



FACULTAD  
DE CIENCIAS  
ECONÓMICAS



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

# REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

## **Análisis de la interrelación entre mercados bursátiles aplicando modelos VAR no estacionarios con múltiples quiebres estructurales**

Sergio Martín Buzzi

Tesis en Maestría en Estadística Aplicada. Escuela de Graduados. Facultad de Ciencias  
Económicas. Universidad Nacional de Córdoba, 2018. Córdoba, Argentina



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual  
4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



**Análisis de la interrelación entre mercados bursátiles  
aplicando modelos VAR no estacionarios con  
múltiples quiebres estructurales**

Para optar al grado de:  
**Magíster en Estadística Aplicada**

Autor:  
Lic. en Economía  
**Sergio Martín Buzzi**

2018

# Comisión Asesora de Tesis

## **Director:**

Dra. Silvia María Ojeda

*FaMAF; Universidad Nacional de Córdoba*

## **Miembros:**

Dr. Oscar Humberto Bustos

*FaMAF; Universidad Nacional de Córdoba*

Fecha de Defensa y Aprobación de Tesis: 10 de septiembre de 2018

## Agradecimientos

En primer lugar debo agradecer a la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Córdoba por brindarme apoyo económico para la finalización de mis estudios en la Maestría en Estadística Aplicada y a mi Directora de Tesis Silvia María Ojeda, por ayudarme a conseguir dicho objetivo.

Agradezco a toda la planta docente y no docente y compañeros de la Maestría en Estadística Aplicada y del Doctorado en Ciencias Económicas; por sus valiosas enseñanzas, dedicación y compañerismo; respectivamente.

También, a los docentes de la Facultad de Ciencias Económicas con los que trabajo en las diversas materias en las que participo; muy especialmente a los profesores José Luis Arrufat, Alberto Martín Díaz Cafferata, Adrián Maximiliano Moneta Pizarro, Carlos Walter Robledo, Ricardo Luis Descalzi, Silvia Joeques y Andrea Fabiana Righetti, por su constante consejo.

Finalmente, a mis padres Susi y Nino y mi hermano Daniel por estar siempre presentes y a todos mis familiares y amigos por su afecto y apoyo.

*Para Sol y Sofía*

---

## Resumen

**Palabras clave:** Cointegración; Causalidad de Granger; Raíz unitaria; Quiebres estructurales; Mercados bursátiles.

Esta tesis pretende contribuir al conocimiento sobre pruebas de raíz unitaria, cointegración y causalidad de Granger. Cuando el período de análisis es extenso, los parámetros de los modelos pueden no permanecer inalterados. Luego, la discusión se centra en modelos que incorporan la existencia de quiebres estructurales o son robustos en dicha situación.

Dado que varias pruebas utilizadas no están programadas, se implementan las mismas usando el lenguaje *R*. Luego, se emplean dichas pruebas para analizar un conjunto de índices bursátiles.

Al aplicar las pruebas de raíz unitaria estándar se concluye que todas las series son  $I(1)$ ; sin embargo, al modelar los quiebres estructurales dicho resultado no se mantiene.

Para analizar la existencia de interrelación entre los mercados, se realizan pruebas de cointegración estándar usando toda la muestra y en ventanas móviles y pruebas de cointegración que incorporan quiebres estructurales. Estas pruebas indican que los índices están cointegrados, pero dicha relación no se mantiene inalterada en el tiempo. Además, al incorporar quiebres estructurales se encuentran más relaciones de cointegración.

Finalmente, se realizan pruebas de causalidad de Granger basadas en modelos VAR aumentados. Una de dichas pruebas indica que el índice Merval causa y es causado por relativamente la misma cantidad de índices; mientras que la otra prueba determina que el Merval es un índice seguidor, dado que la cantidad de índices que lo causan es claramente superior a la cantidad de índices que el causa.

---

# Analysis of the interrelationship among stock markets applying non-stationary VAR models with multiple structural breaks

## Summary

**Key words:** Cointegration; Granger causality; Unit root; Structural breaks; Stock markets.

This thesis aims to contribute to knowledge about unit root, cointegration and Granger causality tests. When the analysis period is extensive, the parameters of the models may not remain unchanged. Then, the discussion focuses on models that incorporate the existence of structural breaks or are robust in this situation.

Since several tests used are not programmed, they are implemented using the *R* language. Then, these tests are used to analyze a set of stock markets indices.

When applying the standard unit root tests, it is concluded that all the series are  $I(1)$ ; however, when modeling structural breaks, this result is not maintained.

To analyze the existence of interrelationship among the markets, standard cointegration tests are carried out using the whole sample and rolling windows; and also cointegration tests that incorporate structural breaks. These tests indicate that the indices are cointegrated, but that this relationship does not remain unchanged over time. In addition, the incorporation of structural breaks generates more cointegration relationships.

Finally, Granger causality tests based on augmented VAR models are performed. One of those tests indicates that the Merval index causes and is caused by relatively the same number of indexes; while the other test determines that the Merval is a follower index, given that the number of indices that cause it, is clearly higher than the number of indices that it causes.

---

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>8</b>
1.1	Problema de investigación . . . . .	8
1.2	Objetivos . . . . .	11
1.3	Organización de la tesis . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Antecedentes</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>19</b>
3.1	Preliminares y definiciones . . . . .	20
3.1.1	Proceso estocástico estacionario . . . . .	20
3.1.2	Tendencia determinística y tendencia estocástica . . . . .	21
3.1.3	Orden de integración . . . . .	21
3.1.4	Raíz unitaria . . . . .	22
3.1.5	Modelo de vectores autorregresivos (VAR) . . . . .	22
3.1.6	Cointegración . . . . .	23
3.1.7	Modelo de corrección de errores (VEC) . . . . .	23
3.1.8	Causalidad en el sentido de Granger . . . . .	24
3.2	Pruebas de raíz unitaria . . . . .	25
3.2.1	Prueba aumentada de Dickey y Fuller . . . . .	25
3.2.2	Prueba KPSS . . . . .	27
3.2.3	Prueba de Kapetanios . . . . .	28
3.3	Pruebas de cointegración . . . . .	31
3.3.1	Prueba de cointegración de Johansen y Juselius . . . . .	31
3.3.2	Prueba de cointegración con ventanas móviles . . . . .	32
3.3.3	Pruebas de cointegración con quiebres estructurales . . . . .	33
3.4	Pruebas de causalidad en el sentido de Granger . . . . .	42

---

3.4.1	Prueba de Toda y Yamamoto . . . . .	44
3.4.2	Prueba de Bauer y Maynard . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Materiales</b>	<b>47</b>
4.1	Preprocesamiento . . . . .	47
4.2	Fuentes . . . . .	49
4.3	Descripción de las series . . . . .	49
4.4	Implementación computacional . . . . .	51
4.4.1	Implementación computacional de las pruebas de raíz unitaria . . . . .	51
4.4.2	Implementación computacional de las pruebas de cointegración . . . . .	51
4.4.3	Implementación computacional de las pruebas de causalidad de Granger . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>53</b>
5.1	Pruebas de raíz unitaria . . . . .	53
5.1.1	Prueba aumentada de Dickey y Fuller . . . . .	53
5.1.2	Prueba KPSS . . . . .	54
5.1.3	Prueba de Kapetanios . . . . .	55
5.2	Pruebas de Cointegración . . . . .	58
5.2.1	Prueba de cointegración de Johansen y Juselius . . . . .	58
5.2.2	Cointegración empleando ventanas móviles . . . . .	61
5.2.3	Pruebas de cointegración con quiebres estructurales . . . . .	64
5.3	Causalidad en el sentido de Granger . . . . .	68
5.3.1	Prueba de Toda y Yamamoto . . . . .	69
5.3.2	Prueba de Bauer y Maynard . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Discusión, conclusiones y recomendaciones</b>	<b>74</b>
6.1	Discusión . . . . .	74
6.2	Conclusiones . . . . .	76

---

6.3	Recomendaciones y futuras líneas de investigación . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Referencias</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>Apéndice</b>	<b>88</b>
A.1	Función <i>ur.ka</i> . . . . .	88
A.2	Función <i>cajolst2</i> . . . . .	101
A.3	Función <i>cajolstb</i> . . . . .	105
A.4	Función <i>TSLcrit</i> . . . . .	109
A.5	Función <i>TY</i> . . . . .	110
A.6	Función <i>VARXcausality</i> . . . . .	111

---

## Listado de tablas

5.1	Prueba aumentada de Dickey y Fuller (ADF) . . . . .	53
5.2	Prueba KPSS . . . . .	54
5.3	Valores críticos de $\tau_{min}^m$ . . . . .	56
5.4	Prueba de Kapetanios, Modelo A . . . . .	56
5.5	Prueba de Kapetanios, Modelo B . . . . .	57
5.6	Prueba de Kapetanios, Modelo C . . . . .	58
5.7	Cantidad de retardos seleccionados según los criterios de información . . . . .	59
5.8	Prueba de Johansen y Juselius. Estadístico de la traza . . . . .	60
5.9	Prueba de Johansen y Juselius. Estadístico del máximo valor propio . . . . .	60
5.10	Prueba de cointegración con quiebres en la constante. Sin tendencia . . . . .	65
5.11	Prueba de cointegración con quiebres en la constante. Con tendencia . . . . .	66
5.12	Prueba de cointegración con quiebres en constante y tendencia. Valores observados . . . . .	67
5.13	Prueba de cointegración con quiebres en constante y tendencia. Valores críticos . . . . .	67
5.14	Prueba de causalidad de Toda y Yamamoto. Efectos de índice Merval en los otros índices . . . . .	70
5.15	Prueba de causalidad de Toda y Yamamoto. Efectos de otros índices sobre el Merval . . . . .	70
5.16	Prueba de causalidad de Bauer y Maynard. Efectos del índice Merval en los otros índices . . . . .	72
5.17	Prueba de causalidad de Bauer y Maynard. Efectos de otros índices sobre el Merval . . . . .	72

---

# Listado de figuras

- 4.1 Evolución de los índices . . . . . 50
- 4.2 Evolución del logaritmo natural de los índices . . . . . 50
- 5.1 Prueba con ventana móvil de 5 años, sin componentes determinísticos . . . 62
- 5.2 Prueba con ventana móvil de 5 años, con constante . . . . . 63
- 5.3 Prueba con ventana móvil de 5 años, con tendencia . . . . . 63

---

# 1 Introducción<sup>1</sup>

## 1.1 Problema de investigación

Uno de los indicadores más notables de la creciente globalización económica está dado por los movimientos internacionales de capitales financieros. En el caso particular de los mercados bursátiles, existe un elevado grado de concentración de la actividad, lo que se manifiesta en que las principales plazas dan cuenta de un porcentaje importante del total mundial de capitalización de mercado.

La teoría del portafolio ha tratado extensamente el problema que enfrentan los agentes económicos adversos al riesgo cuando construyen carteras óptimas, poniendo énfasis en que la existencia de activos que no tienen correlación positiva perfecta permite disminuir la varianza del portafolio manteniendo fijo su valor esperado, lo que se conoce como “beneficio de la diversificación”. Si los mercados financieros mundiales se encontrasen cointegrados, tendríamos evidencia de que dichos mercados están relacionados a largo plazo y esto indicaría que no existen grandes oportunidades de reducir la exposición al riesgo por medio de la diversificación internacional de los portafolios.

Por otra parte, es conocido que la presencia de relaciones de cointegración implica la existencia de al menos una relación de causalidad en el sentido de Granger (1969). Esto último permite analizar si existen mercados “dominantes”, dado que si un índice causa a la Granger (o en el sentido de Granger) a los otros es porque los retardos del primero son significativos para predecir los valores de los últimos. En este punto la definición de causalidad de Granger no solo es una aproximación del concepto de causalidad, sino que tiene peso propio porque es de interés conocer si los valores de un índice permiten mejorar

---

<sup>1</sup>En esta sección se emplean algunos conceptos cuyo significado se detalla en la subsección preliminares y definiciones de la sección de metodología.

---

el poder predictivo sobre los otros.

En la presente investigación, se considera que las relaciones de largo plazo que vinculan a los diversos mercados bursátiles pueden verse modificadas en el tiempo, especialmente cuando el horizonte temporal bajo análisis es relativamente extenso; por lo tanto, se profundiza el análisis en lo referente a pruebas de raíz unitaria, cointegración y causalidad de Granger en presencia de quiebres estructurales.

En gran parte de la literatura los análisis se hacen entre pares de índices o entre unos pocos índices. Sin embargo, es conocido que al aplicar dicha estrategia se pueden obtener conclusiones incorrectas, debido a que la omisión de variables relevantes en un modelo estadístico puede conducir a estimaciones erróneas. En particular, Lütkepohl (2005) plantea que esta es una de las debilidades más importantes de los análisis de causalidad de Granger y de funciones impulso respuesta. Para evitar este inconveniente, se opta por utilizar modelos multivariantes, en los cuales se incorporan los índices correspondientes a los principales mercados bursátiles.

En esta tesis se analiza la relación existente entre un grupo de índices bursátiles, seleccionados en base a la importancia relativa de los mercados que representan y su distribución geográfica. Se consideran los 9 mercados mas importantes del mundo y los mercados de valores de Brasil y Argentina. Los índices bajo estudio son: *Merval* (Argentina), *Bovespa* (Brasil), *Standard and Poor's* (Estados Unidos), *Nasdaq 100* (Estados Unidos), *Financial Times Stock Exchange 100* (Inglaterra), *XETRA DAX* (Alemania), *Paris CAC 40* (Francia), *Nikkei 225* (Japón), *Hang Seng Index* (Hong Kong, China), *Shanghai Security Exchange* (Shanghai, China), *Bombay Security Exchange* (India). Estos mercados dan cuenta de más del 70 % del total mundial de capitalización de mercado<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Cálculos propios en base al reporte anual 2015 del organismo *World Federation of Exchanges*, excepto para el mercado *Financial Times Stock Exchange 100* de Londres, donde la fuente empleada es [http://en.wikipedia.org/wiki/FTSE\\_100\\_Index](http://en.wikipedia.org/wiki/FTSE_100_Index).

---

Se emplea metodología relativamente moderna, por lo cual si bien existen los desarrollos teóricos y algunas aplicaciones, por lo general no se dispone de procedimientos computacionales para utilizar dichos métodos para realizar investigaciones aplicadas. Entonces, se programan funciones usando el *software* libre  $R^3$  y las mismas se ponen a disposición de la comunidad científica en el apéndice de la presente tesis.

---

<sup>3</sup>R Core Team (2018).

---

## 1.2 Objetivos

### Objetivos generales

- Contribuir al conocimiento sobre pruebas de raíz unitaria, cointegración y causalidad de Granger, en particular sobre los efectos de considerar en las mismas la existencia de quiebres estructurales y su implementación computacional.
- Determinar si los índices bursátiles seleccionados se encuentran interrelacionados, concluyendo además sobre la evolución de dichas relaciones en el tiempo y sobre sus relaciones de causalidad de Granger.

### Objetivos específicos

- Concluir sobre el orden de integración de las series bajo estudio, considerando la presencia de quiebres estructurales.
- Contrastar la existencia de relaciones de largo plazo entre los índices, empleando pruebas de cointegración que admitan la presencia de quiebres estructurales.
- Analizar la evolución del grado de interrelación de los índices por medio de la aplicación de estimaciones en ventanas móviles.
- Determinar las relaciones de causalidad de Granger existentes.
- Implementar rutinas en lenguaje R, que permitan contrastar la existencia de raíces unitarias, cointegración y causalidad de Granger con múltiples quiebres estructurales.

---

### 1.3 Organización de la tesis

La tesis puede leerse en dos formas alternativas.

Siguiendo la estructura estándar, tiene las secciones de metodología, materiales, resultados y discusión. En la sección de metodología se resumen brevemente los modelos estadísticos. En la sección de materiales se describen los datos; se explicitan las fuentes y se da una idea general sobre los detalles de la implementación computacional, la cual es probablemente el mayor aporte de la tesis. En la sección de resultados se comentan los resultados de la aplicación centrandó la atención en las consecuencias de la modelización de los quiebres estructurales. Finalmente, en la sección de discusión se profundiza en la interpretación de los resultados y se proponen líneas de investigación futura.

Por otra parte, toda la tesis versa sobre tres tópicos centrales que son las pruebas de raíz unitaria, de cointegración y de causalidad de Granger. Entonces, las secciones de metodología, materiales y resultados contienen subsecciones específicas de cada uno de esos temas, por lo que se puede leer todo lo referente a cada uno de ellos por separado.

Al final de la tesis se incorpora un apéndice con las principales funciones programadas en  $R$ , con la finalidad de que otros investigadores puedan usarlas y perfeccionarlas.

---

## 2 Antecedentes

Los mercados bursátiles han sido estudiados con una multiplicidad de modelos, por lo general centrando la atención en la maximización del poder predictivo. Por supuesto, esto se debe a que si un agente económico consiguiera una mínima ventaja al pronosticar, podría hacerse multimillonario rápidamente simplemente aplicando la máxima “comprar barato y vender caro”, lo que se conoce en la jerga como “*trading*”.

En esta tesis se trabaja desde una perspectiva académica, es decir que no se persigue la obtención del máximo poder predictivo, sino indagar sobre en qué medida los índices bursátiles tienden a moverse en sincronía y explorar los sentidos de las relaciones causales subyacentes. Con esa idea en mente, en esta sección se revisan algunos estudios previos referidos a la existencia de cointegración y causalidad de Granger entre mercados bursátiles. Luego, en la sección de metodología, se realizan revisiones bibliográficas adicionales sobre cuestiones específicas de los modelos estadísticos haciendo abstracción del campo de aplicación.

Kasa (1992), investiga la existencia de cointegración entre los mercados bursátiles de Estados Unidos, Japón, Inglaterra, Alemania y Canadá, empleando series mensuales y trimestrales para el período comprendido entre Enero de 1974 y Agosto de 1990. El autor encuentra una relación de cointegración.

Paramati, Gupta, & Roca (2012), analizan la existencia de cointegración entre los mercados de valores de Australia, Hong Kong, Japón, Singapur, China, Malasia y Corea del Sur; para el período comprendido entre el 3 de septiembre de 1999 y el 4 de mayo de 2012. También trabajan dividiendo la muestra en tres subperíodos (previo a la crisis, durante la crisis y después de la crisis). Cuando realizan pruebas de cointegración multivariantes, sólo encuentran una relación de cointegración en el período post crisis. Esto da cierto

---

soporte empírico a la idea de que podría haber períodos en que los mercados se encuentran interrelacionados y otros en los que no, sobre todo si se trata de un período relativamente largo de tiempo. Los autores argumentan que el aumento en el comercio bilateral entre dos economías podría incrementar la interdependencia de sus mercados bursátiles. También es interesante, la sugerencia de trabajar expresando los índices en una moneda común para que las fluctuaciones en los tipos de cambio no distorsionen el análisis.

El trabajo de G. M. Chen, Firth, & Rui (2002) indaga sobre la existencia de cointegración entre los mercados de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Venezuela en el período desde el 1 de enero de 1995 hasta el 30 de junio de 2000. De este modo intentan conocer si las conclusiones obtenidas para mercados desarrollados son válidas en el caso de economías en desarrollo, como las de Latinoamérica. Los resultados varían si el análisis se realiza con los índices originales o si se trabaja expresando los índices en dólares. Como en el caso de Paramati et al. (2012), se argumenta que la segunda opción es preferida a la primera, dado que se espera que los inversores internacionales no sean engañados por aparentes ganancias nominales debidas a efectos cambiarios. Los autores también muestran que la evidencia en favor de la existencia de cointegración varía en el tiempo, dado que en el subperíodo comprendido entre el 1 de enero de 1999 y el 30 junio de 2000 no se encuentra ninguna relación de cointegración.

Puede apreciarse que en la literatura se encuentran resultados diversos sobre la existencia de cointegración entre los índices de los diversos mercados bursátiles. De acuerdo a X. Chen (2012) esta indeterminación puede deberse a la naturaleza cambiante en el tiempo de las interrelaciones entre los mercados. Por otra parte, debe notarse que existen argumentos lógicos tanto a favor como en contra de la existencia de cointegración entre los diversos índices. Por ejemplo, si dos índices están conformados por activos similares, es probable que el arbitraje genere que ambos se encuentren cointegrados. En caso contrario, la interrelación

---

podría desvanecerse salvo que existan factores macroeconómicos subyacentes suficientemente fuertes. Por lo tanto, a priori se espera encontrar evidencia de que algunos mercados se encuentran interrelacionados a largo plazo, mientras que otros no. Adicionalmente, es probable que las relaciones de cointegración no sean estables en el tiempo, ocurriendo lo mismo con las magnitudes de las mismas. Entonces, se plantea el interrogante de cómo se modifican las conclusiones si permitimos la existencia de quiebres estructurales en la formulación del modelo de corrección de errores.

