Aspectos analíticos de una explicación matemática: las explicaciones primarias[1]

Sandra Visokolskis
Universidad Nacional de Córdoba
Universidad Nacional de Villa María

1. Introducción

El presente trabajo discute la noción de *explicación matemática* que se presenta en (Mancosu, 2008) y (Hafner & Mancosu, 2008). En el apartado 5.3 (Mancosu, 2008: 141-144), el autor plantea la distinción entre demostraciones matemáticas explicativas y no explicativas, y asume más adelante que la noción de "explicación matemática" no necesariamente se circunscribe al ámbito de las demostraciones en matemática.

En este trabajo nos concentramos en una noción de explicación matemática relativa no ya exclusivamente a demostraciones en esta disciplina sino a resultados matemáticos preliminares, no necesariamente definitivos, que establecen ya sea el marco general inicial para la determinación de (a) definiciones de conceptos matemáticos, o bien (b) de teoremas, lemas o corolarios, o bien (c) de teorías matemáticas completas.

Esta instancia inicial suele caracterizarse en general -aunque no siempre es así- en términos ambiguos, vagos, difusos, indeterminados, incompletos, y tiene que ver con el proceso de descubrimiento y generación de ideas más que con la consolidación de resultados acabados.

Así como una demostración matemática puede ser convincente en la medida que ofrezca garantías deductivas concluyentes del enunciado que la acompaña y pretende probar, del mismo modo sucede con una definición correcta o con una teoría válida. Pero en estos tres tipos de situaciones también puede ocurrir que, a pesar de tal convicción concluyente, la comunidad matemática de una determinada época y lugar pueda no comprender porqué estos resultados se dan como tales: esto es indicio de la ausencia de una *explicación* del hecho en cuestión.

De esta manera, se crea una brecha entre justificaciones y explicaciones en matemática, en los tres niveles: definiciones, proposiciones y teorías. Como bien lo señala Mancosu (Mancosu, 2008:141), desde el punto de vista filosófico, esta tradición comienza con la distinción aristotélica entre *to oti* y *to dioti*, diferenciación ésta que remonta a las nociones de deducción y abducción, las cuales acá asociamos correspondientemente con los conceptos de justificación y explicación. Habiendo entonces identificado una explicación en general con un argumento abductivo, intentaremos describir en lo que sigue, la noción de "explicación primaria".

Argumentamos que en los procesos de descubrimiento y creatividad, en la instancia de "iluminación" -como fuera denominada por el teórico de la creatividad Graham Wallas (1926), también descripta como el momento ahá o eureka- el sujeto creador llega a la convicción de la posesión de un resultado matemático (en alguno de los tres niveles antes citados), pero que, desde el

[1] Ponencia presentada en ocasión del "Simposio de filosofía de la práctica matemática", el 13 de junio de 2012, en la Academia de Ciencias de Buenos Aires.

punto de vista justificativo, en la mayoría de los casos se halla aún en estado embrionario[2]. Y sin embargo, éste experimenta la sensación de haber arribado a una conclusión, aún cuando sólo esté aferrado a una imagen, una metáfora, una figura o un diagrama que describa someramente el resultado alcanzado. Estamos allí en presencia de una *explicación primaria*, no necesariamente acabada del resultado en cuestión. Es posible que, además haya que hacer mucho más trabajo arduo para arribar a una justificación concluyente.

En este marco, el trabajo propone revisar un caso en la historia de la matemática que opera como ejemplo de aplicación de la noción de "explicación primaria", dando así una caracterización de la misma, en un intento de mostrar su incumbencia en la resolución de problemas matemáticos.

Podemos sintetizar la estrategia argumentativa que presentaremos, en los siguientes pasos:

(1) Una justificación en matemática debe proceder necesariamente por deducción. Pero ello no siempre basta para generar convicción en la comunidad matemática. Importa además ofrecer una *explicación*.

(2) No toda explicación en matemática es de tipo justificativo (i.e., de tipo deductivo).

