^v + \frac{2}{\sqrt{3}}[X, Y]^h. \tag{24}$$

Proposición 2.2. $(G \times G, \langle, \rangle, J)$ *es una variedad aproximadamente Kähler.*

Demostración. Basta ver que $\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = 0$ para todo $U, V, W \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

En primer lugar, supongamos que $U, V \in \mathcal{V}$, o sea, $U = X^v, V = Y^v$, con $X, Y \in \mathfrak{g}$. Si $W = Z^v$, $Z \in \mathfrak{g}$, resulta:

$$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = \langle\nabla_{X^v} Y^h, Z^v\rangle + \langle\nabla_{X^v} Y^v, Z^h\rangle + \langle\nabla_{Y^v} X^h, Z^v\rangle + \langle\nabla_{Y^v} X^v, Z^h\rangle,$$

por la definición de J. Como ∇ es la conexión de Levi Civita, queda:

$$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle =$$

$$= \langle[X^v, Y^h], Z^v\rangle - \langle[Z^v, X^v], Y^h\rangle + \langle[Y^h, Z^v], X^v\rangle + \langle[X^v, Y^v], Z^h\rangle - \langle[Z^h, X^v], Y^v\rangle + \langle[Y^v, Z^h], X^v\rangle$$

$$+ \langle[Y^v, X^h], Z^v\rangle - \langle[Z^v, Y^v], X^h\rangle + \langle[X^h, Z^v], Y^v\rangle + \langle[Y^v, X^v], Z^h\rangle - \langle[Z^h, Y^v], X^v\rangle + \langle[X^v, Z^h], Y^v\rangle$$

Luego, usando las relaciones (22) (23) y (24) y que g es bi-invariante tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle &= \frac{3}{\sqrt{3}}(\langle[Y, Z]^v, X^v\rangle + \langle[X, Z]^v, Y^v\rangle) \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}}(g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y)) = 0 \end{aligned}$$

Análogamente se prueban todos los casos:

$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = 0$ si $U, V \in \mathcal{V}$ y $W \in \mathcal{H}$

$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = 0$ si $U, V \in \mathcal{H}$ y $W \in \mathcal{V}$

$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = 0$ si $U, V \in \mathcal{H}$ y $W \in \mathcal{H}$

$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = 0$ si $U, W \in \mathcal{V}$ y $V \in \mathcal{H}$

$\langle(\nabla_U J)V + (\nabla_V J)U, W\rangle = 0$ si $U \in \mathcal{V}$ y $V, W \in \mathcal{H}$

□

Ejemplo 2.3. Un caso particular del ejemplo anterior es tomar $G = S^3$ la esfera de dimensión 3. Entonces $S^3 \times S^3$ admite una estructura de variedad aproximadamente Kähler.

Ejemplo 2.4. Otro ejemplo muy conocido de una variedad aproximadamente Kähler es la esfera S^6 de dimensión 6. Un resultado de Borel y Serre de 1951 establece que S^2 y S^6 son las únicas esferas que admiten una estructura de variedad casi compleja.

Hemos definido en el primer capítulo, una estructura casi compleja J sobre S^6 tal que es $(S^6, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ resulta casi hermitiana, con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la métrica inducida por $\mathbb{R}^7$. En lo que sigue nos basamos en el trabajo [**8**].

Para ver que S^6 con esa estructura casi hermitiana es una variedad aproximadamente Kähler, basta ver que $\nabla_A F(A,B) = 0$ para todo $A, B \in \mathfrak{X}(M)$. Para ello vamos a necesitar el siguiente resultado.