En la literatura citada previamente, no se considera la existencia de quiebres estructurales. En cambio, Menezes & Dionísio (2011) contrastan la existencia de cointegración entre los mercados bursátiles del G7 trabajando sobre el logaritmo natural de los índices, para el período entre el 1 de enero de 1973 y el 21 de enero de 2009 empleando la prueba de Gregory & Hansen (1996). Los autores encuentran que dichos índices están cointegrados. Dicha metodología también es empleada por Ibrahim (2009) para contrastar la existencia de cointegración entre los mercados del Este Asiático más China, Corea y Japón (ASEAN+3); encontrando que sólo algunos de ellos están cointegrados. Otro artículo que emplea la metodología de Gregory & Hansen (1996) es el de Voronkova (2004). En este caso se analiza la interrelación entre los mercados emergentes de Europa Central y Estados Unidos. Los autores señalan que los quiebres estructurales, en caso de no ser tenidos en cuenta en las pruebas de cointegración, deterioran la potencia de dichas pruebas, conduciendo a menos rechazos de la hipótesis nula de no cointegración de lo que es correcto. Al incorporar los quiebres estructurales, la autora encuentra evidencia más fuerte en favor de la existencia de relaciones de cointegración.

Debe notarse que la prueba de Gregory & Hansen (1996), al estar basada en la prueba de cointegración de Engle y Granger, sólo permite contrastar la existencia de cointegración entre pares de índices. A diferencia de los trabajos anteriores, C. W. Chen, Gerlach, Cheng,

---

& Yang (2009) emplean el procedimiento de Inoue (1999). Dicha prueba, se efectúa a partir de la estimación de un modelo de corrección de errores multivariante; por lo tanto, permite contrastar la existencia de cointegración entre más de dos índices. Sin embargo, solo admite la existencia de un quiebre estructural. En este caso, los mercados analizados son los de Malasia, Singapur, Filipinas, Tailandia e Indonesia. Los autores encuentran que al considerar la existencia de un quiebre estructural aumenta la evidencia en favor de la existencia de cointegración, por lo que las potenciales ganancias generadas por la diversificación serían menores de lo que indican las pruebas de cointegración estándar que no modelan la presencia de quiebres estructurales.

En la revisión bibliográfica no se encontraron artículos referidos a pruebas de cointegración multivariantes que admitan la presencia de múltiples quiebres estructurales determinados endógenamente; o sea que la ubicación de dichos quiebres se determine a partir de los datos; y que traten sobre índices bursátiles. Por lo tanto, en esta tesis se pretende realizar una contribución original en ese campo.

En lo referente al análisis de causalidad de Granger sobre índices bursátiles, se encontraron algunos artículos que emplean la metodología estándar basada en modelos de vectores autorregresivos (VAR); otros que utilizan modelos de corrección de errores (VECM) y otros que trabajan con la metodología propuesta por Toda & Yamamoto (1995), basada en modelos VAR aumentados por retardos adicionales.

Algunos estudios previos como Glezakos, Merika, & Kaligosfiris (2007) y Paramati et al. (2012), realizan análisis de causalidad de Granger sobre los rendimientos (es decir sobre las tasas de crecimiento de los índices).

Sin embargo, como argumentan Engle & Granger (1987), si las series originales están cointegradas lo correcto es incluir adicionalmente la relación de largo plazo. En forma equivalente, se puede trabajar con un modelo de corrección de errores sobre los índices

---

o el logaritmo natural de los mismos. Siguiendo esta línea, Ghosh, Saidi, & Johnson (1999) estiman un modelo de corrección de errores para diez índices asiáticos y el índice Standard and Poor's, con la finalidad de establecer si los mercados asiáticos emergentes son causados en el sentido de Granger por los mercados de Japón y Estados Unidos. Los resultados indican que algunos mercados son dominados por Estados Unidos, otros por Japón y los restantes no son dominados por ninguno de los dos, en el periodo de estudio comprendido entre el 26 de marzo del 1997 y el 31 de diciembre de 1997. G. M. Chen et al. (2002), también emplean la metodología basada en VECM para efectuar el análisis de causalidad de Granger. Al aplicar las pruebas de causalidad de Granger para los mercados de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Venezuela en el período desde el 1 de enero de 1995 hasta el 30 de junio de 2000; los autores concluyen que el mercado bursátil de México explica los movimientos en todos los demás mercados, excepto el de Colombia. En cambio, A. M. Masih & Masih (1999) además de estimar un modelo de corrección de errores, proponen como alternativa la prueba de Toda & Yamamoto (1995). Al aplicar dicha prueba sobre los mercados de Estados Unidos, Japón, Reino unido, Alemania, Hong Kong, Singapur, Malasia y Tailandia; los autores concluyen que los índices de los mercados de Estados Unidos y Gran Bretaña son dominantes, en el sentido de que sus valores retardados permiten mejorar las predicciones sobre los valores futuros de los otros índices.

En síntesis, en la literatura referente a causalidad de Granger entre índices bursátiles es difícil encontrar patrones claros, dado que las conclusiones son específicas para los índices utilizados en cada artículo, y por lo general cada uno de ellos escoge distintos mercados. La excepción estaría dada por el Mercado de Valores de Nueva York, que dada su importancia es incluido en muchos estudios. Aparentemente dicho mercado es un mercado líder.

En la literatura no se encontraron artículos en los cuales se aplique la metodología propuesta por Bauer & Maynard (2012) para analizar las relaciones de causalidad de Granger entre

---

índices bursátiles; por lo tanto, en esta tesis también se pretende realizar una contribución original en esa línea de investigación.

---

### 3 Metodología

En esta sección se describe la metodología que se emplea en el análisis de los índices bursátiles bajo estudio. Para indagar acerca de la existencia de relaciones de largo plazo entre los mercados se realizan pruebas de cointegración. Como paso previo a dichos contrastes, se efectúan pruebas de raíz unitaria, para conocer el orden de integración de las series. Luego, para estudiar si existen mercados que permiten anticipar a otros se efectúan pruebas de causalidad de Granger.

En el caso de las pruebas de cointegración, en primer lugar se considera la prueba de cointegración convencional de Johansen & Juselius (1990) como una primera aproximación. En segundo lugar, se implementa la prueba de cointegración de Johansen & Juselius (1990) a una muestra o ventana móvil; lo que permite conocer si hay rupturas de las relaciones de cointegración en algunos períodos y obtener información a cerca de la evolución de dichas relaciones en el tiempo. Finalmente, se realizan pruebas de cointegración que admiten la existencia de quiebres estructurales en las relaciones de cointegración, siguiendo la línea de investigación desarrollada por Lütkepohl, Saikkonen y Trenkler, principalmente en los artículos: Lütkepohl, Saikkonen, & Trenkler (2004) y Trenkler, Saikkonen, & Lütkepohl (2008).

Respecto a las pruebas de raíz unitaria, en primer lugar se aplican dos pruebas convencionales, a saber: la prueba aumentada de Dickey & Fuller (1981) y la prueba de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, & Shin (1992); luego se efectúa la prueba de Kapetanios (2005), la cual permite contrastar si el proceso estocástico posee una raíz unitaria o es  $I(0)$  en torno a una tendencia quebrada.

Finalmente, para probar la existencia de relaciones de causalidad en el sentido de Granger, no se debe emplear la prueba convencional, dado que la misma requiere que las series

---

sean  $I(0)$ . Una alternativa válida consiste en estimar un modelo de corrección de errores y efectuar el análisis de causalidad de Granger en base al mismo. Sin embargo, se opta por aplicar las pruebas planteadas por Toda & Yamamoto (1995) y Bauer & Maynard (2012), las cuales son válidas cuando las series son no estacionarias o tienen distinto orden de integración.

### 3.1 Preliminares y definiciones

Antes de detallar las pruebas citadas, se presentan algunas definiciones con la finalidad que la tesis sea relativamente autocontenida<sup>4</sup>.

#### 3.1.1 Proceso estocástico estacionario

Un proceso estocástico univariado  $y_t$  es covarianza estacionario, o simplemente estacionario, si sus momentos de primer y segundo orden son invariantes en el tiempo; o sea que  $y_t$  es estacionario si

1.  $E(y_t) = \mu_y$ , para todo  $t \in T$  y
2.  $E[(y_t - \mu_y)(y_{t-h} - \mu_y)] = \gamma_h$  para todo  $t \in T$  y todos los enteros  $h$  tal que  $t - h \in T$ .

La primera condición indica que un proceso estacionario debe fluctuar en torno a una media constante y por lo tanto no debería exhibir una tendencia. Entonces, si un proceso estocástico evoluciona en torno a una tendencia, el mismo no es estacionario. En tal caso, la tendencia puede ser de dos tipos: determinística o estocástica.

---

<sup>4</sup>Para mayores detalles se sugiere consultar a Hamilton (1994), Lütkepohl (2005) y Enders (2014).

---

### 3.1.2 Tendencia determinística y tendencia estocástica

Se dice que un proceso estocástico tiene una tendencia determinística, o es estacionario en torno a una tendencia determinística (*trend-stationary*), si luego de removerle (restarle) una tendencia determinística (una función lineal del tiempo  $DT_t = \mu_0 + \mu_1 t$ ), el proceso estocástico resultante es estacionario.

Si la remoción de la tendencia determinística no basta para transformar al proceso estocástico original en un proceso estacionario, se dice que el proceso estocástico tiene una tendencia estocástica. En forma intuitiva, esto significa que el proceso estocástico no se mantiene fluctuando en torno a un valor promedio constante o a una tendencia determinística, sino que los errores tienen efectos permanentes sobre la dinámica del proceso, lo que tiende a generar rachas que aparentan ser similares en ciertas situaciones a una tendencia determinística, pero en este caso la naturaleza de la tendencia es estocástica.

### 3.1.3 Orden de integración

Cuando un proceso tiene una tendencia estocástica, la remoción de una tendencia determinística no permite obtener un proceso estacionario, sino que se debe diferenciar el mismo, o sea aplicarle el operador diferencia,  $\Delta$ , tal que  $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ .

La cantidad mínima de veces,  $d$ , que un proceso que tiene una tendencia estocástica debe ser diferenciado para resultar en un proceso estocástico estacionario, es conocida como orden de integración. Entonces, si un proceso  $y_t$  debe ser diferenciado al menos  $d$  veces para ser convertido en un proceso estacionario o estacionario en torno a una tendencia determinística, se dice que es  $I(d)$ , o sea integrado de orden  $d$ , lo que se escribe:  $y_t \sim I(d)$ .

---

### 3.1.4 Raíz unitaria

Sea  $y_t$  un proceso estocástico tal que puede escribirse como:

$$y_t = DT_t + x_t,$$

o sea como la suma de un componente determinístico  $DT_t = \mu_0 + \mu_1 t$  y un proceso estocástico  $x_t$  tal que  $\Phi(L)x_t = \theta(L)\varepsilon_t$ , siendo  $\varepsilon_t$  un proceso ruido blanco, o sea  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ , y  $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$  y  $\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \dots + \theta_q L^q$  son polinomios de retardo que permiten expresar a  $x_t$  en la forma:

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \dots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_p \varepsilon_{t-p}.$$

Si las raíces del polinomio  $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$  se encuentran fuera del círculo unitario, el proceso  $x_t$  es estacionario y por lo tanto el proceso  $y_t$  es estacionario o estacionario en torno a una tendencia. En caso contrario, si alguna de las raíces del polinomio  $\Phi(L)$  se encuentra dentro del círculo unitario, tanto los procesos  $x_t$  e  $y_t$  tienen una raíz unitaria. Al tomar primera diferencia sobre  $x_t$  el proceso estocástico  $\Delta x_t$  podría tornarse estacionario, en cuyo caso el proceso  $x_t$  es  $I(1)$ .

### 3.1.5 Modelo de vectores autorregresivos (VAR)

Se conoce como modelo de vectores autorregresivos a un proceso estocástico  $k$ -dimensional  $x_t$  tal que

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} + u_t,$$

---

donde las  $A_i$ , para  $i = 1, \dots, p$ , son matrices de orden  $k \times k$  y  $u_t$  es un proceso ruido blanco de dimensión  $k$ ; o sea que  $E(u_t) = 0$ ,  $E(u_t u_t') = \Sigma_u$  y  $E(u_t u_s) = 0$  para  $s \neq t$ .

Si alguno de los  $k$  procesos estocásticos univariados componentes de  $x_t$  no es  $I(0)$ , se dice que el proceso  $x_t$  sigue un modelo VAR no estacionario.

### 3.1.6 Cointegración

Se dice que las variables componentes de un proceso estocástico  $k$ -dimensional  $y_t$  se encuentran cointegradas con orden  $(d, b)$ ,  $y_t \sim CI(d, b)$ , si existe una combinación lineal  $z_t = \beta' y_t$ , con  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)' \neq 0$ , tal que  $z_t$  es  $I(d - b)$ .

### 3.1.7 Modelo de corrección de errores (VEC)

Dado el modelo VAR no estacionario

$$y_t = A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + u_t,$$

el mismo puede ser reescrito en forma de Modelo de Corrección de Errores (VECM)

$$\Delta y_t = \Pi y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \Gamma_p \Delta y_{t-p+1} + u_t.$$

Siendo  $\Pi = -(I_k - A_1 - \dots - A_p)$ ,  $r(\Pi) = r$ , con  $0 \leq r \leq k$ ,  $u_t \sim N(0, \Sigma_u)$  y las  $\Gamma_i = -(A_{i+1} + \dots + A_p)$ , para  $i = 1, \dots, p - 1$  son matrices de parámetros de orden  $k \times k$ . Si  $\Pi$  tiene rango  $r$ , puede ser expresada como el producto  $\alpha \beta'$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  matrices de orden  $k \times r$  de rango  $r$ . En dicho caso, se dice que el proceso  $y_t$  es cointegrado con rango  $r$ . Las matrices  $\beta$  y  $\alpha$  son conocidas como matriz de cointegración y matriz de cargas, respectivamente.

---

El modelo VEC puede ser estimado por máxima verosimilitud, maximizando la siguiente función de log-verosimilitud para una muestra de tamaño  $T$ :

$$\ln l = -\frac{kT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |\Sigma_u| - \frac{1}{2} \text{tr}[(\Delta Y - \alpha\beta'Y_{-1} - \Gamma\Delta X)' \Sigma_u^{-1} (\Delta Y - \alpha\beta'Y_{-1} - \Gamma\Delta X)].$$

Luego, la prueba de razón de verosimilitudes para contrastar si el rango de la matriz de cointegración es  $r_0$  contra la alternativa de que dicho rango es  $r_1$ , siendo  $r_1 > r_0$ , es:

$$\begin{aligned} \lambda_{LR}(r_0, r_1) &= 2[\ln l(r_1) - \ln l(r_0)] \\ &= T \left[ -\sum_{i=1}^{r_1} \ln(1 - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{r_0} \ln(1 - \lambda_i) \right] \\ &= -T \sum_{i=r_0+1}^{r_1} \ln(1 - \lambda_i), \end{aligned}$$

donde  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k$  son los valores propios de  $S_{11}^{-1/2} S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} S_{11}^{-1/2}$ , siendo  $S_{ij} = R_i R_j' / T$ , para  $i = 0, 1$ . A su vez,  $R_0 = \Delta Y M$  y  $R_1 = Y_{-1} M$ , dado  $M = I_T - \Delta X' (\Delta X \Delta X') \Delta X$ .

En la especificación previa se pueden incorporar componentes determinísticos si se considera el modelo:

$$y_t = \mu_t + x_t,$$

donde  $\mu_t$  contiene los componentes determinísticos y  $x_t$  es un proceso VAR, posiblemente cointegrado.

### 3.1.8 Causalidad en el sentido de Granger

El concepto de Causalidad de Granger descansa en la idea de que la causa debe preceder en el tiempo al efecto y, por lo tanto, una variable  $x$  causa a la Granger a otra variable,

---

$y$ , si los valores precedentes de  $x$  permiten mejorar el poder predictivo sobre la variable potencialmente afectada,  $y$ . Para docimar la existencia de causalidad de Granger se realizan pruebas sobre determinadas restricciones en las matrices de coeficientes de un modelo VAR o VEC.

## 3.2 Pruebas de raíz unitaria

Para docimar la presencia de raíces unitarias en las series se emplean tres pruebas: la prueba de Dickey y Fuller aumentada (ADF), propuesta en Dickey & Fuller (1981); la prueba de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin (KPSS) (Kwiatkowski et al. (1992)) y la prueba desarrollada por Kapetanios (2005). Las tres pruebas citadas se complementan. La prueba ADF es la más utilizada y plantea como hipótesis nula la presencia de una raíz unitaria. En ciertas condiciones, la potencia de la prueba es baja y se puede cometer el error de concluir que la serie tiene una raíz unitaria, siendo que realmente es  $I(0)$ . La prueba KPSS, estrictamente es una prueba de estacionariedad, dado que postula que la serie es estacionaria en la hipótesis nula. Resulta de utilidad para confirmar la existencia de raíz unitaria, dado que en caso de enfrentar problemas de potencia concluye erróneamente la existencia de estacionariedad. La prueba de Kapetanios contrasta la existencia de raíz unitaria contra la alternativa de que la serie es  $I(0)$  pero sigue una tendencia con quiebres estructurales. También complementa a la prueba ADF, dado que la misma puede concluir que la serie tiene una raíz unitaria siendo que realmente es  $I(0)$  y existen uno o mas quiebres estructurales.

### 3.2.1 Prueba aumentada de Dickey y Fuller

La prueba aumentada de Dickey y Fuller (ADF) plantea la siguiente ecuación:

---


$$\Delta y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \pi y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \gamma_j \Delta y_{t-1} + u_t \quad (1)$$

y se contrastan las hipótesis:

$$H_0 : \pi = 0$$

$$H_1 : \pi < 0$$

empleando la ecuación completa y versiones restringidas de la misma<sup>5</sup>.

Para la selección de la cantidad de retardos de las diferencias que se incluyen en la ecuación (1), como hace notar Pfaff (2011), existen varios criterios. El más utilizado es método desde lo general hacia lo específico, en el cual se elige una cota superior,  $k_{max}$ , y se elimina el último retardo si es no significativo, empleando pruebas  $t$  de Student estándar. Esto se repite hasta que el último retardo es significativo. Otros métodos, consisten en aplicar criterios de selección como el de Akaike (1974) y de Schwarz (1978). Alternativamente, se pueden incorporar retardos hasta que los residuos de la regresión auxiliar dejen de exhibir autocorrelación serial de acuerdo a alguna prueba como la de Ljung y Box o la prueba LM de los multiplicadores de Lagrange.

Luego de seleccionar  $k$ , la cantidad de retardos de las diferencias a incluir, se sigue un procedimiento que tiene varias etapas. En primer lugar, se prueba si  $\pi = 0$  empleando la ecuación completa; para ello se usa el estadístico  $\tau_3$  que si bien se construye de manera análoga a un estadístico  $t$ , no tiene una distribución asintótica  $t$  convencional por lo que los valores críticos fueron generados por simulación por Dickey & Fuller (1981). Si se rechaza la hipótesis nula, se concluye que la serie no tiene una raíz unitaria; en caso contrario, se prueba si  $\beta_2 = 0$  dado  $\pi = 0$  empleando el estadístico pseudo-F,  $\Phi_3$ . Si esta prueba resulta significativa, se indaga nuevamente si  $\pi = 0$  usando una distribución normal estándar, para

---

<sup>5</sup>Se puede encontrar una descripción completa del procedimiento en Pfaff (2011) y Enders (2014).

---

conocer si la serie es estacionaria o no estacionaria en torno a una tendencia determinística; en caso contrario, se reestima la ecuación sin tendencia, o sea haciendo  $\beta_2 = 0$  y se computa el estadístico  $\tau_2$  para probar si  $\pi = 0$ . Si se rechaza la hipótesis nula, se concluye que la serie es estacionaria y no tiene una tendencia determinística; en caso contrario, se docima si  $\beta_1 = 0$  dado  $\pi = \beta_2 = 0$ , por medio del estadístico  $\Phi_1$ . Nuevamente, si se rechaza la hipótesis nula se indaga si  $\pi = 0$  empleando una distribución normal estándar, para determinar si la serie es estacionaria o no estacionaria en torno a una media no nula; mientras que si no se rechaza la hipótesis nula se procede a reestimar el modelo, esta vez sin constante ni tendencia. Finalmente, se prueba si  $\pi = 0$  empleando el estadístico  $\tau_1$  para concluir si la serie es estacionaria o tiene una raíz unitaria sin constante ni tendencia determinística.

Si el procedimiento anterior arroja la existencia de una raíz unitaria, se debe diferenciar la serie original y contrastar si la primera diferencia es estacionaria. En caso afirmativo, se concluye que la serie original es I(1), en caso contrario el orden de integración es superior a uno.

### 3.2.2 Prueba KPSS

Como se anticipó previamente, la prueba KPSS de Kwiatkowski et al. (1992) es una prueba de estacionariedad. Los autores plantean el siguiente modelo:

$$y_t = \xi t + r_t + \epsilon_t$$

$$r_t = r_{t-1} + u_t,$$

donde  $r_t$  es una caminata aleatoria (*random walk*) y  $u_t \sim i.i.d.(0, \sigma_u^2)$ . El valor inicial de  $r$ ,  $r_0$ , es considerado fijo y juega el rol de intercepto. La hipótesis nula es  $\sigma_u^2 = 0$ ,

---

lo que implica que  $y_t$  es estacionario en torno a una tendencia determinística si  $\xi_t \neq 0$  o estacionario con media no nula si  $\xi_t = 0$ .