(3) Toda explicación en matemática se inicia (de manera inadvertida o intencional) por una "explicación primaria", lo que describiremos en términos de un insight proporcional dual o bien de una proporción continua n-ádica.

(4) Las explicaciones primarias se pueden reformular en términos abductivos. A su vez, estas abducciones tienen la estructura de medias proporcionales, o más en general, de proporciones continuas.

(5) Las explicaciones primarias permiten "comprender" los fenómenos cognitivos creativos. Este tipo de comprensión requiere de una interpretación más laxa del lenguaje.

(6) La noción de comprensión que utilizamos aquí se sustenta en la definición peirceana de abducción expuesta en (CP 7.218), que consiste en una elucidación de un momento sorpresivo, provocado por la emergencia de una idea inusitada que requiere de una explicación.

(7) Ello nos lleva a la tesis central del trabajo, que surge del argumento sintetizado:
    (a) Explicar es comprender.
    (b) Comprender es captar un insight dual o n-ádico.
    (c) Por tanto: explicar es captar un insight dual o n-ádico.

2. Explicación como comprensión

En 1872, Karl Weierstrass propuso lo que hoy constituye el ejemplo paradigmático de resultado matemático con plena justificación de su existencia, pero no una visualización del hecho, y, por tanto, no una clara explicación del fenómeno.

[2] La descripción de Wallas referida a la noción de "iluminación" no se restringe al caso del contexto matemático sino que es general, aunque aquí nos ocuparemos sólo de este caso. Para un desarrollo más actualizado y complementario de la posición de Wallas en torno al momento eureka, cfr. (Visokolskis, 2012).

Se trata de una descripción puramente analítica de una función uniformemente continua y no diferenciable en todos los puntos de su dominio, la recta real[3].

$$W: R \longrightarrow R \qquad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

$$\text{con} \quad 0 < a < 1 \text{ , b entero impar, } ab > 1 + 3\pi/2$$

Cabe observar que la comunidad matemática de su época, incluidos matemáticos como Gauss, estaban convencidos que las funciones continuas sólo podían ser no diferenciables en alguna colección de puntos aislados, pero no parecen haber imaginado que eso podía ocurrir en el dominio de todos los números reales R. Sin embargo, ya Bolzano (1830), Cell'erier (1830) y Riemmann (1862) habían construido funciones semejantes, pero estos casos no fueron descubiertos sino como textos póstumos.

