EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VI JORNADAS (1996)

Marisa Velasco
Aarón Saal
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Javier Legris
U.B.A/Conicet

ENTRE FINITISMO E INTUICIONISMO: OBSERVACIONES SOBRE LOS ORÍGENES DE LA DEDUCCIÓN NATURAL

1. El surgimiento de la Deducción Natural

La aparición del sistema de Deducción Natural a comienzos de la década de 1930 es un hecho en la historia de la lógica moderna que vale la pena destacar En efecto, la Deducción Natural trajo consigo una nueva concepción de la lógica, la cual parte de la idea de reconstruir de manera aproximada lo que se considera el razonamiento intuitivo (al menos en matemática), y la interpretación dada al sistema originó un programa semántico, que más tarde constituirá una alternativa a la semántica de la teoría de modelos

El sistema fue desarrollado por Gerhard Gentzen, quien lo presentó en las primeras secciones de su tesis doctoral, terminada en julio de 1933 y publicada dos años más tarde en la Mathematische Zeitschrift (Gentzen 1935) El objetivo central de la tesis era desarrollar un sistema para la lógica de primer orden en el cual las demostraciones obedecieran a una cierta "forma normal" Como consecuencia, podía demostrarse la consistencia de la lógica de primer orden y de la aritmética sin el principio de inducción completa (véase Legris 1995)

Estos resultados pueden considerarse en su totalidad como una contribución al programa de Hilbert, en el cual Gentzen se había formado durante sus estudios de matemática y física en Göttingen desde 1928 hasta 1933 Allí eran profesores, entre otros, David Hilbert, Paul Bernays, Hermann Weyl (quien dirigió su tesis) y Paul Hertz.

La Deducción Natural hizo su aparición cuando la lógica simbólica entraba en su período de madurez, luego de los resultados de Gödel En esa época, el programa de Hilbert se encontraba en un período de reformulación precisamente a causa de los teoremas de incompletud demostrados por Gödel en 1931 Esta reformulación consistía, de un lado, en desarrollar ampliaciones del punto de vista finito, admitiendo métodos de demostración más poderosos, lo que conllevaba el abandono del finitismo De otro lado, el programa de Hilbert y el intuicionismo matemático estaban buscando en ese momento acercar sus posiciones Y de esto dan cuenta las ideas de Weyl acerca del intuicionismo y las axiomatizaciones de Heyting de la lógica y la matemática intuicionistas

Ahora bien, la Deducción Natural puede considerarse como un resultado independiente, novedoso en el desarrollo de la lógica moderna, sin antecedentes directos en el programa de Hilbert y que con el tiempo adquiriría peso propio. A continuación resumiré brevemente tres características de la Deducción Natural que considero especialmente relevantes.

En primer lugar, es un sistema que consta exclusivamente de reglas, retomando en este aspecto una tradición que comienza con Aristóteles y continúa en la lógica medieval. Esto establece una diferencia con la concepción generalizada en esa época, marcada por el "pensamiento axiomático" de Hilbert, aunque, en cuanto a los fines, la Deducción Natural comparte el mismo espíritu y está de acuerdo con las ideas del Hilbert tardío, quien en 1931 consideraba a su teoría de la demostración como un "protocolo acerca de las reglas" de nuestro pensamiento (véase Hilbert 1931, p. 493). Según las afirmaciones de Gentzen, la idea de un sistema puramente de reglas habría surgido de un análisis de las propiedades del razonamiento matemático real (véase 1935, pp. 176 y passim). De todos modos, es sabido que la idea no era totalmente ajena a la época. Herbrand, en su tesis doctoral "Investigaciones sobre la teoría de la demostración" de 1930, presenta en el cap. 1 un sistema de cuatro reglas y un único axioma. Más aún, en 1926, Lukasiewicz ya había sugerido la idea de un sistema de reglas y, sobre esta base, Stanislaw Jaskowski desarrolló, de manera simultánea con (pero independiente de) Gentzen, un sistema de reglas (que, como las de la Deducción Natural, incluían supuestos; véase Jaskowski 1934). No me ocuparé aquí del problema de la presencia de supuestos en la reglas, lo que le da características particulares al sistema.