El estadístico de prueba es

$$LM = \frac{\sum_{t=1}^T S_t^2}{\hat{\sigma}_\epsilon^2},$$

siendo  $S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\epsilon}_i^2$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ , donde los  $\hat{\epsilon}_i$  son los residuos obtenidos de estimar el modelo y  $\hat{\sigma}_\epsilon^2$  se obtiene por medio de:

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l \omega(s, l) \sum_{t=s+1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-1}.$$

Los autores emplean una ventana de Barlet  $\omega(s, l) = 1 - \frac{s}{l+1}$  como función de ponderación, para garantizar la no negatividad de  $\hat{\sigma}_\epsilon^2$ . Los valores críticos están computados en Kwiatkowski et al. (1992).

### 3.2.3 Prueba de Kapetanios

Previo al análisis de cointegración se realiza una prueba de raíz unitaria que admite la presencia de quiebres estructurales. Si se omite dicha problemática, se corre el riesgo de concluir erróneamente que una serie es integrada de orden uno, siendo que en realidad es estacionaria con tendencia quebrada. La discusión sobre este tópico se ha desarrollado principalmente en torno al trabajo de Nelson & Plosser (1982), donde se analizan 14 series macroeconómicas concluyéndose que 13 de ellas poseen una raíz unitaria. Perron (1989), plantea que esos resultados se ven afectados por el hecho de que no se considera la posible existencia de quiebres estructurales, por lo cuál permite la existencia de un quiebre estructural, cambiando drásticamente las conclusiones dado que se encuentran sólo tres series con raíz unitaria. Luego, un conjunto de investigaciones (Christiano (1992), Zivot

---

& Andrews (1992) y Banerjee, Lumsdaine, & Stock (1992)) plantea que los desarrollos de Perron (1989) no son correctos debido a que los quiebres deben determinarse en forma endógena y obtienen resultados más parecidos a los originales de Nelson & Plosser (1982) que a los de Perron (1989). Los trabajos de Lumsdaine & Papell (1997) y Lee & Strazicich (2003) siguen la misma línea, pero permiten la existencia de dos quiebres estructurales.

Para el caso de más de dos quiebres estructurales, se encuentran los trabajos de Ohara (1999) y Kapetanios (2005), el cual se describe a continuación, dado que se lo emplea en la aplicación práctica.

El modelo básico planteado por Kapetanios (2005), consiste en una generalización de los modelos propuestos por Banerjee et al. (1992) y Zivot & Andrews (1992) al caso de  $m$  quiebres estructurales.

Se parte de la especificación:

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^m \phi_i DU_{i,t} + \sum_{i=1}^m \psi_i DT_{i,t} + \epsilon_t,$$

donde  $DU_{i,t}$  y  $DT_{i,t}$  son variables ficticias que capturan quiebres estructurales en el nivel y la tendencia, respectivamente. Se definen como:

$$DU_{i,t} = 1(t > T_{b,i})$$

$$DT_{i,t} = 1(t > T_{b,i})(t - T_{b,i}),$$

donde  $T_{b,i} + 1$  representa la fecha del  $i$ -ésimo quiebre estructural.

Las hipótesis nula y alternativa son:

$$H_0 : \alpha = 1, \mu_1 = \phi_1 = \dots = \phi_m = \psi_1 = \dots = \psi_m = 0$$

---


$$H_{U_m} : \bigcup_{i=1}^m H_i,$$

siendo  $H_i : \alpha < 1, \phi_{i+1} = \dots = \phi_m = \psi_{i+1} = \dots = \psi_m = 0$ , para  $i = 1, \dots, m - 1$  y  $H_m = \alpha < 1$ .

Los autores proponen, partiendo de un número máximo de quiebres  $m$ , construir los estadísticos  $t$  asociados a las estimaciones de  $\alpha$  para todas las particiones posibles para un número dado de quiebres y todos los números de quiebres de 1 hasta  $m$  y tomar el ínfimo de ese conjunto de estadísticos  $t$ . Se adopta  $\mathfrak{T}_i$  como notación para el conjunto de todos las posibles particiones para una cantidad  $i$  dada de quiebres y  $\mathfrak{T}$  para la unión  $\bigcup_{i=1}^m \mathfrak{T}_i$ .

Se sigue un esquema de búsqueda por malla o red (*grid search*), que consta de varias etapas:

1. Para un número máximo de quiebres,  $m$ , calcular los estadísticos  $t$  asociados a las estimaciones de  $\alpha$ , para cada partición posible de la muestra. El conjunto de todas las posibles particiones se denota  $\mathcal{T}_1^\alpha$  y el conjunto de estadísticos  $t$ ,  $\tau^1$ .
2. Encontrar la fecha de quiebre que minimiza la suma de los cuadrados de los residuos dados por

$$SSR = \sum_{t=k+2}^T \left( y_t - \mu_0 + \mu_1 t + \alpha y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^m \phi_i DU_{i,t} + \sum_{i=1}^m \psi_i DT_{i,t} \right)^2,$$

donde  $k$  se supone conocido de antemano.

3. Luego de imponer la fecha de quiebre encontrada en la etapa anterior, buscar el siguiente quiebre entre todas las posibles particiones en las submuestras resultantes. Denotar a esta conjunto de posibles particiones  $\mathcal{T}_2^\alpha$  y al conjunto de estadísticos  $t$  asociados  $\tau^2$ . Unir  $\tau^1$  y  $\tau^2$ , para obtener  $\tau_1^2 = \tau^1 \cup \tau^2$ .
4. Elegir el quiebre con menor  $SSR$  como el próximo quiebre estimado.

- 
5. Repetir los pasos 3 y 4 hasta que  $m$  quiebres hayan sido estimados y denotar los conjuntos resultantes de todas la particiones posibles como  $\mathcal{T}_i^\alpha$ , para  $i = 3, \dots, m$ .
  6. Obtener el estadístico de prueba  $\tau_{min}^m$ , el mínimo estadístico  $t$  del conjunto  $\tau_1^m = \bigcup_{i=1}^m \tau^i$ .

### 3.3 Pruebas de cointegración

#### 3.3.1 Prueba de cointegración de Johansen y Juselius

Dado el modelo

$$y_t = \mu_t + x_t,$$

donde  $\mu_t$  contiene términos determinísticos y  $x_t$  tiene la siguiente representación en forma de modelo de corrección de errores:

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \dots + \Gamma_p \Delta x_{t-p+1} + u_t.$$

Por lo general se plantean las siguientes pruebas de hipótesis

$$H_0 : rk(\Pi) = r_0$$

$$H_1 : r_0 \leq rk(\Pi) \leq k$$

y

$$H_0 : rk(\Pi) = r_0$$

$$H_1 : rk(\Pi) = r_0 + 1.$$

Dichas pruebas son conocidas como prueba de la traza y del máximo valor propio, siendo sus estadísticos  $\lambda_{LR}(r_0, k)$  y  $\lambda_{LR}(r_0, r_0 + 1)$ . Bajo la hipótesis nula los estadísticos de la traza y del máximo valor propio tienen las siguientes distribuciones asintóticas:

$$\lambda_{LR}(r_0, k) \xrightarrow{d} tr(\mathcal{D})$$

y

$$\lambda_{LR}(r_0, r_0 + 1) \xrightarrow{d} \lambda_{max}(\mathcal{D}),$$

respectivamente, donde:

$$\mathcal{D} = \left( \int_0^1 F dW'_{K-r_0} \right)' \left( \int_0^1 FF' ds \right)^{-1} \left( \int_0^1 F dW'_{K-r_0} \right),$$

siendo

1.  $F(s) = W_{K-r_0}(s)$ , si  $\mu_t = 0$ .
2.  $F(s) = W^0(s) = [W_{K-r_0}(s)', 1]'$ , si  $\mu_t = \mu_0$  es una constante.
3.  $F(s) = W^+(s) = [\bar{W}(s)', s - \frac{1}{2}]'$ , con  $\bar{W}(s) = W_{K-r_0}(s) - \int_0^1 W_{K-r_0}(u) du$ , si  $\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t$  es una tendencia lineal.
4.  $F(s) = \check{W}(s) = W^c(s) - \int_0^1 W^c(u) du$ , con  $W^c(s) = [W_{K-r_0-1}(s)', s]'$ , si  $\mu_t = \mu_0 + \mu_1 t$  con  $\mu_1 \neq 0$  y  $\beta' \mu_1 = 0$ , o sea la tendencia es ortogonal a las relaciones de cointegración.

### 3.3.2 Prueba de cointegración con ventanas móviles

Para analizar la evolución de la existencia de relaciones de largo plazo y de su magnitud, se sigue la estrategia empleada en X. Chen (2012) de estimar series de modelos de corrección del error con ventanas móviles. Esto genera una trayectoria para los estadísticos observados

---

de las pruebas de cointegración. En este contexto, si a medida que nos movemos en el tiempo los estadísticos observados aumentan, se puede interpretar que los datos están aportando cada vez más evidencia a favor de la existencia de una determinada relación de cointegración. Debe notarse que el análisis de cointegración con ventanas móviles es un método robusto cuando existen quiebres estructurales, dado que el efecto de un quiebre queda acotado a las estimaciones en que el mismo es incorporado en la ventana móvil. Por otra parte, la ruptura de una relación de cointegración da indicios de la presencia de un quiebre estructural en la misma, lo que indica que esta metodología es complementaria a la descrita en la sección subsiguiente.

### **3.3.3 Pruebas de cointegración con quiebres estructurales**

En la literatura se encuentran algunos trabajos que intentan robustecer las estimaciones ante la presencia de quiebres estructurales y outliers. Siguiendo esta línea, en Arranz & Escribano (2000) se propone realizar el análisis de cointegración sobre la serie filtrada o empleando modelos de corrección del error o VAR extendidos, como en Toda & Yamamoto (1995) y Dolado & Lütkepohl (1996). Otra estrategia similar es la planteada por Lucas (1997), Lucas (1998) y Franses & Lucas (1998), donde se emplea un test de razón de pseudo verosimilitudes (*pseudo likelihood ratio test*).

Otra línea alternativa consiste en incorporar en la estructura del modelo los quiebres estructurales por medio de variables de intervención. Esto conlleva la desventaja de que deben estimarse las fechas de quiebre, pero por otra parte el conocimiento de dichas fechas puede ser de interés para el investigador. Como antecedente importante debe citarse a Gregory & Hansen (1996), donde se construyen pruebas basadas en los residuos empleando variables de intervención suponiendo un único quiebre estructural cuya fecha es conocida. Si bien este desarrollo podría ser generalizado para el caso de múltiples quiebres estructurales

---

con detección endógena de las fechas de quiebre, su aplicación quedaría limitada al caso de cointegración bivariada. Por lo tanto en la presente tesis se sigue la línea sugerida en Lütkepohl & Saikkonen (2000), Saikkonen & Lütkepohl (2000), Lütkepohl et al. (2004) y Trenkler et al. (2008). Dichos autores desarrollan una serie de modelos de cointegración en dos etapas. En la primera etapa se estiman los componentes determinísticos y en la segunda se realiza una prueba de cointegración sobre las series ajustadas por dichos componentes.

El artículo de Lütkepohl & Saikkonen (2000), si bien no trata sobre una prueba de cointegración con quiebres estructurales, desarrolla la idea consistente en primero estimar los componentes determinísticos, luego remover dichos componentes y finalmente probar cointegración en base a la serie ajustada. Adicionalmente, este artículo permite comprender claramente cómo se pueden implementar mecanismos de simulación para aproximar distribuciones asintóticas conformadas por puentes Brownianos.

Saikkonen & Lütkepohl (2000) desarrollan una prueba de cointegración con un quiebre en el nivel y un outlier. Dicha prueba es válida para más de un quiebre en el nivel y más de un outlier; y emplea la misma distribución asintótica que Lütkepohl & Saikkonen (2000).

En Lütkepohl et al. (2004), se propone una prueba de cointegración que incluye un método para detectar un quiebre en el nivel en forma endógena. Nuevamente, la distribución asintótica es la misma que en Lütkepohl & Saikkonen (2000) y Saikkonen & Lütkepohl (2000).

En Trenkler et al. (2008), se incorpora la posibilidad de la existencia de quiebres en la tendencia además de quiebres en el nivel. En este caso los puntos de quiebre se suponen conocidos de antemano. Ahora la distribución asintótica se ve alterada y depende de las fracciones de la muestra en donde se encuentran los quiebres estructurales.

En esta tesis se emplean dos pruebas de cointegración que incorporan quiebres estructurales. La primera es una prueba de cointegración que admite la existencia de cambios en el nivel,

---

siendo determinadas endógenamente las fechas en que se producen los quiebres como en Lütkepohl et al. (2004). La segunda prueba admite la existencia de cambios tanto en el nivel como en la tendencia siguiendo los desarrollos de Trenkler et al. (2008); mientras que, para la determinación de las fechas de quiebre, se implementa un procedimiento similar al planteado en Lütkepohl et al. (2004).

### 3.3.3.1 Prueba de cointegración con quiebres estructurales en el nivel

Como en todas las pruebas de cointegración basadas en la remoción de los componentes determinísticos, se parte de la especificación de un modelo en el cuál el vector de variables originales  $y_t$  es descompuesto como la suma de dos componentes; uno determinístico y el otro es un componente estocástico no estacionario.

En este caso particular, se sigue a Saikkonen & Lütkepohl (2000), pero se realizan dos modificaciones: no se incorpora en la componente determinística la presencia de outliers y en vez de especificar un modelo con un solo quiebre estructural en el nivel, se permite la existencia de  $M$  quiebres de nivel. Entonces el modelo resulta:

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \sum_{m=1}^M \delta_{d_m} d_{m,t} + x_t, \quad (2)$$

donde  $\mu_0$  representa al nivel,  $\mu_1$  es el coeficiente asociado a la tendencia, las  $d_{m,t}$  son variables ficticias que buscan capturar los cambios en el nivel, o sea:

$$d_{m,t} = \begin{cases} 0 & t < \tau_m \\ 1 & t \geq \tau_m \end{cases},$$

siendo  $M$  la cantidad de quiebres estructurales y  $x_t$  tiene una representación VAR no

estacionaria con media cero:

$$x_t = A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} + \epsilon_t,$$

con  $\epsilon_t \sim iid(0, \omega)$ . Entonces,  $x_t$  tiene la siguiente representación en forma de modelo de corrección de errores:

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta x_{t-j} + \epsilon_t, \quad (3)$$

siendo  $\Pi = -(I_n - A_1 - \dots - A_p)$ ,  $\Gamma_j = -(A_{j+1} + \dots + A_p)$ , y  $j = 1, \dots, p-1$ .

Combinando (2) y (3), se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta y_t = & \nu + \alpha \left( \beta' y_{t-1} - \phi(t-1) - \sum_{m=1}^M \theta_m d_{m,t-1} \right) + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \\ & + \sum_{m=1}^M \left( \sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{mj} \Delta d_{m,t-j} \right) + \epsilon_t, \end{aligned}$$

siendo  $t = p+1, p+2, \dots$ ; donde  $\nu = -\Pi\mu_0 + \Psi\mu_1$ ,  $\phi = \beta'\mu_1$ ,  $\theta_m = \beta'\delta_m$ ,

$$\Delta d_{m,t-j} = \begin{cases} 0 & t \neq \tau_m + j \\ 1 & t = \tau_m + j \end{cases}$$

y

$$\gamma_{mj} = \begin{cases} \delta_m & j = 0 \\ -\Gamma_j \delta_m & j = 1, \dots, p-1 \end{cases}.$$

Hasta este punto se tiene una leve modificación del modelo presentado en Saikkonen &

---

Lütkepohl (2000). Sin embargo este procedimiento no tiene demasiada relevancia práctica dado que no responde al interrogante sobre cuáles son las fechas donde se producen los quiebres estructurales. Trenkler et al. (2008) desarrolla un procedimiento para detectar las fechas de quiebre en forma endógena, o sea empleando la información provista por las series. Para ello, se plantea un modelo VAR sin restringir por el rango de cointegración:

$$y_t = \nu_0 + \nu_1 t + \sum_{m=1}^M \delta_m d_{m,t,\tau_m} + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_{t,\tau_m}. \quad (4)$$

Este modelo se estima por MCO, para toda posible configuración de los  $\tau_m$ , luego a partir de los residuos de cada una de esas estimaciones se obtienen las estimaciones de las fechas de quiebre  $\tilde{\tau}_m$ , por medio de la minimización de una generalización de la suma de cuadrados de los residuos, o sea:

$$\tilde{\tau}_m = \operatorname{argmin} \det \left( \sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_{t,\tau_m} \hat{\varepsilon}'_{t,\tau_m} \right).$$

Una vez obtenidas las fechas de quiebre, las variables ficticias  $d_{m,t}$  quedan determinadas. Entonces, en la ecuación (4),  $\hat{\nu}_0$ ,  $\hat{\nu}_1$  y los  $\hat{\delta}_m$ ; constituyen estimaciones de los coeficientes de la parte determinística de la ecuación (2), por lo que se los puede rebautizar como  $\hat{\mu}_0$ ,  $\hat{\mu}_1$  y  $\hat{\delta}_{t,m}$ , respectivamente.

Luego, para contrastar la hipótesis  $H_0(r_0) : rk(\Pi) = r_0$  contra  $H_1(r_0) : rk(\Pi) > r_0$ , se remueven los componentes determinísticos:

$$\hat{x}_t = y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t - \sum_{m=1}^M \hat{\delta}_m d_{m,t}$$

y a continuación se plantea el VECM sobre la serie  $\hat{x}_t$ :

$$\Delta \hat{x}_t = \Pi \hat{x}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta \hat{x}_{t-j} + \epsilon_{t,\tilde{\tau}_m}.$$

En base a dicha ecuación se puede obtener un estadístico de razón de verosimilitudes análogo al planteado por Johansen & Juselius (1990). Para ello, se debe resolver el problema de valores propios generalizado:  $\det(\hat{\Pi}\hat{M}_T\hat{\Pi}' - \lambda\hat{\Omega}) = 0$ , donde  $\hat{\Pi}$  es el estimador MCO de  $\Pi$ ,  $\hat{\Omega}$  es la matriz de varianzas y covarianzas de los residuos y

$$\hat{M}_T = \sum_{t=p+1}^T \hat{x}_{t-1}\hat{x}'_{t-1} - \sum_{t=p+1}^T \hat{x}_{t-1}\Delta\hat{X}'_{t-1} \left( \sum_{t=p+1}^T \Delta\hat{X}_{t-1}\Delta\hat{X}'_{t-1} \right)^{-1} \sum_{t=p+1}^T \Delta\hat{X}_{t-1}\hat{x}'_{t-1},$$

siendo  $\Delta\hat{X}_{t-1} = [\Delta\hat{x}'_{t-1}, \dots, \Delta\hat{x}'_{t-p+1}]'$ . Luego, sean  $\hat{\lambda}_1 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n$  los valores propios ordenados, el estadístico de la prueba es:

$$LR(r_0) = \sum_{j=r_0+1}^n \log(1 + \hat{\lambda}_j).$$

En el teorema 4.1 de Trenkler et al. (2008) se establece la distribución asintótica de dicho estadístico:

$$LR(r_0) \xrightarrow{d} \text{tr} \left\{ \left( \int_0^1 B_*(s)dB_*(s)' \right)' \left( \int_0^1 B_*(s)B_*(s)'ds \right)^{-1} \left( \int_0^1 B_*(s)dB_*(s)' \right) \right\},$$

donde  $B_*(s) = B(s) - sB(1)$  es un puente Browniano de dimensión  $n - r_0$ ,  $dB_*(s) = dB(s) - dsB(1)$  y  $\int_0^1 B_*(s)dB_*(s)' = \int_0^1 B(s)dB(s)' - B(1)\int_0^1 sdB(s)' - \int_0^1 B(s)dsB(1)' + \frac{1}{2}B(1)B(1)'$ .

Dicha distribución asintótica no se ve alterada si se incorporan variables ficticias para modelar la presencia de valores atípicos, o se modifica la cantidad de quiebres estructurales o las fechas en que se producen de los mismos.

Debido a que la distribución asintótica del estadístico  $LR(r_0)$  no tiene una fórmula cerrada, los valores críticos necesarios para la implementación práctica de la prueba de cointegración se obtienen por simulación. Entonces, se emplean procesos *random walk* para aproximar los movimientos Brownianos estándar. Afortunadamente, en Trenkler (2003) se describen

---

las simulaciones y están tabulados los valores críticos.