Lema 2.5. *Sea $T : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ el tensor configuración y ∇ la conexión riemanniana de M. Entonces, para todo $A, B, C \in \mathfrak{X}(M)$ se cumple:*

$$\nabla_A F(B,C) = \langle T_A(N), B \times C\rangle$$

Demostración. Veamos primero que $T_A N = \overline{\nabla}_A N$. En efecto, como $\overline{\nabla}$ es compatible con la métrica y $\langle N, N\rangle \equiv 1$, resulta:

$$\langle \overline{\nabla}_A N, N\rangle = \frac{1}{2} A\langle N, N\rangle = 0$$

Por lo tanto $\overline{\nabla}_A N$ es tangente a M, y entonces $T_A N = P(\overline{\nabla}_A N) = \overline{\nabla}_A N$. Luego, usando (4) y (2):

$$\begin{aligned}
\nabla_A F(B,C) &= \langle \nabla_A JB - J\nabla_A B, C\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_A (N \times B) - N \times \overline{\nabla}_A B, C\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_A (N) \times B, C\rangle \\
&= \langle T_A(N), B \times C\rangle
\end{aligned}$$

□

Sea $(x_1, \ldots, x_7)$ sistema coordenado de $\mathbb{R}^7$. Denotamos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces $\overline{\nabla}_{X_i} X_j = 0$ para todo i, j. Si $A \in \mathfrak{X}(M)$ y N es el campo normal a S^6 definido antes, entonces

$$A = \sum_{j=1}^{7} a_j X_j, \quad \text{donde } \sum_{j=1}^{7} a_j^2 = 1.$$

$$N = \sum_{j=1}^{7} b_j X_j, \quad \text{donde } b_j(p) = p_j.$$

Luego,

$$T_A N = \overline{\nabla}_A N = \sum_{i,j=1}^{7} a_i X_i(b_j) X_j$$

Pero $X_i(b_j) = \delta_{ij}$. Por lo tanto $T_A N = A$.

Con este resultado y el lema 2.5 tenemos que:

$$\nabla_A F(A,B) = \langle T_A(N), A \times B\rangle = \langle A, A \times B\rangle = \langle A \times A, B\rangle = 0.$$

Ejemplo 2.6. Consideremos ahora una nueva familia de variedades aproximadamente Kähler construidas a partir de variedades de Kähler y submersiones. Sean (M, g) y $(B, \overline{g})$ dos variedadades riemannianas y $\pi : M \to B$ una submersión diferenciable. Sea $x \in M$, con $b = \pi(x)$. Denotamos:

$$F_b = \pi^{-1}(b) = F_x, \text{ la fibra en b,}$$

$$\mathcal{V}_x = ker(\pi_*), \text{ el espacio vertical,}$$

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x{}^{\perp}, \text{ el espacio horizontal.}$$

$$\mathcal{H} = \text{ la distribución horizontal.}$$

$$\mathcal{V} = \text{ la distribución vertical.}$$

Definición 2.7. $\pi : M \to B$ es una *submersión riemanniana* si π_* induce una isometría de $(\mathcal{H}_x, g_x|_{\mathcal{H}_x})$ en $(T_bB, \overline{g}_b)$ para todo $x \in M$, con $b = \pi(x)$.

Sean ∇ la conexón de Levi Civita asociada a g. Denotamos por T el tensor de tipo $(2, 1)$ sobre M dado por:

$$T_X Y = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{H}Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Recordemos que una subvariedad riemanniana M de una variedad riemanniana N se dice *totalmente geodésica* si toda geodésica en M es también geodésica en N. Está probado en [**3**] que una submersión riemanniana es totalmente geodésica si y sólo si $T \equiv 0$.

Definición 2.8. Definimos el *tensor de O'Neill* A, como el tensor de tipo $(2, 1)$ sobre M dado por:

$$A_X Y = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{V}Y + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{H}Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Diremos que un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es *básico* si es horizontal y está π-relacioneado con un campo $X_* \in \mathfrak{X}(B)$. Recordemos que cualquier campo horizontal en M es localmente una combinación lineal de campos básicos.