En segundo lugar, y esto me parece más importante desde el punto de vista histórico, en el sistema hay reglas independientes para cada constante lógica (conectivas y cuantores), con lo cual se obtiene un sistema separable para la lógica de primer orden. En pocas palabras, un sistema de reglas es separable, si para demostrar un teorema, en el cual aparece el signo lógico *, se necesitan únicamente reglas para *. El problema de la separabilidad es de temprana aparición en la lógica moderna, sobre todo en conexión con el fragmento "libre de negación" de la lógica de primer orden. Desde la perspectiva algebraica, el problema está ya presente a fines del siglo pasado en los trabajos de Ernst Schröder sobre el álgebra de la lógica. Pero, en circunstancias más próximas a Gentzen, la idea de separabilidad aparece en los sistemas axiomáticos de Hilbert y Bernays formulados en la década de 1920. En el trabajo de 1922, "Nueva fundamentación de la matemática", Hilbert considera en forma separada la "parte positiva" de la lógica de predicados, y en su artículo de 1927, "Los fundamentos de la matemática", formula un sistema con axiomas separados para condicional, conjunción, disyunción y negación (si bien el condicional aparece en todos ellos). Surge así la idea de que cada grupo de axiomas "defina" la constante lógica en cuestión. De este modo, la Deducción Natural parece sólo ser una trasposición del sistema de Hilbert.

Un caso especial lo constituyen los cuantificadores. En los trabajos de Hilbert (por ejemplo, 1925 y 1931) éstos aparecen caracterizados por medio de "axiomas transfinitos", en vinculación con la distinción que hace Hilbert dentro de la matemática entre su parte real, que es la que contiene enunciados con contenido, y su parte ideal, cuyas expresiones carecen de significado (véase Hilbert 1925, en este contexto aparece la función de elección transfinita ε). Esta distinción es esencial para el punto de vista finito (o finitismo) de Hilbert. Por el contrario, esta distinción está ausente en la Deducción Natural, lo que lleva a concluir que Gentzen ya en ese momento consideraba a los enunciados ideales de la matemática como significativos, tal como hizo efectivamente en su obra posterior Por ejemplo, según la regla de introducción del cuantor existencial, un enunciado $\exists xA[x]$ es afirmable respecto del dominio de los números naturales, a condición de que se haya encontrado un número que satisfaga la condición expresada por A, lo cual puede verse como una caracterización finitaria del cuantificador existencial, a diferencia de Hilbert para quien los cuantificadores existenciales debían entenderse como negaciones de universales.

Estas consideraciones conducen a tomar en cuenta una tercera propiedad de la Deducción Natural, tal vez la más importante, a saber, que las reglas del sistema son también reglas de significado Así lo expresa claramente el propio Gentzen:

> Las introducciones representan, por así decirlo, las "definiciones" de los respectivos signos, y las eliminaciones son, en definitiva, sólo consecuencias de éstas, lo que puede expresarse aproximadamente así. en la eliminación de un signo, sólo puede usarse la fórmula en cuestión, de cuyo signo exterior se trata, "de acuerdo con lo que significa sobre la base de la introducción de ese signo". (Gentzen, 1935 p. 189)

Con esta afirmación, Gentzen sienta las bases de un programa semántico; dicho rápidamente, la Deducción Natural misma debe verse como una semántica.

2. La Deducción Natural como semántica

Las afirmaciones de Gentzen merecen un análisis más profundo. Puesto que se pretende no sólo fijar el significado de las constantes lógicas sino también aclararlo, las reglas de introducción son las que otorgan el significado, y si esto es así, las reglas de eliminación deben ser consecuencia del significado así otorgado. Esto significa que estas reglas no pueden dar lugar a consecuencias que no sea posible obtener mediante reglas de introducción exclusivamente En otras palabras, las reglas de eliminación deben ser conservativas respecto de las reglas de introducción Pero esto es algo que debe demostrarse

Una manera de hacerlo es establecer procedimientos mediante los cuales toda derivación hecha en la Deducción Natural empleando reglas de eliminación pueda reducirse a otra derivación en la que se emplee exclusivamente reglas de introducción Determinar estos procesos de reducción implica además tener una definición precisa de lo que es una derivación válida en el sistema de Deducción Natural, puesto que lo que se debe reducir son derivaciones válidas (véase Prawitz 1973, pp. 234 y ss.)

