EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVI JORNADAS

VOLUMEN 12 (2006)

José Ahumada
Marzio Pantalone
Víctor Rodríguez
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Implicaciones del teorema de Gödel en ciencias

Osvaldo M. Moreschi[*]

1 Introducción

El teorema de Kurt Gödel ha causado gran influencia en la manera en que se entienden los sistemas formales matemáticos. Si bien el teorema es ateniente a la matemática y en particular a la lógica, nosotros no nos concentraremos en estos temas [Smu92] sino en las implicaciones que pudiese tener este resultado y las técnicas de su prueba en otras ciencias.

Estudiaremos implicaciones del teorema que entendemos se pueden extender a otras ciencias

En esta presentación, comenzaremos por repasar los antecedentes y el contenido fundamental del teorema de Gödel.

Antecedentes de los Fundamentos de la matemática

Aunque el estudio de los fundamentos de la matemática tal vez se remontan al trabajo de Euclides, por el año 300 antes de Cristo, en tiempos modernos se encuentran tres [Sha94] escuelas de pensamiento.

Logicismo En esta escuela se asume que los objetos matemáticos abstractos pueden ser desarrollados a partir de ideas básicas de la teoría de conjunto y razonamientos lógicos.

Intuicionismo En el pensamiento intuicionista, se rechazan algunos conceptos y la idea de que el método axiomático sea suficiente para explicar toda la matemática. Los intuicionistas criticaron el uso de entidades infinitas. Luitzen Egbertus Jan Brouwer fue un defensor de esta postura y sugirió que sólo los conceptos matemáticos que pueden ser demostrados o construidos en un número finito de pasos eran aceptables en la construcción del conocimiento matemático.

Formalismo Los formalistas entienden que la matemática se puede entender como la manipulación de símbolos, independientemente de su posible interpretación física. En esta escuela, Hilbert conjeturaba que sería posible probar que la matemática estaba libre de contradicciones y por lo tanto era consistente.

El resultado de Gödel fue un golpe al pensamiento propuesto por Hilbert.

2 Resultado del Teorema

Gödel se basó en el trabajo de A. Whitehead y B. Russell [WR25], Principia Mathematica, 2nd edition, Cambridge 1925. La pregunta que estudió Gödel es si dado un sistema formal basado en axiomas y reglas de inferencia era posible decidir, o determinar, todas las preguntas matemáticas que pudiesen ser expresadas dentro del formalismo.

Kurt Gödel encontró [Göd31, Göd62] afirmaciones dentro del formalismo de Principia Mathematica que no se pueden probar si son verderas o falsas. En realidad su resultado es válido incluso para toda extensión de este formalismo basado en un número finito de axiomas.

[*] FaMAF, UNC Investigador del CONICET Email. moreschi@fis.uncor.edu

El teorema al que nos referimos fue publicado en 1931 por Kurt Gödel en el artículo con título: "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und vewandter Systeme I", en Monatshefte für Mathematik und Physik, Volume 38, pp. 173-198 (Leipzig: 1931). La traducción al inglés de este título es: "On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I".

No entraremos en los detalles técnicos que permitieron a Gödel llegar a este resultado. Más bien nos interesan las ideas generales y su posible extensión a otras ciencias.

En la introducción del artículo Gödel expresa una analogía entre su método y la antinomia de Richard, además de la cercana relación con la antinomia del mentiroso.

La paradoja de Richard La paradoja de Richard se genera de la siguiente manera [Kra82]. Supongamos que se desea listar una secuencia de propiedades de los números enteros, como por ejemplo: 'primo', 'par' o 'múltiplo de 3'. Luego de tener formuladas las propiedades se puede elegir un criterio para ordenarlas. Como toda propiedad se genera a partir de un número finito de palabras, cada una escrita de un número finito de letras, se puede elegir la propiedad que contenga el número menor de letras y asignarle la posición (1) en la serie. La próxima definición se le asigna la posición (2) y así siguiendo. Si dos propiedades tienen el mismo número de letras se las ordena en base al orden alfabético. De esta forma cada propiedad tiene un número de orden asignado.