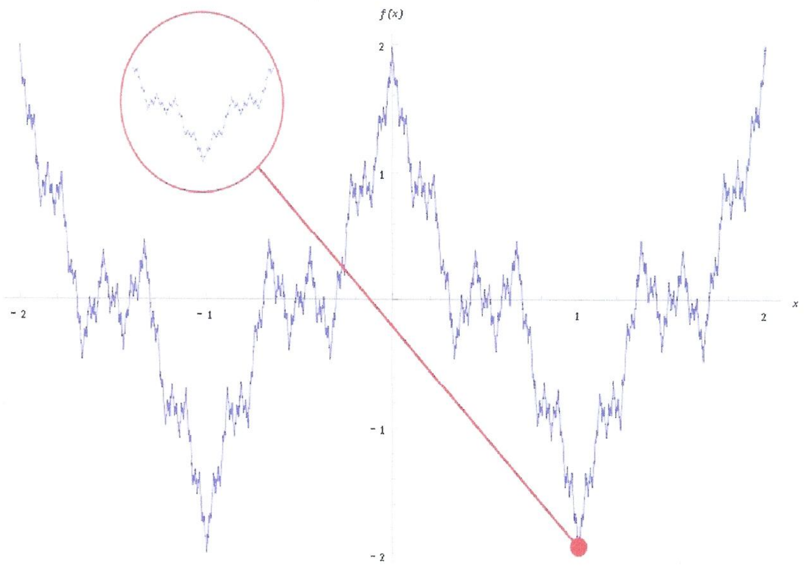

Figura 1

Hubo que esperar hasta que Helge von Koch[4], en 1906, conocido por su trabajo en fractales, proporcionara un ejemplo geométrico de una función con las características de la de Weierstrass. Mancosu aporta excelentes citas de Koch, afirmando que, el ejemplo de Weierstrass no satisface nuestras mentes desde el punto de vista geométrico, ya que esconde la naturaleza geométrica de la curva, dado que no *explica porqué* la curva no tiene tangente en ningún punto. Para ello ofrece un ejemplo con una apariencia geométrica en concordancia con su realidad analítica (Weierstrass, 1906:146).

Ello nos lleva a tratar de dar una descripción de la noción de "explicación" que conjugue, de alguna manera, la idea intuitiva de satisfacer, no sólo a cualquier caracterización analítica de un resultado matemático, sino también a una correspondiente descripción geométrica del mismo.

[3] Para más detalles, cfr. (Weierstrass, 1872).
[4] Véase figura 1. Para más desarrollo al respecto, cfr. (Mancosu, 2005: 15-17).

3. La noción de insight y las explicaciones primarias

La noción de explicación matemática que abordaremos requiere de un tipo de visualización intuitiva experta de difícil elucidación, que tiene que ver con los procesos de comprensión, entendimiento o inteligibilidad de los conceptos, descubrimientos, investigaciones o resultados matemáticos. Así, entendemos "explicar como comprender", o dicho de otra manera, la comprensión es la tarea psico-cognitiva de llevar a cabo una explicación.

Tal comprensión suele asociarse a un tipo de visión, no estrictamente sensorial, conocida como "insight". La noción de *insight* ha sido caracterizada en el ámbito de la creatividad, en términos de resolución de problemas, por ejemplo por Mayer (1992), para nombrar el proceso mediante el cual un resolutor de un problema, de repente se traslada de un estado de no-conocimiento acerca de cómo resolver el problema, a un estado de afirmación de conocimiento[5].

Este switch gestáltico puede ser interpretado como un corte de nuestro estado consciente que pasa de un estado de conocimiento E_1 en un tiempo t_1, a otro estado E_2 en un tiempo t_2, pero tal que si bien ambos estados son del mismo sujeto S, éste no reconoce a E_2 como producido por él. Y sin embargo *sabe* que es un estado cognitivo de él, pero no puede rastrear racionalmente cómo ha pasado de E_1 a E_2 de manera fluida, a menos que tenga una explicación a posteriori de esta transición.

Este cambio repentino tiene para nosotros las connotaciones de un brusco switch gestáltico, que permite pasar de una interpretación de una figura a otra muy diferente en el lapso de segundos. Como veremos más abajo, *el sentido dual* que se experimenta en este cambio de visión gestáltica, es compatible con el modo cómo entenderemos las "explicaciones primarias", a partir de dos ideas básicas:

(1) son explicaciones de *tipo abductivo*, siguiendo la versión original aristotélica, así como una de las versiones que Charles Sanders Peirce ofrece de la misma;
(2) son explicaciones que se describen apropiadamente en términos de *proporciones matemáticas*.

Con ello, surgen una serie de ejemplos en la historia de la matemática que se pueden explicar a partir de esta noción de explicación primaria. Nos concentraremos en un único caso aquí, por la brevedad de espacio.

3.1. Qué es una explicación primaria

Constituyen elucidaciones intuitivas expertas, producidas de manera espontánea, inmediata, directa, sin filtros aparentes, súbitas, y fugaces; *pero* expresables en términos lingüísticos sólo a posteriori, en general, a través de metáforas, imágenes visuales, analogías, enigmas, paradojas, fábulas o narraciones que describen usuales golpes de vista típicos, producidos por el cambio interpretativo del problema no solucionado a otro con respuesta positiva.