Lo que se está planteando aquí es, en realidad, la adecuación semántica del sistema entero de Deducción Natural (reglas de introducción y eliminación) respecto de las reglas de introducción (entendidas como reglas semánticas). Los procedimientos de reducción aseguran que toda inferencia demostrable en la Deducción Natural es también válida, es decir, la corrección semántica del sistema. A su vez, demostrar la completud del sistema implicaría demostrar que el conjunto de todas las reglas derivables en Deducción Natural es el conjunto máximo de reglas. (O, dicho de otra manera, toda regla válida es una regla derivable en el sistema.) Pero esta demostración presupone una caracterización formal de los procedimientos de reducción (véase Legris & Molina 199?).

Ahora bien, una vez solucionado este problema de la adecuación del sistema entero de reglas respecto de las de introducción, puede afirmarse que las reglas de la Deducción Natural proporcionan el significado de las constantes lógicas, y por lo tanto puede considerarse a este sistema como semántica. En efecto, la adecuación de un sistema formal cualquiera para la lógica de primer orden podrá establecerse al demostrarse su equivalencia con el sistema de Deducción Natural En este sentido es que puede entenderse la demostración de equivalencia de la Deducción Natural (y de su reformulación en un sistema de secuentes) con el sistema axiomático de Hilbert mencionado más arriba (en Hilbert 1927) de la que se ocupa toda la sección V, la última sección, de las "Investigaciones" de Gentzen.

En suma, se está aquí frente a dos sentidos diferentes de adecuación. El primero se da entre las reglas de introducción y el sistema entero de Deducción Natural. El segundo se da entre cualquier sistema para lógica de primer orden y la Deducción Natural, entendida ahora como semántica.

3. Deducción Natural y la "lógica de problemas" de Kolmogorov

En este punto, vale la pena comparar las ideas de Gentzen con un trabajo que el lógico y matemático ruso Andrei Nikolaevich Kolmogorov había terminado (según testimonio de Uspensky 1992 p.391) durante una visita a Göttingen en enero de 1931 y que apareció en alemán en el volumen correspondiente a 1932 de la Mathematische Zeitschrift (Kolmogorov 1932). Allí Kolmogorov interpretaba de manera constructiva las constantes lógicas recurriendo al concepto de "tarea" o "problema" (Aufgabe en alemán). Este concepto era entendido en el sentido de, por ejemplo, los problemas constructivos de la geometría, y lo que se obtenía era algo así como una semántica de problemas que fundamentaba a la lógica entendida a su vez como un cálculo de problemas, en el que las reglas lógicas válidas son esquemas de resolución de problemas (véase Kolmogorov 1932 p. 58) (Esta interpretación es un antecedente de la formulada por Kleene veinte años más tarde en términos de realizabilidad.) La caracterización de las conectivas conjunción, disyunción y condicional era la siguiente:

Si a y b son dos problemas, entonces a&b designa la tarea de "resolver ambos problemas a y b", mientras que avb designa el problema de "resolver al menos uno de los problemas a y b" Además, $a \supset b$ es el problema de, "bajo el supuesto de que está dada la solución de a, resolver b", o, lo que significa lo mismo, de "reducir la solución de b a la solución de a" (Kolmogorov 1932, p. 59)

La caracterización de la negación surge a partir de la existencia de problemas contradictorios. Así $\neg a$ se interpreta como el problema de, "bajo el supuesto de que está dada la solución de a, obtener una contradicción" (véase Kolmogorov 1932, p. 60). Finalmente, y de manera algo colateral, Kolmogorov interpreta una cuantificación universal $\forall x a(x)$ como el problema de "proporcionar un método general para la solución de a(x) para cada valor individual de x" (véase Kolmogorov 1932, p. 60).