Es posible que un número de orden tenga la propiedad descripta en la propiedad a la que está numerando. Por ejemplo, podría ocurrir que el número 17 esté numerando a la propiedad que caracteriza a un número primo, cuya definición se podría haber caracterizado de la siguiente forma. "un número entero x es primo si y sólo si no es exactamente divisible por cualquier número natural, excepto el mismo y 1." Notamos que 17 tiene esta propiedad. En contraposición, supongamos que el número 14 es el número de orden de la propiedad de ser impar; que se podría formular de la siguiente manera: "un número entero x es impar si y sólo si deja un resto 1 cuando de lo divide por 2." Observamos que 14 no tiene esta propiedad. Un número de orden como el anterior que no tiene la propiedad a la que numera si dice que tiene la propiedad de ser *Richardiano*. Entonces, en las suposiciones anteriores, 17 no sería Richardiano y 14 sí lo sería.

La propiedad de ser Richardiano, tendrá una formulación precisa que por ende tendrá una ubicación en la serie de propiedades. Denotemos con n el número de orden de la propiedad de ser Richardiano

La pregunta que surge es: *¿Es el número n Richardiano?* Si la respuesta fuese afirmativa, el número n no podría tener la propiedad a la que numera, y por lo tanto no podría ser Richardiano. Por lo que se deduce que si se asume que n es Richardiano entonces se concluye que n no es Richardiano.

Supongamos en vez desde el principio que n no es Richardiano. Luego n tiene la propiedad a la que está numerando y por lo tanto es Richardiano. Por lo que se deduce que si se asume que n no es Richardiano entonces se concluye que n es Richardiano

Como hay sólo dos posibles respuestas a las preguntas y cada una de ellas conduce a la conjunción de una afirmación A y su negación $\neg A$, se tiene una paradoja. Esta situación viola la ley de contradicción, $\neg(p \wedge \neg p)$, que establece que una afirmación y su negación no pueden ambas ser verdaderas.

El recurrir a órdenes superiores del lenguaje formal ha sido una técnica esencial en la formulación del teorema de Gödel. Parte de nuestra intención es estudiar las implicaciones de usar este tipo de técnicas en otras ciencias.

La formulación de Gödel En su artículo, Gödel dio significado, dentro del formalismo de Principia Mathematica, a conceptos como 'fórmula', 'fórmula que se puede probar' y otros. Con este tipo de elementos, Gödel fue capaz de escribir una fórmula que en palabras diría algo así: 'esta fórmula no se puede probar'.

Si fuese posible probar esta fórmula, por un a lado probaríamos que es verdadera, pero si es verdadera entonces el sistema sería inconsistente, pues se permitiría probar algo que es falso.

Si la formula no se puede probar, entonces la fórmula es verdadera; ¡pero no se puede probar!

3 Relación con el trabajo de Turing

Se adjudica a Alan Turing (1912-1954) ser el primero que trabajó en teoría de la computación Turing ideó un modelo de una computadora, ahora llamada la 'máquina de Turing', capaz de ejecutar programas arbitrarios. Esto lo realizó antes de que se construyese una computadora.

La máquina de Turing se puede idealizar como un dispositivo, con número de estados finitos, capaz de leer una cinta unidimensional, con registros consecutivos. Además puede avanzar y retroceder la cinta y cambiar los valores de cada registro. En una máquina universal de Turing, la manera en que la máquina reacciona a la lectura de la cinta está codificada en la misma cinta.

Tal vez conviene enfatizar que la llamada máquina de Turing no es un artefacto físico sino una construcción abstracta en la matemática de la computación.

Se conoce como la tesis de Church-Turing la afirmación: lo que pueden hacer las máquinas de Turing define lo que se conoce como procedimiento algorítmico. En realidad existen varias formulaciones de esta tesis; otro conocido enunciado es: 'toda función que naturalmente se considere computable, puede ser computada en una máquina universal de Turing'.