### 3.3.3.2 Prueba de cointegración con quiebres estructurales en el nivel y la tendencia

En este caso el modelo puede expresarse por:

$$y_t = \mu_0 + \mu_1 t + \sum_{m=1}^M \delta_{d_m} d_{m,t} + \sum_{m=1}^M \delta_{b_m} b_{m,t} + x_t,$$

donde  $\mu_0$  representa al nivel,  $\mu_1$  es el coeficiente asociado a la tendencia, las  $d_{m,t}$  y las  $b_{m,t}$  son variables ficticias que buscan capturar los cambios en el nivel y la tendencia, respectivamente, y se definen como:

$$d_{m,t} = \begin{cases} 0 & t < \tau_m \\ 1 & t \geq \tau_m \end{cases}$$

$$b_{m,t} = \begin{cases} 0 & t < \tau_m \\ t - \tau_m + 1 & t \geq \tau_m \end{cases},$$

siendo  $M$  la cantidad de quiebres estructurales y  $x_t$  un proceso estocástico multivariante no estacionario con media cero, pudiendo ser el mismo expresado en forma de modelo de corrección de errores como:

$$\Delta x_t = \Pi x_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta x_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Luego, empleando ambas ecuaciones se obtiene:

$$\Delta y_t = \nu + \alpha \left( \beta' y_{t-1} - \phi(t-1) - \sum_{m=1}^M \theta_m b_{m,t-1} \right) + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta y_{t-j} + \sum_{m=1}^M \left( \sum_{j=1}^{p-1} \gamma_{mj} \Delta d_{m,t-j} - \eta_m \Delta b_{m,t} \right) + \varepsilon_t,$$

donde  $\nu = -\Pi\mu_0 + \Psi\mu_1$ ,  $\phi = \beta'\mu_1$ ,  $\theta_m = \beta'_m \delta_{b_m}$ ,  $\eta_m = \Psi\delta_{b_m} - \Pi\delta_{d_m}$  y

$$\gamma_{mj} = \begin{cases} \delta_{d_m} + \Pi\delta_{d_m} + \Gamma_1\delta_{b_m} + \dots + \Gamma_{p-1}\delta_{b_m} & j = 0 \\ -\Gamma_j\delta_{d_m} + \Gamma_{j+1}\delta_{b_m} + \dots + \Gamma_{p-1}\delta_{b_m} & j = 1, \dots, p-2 \\ -\Gamma_{p-1}\delta_{b_m} & j = p-1 \end{cases}$$

En forma similar a la sección anterior, para que el procedimiento tenga utilidad práctica las fechas en que se producen los quiebres estructurales deben ser estimadas a partir de los datos. Por analogía, se plantea el modelo VAR con componentes determinísticos:

$$y_t = \nu_0 + \nu_1 t + \sum_{m=1}^M \delta_{d_m} d_{m,t,\tau_m} + \sum_{m=1}^M \delta_{b_m} b_{m,t,\tau_m} + A_1 y_{t-1} + \dots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_{t,\tau_m} \quad (5)$$

y se guardan los residuos MCO para cada  $\tau_m$  posible. Entonces, las fechas estimadas en las que se producen los quiebres estructurales se obtienen de:

$$\tilde{\tau}_m = \operatorname{argmin} \det \left( \sum_{t=p+1}^T \hat{\varepsilon}_{t,\tau_m} \hat{\varepsilon}'_{t,\tau_m} \right).$$

Luego de imponer dichas fechas de quiebre y estimar la ecuación (5) por MCO, se obtienen las estimaciones de los coeficientes de la parte determinística del modelo:  $\hat{\mu}_0$ ,  $\hat{\mu}_1$ ,  $\hat{\delta}_{d_m}$  y  $\hat{\delta}_{b_m}$ . Dichas estimaciones se utilizan para la remoción de los componentes determinísticos

---

haciendo:

$$\hat{x}_t = y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 t - \sum_{m=1}^M \hat{\delta}_{d_m} d_{m,t} - \sum_{m=1}^M \hat{\delta}_{b_m} b_{m,t}$$

y al aplicar el procedimiento estándar de Johansen sobre  $\hat{x}_t$ , se obtiene el estadístico

$$LR(r_0) = \sum_{j=r_0+1}^n \log(1 + \hat{\lambda}_j),$$

que solo se diferencia del obtenido en la sección anterior en que a  $y_t$  se le removieron los quiebres en la tendencia. Esto parece ser un cambio menor, pero tiene consecuencias significativas en la distribución asintótica del estadístico  $LR(r_0)$ , a saber:

$$LR(r_0) \xrightarrow{d} tr \left\{ \left( \sum_{j=1}^q D_j l_j \right)' \left( \sum_{j=1}^q P_j l_j \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^q D_j l_j \right) \right\}, \quad (6)$$

donde  $q = M + 1$  es la cantidad de subperíodos en los que queda subdividida la muestra al aplicarse los  $M$  quiebres estructurales, los  $l_j$  son los tamaños relativos de cada subperíodo con respecto a la cantidad total de períodos incluidos en la muestra,  $T$ ; además,  $D_j = \int_0^1 B_*^{(j)}(s) dB_*^{(j)}(s)'$ ,  $P_j = \int_0^1 B_*^{(j)}(s) B_*^{(j)}(s)' ds$  y  $B_*^{(j)}(s) = B^{(j)}(s) - sB^{(j)}(1)$ , o sea es un puente Browniano estándar de dimensión  $n - r_0$ .

Como puede apreciarse en la ecuación (6), ahora la distribución asintótica depende de la cantidad de quiebres estructurales y de los tamaños relativos de los subperíodos. Esto implica que los valores críticos se deben calcular para cada aplicación particular, por lo cual se han construido algunas aproximaciones usando la metodología de superficie de respuesta (*response surface*). Sin embargo, la misma solo se ha aplicado para un máximo de 3 quiebres estructurales. Luego, para admitir la presencia de más de tres quiebres estructurales, los valores críticos deben ser computados por simulación de Monte Carlo,

---

donde los movimientos Brownianos estándar son aproximados empleando procesos con distribución normal estandarizada.

En Lütkepohl & Saikkonen (2000), si bien no se trata de un trabajo destinado a pruebas de cointegración con quiebres estructurales, se encuentran los ingredientes para construir la simulación. Lo que se necesita obtener por simulación son los  $D_j$  y los  $P_j$ . Para ello, en primer lugar se simulan  $T$  series independientes con distribución normal estándar  $\varepsilon_t \sim N_p(0, I_p)$  de dimensión  $p = n - r_0$  y luego se calculan:

$$B_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{k=1}^{t-1} (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}) \right] (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})'$$

y

$$A_T = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left[ \sum_{k=1}^{t-1} (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}) \right] \left[ \sum_{k=1}^{t-1} (\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}) \right]'$$

Luego, se utiliza el hecho de que  $B_T$  converge débilmente a  $D_j$  y  $A_T$  a  $P_j$ . Con lo cual solo resta realizar algunas cuentas matriciales para obtener los valores críticos en base a la ecuación (6).

### 3.4 Pruebas de causalidad en el sentido de Granger

El análisis de cointegración permite detectar si las series bajo estudio comparten alguna tendencia estocástica a largo plazo, lo que nos induce a pensar que los mercados se encuentran interrelacionados. Sin embargo, es conocido que correlación no implica causalidad; o sea, el simple hecho de conocer que dos series tienden a moverse simultáneamente no nos habilita a afirmar que una variación de una de las series implique necesariamente una variación en la otra. Si dos series,  $x$  e  $y$ , están correlacionadas, puede deberse a que  $x$

---

causa a  $y$ ,  $y$  causa a  $x$ , exista causalidad en sentido bidireccional, o incluso la correlación puede ser espúrea. Si las series están cointegradas, se elimina el último caso citado, al menos si la definición operativa de causalidad es la habitualmente empleada en series temporales, que es el de causalidad de Granger. Dicho concepto, descansa en la idea de que la causa debe preceder en el tiempo al efecto y, por lo tanto, una variable causa a la Granger la otra si sus valores precedentes permiten mejorar el poder predictivo sobre la variable potencialmente afectada. Por otra parte, la definición de causalidad de Granger no solo es una aproximación del concepto de causalidad, sino que tiene peso propio porque es de interés conocer si los valores de un índice permiten mejorar el poder predictivo sobre los otros.

Toda & Yamamoto (1995), Dolado & Lütkepohl (1996) y Lütkepohl (2005) emplean pruebas basadas en modelos VAR con retardos adicionales (*surplus lag VAR*). Las pruebas se realizan por medio de la incorporación de  $d$  retardos adicionales en la estimación del modelo en su representación  $\text{VAR}(k)$ , siendo  $d$  el orden máximo de integración de las series. Luego se realizan pruebas de Wald solo sobre los primeros  $k$  retardos.

Bauer & Maynard (2012), proponen usar un modelo VARX con retardos adicionales para realizar un análisis de causalidad de Granger robusto a quiebres estructurales no modelados. Dicha metodología se diferencia de la planteada por Toda & Yamamoto (1995) en que se añaden variables explicativas de control. Según los autores, dicha prueba es robusta a la presencia de quiebres estructurales no modelados.

En la aplicación análisis de causalidad de Granger de los índices bursátiles, se aplican las pruebas de Toda & Yamamoto (1995) y Bauer & Maynard (2012).

---

### 3.4.1 Prueba de Toda y Yamamoto

Para realizar esta prueba se plantea un modelo VAR con retardos adicionales. En el artículo de Toda & Yamamoto (1995), se deriva la distribución asintótica de un estadístico de Wald para docimar restricciones sobre los coeficientes de dicho modelo VAR, el cual puede estar referido a variables con orden de integración arbitrario, o sea que pueden ser integradas de distinto orden y, adicionalmente, pueden estar cointegradas, o no.

El modelo VAR es:

$$y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_q t^q + J_1 y_{t-1} + \dots + J_k y_{t-k} + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Se pretende probar la restricción:

$$H_0 : f(\phi) = 0 \quad (8)$$

donde  $\phi = \text{vec}(\Phi)$ , siendo  $\text{vec}(\cdot)$  la operación de vectorización, la cual consiste en apilar las columnas de la matriz original para formar un vector columna. Además,  $\Phi = (J_1, \dots, J_k)$  y  $f(\cdot)$  es una función vectorial que cumple determinadas condiciones<sup>6</sup>.

Para probar la hipótesis (8) se estima una versión aumentada de la ecuación (7) por MCO:

$$y_t = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 t + \dots + \hat{\gamma}_q t^q + \hat{J}_1 y_{t-1} + \dots + \hat{J}_k y_{t-k} + \dots + \hat{J}_p y_{t-p} + \hat{\varepsilon}_t. \quad (9)$$

La ecuación (9) se puede escribir como

---

<sup>6</sup>Para más detalles ver Toda & Yamamoto (1995).

---


$$y_t = \hat{\Gamma}\tau_t + \hat{\Phi}x_t + \hat{\Psi}z_t + \hat{\varepsilon}_t,$$

donde  $\hat{\Gamma} = (\hat{\gamma}_0, \dots, \hat{\gamma}_q)$ ,  $\tau_t = (1, t, \dots, t^q)'$ ,  $x_t = (y'_{t-1}, \dots, y'_{t-k})'$ ,  $z_t = (y'_{t-k-1}, \dots, y'_{t-p})'$ ,  $\hat{\Phi} = (\hat{J}_1, \dots, \hat{J}_k)$  y  $\hat{\Psi} = (J_{k+1}, \dots, J_p)$ ;

o en forma mas compacta:

$$Y' = \hat{\Gamma}\mathcal{T}' + \hat{\Phi}X' + \hat{\Psi}Z' + \hat{\mathcal{E}}',$$

donde  $\mathcal{T} = (\tau_1, \dots, \tau_t)'$ ,  $X = (x_1, \dots, x_T)'$  y así sucesivamente.

Luego, en base al estimador  $\hat{\phi} = \text{vec}(\hat{\Phi})$ , se construye el estadístico de Wald buscado:

$$\mathcal{W} = f(\hat{\phi})' \left\{ F(\hat{\phi}) \left[ \hat{\Sigma}_\varepsilon \otimes (X'QX)^{-1} \right] F(\hat{\phi})' \right\}^{-1} f(\hat{\phi}),$$

donde  $\hat{\Sigma}_\varepsilon = T^{-1}\hat{\mathcal{E}}'\hat{\mathcal{E}}$ ,  $Q = Q_\tau - Q_\tau Z(Z'Q_\tau Z)^{-1}Z'Q_\tau$  y  $Q_\tau = I_T - \mathcal{T}(\mathcal{T}'\mathcal{T})^{-1}\mathcal{T}'$ .

Dicho estadístico tiene distribución asintótica  $\chi_m^2$  si  $p \geq k + d$ , siendo  $d$  el máximo orden de integración de las series,  $k$  la cantidad de retardos del VAR original y  $p$  la cantidad de retardos del VAR aumentado.

### 3.4.2 Prueba de Bauer y Maynard

Como se anticipó, la prueba de Bauer & Maynard (2012) emplea un modelo VARX con retardos adicionales. Se emplean tres tipos de variables:  $y_t$  es un vector de variables dependientes de orden  $k_y$ ;  $z_{1t}$  de un vector de variables modeladas de forma exógena de orden  $k_{z_1}$ ; y  $z_{2,t}$  es un vector opcional de variables de control de orden  $k_{z_2}$ . El objetivo de la prueba es contrastar si  $z_{1t}$  causa a la Granger a  $y_t$  controlando por  $z_{2t}$ .

En primer lugar se estima el modelo VARX aumentado:

$$y_t = \sum_{j=1}^p (\psi_{y_j} y_{t-j} + \psi_{z_{2j}} z_{2t-j}) + \sum_{j=1}^{p_{z_1}+1} \psi_{z_{1j}} z_{1t-j} + \varepsilon_{yt,p} \quad (10)$$

y se contrasta la restricción conjunta  $\psi_{z_{1j}} = 0$  para  $1 \leq j \leq p_{z_1}$ . Debe notarse que no se contrasta la condición  $\psi_{z_{1p_{z_1}+1}} = 0$ . Esto se debe a que la incorporación del retardo adicional en  $z_{1t}$  solo se efectúa a fines de que la distribución asintótica del estadístico de prueba tenga las propiedades deseadas.

La ecuación (10) puede reescribirse como:

$$y_t = \psi_{x_1} x_{1t}^- + \psi_{x_2} x_{2t}^- + \varepsilon_{yt,p}$$

donde  $x_{1t}^- = z_{1t}^-$  y  $x_{2t}^- = [y_{t-1}^-, z_{2t}^-, z_{1t-p_{z_1}-1}^-]$ ; siendo  $y_t^- = [y_{t-1}^-, \dots, y_{t-p}^-]$ ,  $z_{2t}^- = [z_{2t-1}^-, \dots, z_{2t-p}^-]$ ,  $z_{1t}^- = [z_{1t-1}^-, \dots, z_{1t-p_{z_1}}^-]$ ,  $\psi_y = [\psi_{y_1}, \dots, \psi_{y_p}]$  y  $\psi_{z_2} = [\psi_{z_{21}}, \dots, \psi_{z_{2p}}]$ .

O bien, en forma apilada (*stacked*):

$$Y = X_1 \psi'_{x_1} + X_2 \psi'_{x_2} + E_p,$$

donde  $Y = [y_{p_{max}+1}^-, \dots, y_T^-]$ , para  $p_{max} = \max\{p, p_{z_1} + 1\}$ ; y  $X_1$ ,  $X_2$  y  $E_p$  apilan  $x_{1t}^-$ ,  $x_{2t}^-$  y  $\varepsilon_{yt,p}$  en forma análoga.

Las hipótesis son:  $H_0 : \psi_{x_1} = 0$  y  $H_A : \psi_{x_1} \neq 0$ .

Los autores demuestran que bajo  $H_0$

$$\hat{W} = \text{vec}(Y' X_{1.2})' \left( (X'_{1.2} X_{1.2})^{-1} \otimes \left( \frac{1}{T} E'_p E_p \right) \right) \text{vec}(Y' X_{1.2}) \xrightarrow{d} \chi^2_{k_y p_{z_1} k_{z_1}},$$

donde  $X_{1.2} = X_1 - X_2 (X'_2 X_2)^{-1} X'_2 X_1$  y  $\text{vec}(\cdot)$  representa la operación de vectorización, la cual consiste en apilar las columnas de la matriz original para formar un vector columna.

---

## 4 Materiales

En esta sección se introducen las series empleadas, las fuentes de las que son originarias y algunos detalles sobre las tareas de preprocesamiento efectuadas antes del análisis de las mismas.

Se trabaja con series diarias para el período comprendido entre el 14 de diciembre de 1998 y el 30 de enero de 2017. Se trata de un período que abarca 18 años, por lo que se tienen 4731 observaciones.

Los índices y sus respectivas abreviaturas son: *Merval* (MERV), *Bovespa* (BVSP), *Standard and Poor's* (GSPC), *Nasdaq 100* (NDX), *Financial Times Stock Exchange 100* (FTSE), *XETRA DAX* (GDAXI), *Paris CAC 40* (FCHI), *Nikkei 225* (N225), *Hang Seng Index* (HSI), *Shanghai Security Exchange* (SSEC), *Bombay Security Exchange* (BSESN).

### 4.1 Preprocesamiento

Debido a que los índices se encuentran expresados en distintas monedas, se convierten todas las series a una moneda común (dólares), por lo que se debe acceder a series diarias de tipos de cambio. De este manera, se busca eliminar los efectos distorsivos generados por procesos inflacionarios.

Como a partir de la regulación del mercado cambiario, el tipo de cambio oficial de Argentina dejó de reflejar la verdadera paridad entre el peso y el dólar, se emplea una serie de dólar “blue” desde el 20 de octubre de 2011 hasta el 8 de agosto de 2016, fecha en que se eliminan las últimas trabas en el mercado cambiario.

Para comparar las evoluciones de diversos índices bursátiles, se los convierte en números índice, tomando como base el 14 de diciembre de 1998. Puede pensarse que los índices

---

siguen un proceso acumulativo de tipo multiplicativo, esto es que el valor de un día es equivalente al del día anterior multiplicado por  $(1 + g)$ , siendo  $g$  la tasa de crecimiento diaria del índice. Por esta razón, para trabajar con modelos estadísticos lineales, se emplea la transformación logarítmica.

Las series contienen dos tipos de valores faltantes. El primer tipo de faltantes, consiste en que los mercados no operan los fines de semana. Estos valores faltantes no representan un inconveniente, dado que se puede considerar que el proceso estocástico se produce en semanas de cinco días, removiéndose de la base de datos los fines de semana. El segundo tipo de faltantes, se debe a la existencia de feriados, los cuáles en general son específicos de cada mercado. Para el tratamiento de este segundo tipo de faltantes, se dispone de tres opciones: emplear métodos que permiten la existencia de faltantes; eliminar las filas de la base de datos que contienen faltantes o emplear un método de imputación para completar la base de datos. Dado que los métodos que se pretenden aplicar mayoritariamente no permiten trabajar con valores faltantes, se debe seleccionar una de las últimas dos opciones. En la presente tesis, se escoge la alternativa de emplear un algoritmo de imputación, por tres razones: se evita la pérdida de datos; no se rompe la dinámica temporal del proceso multivariante y la cantidad de faltantes representa una proporción relativamente reducida respecto al total<sup>7</sup>. La imputación se realiza usando un método de interpolación segmentaria (*spline*) cúbica, por medio de la función *na.spline* de la biblioteca *zoo*. La elección de un algoritmo de imputación univariante no es casual, si se emplea un algoritmo multivariante se podría generar un sesgo en favor de la existencia de cointegración de las series.

---

<sup>7</sup>Aproximadamente un 5%.

---

## 4.2 Fuentes

Las series referidas a los índices bursátiles se obtuvieron de la página de yahoo finanzas<sup>8</sup>, mientras que las series de tipo de cambio provienen de OANDA<sup>9</sup>. En ambos casos, para extraer las series se utilizó la biblioteca *quantmod* del software libre *R*<sup>10</sup>. La principal ventaja del uso de esta biblioteca es que permite actualizar fácilmente las series consideradas.

La serie de dólar “blue” se obtiene de la página web del diario ámbito financiero<sup>11</sup>.

## 4.3 Descripción de las series

En la Figura 4.1 se muestran las series bajo estudio. Es evidente la existencia de fenómenos globales que afectan simultáneamente a todos los índices, tales como la crisis subprime del 2008. También se pueden apreciar movimientos particulares de los índices por separado, o de grupos de índices.

Respecto a las tendencias, se puede notar que algunos mercados fueron mas rentables que otros. Sin embargo en algunos casos esto puede estar explicado por una mayor volatilidad. Esto es compatible con un principio básico de finanzas que establece que en general un aumento en la exposición al riesgo trae aparejada una mayor rentabilidad requerida, lo que se conoce como prima de riesgo.

En la Figura 4.2 se han graficado los logaritmos naturales de los índices. La transformación produce dos efectos visuales. En primer lugar, como era de esperarse, se reduce la brecha en las tendencias. En segundo lugar, se magnifica la importancia de la crisis de fines de 2001 en el mercado bursátil de Argentina, así como su posterior recuperación.

---

<sup>8</sup> *Yahoo finance*; [finance.yahoo.com](https://finance.yahoo.com).

<sup>9</sup> *OANDA Corporation*; <https://www.oanda.com/>.

<sup>10</sup> Ver R Core Team (2018).

<sup>11</sup> <http://www.ambito.com/economia/mercados/monedas/dolar/>.