Sean X, Y, Z campos horizontales, y U, V, W verticales. Supongamos que X, Y, Z son básicos. Entonces tenemos las siguientes propiedades (ver [**5**]):

(1) $[V, W]$ es un campo vertical,

(2) $[X, W]$ es un campo vertical,

(3) A es antisimétrica,

(4) $A_X Y = 1/2\mathcal{V}[X, Y]$,

(5) $A_X V = \mathcal{H}\nabla_V X$.

Sea $\pi : M \to B$ una submersión Riemanniana con fibras totalmente geodésicas. Entonces se puede descomponer cada espacio tangente como suma directa del espacio vertical y el horizontal, es decir: $T_xM = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x$ para todo $x \in M$.

Supongamos que (M, g) admite una estructura casi compleja J compatible con la métrica tal que (M, g, J) es variedad de Kähler y J_x preserva los espacios $\mathcal{V}_x$ y $\mathcal{H}_x$ para todo $x \in M$.

Definimos *la variación canónica* g_t de la métrica riemanniana g de M por:

$$g_t|_{\mathcal{V}} = tg|_{\mathcal{V}}, \quad g_t|_{\mathcal{H}} = g|_{\mathcal{H}}, \quad g_t(\mathcal{V}, \mathcal{H}) = 0.$$

Existe una estructura casi compleja $\hat{J}$ compatible con g_t dada por:

$$\hat{J}|_{\mathcal{V}} = -J, \quad y \quad \hat{J}|_{\mathcal{H}} = J.$$

Esta estructura casi compleja fue introducida en [**6**] para el caso de espacios de twistor sobre variedades de dimensión 4. Consideremos en particular la métrica $\hat{g} = g_{\frac{1}{2}}$.

Proposición 2.9. *La variedad $(M, \hat{g}, \hat{J})$ es aproximadamente Kähler.*

Demostración. Sea $A : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ el tensor de O'Neill. Como (M, g) es de Kähler, se cumple que $AJ = JA$.

Sean X, Y, Z campos horizontales, y U, V, W verticales. Usando las propiedades (1)-(5) y la definición de $\hat{g}$, resulta que

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_V W, U) = \hat{g}(\nabla_V W, U) \tag{25}$$

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_V W, X) = \hat{g}(\nabla_V W, X) \tag{26}$$

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_X W, U) = \hat{g}(\nabla_X W, U) \tag{27}$$

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, Z) = \hat{g}(\nabla_X Y, Z) \tag{28}$$

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_X Y, U) = \hat{g}(A_X Y, U) \tag{29}$$

$$\hat{g}(\hat{\nabla}_V X, Y) = \hat{g}(\nabla_V X - \frac{1}{2} A_X V, Y) \tag{30}$$

Luego se cumple que:

$$\hat{g}((\hat{\nabla}_X \hat{J})X, Y) = \hat{g}((\nabla_X J)X, Y) = 0,$$
$$\hat{g}((\hat{\nabla}_X \hat{J})X, U) = \hat{g}(A_X JX, U) - \hat{g}(JA_X X, U) = 0.$$

Por lo tanto, $(\hat{\nabla}_X \hat{J})X = 0$. De manera similar se prueba que:

$$(\hat{\nabla}_U \hat{J})U = 0, \quad \text{y } (\hat{\nabla}_U \hat{J})X = -(\hat{\nabla}_X \hat{J})U$$

Entonces $(M, \hat{g}, \hat{J})$ resulta aproximadamente Kähler.

□

Observación. Notemos que CP^{2n+1} admite una estructura de variedad de Kähler (ver [**17**]). Además la proyección a HP^n es una submersión riemanniana con fibras totalmente geodésicas [**3**, p. 415]. Entonces CP^{2n+1} resulta una variedad aproximadamente Kähler.

EJEMPLO 2.10. Veamos que la variedad bandera $U(3)/U(1)\times U(1)\times U(1)$ es aproximadamente Kähler. La demostración que presentamos corresponde a Ilka Agricola.