La intención de Turing era atacar el problema propuesto por Hilbert, quien requirió un algoritmo general que permitiese resolver cuestiones matemáticas; y por ende la respuesta a la pregunta de si tal algoritmo existe.

Al intentar responder la pregunta: '¿Existe un procedimiento mecánico para responder todos los problemas matemáticos de una gran pero bien definida clase?' Turing encontró que podía reformular esta pregunta en término del problema de decidir si una dada máquina de Turing pararía en un proceso de cómputo. Esto se lo conoce como el problema de *halting*; que tal vez se pueda traducir como el problema del alto o la parada.

En 1936, Turing encuentra que no existe un algoritmo que determine con antelación si otra computadora terminará su cálculo.

Esto se entiende como que existen cosas muy sencillas que no son computables.

Turing además deduce que no hay forma de usar un sistema axiomático formal para establecer esta cuestión.

4 Descripción de Chaitin del teorema de Gödel

Es interesante la forma en que Gregory J Chaitin expresa el teorema de Gödel. Usando argumentos de teoría de información, Chaitin encuentra [Cha82] que si un teorema contiene más información que un dado conjunto de axiomas, entonces es imposible que se deduzca el teorema de los axiomas. De aquí deduce que el fenómeno de incompletitud descubierto por Gödel es natural y extendido en vez de patológico e inusual.

Chaitin usa la noción de 'teoría de la información algorítmica' para encontrar sus resultados. El contenido de información algorítmica $I(X)$ de un objeto X se define como el tamaño, en bits, del programa más pequeño que calcula a X. Como las computadoras de propósitos generales (las máquinas universales de Turing) pueden simular unas a otras; se supone que esta definición describe una característica intrínseca de X.

Es posible definir también la noción de información algorítmica conjunta $I(X,Y)$, de dos objetos X e Y; el contenido de información condicional $I(X|Y)$ y el contenido de información mutua $I(X:Y)$.

Al final de su artículo Chaitin se pregunta:

> ¿Hay algún fenómeno físico que compute algo no computable? En contraposición. ¿Restringe la tesis de Turing, de que cualquier cosa computable puede ser computada en una máquina de Turing, al universo físico en el que vivimos?

5 Relación con las ciencias naturales

Computadoras universales cuánticas Como existe una analogía entre el resultado de Gödel y el problema de *halting* de Turing, y como las máquinas de Turing definen la noción de proceso algorítmico, de acuerdo a la tesis de Church-Turing, surge la pregunta natural. *¿Es la naturaleza algorítmica?* Si la respuesta fuese afirmativa, parece que se podría encontrar una relación directa entre el resultado de Gödel y la naturaleza.

En relación con este punto es interesante recordar el trabajo de D. Deutsch [Deu85] en el que hace una extensión de la tesis de Turing a la física. Él afirma: *'Todo sistema físico finito puede ser perfectamente simulado por una computadora universal operando por medios finitos.'* En realidad Deutsch argumenta que la computadora universal debe ser una computadora cuántica. La computadora cuántica universal consta de una unidad de procesamiento finita y dispone de una memoria infinita, de la cual solo se usa una porción finita. El cómputo se desarrolla en pasos de duración T, y en cada paso solo la unidad de procesamiento central y una porción finita de la memoria interaccionan. La descripción de los estados de la unidad de procesamiento central es cuántica, así como la de los estados de la memoria.

No proseguiremos con una descripción detallada de las computadoras cuántica, pero debería quedar claro que si se definiese la noción de algoritmos cuánticos como aquellos procesos que pueden ser llevados a cabo por una computadora cuántica universal, estos algoritmos residen en un espacio diferente que los anteriores definidos por una máquina de

Turing universal. Aunque Deutsch argumenta que una computadora cuántica universal puede simular cualquier máquina de Turing; no discute el problema de *halting* en las computadoras cuánticas.