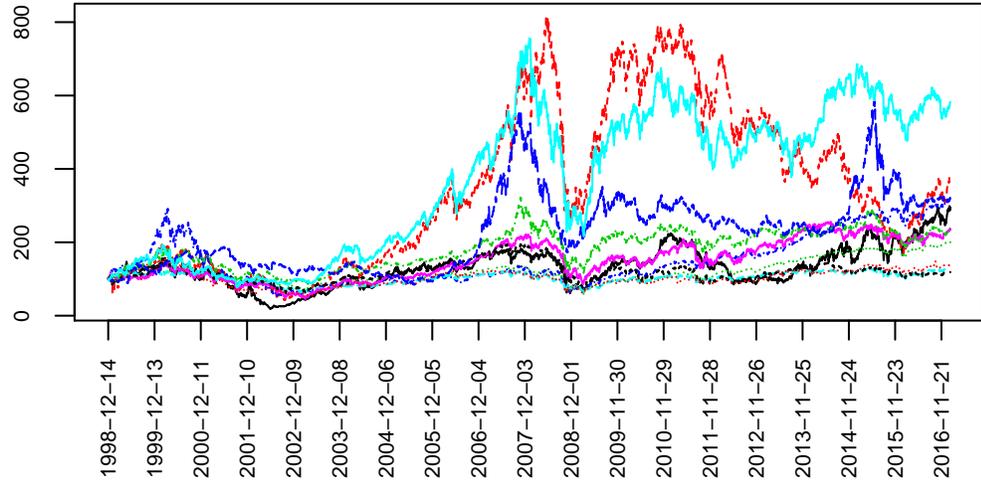


Figura 4.1: Evolución de los índices

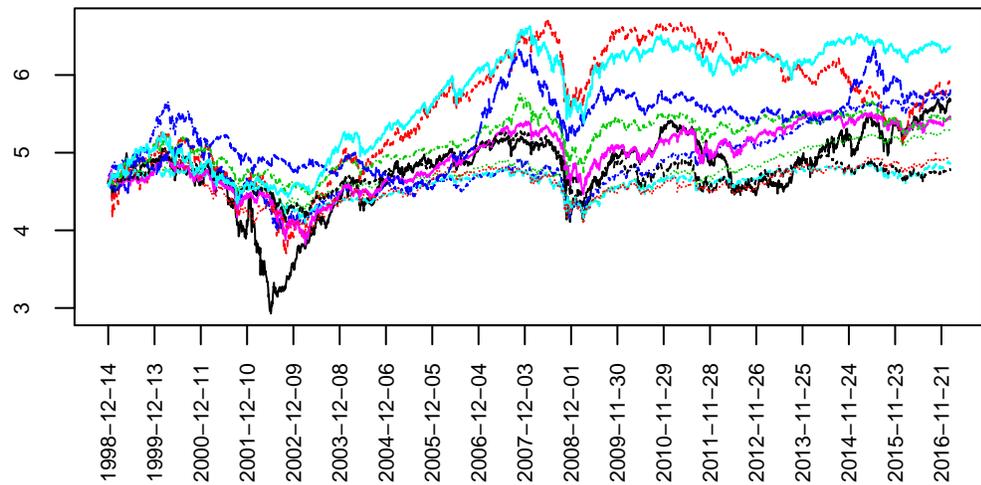


Figura 4.2: Evolución del logaritmo natural de los índices

---

Del estudio de ambos gráficos, se puede anticipar que las series son no estacionarias y poseen quiebres estructurales de gran magnitud. Los quiebres más importantes, por lo general son conjuntos; o sea que reflejan fenómenos globales.

## 4.4 Implementación computacional

Las estimaciones se realizan en su totalidad en el software *R*. Se hace uso intensivo de las bibliotecas *urca* y *var*. Adicionalmente se modificaron algunas funciones de la biblioteca *urca*. En el apéndice se encuentra transcrita el código correspondiente a las funciones implementadas.

### 4.4.1 Implementación computacional de las pruebas de raíz unitaria

Las pruebas ADF y KPSS se efectúan empleando las funciones *ur.df* y *ur.kpss* de la biblioteca *urca*.

Como se describió en la sección de metodología, la prueba de Kapetanios (2005) es una generalización de la prueba de Zivot & Andrews (1992) para el caso de más de un quiebre estructural. Entonces, para la implementación se modifica la función *ur.za* de la biblioteca *urca*. La nueva función es llamada *ur.ka* y permite contrastar la existencia de raíz unitaria contra la alternativa de que la serie es  $I(0)$  con hasta cinco quiebres en el nivel, la tendencia o en ambos. El procedimiento mediante el cual se van estimando secuencialmente las fechas de quiebre es el descrito en la sección de metodología.

### 4.4.2 Implementación computacional de las pruebas de cointegración

La prueba de cointegración de Johansen y Juselius se realiza por medio de la función *ca.jo* de la biblioteca *urca*.

---

La prueba de cointegración con ventanas móviles, es implementada como un bucle en el cual se aplica la prueba de Johansen y Juselius sobre una muestra móvil.

La prueba de cointegración con quiebres estructurales en el nivel se implementa en la función *cajlst2*, siendo la misma una modificación de la función *cajlst* de la biblioteca *urca*. Dicha modificación es necesaria por dos motivos: la función original solo admite hasta 5 variables y solo permite la incorporación de un quiebre estructural. En la función modificada se puede contrastar cointegración entre 15 variables o menos, admitiendo la existencia de hasta 5 quiebres estructurales. Por cuestiones de carga computacional se decidió no programar una rutina para una cantidad arbitraria de quiebres estructurales.

La prueba de cointegración con quiebres estructurales en nivel y tendencia se efectúa por medio de dos funciones. En la función *cajlstb* se realiza la estimación de las fechas de quiebre y el cálculo de los valores observados de los estadísticos. El cómputo de los valores críticos requirió la implementación del procedimiento de simulación de Monte Carlo descrito en la sección de metodología, para aproximar la distribución asintótica del estadístico de prueba, la cual está basada en puentes Brownianos. La función programada para tal finalidad es bautizada *TSLcrit*.

#### **4.4.3 Implementación computacional de las pruebas de causalidad de Granger**

La prueba de Toda y Yamamoto es implementada en la función *TY*, modificando un *script* de *R* publicado en el blog *R-economics* (Pfeiffer (2012)). La prueba de Bauer y Maynard se implementa en la función *VARXcausality*, a partir de una modificación del código usado en la Prueba de Toda y Yamamoto.

---

## 5 Resultados

### 5.1 Pruebas de raíz unitaria

#### 5.1.1 Prueba aumentada de Dickey y Fuller

De acuerdo a lo planteado en la sección de metodología, se realiza la prueba aumentada de Dickey y Fuller, siguiendo los lineamientos desarrollados en Pfaff (2011) y Enders (2014). En la Tabla 5.1, se presentan los valores observados de los estadísticos  $\tau_3$ ,  $\phi_3$ ,  $\tau_1$ ,  $\phi_1$  y sus respectivos valores críticos a un nivel de significación del 5%. Las pruebas referentes a  $\tau_3$  y  $\tau_1$ , son unilaterales izquierdas; mientras que las de  $\phi_3$  y  $\phi_1$  son unilaterales derechas. Por lo tanto, puede notarse que para todos los índices, en ninguna de las pruebas se rechaza la hipótesis nula al nivel de significación del 5%. Esto implica que el procedimiento resulta en el no rechazo de la hipótesis de existencia de raíz unitaria para todos los índices bajo estudio.

Tabla 5.1: Prueba aumentada de Dickey y Fuller (ADF)

Variable	$\tau_3$	$\tau_3^*$	$\phi_3$	$\phi_3^*$	$\tau_2$	$\tau_2^*$	$\phi_1$	$\phi_1^*$	$\tau_1$	$\tau_1^*$
MERV	-2.07	-3.41	2.43	6.25	-1.29	-2.86	1.01	4.59	0.47	-1.95
BVSP	-1.50	-3.41	1.28	6.25	-1.48	-2.86	1.34	4.59	0.50	-1.95
GSPC	-1.83	-3.41	2.05	6.25	-0.92	-2.86	0.79	4.59	0.80	-1.95
NDX	-1.54	-3.41	1.56	6.25	-0.76	-2.86	0.71	4.59	0.85	-1.95
FTSE	-2.61	-3.41	3.53	6.25	-2.23	-2.86	2.53	4.59	0.23	-1.95
FCHI	-2.60	-3.41	3.39	6.25	-2.59	-2.86	3.37	4.59	0.04	-1.95
GDAXI	-2.51	-3.41	3.20	6.25	-1.26	-2.86	1.06	4.59	0.64	-1.95
HSI	-2.72	-3.41	3.81	6.25	-2.06	-2.86	2.43	4.59	0.66	-1.95
SSEC	-1.87	-3.41	1.81	6.25	-1.50	-2.86	1.67	4.59	0.91	-1.95
N225	-2.14	-3.41	2.47	6.25	-1.78	-2.86	1.65	4.59	0.27	-1.95
BSESN	-1.78	-3.41	1.78	6.25	-1.42	-2.86	1.97	4.59	1.21	-1.95

---

### 5.1.2 Prueba KPSS

Debido a que la prueba de raíz unitaria aumentada de Dickey y Fuller puede tener problemas de potencia, es útil complementarla con una prueba que plantea como hipótesis nula la estacionariedad de las series. Como se desarrolló en la sección de metodología, Kwiatkowski et al. (1992), proponen una prueba cuya hipótesis nula consiste en que las series son estacionarias en torno a una constante o a una tendencia lineal. Si los resultados de la prueba proveen evidencia en contra de la estacionariedad de las series, sabemos que esto no se debe a problemas de falta de potencia, dado que la falta de potencia se manifestaría en el no rechazo de la hipótesis nula.

En la Tabla 5.2, se han tabulado los valores observados y críticos a un nivel de significación del 5%, de los estadísticos  $\eta_\tau$  y  $\eta_\mu$ ; los cuales se emplean para contrastar si las series son estacionarias en torno a una tendencia lineal o en torno a una constante; respectivamente.

Tabla 5.2: Prueba KPSS

Indice	$\eta_\tau$	$\eta_\tau^*$	$\eta_\mu$	$\eta_\mu^*$
MERV	15.23	0.46	1.55	0.15
BVSP	26.32	0.46	6.35	0.15
GSPC	19.21	0.46	5.44	0.15
NDX	19.87	0.46	6.63	0.15
FTSE	9.91	0.46	3.29	0.15
FCHI	3.95	0.46	2.31	0.15
GDAXI	30.19	0.46	2.00	0.15
HSI	29.13	0.46	2.09	0.15
SSEC	25.80	0.46	1.92	0.15
N225	8.46	0.46	2.77	0.15
BESN	35.44	0.46	4.71	0.15

Como las pruebas son unilaterales derechas, se concluye que en todos los casos se rechaza la hipótesis nula de estacionariedad, al nivel de significación fijado. Por lo tanto, se confirma la conclusión obtenida por la prueba ADF.

---

### 5.1.3 Prueba de Kapetanios

Debido a que si hay uno o más quiebres estructurales, la prueba ADF puede indicar erróneamente que una serie es  $I(1)$  cuando la misma es  $I(0)$ ; se realiza la prueba de Kapetanios (2005), la cual contrasta la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria contra la alternativa de que la serie bajo estudio es  $I(0)$  en torno a una tendencia y/o nivel con uno o mas quiebres estructurales. Como se describió en la sección de metodología, esta prueba es una generalización de la prueba de Zivot & Andrews (1992) para el caso de más de un quiebre estructural.

En la implementación práctica se admiten hasta cinco quiebres en el nivel, la tendencia o en ambos. No se consideran más de 5 quiebres estructurales, porque en la literatura no están tabulados los valores críticos. Dichos valores críticos se pueden obtener por simulación, pero no se realiza dicha tarea porque no es el objetivo central de esta tesis.

En la Tabla 5.3, se encuentran tabulados los valores críticos del estadístico  $\tau_{min}^m$ , para las diversas cantidades de quiebres estructurales,  $m = 1, \dots, 5$ , y considerando los tres modelos planteados por Kapetanios (2005); a saber: el modelo A que solo admite quiebres en la constante; el modelo B que solo posee quiebres en la tendencia y finalmente, el modelo C que admite quiebres tanto en la constante como en la tendencia.

Al considerar el modelo A, en la Tabla 5.4 se encuentra que para el índice NDX, se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria, en favor de la existencia de estacionariedad en torno a una constante con un quiebre, si se considera un nivel de significación del 5%, dado que  $-5.16 = \tau_{min}^1 < \tau_{min}^{1*} = -4.94$ . Para los restantes índices no se rechaza la hipótesis nula. Lo mismo ocurre en el caso de 2 y 3 quiebres. Sin embargo, cuando se consideran 4 quiebres estructurales, los índices GSPC y FTSE también puede considerarse  $I(0)$ . Finalmente, en el caso de 5 quiebres estructurales el índice *Merval* también puede considerarse estacionario

Tabla 5.3: Valores críticos de  $\tau_{min}^m$

Modelo	m	0.01	0.05	0.10
A	1	-5.34	-4.94	-4.66
	2	-6.16	-5.69	-5.47
	3	-7.00	-6.53	-6.27
	4	-7.56	-7.10	-6.83
	5	-8.25	-7.64	-7.40
B	1	-5.01	-4.50	-4.14
	2	-5.62	-5.10	-4.78
	3	-6.29	-5.73	-5.43
	4	-6.86	-6.31	-6.00
	5	-7.40	-6.72	-6.42
C	1	-5.70	-5.08	-4.82
	2	-6.59	-6.11	-5.85
	3	-7.40	-7.01	-6.69
	4	-8.24	-7.74	-7.43
	5	-9.04	-8.34	-8.02

en torno a un nivel con quiebres estructurales.

Tabla 5.4: Prueba de Kapetanios, Modelo A

Indice	$\tau_{min}^1$	$\tau_{min}^2$	$\tau_{min}^3$	$\tau_{min}^4$	$\tau_{min}^5$
MERV	-2.73	-3.91	-4.64	-5.59	-7.68
BVSP	-3.07	-3.78	-4.53	-5.10	-5.67
GSPC	-2.99	-4.78	-6.04	-7.54	-8.53
NDX	-5.16	-5.89	-6.76	-7.36	-8.18
FTSE	-3.97	-5.13	-5.97	-7.34	-8.13
FCHI	-3.37	-4.04	-5.53	-6.10	-6.86
GDAXI	-3.26	-3.98	-4.55	-5.15	-6.05
HSI	-3.49	-4.43	-5.03	-5.52	-5.90
SSEC	-3.73	-4.83	-5.54	-5.89	-6.39
N225	-4.09	-5.20	-5.88	-6.75	-7.38
BSESN	-3.37	-4.09	-4.62	-4.97	-6.27

En la Tabla 5.5 están tabulados los resultados obtenidos al considerar el modelo B, o sea solo admitiendo quiebres estructurales en la tendencia. Al considerar un quiebre estructural solo se rechaza la hipótesis de raíz unitaria en el índice NDX (si se admiten mas quiebres, por lo contrario dicho índice resulta ser I(1)). El índice GSPC resulta estacionario en torno

a una tendencia quebrada si se considera la existencia de 3 o más quiebres estructurales. Finalmente, el índice FTSE es  $I(0)$  si se admiten 5 quiebres estructurales en la tendencia determinística.

Tabla 5.5: Prueba de Kapetanios, Modelo B

Índice	$\tau_{min}^1$	$\tau_{min}^2$	$\tau_{min}^3$	$\tau_{min}^4$	$\tau_{min}^5$
MERV	-2.62	-3.28	-4.07	-4.96	-5.07
BVSP	-2.74	-3.89	-4.35	-4.90	-5.69
GSPC	-3.12	-3.59	-6.53	-7.10	-7.99
NDX	-4.53	-4.86	-5.37	-6.04	-6.60
FTSE	-4.06	-4.35	-5.12	-6.17	-6.79
FCHI	-2.77	-3.94	-5.13	-5.66	-6.23
GDAXI	-3.10	-3.75	-4.21	-4.57	-5.28
HSI	-3.17	-4.26	-4.87	-5.03	-5.48
SSEC	-2.00	-2.73	-3.38	-4.33	-4.88
N225	-3.74	-4.02	-4.33	-5.30	-5.60
BSESN	-2.48	-4.74	-4.91	-5.45	-6.56

Por último, en la Tabla 5.6 se resume la información correspondiente al modelo C, en el cual se admite la existencia de quiebres en nivel y tendencia. En este caso la incorporación de quiebres siempre genera un aumento en la cantidad de índices que son catalogados como  $I(0)$  en torno a un nivel y tendencia con quiebres estructurales. Si se considera la existencia de 1 quiebre estructural, se concluye que solo el índice NDX es  $I(0)$ . Al trabajar con 2 quiebres, también se clasifican como  $I(0)$  los índices GSPC y FTSE. En el caso de 3 quiebres estructurales, se concluye que los índices N225 y BSESN también son  $I(0)$ . Si se modelan 4 quiebres estructurales, también el índice HSI se incorpora al listado de índices  $I(0)$ . Finalmente, si se admiten 5 quiebres estructurales, ocho de los once índices analizados son catalogados como  $I(0)$  en torno a un nivel y tendencia con quiebres. Dichos índices son: NDX, GSPC, FTSE, N225, BSESN, HSI, FCHI y GDAXI.

Al considerar las pruebas en forma conjunta se obtiene una perspectiva muy interesante. La prueba ADF, ante un problema de falta de potencia puede concluir que una serie es  $I(1)$ , siendo que realmente es  $I(0)$ . La prueba KPSS, por lo contrario, ante un problema

Tabla 5.6: Prueba de Kapetanios, Modelo C

Indice	$\tau_{min}^1$	$\tau_{min}^2$	$\tau_{min}^3$	$\tau_{min}^4$	$\tau_{min}^5$
MERV	-3.80	-4.58	-5.49	-6.86	-7.22
BVSP	-3.08	-4.12	-5.10	-6.52	-7.63
GSPC	-3.98	-6.87	-7.69	-8.31	-9.06
NDX	-5.14	-6.18	-7.82	-8.62	-9.57
FTSE	-4.24	-6.19	-7.04	-7.88	-8.73
FCHI	-4.01	-5.72	-6.77	-7.48	-8.85
GDAXI	-4.11	-5.24	-6.37	-7.36	-8.47
HSI	-4.08	-5.04	-6.48	-8.17	-9.03
SSEC	-3.87	-4.68	-5.54	-6.95	-7.57
N225	-4.44	-6.00	-7.07	-7.82	-8.62
BSESN	-3.82	-5.35	-7.40	-8.08	-8.74

de falta de potencia tendería a concluir erróneamente que una serie es  $I(0)$ , siendo que realmente es  $I(1)$ . De acuerdo a los resultados obtenidos, dichas pruebas sugieren que todas las series analizadas son  $I(1)$ . Sin embargo, en dichas pruebas se supone en forma implícita que las series no tienen quiebres estructurales. Por esa razón, la prueba de Kapetanios (2005), al incorporar quiebres estructurales, produce resultados no coincidentes con las otras pruebas más usuales. Al aplicar dicha prueba, a medida que se incorporan quiebres estructurales y se adoptan modelos más complejos, se encuentran cada vez más series  $I(0)$ .

## 5.2 Pruebas de Cointegración

### 5.2.1 Prueba de cointegración de Johansen y Juselius

Antes de realizar la prueba de cointegración de Johansen y Juselius, se selecciona la cantidad de retardos. Con dicha finalidad, se computan los criterios de información para el modelo VAR asociado bajo diversas especificaciones de la parte determinística, a saber: sin constante ni tendencia, con constante y con constante y tendencia.

Tabla 5.7: Cantidad de retardos seleccionados según los criterios de información

	ninguno	constante	tendencia
AIC(n)	4	4	4
HQ(n)	3	3	2
SC(n)	2	2	2

$$AIC(n) = \ln(\det(\hat{\Sigma}_\epsilon(n))) + \frac{2}{T}nK^2$$

$$HQ(n) = \ln(\det(\hat{\Sigma}_\epsilon(n))) + \frac{2\ln(\ln(T))}{T}nK^2$$

$$SC(n) = \ln(\det(\hat{\Sigma}_\epsilon(n))) + \frac{\ln(T)}{T}nK^2$$

donde  $n$  es la cantidad de parámetros,  $K$ , la cantidad de variables y  $\hat{\Sigma}_\epsilon(n) = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t'$ .

En la Tabla 5.7, se muestran las cantidades de retardos seleccionadas por los criterios de información, empleando diversas especificaciones para la parte determinística; a saber: sin términos determinísticos, con constante, y con constante y tendencia. No existe un consenso en la literatura sobre la superioridad de uno de los criterios, por lo que se sugiere el uso combinado de los mismos. Sin embargo, se conoce que el criterio de Akaike (1974) en ciertas condiciones tiende a sobreestimar la cantidad de retardos, por lo que en esta investigación se descarta el mismo. El criterio de Schwarz (1978) indica que se deberían emplear dos retardos sin importar la formulación escogida para la parte determinística; mientras que el criterio de Hannan & Quinn (1979) conduce a la selección de dos o tres retardos. Por lo tanto, se decide emplear dos retardos para que el modelo sea mas parsimonioso y adicionalmente poder comparar los resultados obtenidos bajo las diversas especificaciones de la parte determinística usando la misma cantidad de retardos.