Así, los enunciados que contienen constantes lógicas significan un tipo particular de problemas que implican métodos de deducción. Si a, b y c son enunciados atómicos, entonces cualquier composición de los mismos mediante constantes lógicos se representa como una función p(a,b,c), y afirmar que p(a,b,c) es un teorema es afirmar que se puede proporcionar un método general para resolver p(a,b,c).

Con esta concepción, Kolmogorov proporciona entonces una interpretación del sistema axiomático para la lógica de enunciados intuicionista que Heyting había presentado poco antes (véase Heyting 1930), la cual parte de supuestos diferentes de aquellos que los intuicionistas solían emplear en ese entonces (como, por ejemplo, la concepción de los objetos matemáticos como construcciones hechas por el sujeto o la del infinito como potencial y no actual), y establece además una suerte de adecuación (sin demostrar formalmente) entre el sistema de Heyting y esta "semántica de problemas".

Más allá de una influencia directa del trabajo de Kolmogorov en el de Gentzen, la cual sólo puede conjeturarse, las conexiones entre las reglas de introducción de la Deducción Natural y la caracterización de las constantes lógicas de Kolmogorov saltan a la vista. En el caso de Kolmogorov, el significado de las constantes lógicas es elucidado de manera intuitiva, mostrándose su adecuación (intuitiva) con el sistema de Heyting. En el caso de Gentzen, la elucidación se lleva a cabo por medio de reglas formalizadas en un cálculo.

Por lo demás, en la propuesta de Kolmogorov las constantes lógicas no son clarificadas recurriendo al concepto de demostrabilidad o derivación (como hizo poco después Heyting), sino al de reglas para resolver problemas. Y Algo semejante puede afirmarse también de la Deducción Natural. Gentzen piensa sobre todo en el concepto de regla y no en el de demostración. Estas reglas pueden entenderse de diferentes maneras, en particular como meras reglas de operación sobre símbolos, lo que es afín a ciertos aspectos del programa de Hilbert y característico de la teoría de la demostración. Con ello, no se cumple la condición intuicionista de que los enunciados a los que se aplican las reglas tengan un contenido específico. Esta interpretación lleva a una definición de validez diferente de la considerada más arriba, la cual se aplica primariamente a reglas y sólo secundariamente a derivaciones, de modo que la reducción de las reglas de eliminación a las de introducción y la consiguiente demostración de adecuación corren por otros carriles.

4. La Deducción Natural, la lógica intuicionista y la teoría de la demostración

Como se mencionó más arriba (en la seccion 1), el sistema de la Deducción Natural no representa el finitismo de Hilbert. Pero tampoco representa la lógica que subyace a la matemática clásica (o "actualista", como la denominó Gentzen en diferentes oportunidades) Es sabido que el conjunto formado por los pares de reglas de introducción y eliminación (con el agregado de una regla correspondiente al principio del ex falso sequitur quodlibet) da lugar a un sistema que es equivalente al sistema axiomático de Heyting para la lógica intuicionista mencionado arriba. En las "Investigaciones" Gentzen agrega, a fin de obtener la lógica clásica, el principio de tercero excluido a manera de un axioma (si bien señala que lo mismo se obtiene si se agregara una regla de doble negación, véase Gentzen 1935, p. 190).

Obviamente, estos añadidos llevan a una extensión no conservativa de la Deducción Natural, que afecta no sólo al significado de la negación, sino al de otras constantes lógicas, tal como lo muestra el caso de la ley de Peirce, que contiene exclusivamente el condicional pero que no se sigue de las reglas para el condicional. Gentzen mismo señalaba que la regla de doble negación no es "admisible" en el sistema (véase Gentzen, loc. cit.)

De este modo, la lógica intuicionista resulta privilegiada frente a la clásica: las reglas que caracterizan a esta última (como la regla de doble negación, que es una forma de eliminación de la negación) no están justificadas por el significado dado a las constantes lógicas (i.e., no pueden reducirse a reglas de introducción), sino que son condiciones especiales agregadas.