Implicaciones generales ¿Qué hemos aprendido del teorema de Gödel que se pueda aplicar a las ciencias naturales? En principio uno podría decir que si se usa un sistema de deducción, como se hace en matemática, con reglas matemáticas de inducción similares a las de Principia Mathematica, uno encontraría el mismo resultado hallado por Gödel. Sin embargo, creemos que existen otras implicaciones que son de utilidad en ciencias naturales, que tienen que ver más con la forma que un investigador puede pensar o encarar un determinado problema.

Un legado que se puede deducir de las técnicas empleadas en la prueba del teorema de Gödel, podría ser: *"La formulación de una pregunta que emplee conceptos o estructuras ajenos al marco teórico del sistema bajo estudio, puede conducir a situaciones aparentemente contradictorias."* En ciencias naturales, si se encuentra una situación contradictoria, uno no infiere la existencia de una paradoja, sino que todavía no entendió bien al sistema. Esto podrá indicar que los fundamentos del marco teórico empleado tal vez no son los mejores; ó tal vez sí son los mejores, pero no se entienden bien todavía. Con la mecánica cuántica parece que ha pasado esto último.

A continuación describiremos un ejemplo donde creemos existe una relación con el resultado de Gödel.

El problema de Einstein, Podolsky y Rosen Unas de las problemáticas más interesantes en física está asociada a los problemas de interpretación de la mecánica cuántica. Uno de los artículos [EPR35] más discutido en relación con los fundamentos de la mecánica cuántica es el escrito por Einstein, Podolsky y Rosen (EPR).

En el artículo EPR se plantea la pregunta: *¿Es la descripción dada por la mecánica cuántica completa?* Para esta afirmación necesitaban aclarar la noción de *completa*; por lo que afirmaron. *Todo elemento de la realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física,* en donde se nota la introducción del término 'elemento de la realidad física'.

La lectura de esta afirmación aparenta dar una sensación de racionalidad. Sin embargo, por otro lado, la introducción de este concepto parece apartarse de la indicación de Dirac [Dir58] que afirma que todos los elementos de la teoría, y por ende las preguntas, sólo deberían referirse a *observables*. Y en mecánica cuántica a cada observable le corresponde un operador hermético en un espacio de Hilbert; por lo que el término observable tiene una noción técnica precisa. Sin embargo en el artículo EPR los autores introducen un nuevo término.

Consientes de que esta acción era clave para la lógica de su trabajo; lo explican de la siguiente manera: *Si, sin disturbar en ninguna forma al sistema, se puede predecir con seguridad (esto es con probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física, existe un elemento de la realidad física correspondiente con esta cantidad física.*

La argumentación presentada en el artículo, lleva a inferir a los autores que la función de onda no provee una descripción completa de la realidad física de un sistema. Aunque la argumentación presentada en el manuscrito es criticable, no es nuestra intención hacer un análisis completo del argumento; sino que nos limitamos a señalar la técnica de ampliar los fundamentos de la discusión introduciendo nuevos términos del metalenguaje que no estaban contenidos en el marco teórico inicial.

No estamos diciendo que no sea una actitud permitida, sino que es conveniente que sea una actitud explícita, en vez de implícita.

Gödel mostró que dentro del formalismo matemático, que incluye las reglas de inferencia, es posible formular preguntas que no se puede probar si son verdaderas o falsas. Para ello recurrió a las reglas del metalenguaje introduciendo la noción de 'fórmula que puede ser probada'. Los autores del trabajo EPR, análogamente, hicieron uso del metalenguaje, con la introducción de nuevos términos que no estaban en principio contemplados en el marco teórico original.

La ley faltante entre física y biología En otra oportunidad nos hemos referido [Mor05] a las características de la ley faltante que permita una unión más suave entre la biología y la física. Es muy probable que la ley que describa la posibilidad de formar sistemas con las propiedades de autoorganización funcional tenga la característica de formalizarse sólo cuando los sistemas han alcanzado un cierto grado de complejidad. Una descripción formal de una teoría que pueda incluir esta situación, probablemente tenga que ser lo suficientemente amplia como para ir cambiando el conjunto de principios básicos dependiendo de la complejidad del sistema.