De las tablas 5.8 y 5.9, se desprende que probablemente existen dos relaciones de cointegración. En sólo uno de los casos considerados se concluiría que hay una sola relación de

Tabla 5.8: Prueba de Johansen y Juselius. Estadístico de la traza

	Ninguno		Constante		Tendencia	
	test	5pct	test	5pct	test	5pct
$r \leq 10$	0.08	8.18	2.45	9.24	5.21	12.25
$r \leq 9$	5.87	17.95	8.39	19.96	12.41	25.32
$r \leq 8$	13.17	31.52	16.21	34.91	20.53	42.44
$r \leq 7$	22.14	48.28	25.93	53.12	32.76	62.99
$r \leq 6$	36.08	70.60	39.89	76.07	47.69	87.31
$r \leq 5$	56.58	90.39	60.53	102.14	73.11	114.90
$r \leq 4$	83.53	124.25	88.56	131.70	107.22	146.76
$r \leq 3$	119.80	157.11	124.83	165.58	146.79	182.82
$r \leq 2$	170.82	192.84	175.93	202.92	202.31	222.21
$r \leq 1$	235.43	232.49	240.81	244.15	269.99	263.42
$r = 0$	306.75	277.39	312.16	291.40	342.44	310.81

Tabla 5.9: Prueba de Johansen y Juselius. Estadístico del máximo valor propio

	Ninguno		Constante		Tendencia	
	test	5pct	test	5pct	test	5pct
$r \leq 10$	0.08	8.18	2.45	9.24	5.21	12.25
$r \leq 9$	5.78	14.90	5.94	15.67	7.20	18.96
$r \leq 8$	7.30	21.07	7.82	22.00	8.12	25.54
$r \leq 7$	8.96	27.14	9.72	28.14	12.23	31.46
$r \leq 6$	13.95	33.32	13.96	34.40	14.93	37.52
$r \leq 5$	20.49	39.43	20.65	40.30	25.42	43.97
$r \leq 4$	26.95	44.91	28.02	46.45	34.11	49.42
$r \leq 3$	36.27	51.07	36.27	52.00	39.58	55.50
$r \leq 2$	51.02	57.00	51.11	57.42	55.51	61.29
$r \leq 1$	64.61	62.42	64.87	63.57	67.68	66.23
$r = 0$	71.32	68.27	71.36	69.74	72.45	72.72

---

cointegración<sup>12</sup>.

### 5.2.2 Cointegración empleando ventanas móviles

Como se describió en las secciones previas, las relaciones entre los índices bursátiles pueden verse modificadas en el tiempo por diversos motivos. Una estrategia sencilla para analizar como se ve afectada la interrelación entre los mercados, consiste en observar el comportamiento de los estadísticos de las pruebas de cointegración a medida que dichas pruebas se aplican a una muestra móvil de tamaño fijo.

Como en todo método de estimación por ventanas móviles, la elección del tamaño de las ventanas depende del fenómeno que el investigador desee analizar. Para ilustrar esta estrategia se emplean ventanas de 1300 datos, lo que representa aproximadamente 5 años. De este modo se pretende analizar, la evolución de la interrelación de los mercados a mediano plazo, identificando si hay épocas donde los mercados están fuertemente relacionados y otras en que dicha relación se desvanece.

En las figuras 5.1, 5.2 y 5.3, se grafican los desvíos respecto a sus medias de los estadísticos observados del máximo valor propio y de la traza correspondientes a la prueba de cointegración de Johansen y Juselius aplicada en ventanas móviles de 5 años; para los modelos sin términos determinísticos, con constante y con constante y tendencia; respectivamente. En cada uno de esos tres casos, dado que en las pruebas de cointegración aplicadas en la sección previa sobre la muestra completa sugieren la existencia de dos relaciones de cointegración, se grafican los desvíos respecto a su media de los estadísticos asociados a la primera y a la segunda relación de cointegración. En dichas figuras, la línea que pasa por el cero separa las regiones de rechazo y no rechazo de la hipótesis nula de no existencia de cointegración. Si el desvío de un estadístico se encuentra por encima del cero, se concluye

---

<sup>12</sup>Cuando se considera el modelo con constante empleando el estadístico de la traza.

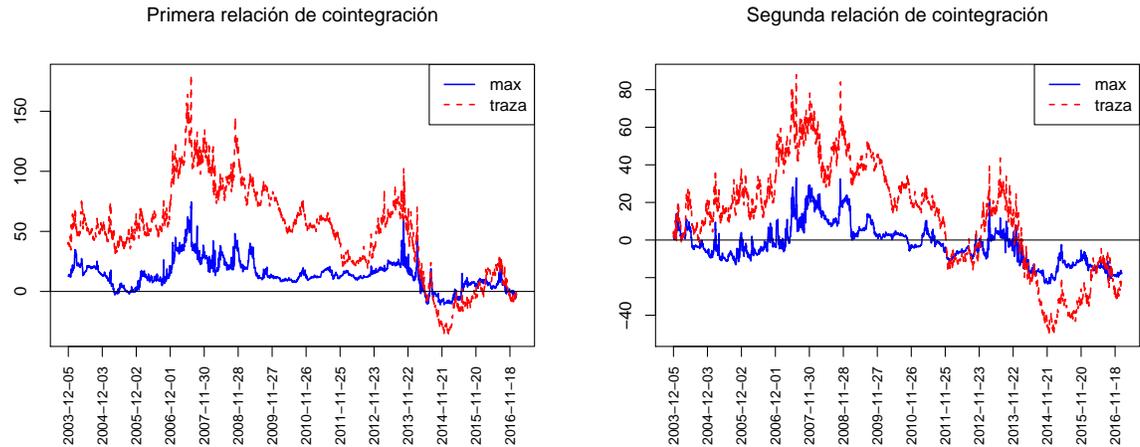


Figura 5.1: Prueba con ventana móvil de 5 años, sin componentes determinísticos

que en la ventana temporal asociada al mismo existe la relación de cointegración bajo prueba.

Una visión de las figuras en su conjunto sugiere que existiría al menos una relación de cointegración en el período comprendido entre fines de 2003 y fines de 2013, mientras que desde fines de 2013 dicha relación se desvanece. Respecto a la existencia de una segunda relación de cointegración, se concluye que la misma en caso de existir, se manifestaría en un período más reducido de tiempo, comprendido entre fines de 2006 y fines de 2010 o 2011.

Las conclusiones de este apartado son compatibles con las obtenidas al realizar las pruebas de cointegración sobre la muestra completa de que existen dos relaciones de cointegración y no se descarta plenamente la existencia de solo una relación de cointegración. Sin embargo, las pruebas de cointegración con ventanas móviles muestran que dichas relaciones de cointegración no permanecen inalteradas durante todo el período analizado. Este resultado no es inesperado, dado que está en línea con lo discutido en la sección de antecedentes.

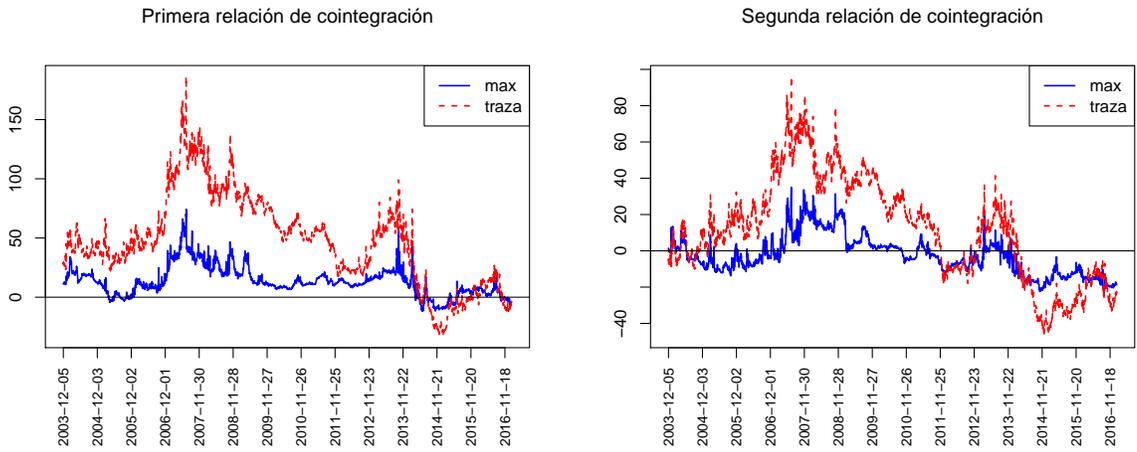


Figura 5.2: Prueba con ventana móvil de 5 años, con constante

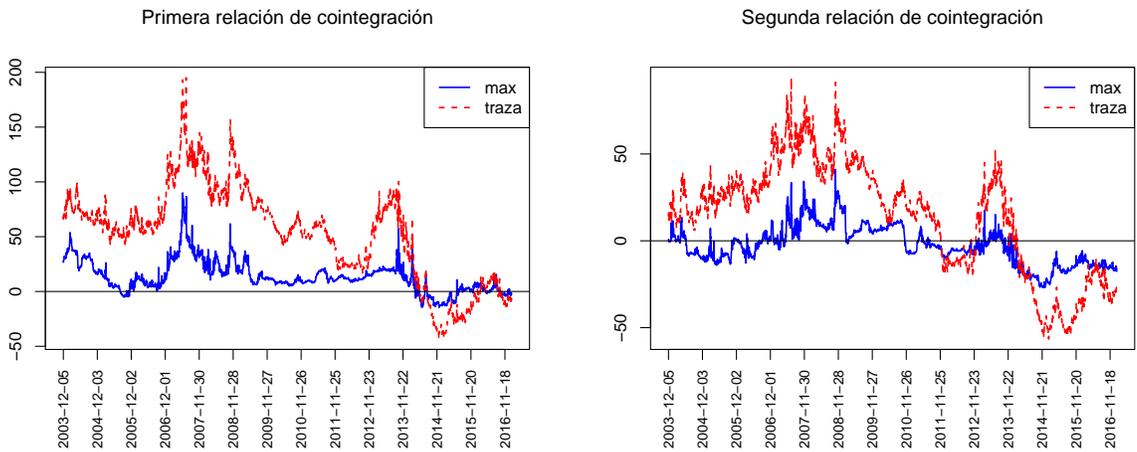


Figura 5.3: Prueba con ventana móvil de 5 años, con tendencia

---

### 5.2.3 Pruebas de cointegración con quiebres estructurales

En la sección anterior, se observa que las relaciones de cointegración estimadas usando la información provista por la muestra completa podrían no ser estables. Una causa probable de este fenómeno es la existencia de quiebres estructurales como reflejo de la naturaleza cambiante de los mercados bursátiles a través del tiempo. Entonces, es natural preguntarse si al emplear pruebas de cointegración que incorporan la existencia de quiebres estructurales las relaciones de cointegración se desvanecen, o por lo contrario, se encuentran aún más relaciones de cointegración entre las variables bajo estudio. A continuación, se presentan los resultados obtenidos al aplicar sobre los índices bursátiles las pruebas de cointegración previamente desarrolladas en la sección de metodología.

#### 5.2.3.1 Pruebas de cointegración con quiebres estructurales en el nivel

La primera posibilidad consiste en modelar quiebres estructurales en los niveles (*level shifts*). Dicho modelo puede incluir o no una tendencia determinística.

En las tablas 5.10 y 5.11, se muestran los resultados obtenidos bajo ambas especificaciones. Debe notarse que sólo se reporta una columna con valores críticos en cada tabla. Como se anticipó en la sección de metodología, esto se debe a que la distribución asintótica del estadístico de prueba no depende en este caso de la cantidad de quiebres estructurales incorporados en el modelo ni de los tamaños relativos de las submuestras generadas por los quiebres.

El modelo sin tendencia (Tabla 5.10) indica que existen 5 relaciones de cointegración si solo se incluye un quiebre estructural en la constante; si se incluyen 2 quiebres, se encuentran 6 relaciones de cointegración y al considerar los casos de entre 3 y 5 quiebres, hay 7 relaciones de cointegración. Entonces, se puede apreciar que a medida que se incorporan quiebres estructurales aumenta la cantidad de relaciones de cointegración detectadas.

Tabla 5.10: Prueba de cointegración con quiebres en la constante. Sin tendencia

	Cantidad de quiebres					5pct
	1	2	3	4	5	
r <= 10	0.03	0.08	0.50	0.44	0.55	4.12
r <= 9	6.54	6.87	8.13	7.22	8.28	12.28
r <= 8	16.49	16.49	22.41	21.56	23.50	24.28
r <= 7	28.06	30.31	38.84	38.45	39.83	40.07
r <= 6	49.39	52.10	63.08	63.29	69.46	59.75
r <= 5	78.88	84.53	97.33	96.97	102.49	83.36
r <= 4	116.28	122.12	134.67	134.56	150.77	110.72
r <= 3	165.66	175.87	193.00	195.89	215.37	142.22
r <= 2	224.95	236.26	260.80	263.05	290.69	177.80
r <= 1	310.91	327.03	351.14	357.24	388.01	217.32
r = 0	425.83	443.20	461.79	488.68	520.36	260.68

Al incorporar la tendencia determinística, (Tabla 5.11) se encuentran 6 relaciones de cointegración si se modelan 1, 3 o 5 quiebres estructurales y 5 relaciones de cointegración para los casos de 2 o 4 quiebres estructurales en el nivel. O sea que en este submodelo se encuentran entre 5 y 6 relaciones de cointegración. En este caso, la incorporación de quiebres estructurales adicionales no siempre implica un aumento en la cantidad de relaciones de cointegración.

Luego, los resultados encontrados en ambos submodelos presentan ciertas diferencias, dado que en uno de ellos la incorporación de quiebres estructurales adicionales conduce a un aumento en la cantidad de relaciones de cointegración detectadas, mientras que en el otro no. Sin embargo, en ambos casos se encuentran más relaciones de cointegración que en el modelo estándar, en el cuál no se modela la presencia de quiebres estructurales. En términos generales, la incorporación de quiebres estructurales en el nivel aumenta notablemente la cantidad de relaciones de cointegración.

Tabla 5.11: Prueba de cointegración con quiebres en la constante. Con tendencia

	Cantidad de quiebres					5pct
	1	2	3	4	5	
r <= 10	2.22	0.47	0.84	0.98	1.01	6.79
r <= 9	10.57	4.29	6.69	6.94	6.98	15.83
r <= 8	20.99	14.60	19.06	19.26	19.20	28.45
r <= 7	40.93	32.73	39.58	40.37	41.14	45.20
r <= 6	64.37	54.98	62.82	63.18	64.13	65.66
r <= 5	98.55	87.30	91.30	89.54	90.55	90.35
r <= 4	135.73	123.61	137.87	138.74	138.80	118.90
r <= 3	177.33	177.85	190.63	193.31	195.63	150.99
r <= 2	251.33	233.32	248.59	252.33	253.42	187.24
r <= 1	336.80	314.52	326.88	331.32	337.31	227.99
r = 0	452.60	404.92	419.16	423.76	447.09	271.71

### 5.2.3.2 Pruebas de cointegración con quiebres estructurales en nivel y tendencia

En esta sección, en forma adicional a los quiebres estructurales en la constante del término determinístico, se incorporan quiebres estructurales en la tendencia. Al hacerlo, el modelo aumenta marcadamente su complejidad, sobre todo en lo referente al cómputo de los valores críticos.

En las tablas 5.12 y 5.13 se muestran los valores observados y críticos del estadístico  $LR(r_0)$ ; respectivamente. Al analizar los resultados provistos en dichas tablas, se concluye que si se admite un quiebre estructural existen 6 relaciones de cointegración, mientras que en el caso de modelar entre 2 y 5 quiebres estructurales existen 10 relaciones de cointegración.

Entonces, al incorporar en el modelo quiebres estructurales en la tendencia, se encuentran aún mas relaciones de cointegración que al incluir quiebres estructurales solamente en la constante. Por lo tanto, se magnifica la diferencia en las conclusiones si se compara con la prueba de cointegración estándar en la que no se incorporan quiebres estructurales

Tabla 5.12: Prueba de cointegración con quiebres en constante y tendencia. Valores observados

	Cantidad de quiebres				
	1	2	3	4	5
$r \leq 10$	1.72	6.23	6.41	7.32	7.48
$r \leq 9$	9.05	20.67	20.84	21.83	22.16
$r \leq 8$	19.11	40.11	40.83	42.09	43.32
$r \leq 7$	40.37	69.28	68.26	68.29	69.95
$r \leq 6$	65.27	105.47	105.85	105.45	104.01
$r \leq 5$	96.80	151.81	156.50	150.45	148.83
$r \leq 4$	135.21	202.97	210.32	201.04	200.54
$r \leq 3$	177.45	270.44	273.91	269.56	267.71
$r \leq 2$	253.45	351.73	353.82	349.88	351.75
$r \leq 1$	339.30	452.00	446.98	446.04	445.40
$r = 0$	443.95	599.90	578.99	601.98	636.83

Tabla 5.13: Prueba de cointegración con quiebres en constante y tendencia. Valores críticos

	Cantidad de quiebres				
	1	2	3	4	5
$r \leq 10$	6.85	8.31	8.48	8.57	8.72
$r \leq 9$	15.73	18.09	18.33	18.63	19.17
$r \leq 8$	28.69	31.50	32.08	32.75	33.43
$r \leq 7$	45.28	49.33	50.23	50.63	51.74
$r \leq 6$	65.69	69.25	72.34	73.22	74.75
$r \leq 5$	89.95	95.45	97.80	99.13	100.87
$r \leq 4$	118.63	124.17	127.80	129.63	132.13
$r \leq 3$	151.28	157.77	161.13	163.67	166.71
$r \leq 2$	186.12	194.44	198.93	201.95	205.38
$r \leq 1$	227.66	236.66	239.67	243.78	248.50
$r = 0$	271.07	281.16	286.10	289.72	294.68

---

en el modelo; dado que al efectuar pruebas de cointegración con quiebres estructurales sólo en la constante se encuentran más relaciones de cointegración que en la prueba de cointegración estándar y a su vez las pruebas de cointegración con quiebres estructurales en la constante y en la tendencia conducen a la detección de más relaciones de cointegración que las pruebas de cointegración que solo admiten quiebres en la constante.

### 5.3 Causalidad en el sentido de Granger

El análisis de cointegración permite detectar si las series bajo estudio comparten alguna tendencia estocástica a largo plazo, lo que nos habilita a pensar que los mercados se encuentran interrelacionados. Si se desea tener una idea general de las relaciones causales subyacentes, en la literatura de series temporales se acude al concepto de causalidad en el sentido de Granger. Dicho concepto, descansa en la idea de que la causa debe preceder en el tiempo al efecto y, por lo tanto, una variable  $x$  causa a la Granger a otra variable,  $y$ , si los valores precedentes de  $x$  permiten mejorar el poder predictivo sobre la variable potencialmente afectada,  $y$ .

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de aplicar dos pruebas de causalidad de Granger que, a diferencia de la prueba estándar, son válidas cuando las series no son  $I(0)$ . Dichas pruebas son las desarrolladas por Toda & Yamamoto (1995) y Bauer & Maynard (2012).

Al aplicar las pruebas a los índices bursátiles se emplean modelos VAR y VARX bivariantes, dado que el análisis de causalidad de Granger con más de dos variables endógenas genera resultados difíciles de interpretar y complica las restricciones, las cuales dejan de ser lineales. Esto se debe a que se introducen efectos causales indirectos entre las series bajo estudio<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup>Para mas detalles sobre este punto, se puede acudir a Lütkepohl et al. (2004).

---

Si se estiman modelos bivariantes con 11 índices bursátiles, siendo que a su vez las direcciones causales pueden tener dos sentidos distintos, se tiene una multiplicidad de resultados que si bien no son difíciles de obtener, son difíciles de reportar en forma concisa e interpretar. Por lo tanto, en esta sección el análisis se centra en el índice *Merval*. Entonces se estudia si dicho índice causa a la Granger a los otros, o si el mismo es causado a la Granger.

### 5.3.1 Prueba de Toda y Yamamoto

Para implementar la prueba de Toda & Yamamoto (1995), se estiman modelos VAR bivariantes entre el índice *Merval* y cada uno de los índices restantes. Como todos los índices son  $I(1)$ , en cada uno de los modelos se incorpora un retardo adicional. Luego, en base a lo planteado en el apartado de metodología, se computan los estadísticos de Wald correspondientes para contrastar si el *Merval* causa a la Granger a cada uno de los otros índices y viceversa.

En la tabla 5.14, se presentan los resultados referidos a la existencia de causalidad del *Merval* sobre los otros índices. En casi todos los casos se rechaza la hipótesis nula de no causalidad. Por lo tanto, empleando esa prueba, a un nivel de significación estándar del 5%, se concluye que el índice *Merval* causa a la Granger a todos los índices considerados excepto FTSE, SSEC y N225<sup>14</sup>.

En la tabla 5.15, se presentan las pruebas correspondientes a las relaciones de causalidad de Granger de los otros índices sobre el *Merval*. Hay algunos rechazos mas de la hipótesis nula de no causalidad de Granger que en la tabla anterior. Se concluye, con una significación del 5% que el índice *Merval* es causado a la Granger por casi todos los índices considerados, siendo las excepciones los índices NDX y BVSP, aunque con el reparo de que en este último

---

<sup>14</sup>En este caso el de p-valor es muy próximo al nivel de significación.