Desde el punto de vista histórico, surge aquí la pregunta de si ésta era la intención originaria que Gentzen tenía al formular la Deducción Natural. Es cierto que la lógica intuicionista pierde este privilegio al formulársela en el sistema de secuentes desarrollado por el mismo Gentzen y que en las "Investigaciones" no aparecen argumentos ulteriores en su favor. No obstante, son las reglas de Deducción Natural las que llevan el peso de proporcionar las definiciones de las constantes lógicas.

En trabajos posteriores, Gentzen toca de manera directa la polémica entre intuicionismo y platonismo en fundamentos de matemática. En un trabajo publicado en 1938 acerca de la situación de la investigación sobre los fundamentos de la matemática, Gentzen afirma que el punto de vista constructivo (que abarca para él tanto el intuicionismo como el finitismo) tiene un papel fundamental en matemática, debido a su marcada autoevidencia. Sin embargo, "no hay razones apremiantes de por qué todas las partes del análisis que se basan en la interpretación actualista (la que propone la lógica clásica) deberían ser rechazadas radicalmente; por el contrario, ellas adquieren una gran importancia por derecho propio, sobre todo en vistas de sus aplicaciones físicas" (Gentzen 1938, pp. 20 y s.).

Estas afirmaciones se entienden mejor en el contexto del replanteamiento radical de las bases del programa de Hilbert, contexto en el cual se situaba Gentzen. El objetivo fundamental era, desde esta nueva posición, obtener demostraciones de consistencia para el análisis matemático, indispensable para las aplicaciones de la matemática en la física, empleando únicamente ampliaciones aceptables del punto de vista finito. Esta fue la tarea que finalmente se impuso la teoría de la demostración luego de Hilbert. Para Gentzen, estas ampliaciones debían obedecer a principios constructivos (en un sentido de "constructivo" que nunca llega a quedar bien claro, véase §16 de Gentzen 1936). Más allá de este problema, poco le importaba la oposición entre intuicionismo y platonismo. Gentzen estaba convencido de que sería posible encontrar métodos y principios para demostrar la consistencia del análisis que fueran incluso más allá de la teoría de números y que fueran a la vez constructivos, y esta convicción lo acompañó toda su vida. Así, vista retrospectivamente, desde la obra posterior de Gentzen, la Deducción Natural muestra el abandono del punto de vista finito y el comienzo de la teoría de la demostración en su sentido actual.

Referencias bibliográficas

Gentzen, Gerhard. 1935. "Untersuchungen über das logische Schliessen". En Mathematische Zeitschrift 39, pp. 176-210, pp. 405-431.

——— .1936. "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie". Math Annalen 112, pp. 493-565.

——— .1938. "Die gegenwärtige Lage in der mathematische Grundlagenforschung" Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, neue Reihe, 4, pp. 5-18.

Heyting, Arendt. 1930. "Die Formalen Regeln der intuitionistischen Logik". Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften. Phys.-Math. Klasse II, pp. 42-56

Herbrand, Jacques. 1930. "Recherches sur la théorie de la démonstration". Trav. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, 33, pp. 1-128.

Hilbert, David. 1922. "Neubegründung der Mathematik". Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 1, pp. 157-177.

——— .1926. "Über das Unendliche". Math. Annalen 95, pp. 161-190

——— .1927. "Die Grundlagen der Mathematik". Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 6, pp. 65-85.

Jaskowski, Stanislaw. 1934. "On the Rules of Suppositions in Formal Logic". Studia Logica 1, pp. 5-32.

Kolmogorov, Andrei N. 1932. "Zur Deutung der intuitionistischen Logik". Mathematische Zeitschrift 35, pp. 58-65.

Legris, Javier. 1995. "Demostraciones de consistencia y derivabilidad formal. a 60 años de las 'Investigaciones sobre la deducción lógica' de G. Gentzen". En Epistemología e historia de la ciencia comp. por Alberto Moreno. Córdoba (Arg.), Facultad de Filosofía y Humanidades - Universidad Nacional de Córdoba, 1995, pp.224-228

Legris, Javier & Jorge A. Molina. 199?. "El problema de la completud de la lógica intuicionista". Enviado para su publicación.

Uspensky, Vladimir A. 1992. "Kolmogorov and Mathematical Logic". Journal of Symbolic Logic 37, pp. 385-412.