Sea M una variedad homogénea reductiva, $M=G/H$. Denotamos por $\mathfrak{g}$ al álgebra de Lie de G y suponemos que $\mathfrak{g}$ admite un producto escalar β Ad(G)-invariante. Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{h}$ una descomposición reductuva de $\mathfrak{g}$ dada. Además escribimos a $\mathfrak{m}$ como suma directa de espacios ortogonales respecto a β: $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$, tal que se cumplan las siguientes relaciones:

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{m}_1]=\mathfrak{m}_1,\quad [\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]\subset\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}_2,\quad [\mathfrak{h},\mathfrak{m}_2]\subset\mathfrak{m}_2,\quad [\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_2]\subset\mathfrak{h},\quad [\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]\subset\mathfrak{m}_1. \tag{31}$$

Para cada $t>0$, $\beta_t:=\beta|_{\mathfrak{m}_1\times\mathfrak{m}_1}+2t\beta|_{\mathfrak{m}_2\times\mathfrak{m}_2}$ define un producto escalar sobre $\mathfrak{m}$. Así queda determiada una métrica sobre M g_t invariante a izquierda para cada $t>0$. Luego, la conexión de Levi Civita asociada a g_t está unívocamente determinada por la transformación $\Lambda_t:\mathfrak{m}\to\mathfrak{so}(\mathfrak{m})$ tal que, para $X,Y\in\mathfrak{m}_1$ y $A,B\in\mathfrak{m}_2$,

$$\Lambda_t(X)Y=\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}_2},\quad \Lambda_t(X)B=t[X,B],\quad \Lambda_t(A)Y=(1-t)[A,Y],\quad \Lambda_t(A)B=0.$$

Es fácil ver que Λ_t es una conexión compatible con la métrica β_t y sin torsión.

OBSERVACIÓN. La construcción anterior esta relacionada con la variación canónica de la métrica que consideramos en el ejemplo anterior, en una submersión riemanniana entre espacios homogéneos.

Ahora tomemos $G=U(3)$ y $H=U(1)\times U(1)\times U(1)\subset G$. Entonces $M=G/H$ es una variedad homogénea reductiva de dimensión 6 con:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{u}(3)=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})|A+\overline{A}^t=0\},\quad \mathfrak{h}=\{A\in\mathfrak{u}(3)|A \text{ es diagonal}\}.$$

Además $\mathfrak{u}(3)$ admite un producto escalar Ad(G)-invariante dado por:

$$\beta(A,B)=\frac{-Re(trAB)}{2},\qquad \text{para } A,B\in\mathfrak{u}(3).$$

Sean $\mathfrak{h}=\mathfrak{m}^\perp$, y

$$\mathfrak{m}_1:=\{\begin{pmatrix}0&a&b\\-\overline{a}&0&0\\-\overline{b}&0&0\end{pmatrix}|a,b\in\mathbb{C}\},\quad \mathfrak{m}_2:=\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&c\\0&-\overline{c}&0\end{pmatrix}|c\in\mathbb{C}\}.$$

Entonces $\mathfrak{m}_1$ y $\mathfrak{m}_2$ resulta ortogonales respecto β y cumplen las relaciones (31). Luego, la métrica g_t está bien definida, y la conexión Λ_t es la Levi Civita asociada a g_t.

Ahora tomemos una base de $\mathfrak{m}$. Para $i,j=1,2,3$, sea D_{ij} la matriz 3×3 que tiene un 1 en el lugar (i,j) y el resto de las entradas 0; y sean $E_{ij}=D_{ij}-D_{ji}$, y $S_{ij}=i(D_{ij}+D_{ji})$. Los elementos:

$$e_1:=E_{12},\quad e_2:=S_{12},\quad e_3:=E_{13},\quad e_4:=S_{13},\quad e_5:=\frac{1}{\sqrt{2t}}E_{23},\quad e_6:=\frac{1}{\sqrt{2t}}S_{23}$$

forman una base ortogonal de $\mathfrak{m}$ respecto β_t, de la cual, los primeros cuatro elementos forman una base de $\mathfrak{m}_1$ y los dos restantes de $\mathfrak{m}_2$. Como una base para $\mathfrak{h}$, tomemos los elementos: $H_j=\frac{S_{jj}}{2}$, para $j=1,2,3$.