En general, reflejan un acto creativo último de todo un proceso de creatividad, que ha pasado por varios estadios. La explicación primaria es su última etapa *analítica*, donde el momento intuitivo básico experto o insight se expresa primeramente de manera lingüística[6]. Veremos cómo las proporciones

[5] Para más detalle, cfr. (Sternberg & Davidson, 1996).
[6] Cfr. (Visokolskis, 2012).

permiten recabar tal expresión lingüística. Luego es cuando adquieren un formato más sistemático, formal y rígido, propio de la *síntesis* de lo experimentado. Notemos que *también* pueden aparecer explicaciones primarias en el proceso de elaboración sintética. La creatividad se puede dar en ambos niveles: en el descubrimiento y en la justificación.

La operación gestáltica -desde un estado agitado de labor rutinaria a la aparición brusca de una imagen, anécdota, metáfora, diagrama o composición holística de una idea explicando el porqué de la solución en mano-, *en general carece de un "análisis" tipo descompositivo de partes* en que este insight global pueda partirse en elementos claramente cognoscibles, que además expresen las relaciones entre dichas partes, i.e. que expresen el cómo. Esta inefabilidad les es típica, al menos en un primer momento, lo cual no quiere decir que no sea posible llevar a cabo a posteriori una reconstrucción de un razonamiento, que, como veremos, responde en general bien a una descripción de tipo abductiva.

3.2. Reducción abductiva proporcional de una explicación primaria:

La noción de explicación matemática tiene un antecedente marcado en el artículo clave de Marc Steiner (Steiner, 1978), y fue retomada por Paolo Mancosu (Mancosu, 2008), a partir del cual actualmente es un tema de discusión álgida en el terreno de la filosofía de la matemática.

Pero ya antes en el siglo XIX, quien tratara esta temática es Bolzano, que se retrotrae a Aristóteles en la distinción que el estagirita hiciera en sus *Analíticos Posteriores* (I, 13, 78a-b) entre *conocimiento del hecho (saber que) y conocimiento del hecho razonado (saber por qué)*, para luego considerar dos tipos de demostraciones: por un lado aquellas que verifican, orientadas a otorgar convicción o certeza (*Gewissheit*), y por el otro lado, aquellas que derivan la verdad de la conclusión a partir de sus fundamentos objetivos, llamadas "justificaciones" (*Begrundungen*). Debemos agregar además los comentarios que Proclo provee respecto de las demostraciones explicativas en torno a los Elementos de Euclides, demostraciones que dan las causas de los hechos allí planteados. También se destacan las demostraciones por absurdo que no caen bajo el rótulo de pruebas del hecho razonado, en la medida que no ofrecen causas sino que en vez de eso, niegan el hecho a probar para así acceder a alguna contradicción.

En *Analíticos Posteriores*, Aristóteles parece elaborar una teoría de la *explicación* como un tipo de demostración silogística. Una explicación, en este contexto, se describe como un silogismo en el que la premisa mayor es una verdad necesaria. Explicar requiere convertir los efectos en causas. Mostrar *cómo* los efectos se derivan de las causas. El modo cómo Aristóteles refiere a la idea de explicación, caería bajo el rótulo de "apagogé" (en griego) o de "reducción" (como fuera luego traducido) representando un tipo de razonamiento denominado "abductivo" por Charles Sanders Peirce (1839-1914), quien ofrece una versión esquemática posterior, resumida como la inferencia de un caso a partir de una regla general y de un resultado:

REGLA:	Todos los porotos en esta bolsa son blancos.
RESULTADO:	Estos porotos son blancos.
CASO:	∴ Estos porotos provienen de esta bolsa.

Variando entonces el orden en que ubicamos estos tres enunciados, podemos expresar los otros dos tipos de inferencia que Peirce trabajó: la deducción y la inducción.

Deducción:

REGLA: Todos los porotos en esta bolsa son blancos.
CASO: Estos porotos están en esta bolsa.

RESULTADO: ∴ Estos porotos son blancos.

Inducción:
CASO: Estos porotos están en esta bolsa.
RESULTADO: Estos porotos son blancos.