Tabla 5.14: Prueba de causalidad de Toda y Yamamoto. Efectos de índice Merval en los otros índices

	$\chi_m^2$	$m$	valor-p
MERV -> BVSP	18.17	3	0.00
MERV -> GSPC	15.42	3	0.00
MERV -> NDX	12.37	3	0.01
MERV -> FTSE	2.94	2	0.23
MERV -> FCHI	6.85	2	0.03
MERV -> GDAXI	8.75	2	0.01
MERV -> HSI	8.30	2	0.02
MERV -> SSEC	0.74	2	0.69
MERV -> N225	6.15	2	0.05
MERV -> BSESN	8.46	2	0.01

Tabla 5.15: Prueba de causalidad de Toda y Yamamoto. Efectos de otros índices sobre el Merval

	$\chi_m^2$	$m$	valor-p
BVSP -> MERV	7.54	3	0.06
GSPC -> MERV	15.42	3	0.00
NDX -> MERV	4.63	3	0.20
FTSE -> MERV	42.58	2	0.00
FCHI -> MERV	45.79	2	0.00
GDAXI -> MERV	25.38	2	0.00
HSI -> MERV	244.77	2	0.00
SSEC -> MERV	34.71	2	0.00
N225 -> MERV	212.98	2	0.00
BSESN -> MERV	80.68	2	0.00

---

el p-valor está cerca del nivel de significación.

En síntesis, los resultados de las pruebas de causalidad de Granger de Toda & Yamamoto (1995), indican que el índice Merval es causado y causa a la Granger a la mayoría de los índices por lo que podría decirse, intuitivamente, que es tanto seguidor como líder.

### 5.3.2 Prueba de Bauer y Maynard

La prueba de Bauer & Maynard (2012), permite probar si  $k_{z_1}$  variables causan en el sentido de Granger a  $k_y$  variables, controlando por  $k_{z_2}$  variables. En esta aplicación particular se emplea la configuración:  $k_{z_1} = 1$ ,  $k_y = 1$ ,  $k_{z_2} = 9$ ; o sea que se contrasta si un índice causa a otro controlando por todos los restantes.

De nuevo se busca contrastar si el índice *Merval* causa a la Granger cada uno de los otros índices y viceversa, aunque en este caso al hacerlo se está controlando por todos los restantes. Al leer los resultados presentados en las tablas 5.16 y 5.17, esto queda más claro. Por ejemplo, en la primera fila de la tabla 5.16, se encuentra que el p-valor referido a la prueba de causalidad del índice *Merval* sobre el *Bovespa* es 0.10. Entonces, con una significación del 5%, no se rechaza la hipótesis nula de no causalidad de Granger del índice *Merval* sobre el *Bovespa* luego de controlar por todos los demás índices considerados.

En base a los resultados presentados en la tabla 5.16, se concluye que una vez que se controla por los demás índices, el índice *Merval* sólo causa a la Granger al índice NDX.

Por otra parte, la tabla 5.17 indica que luego de controlar por los demás índices, el índice *Merval* es causado a la Granger por todos los índices excepto los índices BVSP, GSPC, FTSE y N225.

Como conclusión global, se puede apreciar que cuando se emplea la prueba de Bauer & Maynard (2012) se encuentran menos relaciones de causalidad que al usar la prueba de

Tabla 5.16: Prueba de causalidad de Bauer y Maynard. Efectos del índice Merval en los otros índices

	$\chi^2_{p_{z1}}$	$p_{z1}$	valor-p
MERV -> BVSP	4.67	2	0.10
MERV -> GSPC	2.27	2	0.32
MERV -> NDX	12.74	1	0.00
MERV -> FTSE	3.32	2	0.19
MERV -> FCHI	3.32	1	0.07
MERV -> GDAXI	2.56	1	0.11
MERV -> HSI	2.44	2	0.30
MERV -> SSEC	0.32	1	0.57
MERV -> N225	2.64	2	0.27
MERV -> BSESN	4.55	2	0.10

Tabla 5.17: Prueba de causalidad de Bauer y Maynard. Efectos de otros índices sobre el Merval

	$\chi^2_{p_{z1}}$	$p_{z1}$	valor-p
BVSP -> MERV	2.89	2	0.24
GSPC -> MERV	2.27	2	0.32
NDX -> MERV	3.92	1	0.05
FTSE -> MERV	0.57	2	0.75
FCHI -> MERV	37.96	1	0.00
GDAXI -> MERV	20.54	1	0.00
HSI -> MERV	9.42	2	0.01
SSEC -> MERV	29.94	1	0.00
N225 -> MERV	1.99	2	0.37
BSESN -> MERV	10.96	2	0.00

---

Toda & Yamamoto (1995). Esto sugiere que varias de las relaciones causales encontradas al emplear la prueba de Toda & Yamamoto (1995) son debidas a efectos indirectos que desaparecen al controlar por los demás índices en el contraste de Bauer & Maynard (2012). Es notable como se modifican las conclusiones al aplicar uno u otro contraste. En particular, si se aplica la prueba de Toda & Yamamoto (1995) el índice *Merval* parece causar a casi todos los demás índices, pero en la prueba de Bauer & Maynard (2012), al controlar por otros índices, el *Merval* solo causa a un índice. O sea que en un caso parece ser un mercado líder, y en el otro no. Cuando se estudia causalidad de los otros índices sobre el *Merval*, los resultados también se modifican al cambiar de prueba, pero no en una forma tan drástica. Al aplicar la prueba de Bauer & Maynard (2012), el índice *Merval* continúa siendo causado por la mayoría de los índices. Entonces, en términos generales, puede decirse que el mercado bursátil argentino es un mercado seguidor, en el sentido que es causado a la Granger por más mercados que a los que causa a la Granger.

---

## 6 Discusión, conclusiones y recomendaciones

En esta sección se presenta una discusión sobre la metodología empleada, se interpretan los resultados obtenidos y se sugieren futuras líneas de investigación.

### 6.1 Discusión

La discusión sobre la existencia de raíz unitaria en los índices bursátiles tiene un espacio muy importante en la literatura referida a mercados financieros. Esto es así porque en el caso de que un índice sea modelado por una caminata aleatoria (*random walk*), la mejor predicción que se puede hacer sobre su valor futuro está dada por el último valor observado y toda perturbación tiene un efecto permanente. En cambio si un índice es  $I(0)$ , se dice que tiene la propiedad de “reversión a la media”, esto es que los shocks no tienen efectos permanentes y, por lo tanto, el índice tenderá a retornar a su tendencia de largo plazo.

Una práctica bastante generalizada consiste en realizar las pruebas aumentada de Dickey & Fuller (1981), que por problemas de potencia podría no rechazar la hipótesis nula de existencia de raíz unitaria y la prueba de Kwiatkowski et al. (1992), que por problemas de potencia podría no rechazar la nula de que la serie es  $I(0)$ . Entonces, si empleando ambas pruebas se concluye que la serie bajo estudio es  $I(0)$ , el investigador no se preocupa por la posible falta de potencia de la prueba de Dickey & Fuller (1981), dado que la prueba Kwiatkowski et al. (1992) no tendría problemas de potencia por trabajar con una hipótesis nula diferente. Sin embargo, ninguna de esas pruebas está basada en un modelo que tenga en cuenta los quiebres estructurales. Por esta razón, uno de los aportes de esta tesis consiste en implementar una función que permite aplicar la prueba de Kapetanios (2005) para docimar la existencia de raíz unitaria incorporando en el modelo la presencia de hasta 5 quiebres estructurales. La prueba no se implementó para admitir una cantidad arbitraria

---

de quiebres estructurales, porque en el artículo de Kapetanios (2005) no están publicados los valores críticos para más de 5 quiebres. Además, como veremos en las conclusiones, no es necesario trabajar con mas quiebres estructurales para obtener resultados diferentes a los encontrados con las pruebas estándar.

De acuerdo a la revisión bibliográfica realizada sobre el empleo de pruebas de cointegración para analizar la interrelación entre los índices bursátiles, se encuentra que las relaciones de cointegración existentes entre los índices podrían no ser estables en el tiempo, sobre todo si se trabaja sobre un horizonte temporal relativamente extenso. Luego, algunos de los artículos consultados incorporan un quiebre estructural al emplear la prueba de Gregory & Hansen (1996). Sin embargo, dicha prueba solo permite realizar análisis de cointegración bivariante, por lo que se implementan rutinas para probar cointegración multivariante con detección endógena de múltiples quiebres estructurales usando la metodología desarrollada en los diversos artículos de Lütkepohl, Saikkonen y Trenkler. También se implementa un análisis de cointegración empleando ventanas móviles, el cual permite capturar una noción de la evolución de las dos primeras relaciones de cointegración en el tiempo.

La inferencia basada en modelos VAR aumentados, suele ser menos eficiente que la basada en VECM cuando todas las series son  $I(1)$ , sin embargo es más robusta. En particular, Bauer & Maynard (2012) argumentan que las pruebas basadas en modelos VARX aumentados son resistentes a situaciones en que las series tienen memoria larga o existen quiebres estructurales no modelados. Por ello, se optó por realizar el análisis causal empleando modelos VAR y VARX aumentados, usando las pruebas de Toda & Yamamoto (1995) y Bauer & Maynard (2012).

---

## 6.2 Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos, las pruebas usuales de raíz unitaria, tanto la aumentada de Dickey y Fuller como la de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt y Shin indican que todos los índices considerados son integrados de orden uno. Como se discutió previamente, este resultado puede deberse a un problema de falta de potencia en el caso de la prueba aumentada de Dickey y Fuller, pero no en el caso de la prueba KPSS. Sin embargo, ambas pruebas no consideran la posible existencia de quiebres estructurales, lo que potencialmente puede invalidar sus resultados. De hecho, al aplicar la prueba de Kapetanios, se pone en duda la conclusión de que todas las series son  $I(1)$ . Por lo general, a medida que se incorporan quiebres estructurales, se tiende a concluir que las series son  $I(0)$ . La conclusión sobre el orden de integración, depende también del tipo de modelo empleado. En los modelos A y B, en los cuales solo se admite la existencia de quiebres estructurales en el nivel o la tendencia, se rechaza la nula de raíz unitaria en relativamente pocos casos, sin embargo cuando se emplea el modelo C, en el cual se admiten quiebres en el nivel y en la tendencia, ocho de los once índices son catalogados como  $I(0)$  si se admiten 5 quiebres estructurales. Dichos resultados son muy intuitivos, dado que la existencia de quiebres estructurales no modelados genera un sesgo hacia el no rechazo de la hipótesis de raíz unitaria, entonces a medida que se incorporan quiebres estructurales en el modelo se encuentran más series  $I(0)$ .

Si bien es cierto que existe el riesgo de que una serie  $I(1)$  podría ser erróneamente catalogada como  $I(0)$  si se incorpora una cantidad arbitrariamente elevada de quiebres estructurales, para un horizonte temporal tan extenso como el analizado no parece descabellado modelar la existencia de cinco quiebres estructurales. Este resultado indica que, dichos índices tienden a evolucionar en torno a una tendencia determinística sujeta a algunos quiebres estructurales; por lo tanto, los shocks no tienen un efecto permanente.

---

Cuando se emplea toda la muestra, las pruebas de cointegración de la traza y del máximo valor propio indican que existen dos (o quizá una) relación de cointegración. Al aplicar las mismas pruebas empleando ventanas móviles, se encuentra que hay períodos donde las relaciones de cointegración entre los índices son más claras que en otros y que la segunda relación de cointegración se manifiesta en un periodo de tiempo mas acotado que la primera. Ambas metodologías conducen a resultados compatibles, aunque al emplear ventanas móviles se logra capturar cierto conocimiento sobre la dinámica de las relaciones de cointegración, en particular que las mismas no permanecen inalteradas durante todo el período analizado. Este resultado indica que los mercados bursátiles se encuentran interrelacionados a largo plazo, existiendo épocas en que las relaciones entre los mismos son más marcadas que en otras.

Al incorporar quiebres estructurales en las pruebas de cointegración, se produce un fenómeno similar al discutido respecto a las raíces unitarias. A medida que se introducen quiebres estructurales o se asume un modelo con estructura más compleja, se tiende a encontrar más relaciones de cointegración. Esto es razonable, dado que encontrar relaciones de cointegración no es otra cosa que encontrar combinaciones lineales estacionarias. Entonces, del mismo modo que la inclusión de quiebres estructurales en los modelos usados para docimar la existencia de raíz unitaria genera un aumento en la cantidad de series catalogadas como  $I(0)$ , la incorporación de quiebres estructurales en los modelos usados para docimar la existencia de relaciones de cointegración produce la obtención de más relaciones de cointegración. En la sección de antecedentes se encontraba un resultado similar. Los trabajos revisados indican que al aplicar la prueba de Gregory & Hansen (1996), la cuál permite la existencia de un quiebre estructural, se encontraba mas evidencia a favor de la existencia de cointegración que al usar la prueba de Engle y Granger. Por lo tanto, los resultados encontrados en esta tesis sugieren que las conclusiones antes obtenidas usando pruebas de cointegración bivariadas que admitían un solo quiebre estructural, se podrían

---

extrapolar al caso de las pruebas de cointegración multivariantes con detección endógena de múltiples quiebres estructurales.

La existencia de cointegración entre los índices asociados a los distintos mercados bursátiles, por lo general es asociada a falta de eficiencia en los mismos. Sin embargo, Crowder (1996) señala que la cointegración entre los índices puede deberse a otros factores tales como: la existencia de primas de riesgo, o de regímenes cambiantes. Por lo tanto, si bien parece plausible que el hecho de que los índices cointegren esté indicando la existencia de ineficiencias en los mercados, se sigue la sugerencia de dicho autor y se interpreta la existencia de cointegración sólo como una señal de que los índices están interrelacionados y no necesariamente como falta de eficiencia en los mercados bursátiles.

Respecto a las pruebas de causalidad de Granger, no se puede usar como referencia la prueba original, dado que no es válida si las series no son estacionarias. Como se mencionó con anterioridad, para evitar conclusiones incorrectas, cuando todas las series son  $I(1)$ , el análisis de causalidad de Granger habitualmente se basa en un VECM. Sin embargo, los modelos VAR aumentados son más robustos, especialmente si existe la posibilidad de que no todas las series sean  $I(1)$ , sino que algunas de ellas sean  $I(0)$  o sigan procesos con memoria larga y por lo tanto, sean fraccionalmente integradas,  $I(d)$ , con  $0 \leq d \leq 1$ . Entonces, se implementan las pruebas de causalidad de Granger de Toda & Yamamoto (1995) y de Bauer & Maynard (2012). Como se señaló previamente, ambas están basadas en un estadístico de Wald en el cual se prueban restricciones sobre parámetros de un modelo VAR aumentado para corregir la distribución asintótica. La diferencia fundamental entre ambas pruebas es que en la planteada por Bauer & Maynard (2012) se usa un modelo VARX, o sea que se controla por otras variables. De acuerdo a lo visto en la sección de resultados, ese detalle aparentemente menor tiene consecuencias importantes, dado que ambas metodologías conducen a conclusiones bastante diferentes. Cuando se emplea la

---

prueba de Bauer & Maynard (2012) se encuentran menos relaciones de causalidad que al usar la prueba de Toda & Yamamoto (1995). Esto sugiere que varias de las relaciones causales encontradas al emplear la prueba de Toda & Yamamoto (1995) son debidas a efectos indirectos que desaparecen al controlar por los demás índices en el contraste de Bauer & Maynard (2012). Además, la prueba de Toda & Yamamoto (1995) sugiere que el índice *Merval* causa y es causado por casi todos los índices, mientras que la prueba de Bauer & Maynard (2012) indica que el *Merval* es un mercado esencialmente seguidor, en el sentido de que es causado a la Granger por más índices que a los que causa. Este resultado parece mas razonable que el obtenido en la prueba de Toda & Yamamoto (1995) si se tiene en cuenta que el Mercado de Valores de Buenos Aires tiene un tamaño muy reducido en comparación con los otros mercados analizados.

### **6.3 Recomendaciones y futuras líneas de investigación**

La existencia de una raíz unitaria plantea un serio desafío para la identificación de quiebres estructurales. Por una parte, la metodología usualmente aplicada para detectar quiebres estructurales solo es válida cuando las series son  $I(0)$ . Por otra parte, las pruebas de raíz unitaria sufren problemas de potencia si existen quiebres estructurales. El trabajo de Harvey, Leybourne, & Taylor (2009) puede constituir una solución para el problema de la identificación de quiebres estructurales cuando las series son potencialmente no estacionarias. El método propuesto por los autores es muy atractivo, dado que la prueba planteada para docimar la existencia de quiebres estructurales es válida tanto si las series son  $I(0)$  como  $I(1)$ . Esto rompe el problema impuesto por la sensibilidad de los métodos de detección de quiebres estructurales al orden de integración y de las pruebas de raíz unitaria a la presencia de quiebres estructurales.

Respecto a las pruebas de cointegración que admiten la existencia de quiebres estructurales,

---

no se han considerado algunos aspectos que deberían ser tenidos en cuenta en futuras investigaciones, tales como la incorporación de metodología específica para el tratamiento de los outliers, heterocedasticidad y no normalidad.

Los outliers pueden ser incorporados en las pruebas por medio de variables de intervención, sin que se vean afectadas las distribuciones asintóticas de los estadísticos asociados a las pruebas de cointegración con quiebres estructurales. Sin embargo, no se encontró en la literatura una metodología adecuada para la determinar la cantidad de outliers y realizar una detección endógena de los mismos. Además, el análisis de Nielsen (2004) indica que la incorporación de variables artificiales para tratar el problema de los outliers puede no ser la mejor solución para dicho problema.

Respecto a la heterocedasticidad, una referencia interesante para investigaciones futuras es Cavaliere, Rahbek, & Taylor (2010), donde los autores presentan una prueba del rango de la matriz de cointegración adecuada para situaciones de existencia de heterocedasticidad condicional.

Finalmente, Franses & Lucas (1998) y Lucas (1998), presentan pruebas de cointegración robustas a no normalidad.

Si bien existe metodología referida a cada uno de estos temas por separado, la misma no está integrada con las pruebas de cointegración con quiebres estructurales. También resta el desarrollo de pruebas para determinar la cantidad de quiebres estructurales en el contexto de pruebas de cointegración.

En esta tesis se realizó un análisis de causalidad de Granger entre el índice *Merval* y cada uno de los restantes índices. Otra línea de investigación futura consiste en emplear las funciones programadas para pruebas de causalidad de Granger, para contrastar la existencia de relaciones de causalidad de Granger entre todos los pares de índices y usar los resultados para construir un diagrama DAG (*directed acyclic graph*). Por medio del mismo

---

se podrían apreciar fenómenos como la existencia de mecanismos de transmisión indirectos.

---

## 7 Referencias

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716–723.
- Arranz, M. A., & Escribano, A. (2000). Cointegration testing under structural breaks: A robust extended error correction model. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 62(1), 23–52.
- Banerjee, A., Lumsdaine, R. L., & Stock, J. H. (1992). Recursive and sequential tests of the unit-root and trend-break hypotheses: Theory and international evidence. *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3), 271–287.
- Bauer, D., & Maynard, A. (2012). Persistence-robust surplus-lag granger causality testing. *Journal of Econometrics*, 169(2), 293–300.
- Cavaliere, G., Rahbek, A., & Taylor, A. R. (2010). Testing for co-integration in vector autoregressions with non-stationary volatility. *Journal of Econometrics*, 158(1), 7–24.
- Chen, C. W., Gerlach, R., Cheng, N. Y., & Yang, Y.-L. (2009). The impact of structural breaks on the integration of the asean-5 stock markets. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(8), 2654–2664.
- Chen, G. M., Firth, M., & Rui, O. M. (2002). Stock market linkages: Evidence from latin america. *Journal of Banking & Finance*, 26(6), 1113–1141.
- Chen, X. (2012). *Empirical investigations into stock market integration and risk monitoring of the emerging chinese stock markets* (PhD thesis). University of St Andrews.
- Christiano, L. J. (1992). Searching for a break in gnp. *Journal of Business & Economic*

---

*Statistics*, 10(3), 237–250.

Crowder, W. J. (1996). A note on cointegration and international capital market efficiency: A reply. *Journal of International Money and Finance*, 15(4), 661–664.

Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1057–1072.

Dolado, J. J., & Lütkepohl, H. (1996). Making wald tests work for cointegrated var systems. *Econometric Reviews*, 15(4), 369–386.

Enders, W. (2014). *Applied econometric time series, 4th edition*. Wiley.

Engle, R. F., & Granger, C. W. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 251–276.

Franses, P. H., & Lucas, A. (1998). Outlier detection in cointegration analysis. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(4), 459–468.

Ghosh, A., Saidi, R., & Johnson, K. H. (1999). Who moves the asia-pacific stock markets—US or japan? Empirical evidence based on the theory of cointegration. *Financial Review*, 34(1), 159–169.

Glezakos, M., Merika, A., & Kaligosfiris, H. (2007). Interdependence of major world stock exchanges: How is the athens stock exchange affected. *International Research Journal of Finance and Economics*, 7(1), 24–39.