Identifiquemos $\mathfrak{m}$ con $\mathbb{R}^6$ y tomemos como base de $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^6)$ a las matrices $\{E_{ij} | i > j, i, j = 1, \dots, 6\}$. Luego, la conexión de Levi Civita está unívocamente determinada por $\Lambda_t : \mathbb{R}^6 \to \mathfrak{so}(\mathbb{R}^6)$. Calculando el corchete entre los elementos de la base, se puede probar que:

$$\Lambda_t(e_1) = \sqrt{\frac{t}{2}}(E_{35} + E_{46}), \quad \Lambda_t(e_2) = \sqrt{\frac{t}{2}}(E_{45} - E_{36}), \quad \Lambda_t(e_3) = \sqrt{\frac{t}{2}}(E_{26} - E_{15}),$$

$$\Lambda_t(e_4) = -\sqrt{\frac{t}{2}}(E_{16} + E_{25}), \quad \Lambda_t(e_5) = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(E_{13} + E_{24}), \quad \Lambda_t(e_6) = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(E_{14} - E_{23}).$$

Denotamos por e_{ij} a la dos forma $e_i \wedge e_j$. Sea Ω la dos forma definida por: $\Omega = e_{12} - e_{34} + e_{56}$. Queremos ver que Ω cumple la condición $\nabla_X \Omega(X, Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, es decir, que $(M, g_{1/2}, \Omega)$ es una variedad aproximadamente Kähler.

Para ello, calculemos primero la derivada covariante de las dos formas e_{12}, e_{34}, e_{56}. Resulta:

$$\nabla_{e_1} e_{12} = 0, \quad \nabla_{e_1} e_{34} = \sqrt{\frac{t}{2}}(e_{45} - e_{36}), \quad \nabla_{e_1} e_{56} = \sqrt{\frac{t}{2}}(e_{36} - e_{45}),$$

$$\nabla_{e_2} e_{12} = 0, \quad \nabla_{e_2} e_{34} = -\sqrt{\frac{t}{2}}(e_{35} + e_{46}), \quad \nabla_{e_2} e_{56} = \sqrt{\frac{t}{2}}(e_{35} + e_{46}),$$

$$\nabla_{e_3} e_{12} = -\sqrt{\frac{t}{2}}(e_{25} + e_{16}), \quad \nabla_{e_3} e_{34} = 0, \quad \nabla_{e_3} e_{56} = -\sqrt{\frac{t}{2}}(e_{25} + e_{16}),$$

$$\nabla_{e_4} e_{12} = \sqrt{\frac{t}{2}}(e_{15} - e_{26}), \quad \nabla_{e_4} e_{34} = 0, \quad \nabla_{e_4} e_{56} = \sqrt{\frac{t}{2}}(e_{15} - e_{26}),$$

$$\nabla_{e_5} e_{12} = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(e_{23} - e_{14}), \quad \nabla_{e_5} e_{34} = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(e_{14} - e_23), \quad \nabla_{e_5} e_{56} = 0,$$

$$\nabla_{e_6} e_{12} = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(e_{13} + e_{24}), \quad \nabla_{e_6} e_{34} = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}(e_{13} + e_24), \quad \nabla_{e_6} e_{56} = 0.$$

A partir de estos resultados es fácil ver que $\nabla_{e_j} \Omega(e_j, e_i) = 0$ para todo i, j.