REGLA: ∴ Todos los porotos en esta bolsa son blancos.

De esta manera, Peirce indica un proceso inferencial que describe el descubrimiento, creación, invención o formación de una hipótesis, constituyendo éste el primer paso (CP 7.218) en el proceso de una investigación científica, el paso “preparatorio” que requerirá a posteriori de la extracción de consecuencias de dicha hipótesis, a partir de un procedimiento deductivo, culminando luego con un testeo inductivo de estas últimas. Si tal hipótesis logra resistir todos estos pasos, entonces recién allí se considera digna de aceptación. Como vemos, la abducción no constituye siempre un razonamiento válido sino sólo uno plausible, que eventualmente puede fracasar en su propósito.

Lo anteriormente visto respecto a las explicaciones aristotélicas y su versión posterior peirceana, permite esquematizar las deducciones y abducciones, en términos proporcionales:

Deducción	Abducción
β es γ	β es γ
α es β	α es γ
α es γ	α es β

La *regla* es lo conocido o familiar, aunque no necesariamente esté siempre presente en la memoria. El caso es el término medio actuando. El resultado es la conclusión. El proceso de descubrimiento es analítico o regresivo: implica partir de un problema X dado del cual se busca su solución. Luego, debemos buscar una causa A de X, expresada abductivamente.

4. El caso del *Menón* de Platón

En (Platón, 1983), Sócrates plantea a Menón el problema matemático de hallar un cuadrado de área doble de otro dado.
Problema: duplicar un cuadrado de lado conocido “a”.

Dicho de otra manera, dado el cuadrado de lado a y diagonal d, hallar otro cuadrado de área doble de la del cuadrado anterior, es decir hallar un cuadrado de área $2a^2$. En la actualidad, un cálculo algebraico sencillo permite establecer que si $b^2=2a^2$ entonces $b=\sqrt{2}a$, con a un número entero positivo, lo que significa que b es un número irracional, inconmensurable con la unidad de medida natural. Así, el lado b del cuadrado buscado tiene un valor tal que en aquella época no era expresable en términos numéricos, teniendo entonces que aportar otro modo de representar tal valor, por caso una magnitud geométrica.

Análisis (abducción):

Regla: existe relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado, que es proporcional a la de cualquier otro cuadrado.

Resultado (efecto):estimar el valor de δ tal que $a:\delta::\delta:\gamma$ con un valor γ apropiado, oportunamente elegido.

Caso (causa): detectar que $\delta = d$, $\gamma = 2a$

En esta detección, d cumple un rol *dual*, es decir, primero es la diagonal del cuadrado pequeño[7], y luego es reinterpretado asumiendo el papel de lado del cuadrado grande, de diagonal 2a, solución del problema. Cabe observar que todo el procedimiento analítico se reduce a la captación gestáltica de la consideración de la diagonal d del cuadrado pequeño ahora como el lado b del nuevo cuadrado grande propuesto. Tal captación implica una comprensión que genera un switch desde un estado de ausencia de conocimiento a otro de presencia del resultado que resuelve el problema. Se produce así un insight del tipo clásico “pato-conejo”[8] en la interpretación del papel dual que cumple d.

Síntesis (deducción):

Regla: existe relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado, que es proporcional a la de cualquier otro cuadrado.