Principio de la descripción finita de sistemas finitos En un trabajo anterior [Mor99] hemos postulado que: todo sistema finito puede ser descripto completamente por una sentencia finita de un lenguaje formal. Esto podría llevar a la inducción de que entonces el Universo es descripto por cierta clase de autómata celular; sin embargo en nuestra opinión esto no representa a la realidad. Lo que puede representar más fielmente a la misma es que, si lo pensamos como un sistema formal con reglas de inferencia, todas las instancias posibles de procesos, equivalentemente todas las preguntas posibles sobre caminos lógicos, son intentadas y aquellas que todavía son compatibles con la estructura vigente, se cristalizan en procesos reales. Si intentamos escribir esto en un programa de computación esto nos conduce a que no debería tener una estructura lógica rígida, o dicho de otra forma, el número de axiomas fundamentales iría cambiando con el tiempo. Esto es lo que se espera suceda con un sistema cuya complejidad va en aumento con el tiempo.

Este punto nos conduce a la pregunta: ¿es verdaderamente posible que un sistema real finito pueda ser descripto por una 'maquina universal de Turing' o por una 'computadora universal'? La respuesta es negativa. Una situación como la que proponemos no puede tener asociado un algoritmo, al menos estático.

Hasta el día de hoy siempre se han usado leyes fijas en física. Probablemente sea necesario hacer uso de marcos teóricos en los cuales se admitan leyes que se adapten a la evolución temporal del sistema complejo que pueda describir un sistema con vida.

6 Relación con ciencias sociales

Respecto de las ciencias sociales, se le adjudica a Popper la pregunta: ¿Por qué es posible predecir un eclipse, pero no una revolución? Podríamos intentar responder que esto se debe a dos causas fundamentales: la primera es que sistemas dinámicos complejos necesariamente involucrarán la noción de dinámica caótica; la segunda es que en el estudio y la discusión de sistemas complejos, cada investigador puede hacer uso de puntos de partidas diversos, al incluir inadvertidamente (o conscientemente) 'axiomas' implícitos, por lo que los marcos teóricos construidos son distintos.

Entendemos que en ciencias sociales no se le da suficiente peso a este punto. Como la discusión en ciencias sociales se realiza empleando el lenguaje cotidiano; la delimitación que en forma precisa se detecta en el artículo de Gödel entre lenguaje y metalenguaje; es de difícil distinción en el lenguaje común. Donde es posible expresar tan fácilmente la paradoja del mentiroso

Referencias

[Cha82] Gregory J. Chaitin. Gödel's theorem and information. *Int.J. of Th.Phys.*, 21:941–954, 1982.

[Deu85] D. Deutsch. Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer. *Proc.R.Soc.Lond A*, 400:97–117, 1985.

[Dir58] P.A.M. Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Oxford, fourth, revised edition, 1958.

[EPR35] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys.Rev.*, 47:777–780, 1935.

[Göd31] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und vewandter systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198, 1931. Leipzig.

[Göd62] Kurt Gödel. *On Formally Undecidable Propositions Of Principia Mathematica And Related Systems*. Basic Books, Inc., New York, 1962. Translated by B. Meltzer, with Introduction by R.B. Braithwaite.

[Kra82] Edna E. Kramer. *The Nature and Growth of Modern Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1982.

[Mor99] Osvaldo M. Moreschi. Sobre la posible naturaleza discreta del espaciotiempo y sus implicaciones en cosmología. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 5(317), 1999.

[Mor05] Osvaldo M. Moreschi. Física-biología: delimitando el eslabón faltante. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, 11(557–567), 2005.

[Sha94] N. Shankar. *Metamathematics, Machines, and Gödel's Proof*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Smu92] Raymond M. Smullyan. *Gödel's Incompleteness Theorems*. Oxford University Press, New York, 1992.

[WR25] A. Whitehead and B. Russell. *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1925.