En el trabajo [**23**] de Wolf y Gray, se plantea la siguiente conjetura: *"Sea U/K una variedad homogénea, donde U es un grupo de Lie compacto que no es simétrico hermitiano y tal que la isotropía K tiene rango máximo en U. Entonces existe una estructura de variedad casi hermitiana invariante en U/K que es aproximadamente Kähler pero no de Kähler si y sólo si la subálgebra de isotropía es el conjunto de puntos fijos de algún automorfismo de orden 3".*

En el trabajo [**21**] se estudian las variedades banderas aproximadamente Kähler y se confirma esta conjetura para la clase de variedades homogéneas formada por las variedades banderas. El resultado es el sigiente:

TEOREMA 2.11. *Sea $F = U/K$ una variedad bandera y sea $\mathfrak{k}$ el álgebra de Lie de K. Entonces F admite una estructura de variedad aproximadamente Kähler que no es Kähler si y sólo si*

(1) *la subálgebra de isitropía $\mathfrak{k}$ es el conjunto de puntos fijos de un automorfismo de orden 3 y*
(2) *F no es simétrica Hermitiana.*

Referencias

[1] E. Abbena, S. Garbiero, *Almost Hermitian homogeneous manifolds and Lie groups*, *Nihonkai Math. J.* **4** (1993), 1-15.

[2] I. Agricola, *The SRNI lectures on non-integrable geometries with torsion*, *Arch. Math.* **42** (2006), 5-84, **arXiv:math.DG/0606705**.

[3] A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, New York (1987).

[4] J. B. Butruille, *Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes*, *Annals of Global Analysis and Geometry* **27** (2005), 201-225.

[5] I. Dotti, *Tópicos de geometría homogénea*, Trabajos de Matemática, *FAMAF* (1987).

[6] J. Eels, S. Salamon, *Constructions twistorielles des applications harmoniques*, *C. R. Acad. Sc. Paris* **296** (1983), 685-687.

[7] T. Friedrich, S. Ivanov, *Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory*, *Asian J. Math.* **6, no.2** (2002), 303-335, **arXiv:math.DG/0102142**.

[8] A. Gray, *Minimal varieties and almost Hermitian submanifolds*, *Michigan Math.* **12** (1965), 273-287.

[9] A. Gray, *Nearly Kähler manifolds*, *J. Differential Geometry* **4** (1970), 283-309.

[10] A. Gray, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3*, *J. Differential Geometry* **7**(1972), 343-369.

[11] A. Gray, *The structure of nearly Kähler manifolds*, *Math. Ann.* (1976), 233-248.

[12] A. Gray, *Almost complex submanifolds of the six sphere*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 277-279.

[13] A. Gray, L.M. Hervella, *The sixteen classes of almost-Hermitian manifolds and their linear invariants*, *Ann. Math. Pura Appl.* **123** (1980), 35-58.

[14] H. Hashimoto, *Submanifolds of a nearly Kähler 6-dimensional sphere*, *Workshop on Diff. Geom.* **8** (2004), 23-45.

[15] V. F. Kirichenko, *K-spaces of maximal rank*, *Mat. Zametki* **22** (1977), 465-476.

[16] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. I, Interscience, Wiley, New York-London (1963).

[17] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Interscience,Wiley, New York-London (1969).

[18] S. Koto, *Some theorems on almost Kählerian spaces*, *J Math. Soc. Japan* **12** (1960), 422-433.

[19] P.A. Nagy, *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations*, *Asian J. Math. 6* **3** (2002), 481-504, **arXiv:math.DG/0203038v1**.

[20] P.A. Nagy, *On nearly Kähler geometry*, *Ann. Anal Global. Geom.* **22, no.2** (2002), 167-178, **arXiv:math.DG/0110065**.

[21] Luiz A. B. San Martin, Rita de Cássia de J. Silva, *Invariant nearly Kähler structures*, *Geometriae Dedicata* **121** (2006), 143-154.

[22] F. W. Warner, *Foundations of differential manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman, Chicago, (1971).

[23] J. A. Wolf, A. Gray, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms II*, *J. Diff. Geom.* **2** (1968), 115-159.

[24] Y. Watanabe, K Takamatsu, *On K-space of constant holomorphic sectional curvature*, *Ködai Math. Sem. Rep.* **25** (1973), 297-306.