Caso (causa): detectar que $\delta = d$, $\gamma = 2a$

Resultado (efecto): $a:\delta::\delta:\gamma$, es decir $a:d :: d:2a$

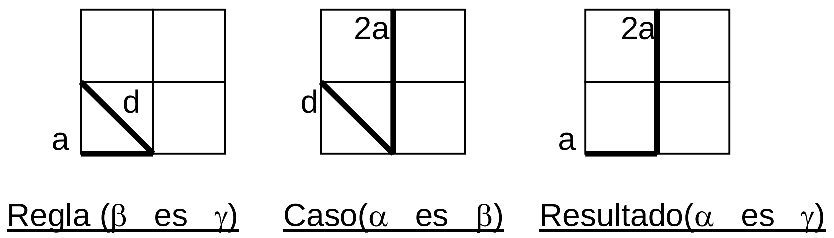

Figura 2

Así, el problema de duplicar el cuadrado se *explica* a partir del problema del hallazgo de una media proporcional entre un número dado y otro que resulta el doble de longitud del primero. Esta media proporcional tiene como término medio una cantidad que resulta ser la diagonal del cuadrado original, que va a cumplir así un *rol dual*! En consecuencia, dado el cuadrado pequeño de lado a, existe un cuadrado de área doble, a saber, el cuadrado inclinado de lado d, con d la diagonal del primer cuadrado dado. Véase la figura 3 al respecto.

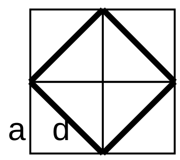

Figura 3

[7] Cfr. figura 2.

[8] Nos referimos aquí al ejemplo planteado por Joseph Jastrow en (Jastrow, 1900).

El ejemplo aquí desarrollado sucintamente muestra cómo obtener explicaciones primarias, recurriendo al hallazgo de uno o más términos medios de una cadena continua de proporciones, a partir de la postulación de los extremos de dicha cadena.

La perspectiva dual -o en gral n-ádica, en el caso de una cadena de proporción continua-, que encierran las explicaciones primarias proporcionales, consiste en resolver un problema a partir del hallazgo de dos dominios aparentemente no relacionados y por ello distantes entre sí, que resulta posible correlacionarlos a través de uno o más términos medios. Éste es un tema que encontramos planteado en *Elementos* de Euclides, en el libro VI, 13 y el libro VIII (1,12,18,20), referidos a números y magnitudes geométricas respectivamente. Y ya expresado en términos de ecuaciones, lo vemos tematizado en muchos resultados matemáticos posteriores; como por ejemplo, es el caso de René Descartes, en su utilización proporcional así como ecuacional de los problemas geométricos, que plasma en su *Reglas para la dirección del espíritu*.

Las proporciones y las ecuaciones se nutren de este principio dual para resaltar el switch gestáltico creativo, que permite que un dato ya conocido, pueda luego ser reinterpretado en otros términos, al modo cómo opera la figura de Joseph Jastrow -que Wittgenstein hiciera famosa en (Wittgenstein, 1953/1958: 165-166)-. En tal representación[9], si nos concentramos en el ojo mirando a la derecha, la figura que salta a la vista es un conejo. Y si, en cambio, observamos el ojo enfocado hacia la izquierda, emerge la figura del pato, y las otrora orejas de conejo pasan a convertirse en pico de pato. Así, esta figura cumple también un rol dual, según en qué faceta de ella pongamos la atención.

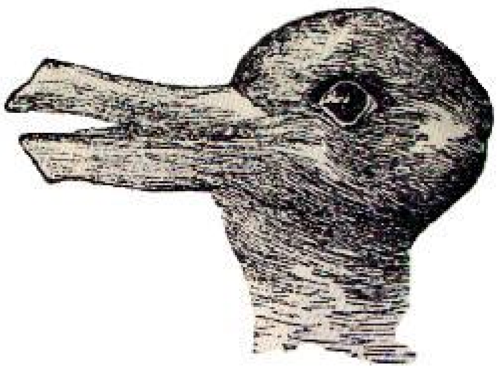

Figura 4

5. Conclusión

A los efectos de esbozar una conclusión, cabe recordar las siguientes palabras de Charles Sanders Peirce, en torno a los razonamientos que proveen nuevas ideas, i.e., los abductivos:

> [Un investigador], encontrándose confrontado con un fenómeno distinto de aquello que él hubiera esperado bajo las circunstancias dadas, mira por encima de los aspectos o notas [concretas] una propiedad o

[9] Cfr. una reproducción de la misma en la figura 4 abajo.

> relación remarcable entre ellas, y de repente las reconoce como siendo características de alguna concepción que su mente ya tenía guardada, de tal manera que sugiere una teoría que *explica*[10] aquello que es sorprendente en el fenómeno. (Peirce, CP 2.776)

La abducción puede no tener fuerza justificatoria pero lo que no le ha de faltar es *su capacidad explicativa*, el tipo de convicción que es necesario a los fines del descubrimiento más que a los de una demostración.

En este trabajo hemos intentado destacar el papel quizás menos tenido en cuenta de la explicación en matemática, no sólo en torno a la creatividad sino más aún en el contexto de justificación, donde se observa que una demostración no sólo deberá aportar una ilación lógica que transporte verdad desde premisas supuestamente verdaderas, sino que además debe ofrecer una "fuerza apodíctica" caracterizada por la existencia de una explicación que contribuya a la comprensión y a la dilucidación de las intuiciones más vagas que rondan en torno a la demostración.

Es por ello que creemos que una *comprensión* acabada del significado de una prueba matemática por medio de una *explicación* en vez de una justificación, es un ingrediente necesario y no sólo un ingrediente para satisfacer nuestras inquietudes respecto a la transmisión de la verdad en los enunciados que conforman nuestras argumentaciones, así como a su validez general. Si al nivel de una prueba matemática logramos incorporar las explicaciones, más aún será su proyección al contexto de descubrimiento en el cual se manifiesta sobre todo la creatividad, dando lugar así a la posibilidad de un salto intelectivo explicado más no necesariamente justificado racionalmente.

6. Referencias bibliográficas

Aristóteles (1995): "Analíticos Primeros", en M. C. Sanmartín, *Tratados de Lógica (Organon). Vol. II*, Editorial Gredos, Madrid.

Hafner, J. & P. Mancosu, (2008): "Beyond Unification", en Mancosu, P. (Ed.) (2008): *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford University Press, pp.151-178.

Jastrow, J. (1900): *Fact and Fable in Psychology.* Boston: Houghton Mifflin.

Mancosu, P. (2005): "Visualization in Logic and Mathematics", en Mancosu, P., Jϕrgensen, K. F. & S. A. Pedersen (Eds.) (2005), *Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics*, The Netherlands: Springer, pp.13-30.

Mancosu, P. (2008): "Mathematical Explanation: Why it Matters", en Mancosu, P. (Ed.) (2008): *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford University Press, pp.132-150.

Peirce, C. S. (1931-58): *Collected Papers of Charles Sanders Peirce: Vol. I-VI*, en Hartshorne, Ch. & Weiss, P. (Eds.) Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1958): *Collected Papers of Charles Sanders Peirce: Vol. VII-VIII*, en Burks, A. W. (Ed.) (1958). Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard University Press.

Platón (1983): "Menón", en F. Olivieri, *Diálogos*, Vol. II, trad. F.J. Olivieri, Editorial Gredos, Madrid.

[10] Cursivas del propio autor.

Sternberg, R. J. & J.E. Davidson (1996): *The nature of insight* (Reprint. ed.), Cambridge, MA; London: The MIT Press.
Steiner, M. (1978): “Mathematical Explanation”, en *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, Vol. 34, Nº 2, pp. 135-151.
Wallas, G. (1926): *The Art of Thought*, London: Butler & Tanner Ltd.
Weierstrass, K. (1872): “Abhandlungen aus der Functionenlehre”, publicado por P. du Bois-Reymond, *Journal für Mathematik*, 1875, vol. 79, pp. 21-37.
Visokolskis, S. (2012): “Discovery in Mathematics as an Experiential Practice of Privation”, en *Proceedings of the AISB/IACAP World Congress 2012, Symposium on Mathematical Practice and Cognition II*, Alison Peace & Brendan Larvor (Compiladores), The Society for the Study of Artificial Intelligence and Simulation Behaviour Publishers, United Kingdom.
Wittgenstein, L. (1953/1958): *Philosophical Investigations.* Oxford, England: Blackwell.