Granger, C. W. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 424–438.

Gregory, A. W., & Hansen, B. E. (1996). Residual-based tests for cointegration in models with regime shifts. *Journal of Econometrics*, 70(1), 99–126.

Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis* (Vol. 2). Princeton university press Princeton,

---

NJ.

Hannan, E. J., & Quinn, B. G. (1979). The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 190–195.

Harvey, D. I., Leybourne, S. J., & Taylor, A. R. (2009). Simple, robust, and powerful tests of the breaking trend hypothesis. *Econometric Theory*, 25(4), 995–1029.

Ibrahim, S. (2009). East asian financial integration: A cointegration test allowing for structural break and the role of regional institutions. *International Journal of Economics and Management*, 3(1), 184–203.

Inoue, A. (1999). Tests of cointegrating rank with a trend-break. *Journal of Econometrics*, 90(2), 215–237.

Johansen, S., & Juselius, K. (1990). Maximum likelihood estimation and inference on cointegration—with applications to the demand for money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52(2), 169–210.

Kapetanios, G. (2005). Unit-root testing against the alternative hypothesis of up to m structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, 26(1), 123–133.

Kasa, K. (1992). Common stochastic trends in international stock markets. *Journal of Monetary Economics*, 29(1), 95–124.

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P., & Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root? *Journal of Econometrics*, 54(1-3), 159–178.

Lee, J., & Strazicich, M. C. (2003). Minimum lagrange multiplier unit root test with two structural breaks. *Review of Economics and Statistics*, 85(4), 1082–1089.

Lucas, A. (1997). Cointegration testing using pseudolikelihood ratio tests. *Econometric*

---

*Theory*, 13(2), 149–169.

Lucas, A. (1998). Inference on cointegrating ranks using lr and lm tests based on pseudo-likelihoods. *Econometric Reviews*, 17(2), 185–214.

Lumsdaine, R. L., & Papell, D. H. (1997). Multiple trend breaks and the unit-root hypothesis. *Review of Economics and Statistics*, 79(2), 212–218.

Lütkepohl, H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. Springer Science & Business Media, Berlin.

Lütkepohl, H., & Saikkonen, P. (2000). Testing for the cointegrating rank of a var process with a time trend. *Journal of Econometrics*, 95(1), 177–198.

Lütkepohl, H., Saikkonen, P., & Trenkler, C. (2004). Testing for the cointegrating rank of a var process with level shift at unknown time. *Econometrica*, 72(2), 647–662.

Masih, A. M., & Masih, R. (1999). Are asian stock market fluctuations due mainly to intra-regional contagion effects? Evidence based on asian emerging stock markets. *Pacific-Basin Finance Journal*, 7(3-4), 251–282.

Menezes, R., & Dionísio, A. (2011). Globalization and long-run co-movements in the stock market for the g7: An application of vecm under structural breaks. *Chinese Science Bulletin*, 56(34), 3707–3716.

Nelson, C. R., & Plosser, C. R. (1982). Trends and random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10(2), 139–162.

Nielsen, B. H. (2004). Cointegration analysis in the presence of outliers. *The Econometrics Journal*, 7(1), 249–271.

Ohara, H. I. (1999). A unit root test with multiple trend breaks: A theory and an application to us and japanese macroeconomic time-series. *The Japanese Economic Review*,

---

50(3), 266–290.

Paramati, S. R., Gupta, R., & Roca, E. (2012). International equity markets integration: Evidence from global financial crisis and structural breaks. In *Emerging markets risk management conference, city university of hong kong*.

Perron, P. (1989). The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1361–1401.

Pfaff, B. (2011). *Analysis of integrated and cointegrated time series with r*. Springer Science & Business Media.

Pfeiffer, C. (2012). R-economics. <https://www.christophpfeiffer.org/2012/11/07/toda-yamamoto-implementation-in-r/>.

R Core Team. (2018). *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing. Retrieved from <https://www.R-project.org/>.

Saikkonen, P., & Lütkepohl, H. (2000). Testing for the cointegrating rank of a var process with structural shifts. *Journal of Business & Economic Statistics*, 18(4), 451–464.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2), 461–464.

Toda, H. Y., & Yamamoto, T. (1995). Statistical inference in vector autoregressions with possibly integrated processes. *Journal of Econometrics*, 66(1), 225–250.

Trenkler, C. (2003). A new set of critical values for systems cointegration tests with a prior adjustment for deterministic terms.

Trenkler, C., Saikkonen, P., & Lütkepohl, H. (2008). Testing for the cointegrating rank of a var process with level shift and trend break. *Journal of Time Series Analysis*, 29(2),

---

331–358.

Voronkova, S. (2004). Equity market integration in central european emerging markets: A cointegration analysis with shifting regimes. *International Review of Financial Analysis*, 13(5), 633–647.

Zivot, E., & Andrews, D. W. (1992). Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root. *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(0), 3.

---

# A Apéndice

## A.1 Función *ur.ka*

```
ur.ka <- function (y, bp = 1, model = c("intercept", "trend", "both"), lag = NULL)
{
  y <- na.omit(as.vector(y))
  n <- length(y)
  model <- match.arg(model)
  if (is.null(lag))
    lag <- 0
  lag <- as.integer(lag)
  if (length(lag) > 1 || lag < 0) {
    warning("\nPlease, specify maximal number of lags for differenced series as positive integer; lag=1 is now used.")
    lag <- 1
  }
  datmat <- matrix(NA, n, lag + 3)
  if (n < ncol(datmat) + 2) {
    stop("\nInsufficient number of observations.")
  }
  idx <- 1:(n - 1)
  trend <- seq(1, n)
  datmat[, 1] <- y
  datmat[, 2] <- c(NA, y)[1:n]
  datmat[, 3] <- trend
  datmat <- as.data.frame(datmat)
  colnames(datmat)[1:3] <- c("y", "y.l1", "trend")
  if (lag > 0) {
    for (i in 1:lag) {
      datmat[, i + 3] <- c(rep(NA, i + 1), diff(y))[1:n]
    }
    colnames(datmat) <- c("y", "y.l1", "trend", paste("y.dl", 1:lag, sep = ""))
  }
  if (model == "intercept") {
    if (bp == 1) {
      test.reg <- lm(datmat)
      roll <- function(z) {
        du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
        rollmat <- cbind(datmat, du)
        roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
        (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
      }
      roll.stat <- sapply(idx, roll)
      cval <- c(-5.34, -4.94, -4.66)
      bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
      teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
      du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
      testmat <- cbind(datmat, du)
      test.reg <- lm(testmat)
    }
  }
}
```

```

else if(bp == 2) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du1, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  cval <- c(-6.16, -5.69, -5.47)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
  du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  testmat <- cbind(datmat, du1, du2)
  test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 3) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du1, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
}

```

```

du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-7.00, -6.53, -6.27)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du3 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
testmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3)
test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 4) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du1, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
  du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
}

```

```

teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du3 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-7.56, -7.10, -6.83)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du4 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
testmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du4)
test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 5) {
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)

```

```

bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du3 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du4 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du4, du)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-8.25, -7.64, -7.40)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du5 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
testmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du4, du5)
test.reg <- lm(testmat)
}
}
else if (model == "trend") {
  if(bp == 1) {
    test.reg <- lm(datmat)
    roll <- function(z) {
      dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
      rollmat <- cbind(datmat, dt)
      roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
      (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
    }
    roll.stat <- sapply(idx, roll)
    cval <- c(-5.01, -4.50, -4.14)
    bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
    teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
    dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
    testmat <- cbind(datmat, dt)
    test.reg <- lm(testmat)
  }
}

```

```

else if(bp == 2) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  cval <- c(-5.62, -5.10, -4.78)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
  dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  testmat <- cbind(datmat, dt1, dt2)
  test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 3) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
}

```

```

dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-6.29, -5.73, -5.43)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
dt3 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
testmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt3)
test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 4) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
  dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)

```

```

teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
dt3 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt3, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-6.86, -6.31, -6.00)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
dt4 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
testmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt3, dt4)
test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 5) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
  dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)

```

```

bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
dt3 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt3, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
dt4 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt3, dt4, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-7.40, -6.72, -6.42)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
dt5 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
testmat <- cbind(datmat, dt1, dt2, dt3, dt4, dt5)
test.reg <- lm(testmat)
}
}
else if (model == "both") {
  if(bp == 1) {
    test.reg <- lm(datmat)
    roll <- function(z) {
      du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
      dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
      rollmat <- cbind(datmat, du, dt)
      roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
      (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
    }
    roll.stat <- sapply(idx, roll)
    cval <- c(-5.70, -5.08, -4.82)
    bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
    teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
    du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
    dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
    testmat <- cbind(datmat, du, dt)

```

```

test.reg <- lm(testmat)
}

else if(bp == 2) {
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du, dt1, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-6.59, -6.11, -5.85)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
testmat <- cbind(datmat, du1, du2, dt1, dt2)
test.reg <- lm(testmat)
}

else if(bp == 3) {
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))

```

```

    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, du1, du, dt1, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du, dt1, dt2, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-7.40, -7.01, -6.69)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du3 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt3 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
testmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, dt1, dt2, dt3)
test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 4) {
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, du, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
  teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]
  du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  test.reg <- lm(datmat)
  roll <- function(z) {
    du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
    dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
    rollmat <- cbind(datmat, du1, du, dt1, dt)
    roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
}

```

```

roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du, dt1, dt2, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du3 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt3 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du, dt1, dt2, dt3, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
cval <- c(-8.24, -7.74, -7.43)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du4 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt4 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
testmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du4, dt1, dt2, dt3, dt4)
test.reg <- lm(testmat)
}
else if(bp == 5) {
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint0 <- bpoint <- which.min(roll.stat)
teststat0 <- teststat <- roll.stat[bpoint]

```

```

du1 <- du <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt1 <- dt <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du, dt1, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du2 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt2 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du, dt1, dt2, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du3 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt3 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du, dt1, dt2, dt3, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
  (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
}
roll.stat <- sapply(idx, roll)
bpoint <- which.min(roll.stat)
bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
teststat <- roll.stat[bpoint]
teststat0 <- c(teststat0, teststat)
du4 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
dt4 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
test.reg <- lm(datmat)
roll <- function(z) {
  du <- c(rep(0, z), rep(1, (n - z)))
  dt <- c(rep(0, z), 1:(n - z))
  rollmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du4, du, dt1, dt2, dt3, dt4, dt)
  roll.reg <- coef(summary(lm(rollmat)))
}

```

```

    (roll.reg[2, 1] - 1)/roll.reg[2, 2]
  }
  roll.stat <- sapply(idx, roll)
  cval <- c(-9.04, -8.34, -8.02)
  bpoint <- which.min(roll.stat)
  bpoint0 <- c(bpoint0, bpoint)
  teststat <- roll.stat[bpoint]
  teststat0 <- c(teststat0, teststat)
  du5 <- c(rep(0, bpoint), rep(1, (n - bpoint)))
  dt5 <- c(rep(0, bpoint), 1:(n - bpoint))
  testmat <- cbind(datmat, du1, du2, du3, du4, du5, dt1, dt2, dt3, dt4, dt5)
  test.reg <- lm(testmat)
}
}
list( lag = lag, teststats = teststat0, teststatmin = min(teststat0),
      cval = cval, bpoints = bpoint0,
      testreg = test.reg, test.name = "Kapetanios")
}

```

## A.2 Función *cajlst2*

```

cajlst2 <- function(x, bp = bp, trend = TRUE, K = 2, h = 0.05, season = NULL)
{
  x <- as.matrix(x)
  K <- as.integer(K)
  if (K < 2) {
    stop("\nK must be at least K=2.\n")
  }
  P <- ncol(x)
  arrsel <- P
  N <- nrow(x)
  if (N * P < P + s * P + K * P^2 + P * (P + 1)/2)
    stop("\nInsufficient degrees of freedom.\n")
  if (P > 15)
    warning("\nToo many variables, critical values cannot be computed.\n")
  x2 <- na.omit(x)
  Ntot <- nrow(x2)
  y <- embed(x2, (K + 1))
  rhs <- y[, -c(1:P)]
  if (bp == 1) {
    if (!trend) {
      rhs <- y[, -c(1:P)]
    }
    else {
      trd <- seq(K + 1, nrow(y) + K)
      rhs <- cbind(trd, y[, -c(1:P)])
    }
  }
  N <- nrow(y)
  lhs <- y[, 1:P]
  idx <- 1:(N - 1)
}

```

```

tau <- function(t) {
  dt <- c(rep(0, t), rep(1, N - t))
  det(crossprod(resid(lm(lhs - dt + rhs))))
}
tau.hat <- sapply(idx, tau)
tau.opt <- which.min(tau.hat) + K
tau.bp <- tau.opt + 1
dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))
if (!trend & is.null(season)) {
  rhs.aux <- dt
}
else {
  rhs.aux <- cbind(dt, rhs[, -c((ncol(rhs) - K * ncol(x) +
                                1):ncol(rhs))])
}
reg.opt <- lm(lhs - rhs.aux)
dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, Ntot - tau.opt))
uv <- c(rep(1, Ntot))
if (!trend) {
  yfit <- x - uv %*% t(coef(reg.opt)[1, ]) - dt %*%
    t(coef(reg.opt)[2, ])
}
else if (trend) {
  trd <- 1:Ntot
  yfit <- x - uv %*% t(coef(reg.opt)[1, ]) - dt %*%
    t(coef(reg.opt)[2, ]) - trd %*% t(coef(reg.opt)[3,
    ])
}
}
else {
  if (!trend) {
    rhs <- y[, -c(1:P)]
  }
  else {
    trd <- seq(K + 1, nrow(y) + K)
    rhs <- cbind(trd, y[, -c(1:P)])
  }
  N <- nrow(y)
  lhs <- y[, 1:P]
  idx <- 1:(N - 1)

  tau <- function(t) {
    dt <- c(rep(0, t), rep(1, N - t))
    det(crossprod(resid(lm(lhs - dt + rhs))))
  }
  tau.hat <- sapply(idx, tau)
  tau.opt <- which.min(tau.hat) + K
  tau.bp <- tau.opt + 1
  dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))
  dt0 <- dt
  if (bp==bp) {
    for(i in 2:bp) {
      if (!trend) {

```

```

    rhs <- cbind(dt0, y[, -c(1:P)])
  }
  else {
    trd <- seq(K + 1, nrow(y) + K)
    rhs <- cbind(dt0, trd, y[, -c(1:P)])
  }
  N <- nrow(y)
  lhs <- y[, 1:P]
  idx <- 1:(N - 1)
  trim=round(NROW(x)*h/2)
  for (j in seq_along(tau.bp)) {
    idx = idx[-idx[abs(idx-tau.bp[j])<trim]]
  }
  tau <- function(t) {
    dt <- c(rep(0, t), rep(1, N - t))
    det(crossprod(resid(lm(lhs - dt + rhs))))
  }
  tau.hat <- sapply(idx, tau)
  tau.opt <- which.min(tau.hat) + K
  tau.bp <- c(tau.bp, tau.opt + 1)
  dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))
  dt=as.matrix(dt)
  dt0 <- cbind(as.matrix(dt0), as.matrix(c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))))
}
}

if (!trend & is.null(season)) {
  rhs.aux <- dt0
}
else {
  rhs.aux <- cbind(dt0, trd)
}

reg.opt <- lm(lhs - rhs.aux)
dt.opt <- rbind(dt0, matrix(rep(1, (Ntot-N)*ncol(dt0)), ncol=ncol(dt0)))
uv <- c(rep(1, Ntot))
if (!trend) {
  yfit <- x - uv %*% t(coef(reg.opt)[1, ]) - dt.opt %*% coef(reg.opt)[2:(ncol(dt0)+1), ]
}
else if (trend) {
  trd <- 1:Ntot
  yfit <- x - uv %*% t(coef(reg.opt)[1, ]) - dt.opt %*% coef(reg.opt)[2:(ncol(dt0)+1), ] - trd %*% t(coef(reg.opt)[ncol(dt0)+2, ])
}
}

x <- na.omit(yfit)
N <- nrow(x)
spec <- "transitory"
Z <- embed(diff(x), K)
Z0 <- Z[, 1:P]
Z1 <- Z[, -c(1:P)]
ZK <- x[-N, ][K:(N - 1), ]
idx <- 0:(P - 1)
if (trend) {
  cvals <- matrix(c(5.423, 13.784, 25.931, 42.083, 61.918,
                  86.015, 113.711, 145.423, 181.213, 220.921,

```

```

264.210, 311.711, 363.028, 417.682, 476.405,
6.785, 15.826, 28.455, 45.204, 65.662,
90.346, 118.898, 150.985, 187.242, 227.989,
271.707, 319.827, 371.287, 427.362, 486.527,
10.042, 19.854, 33.757, 51.601, 73.116,
98.990, 128.801, 162.142, 199.584, 241.795,
285.934, 334.987, 388.476, 445.787, 504.545), nrow = 15, ncol = 3)

model <- "with linear trend in shift correction"
}
else if (!trend) {
  cvals <- matrix(c(2.996, 10.446, 21.801, 36.903, 55.952,
79.062, 105.841, 136.487, 171.519, 210.461,
252.969, 299.156, 349.604, 403.580, 461.733,
4.118, 12.276, 24.282, 40.067, 59.749,
83.364, 110.721, 142.222, 177.801, 217.325,
260.676, 307.161, 358.172, 412.966, 471.300,
6.888, 16.42, 29.467, 46.305, 67.17,
92.338, 120.902, 153.066, 190.053, 231.072,
274.618, 323.007, 374.872, 431.355, 489.888), nrow = 15, ncol = 3)

model <- "without linear trend in shift correction"
}

N <- nrow(ZO)
M00 <- crossprod(ZO)/N
M11 <- crossprod(Z1)/N
MKK <- crossprod(ZK)/N
M01 <- crossprod(Z0, Z1)/N
M0K <- crossprod(Z0, ZK)/N
MKO <- crossprod(ZK, Z0)/N
M10 <- crossprod(Z1, Z0)/N
M1K <- crossprod(Z1, ZK)/N
MK1 <- crossprod(ZK, Z1)/N
M1iinv <- solve(M11)
R0 <- ZO - t(M01 %*% M1iinv %*% t(Z1))
RK <- ZK - t(MK1 %*% M1iinv %*% t(Z1))
S00 <- M00 - M01 %*% M1iinv %*% M10
S0K <- M0K - M01 %*% M1iinv %*% M1K
SK0 <- MKO - MK1 %*% M1iinv %*% M10
SKK <- MKK - MK1 %*% M1iinv %*% M1K
Ctemp <- chol(SKK, pivot = TRUE)
pivot <- attr(Ctemp, "pivot")
oo <- order(pivot)
C <- t(Ctemp[, oo])
Cinv <- solve(C)
S00iinv <- solve(S00)
valeigen <- eigen(Cinv %*% SK0 %*% S00iinv %*% S0K %*% t(Cinv))
lambda <- valeigen$values
e <- valeigen$vector
V <- t(Cinv) %*% e
rownames(V) <- colnames(x)
Vorg <- V
V <- sapply(1:P, function(x) V[, x]/V[1, x])
W <- S0K %*% V %*% solve(t(V) %*% SKK %*% V)
PI <- S0K %*% solve(SKK)

```

```

DELTA <- SOO - SOK %*% V %*% solve(t(V) %*% SKK %*% V) %*%
  t(V) %*% SKO
GAMMA <- M01 %*% M1linv - PI %*% MK1 %*% M1linv
type <- "trace statistic"
teststat <- as.matrix(rev(sapply(idx, function(x) N * sum(log(1 +
  lambda[(x + 1):P])))))

colnames(teststat) <- "trace"
if (arrsel > 11) {
  cval <- NULL
}
else {
  cval <- round(cvals[1:arrsel, ], 2)
  colnames(cval) <- c("10pct", "5pct", "1pct")
  rownames(cval) <- c(paste("r <= ", (arrsel - 1):1, " |",
    sep = ""), "r = 0 |")
}
temp1 <- NULL
for (i in 1:(K - 1)) {
  temp <- paste(colnames(x), ".dl", i, sep = "")
  temp1 <- c(temp1, temp)
}
colnames(Z1) <- temp1
colnames(ZK) <- paste(colnames(x), "l1", sep = ".")
colnames(Z0) <- paste(colnames(x), "d", sep = ".")
colnames(V) <- colnames(ZK)
rownames(V) <- colnames(ZK)
colnames(W) <- colnames(V)
rownames(W) <- colnames(x)
colnames(Vorg) <- colnames(V)
rownames(Vorg) <- rownames(V)
rownames(PI) <- colnames(x)
colnames(PI) <- colnames(W)
colnames(R0) <- paste("R0", colnames(Z0), sep = ".")
colnames(RK) <- paste("RK", colnames(ZK), sep = ".")
new("ca.jo", x = x, Z0 = Z0, Z1 = Z1, ZK = ZK, type = type,
  model = model, ecdet = "none", lag = K, P = arrsel, season = season,
  dumvar = NULL, cval = cval, teststat = as.vector(teststat),
  lambda = lambda, Vorg = Vorg, V = V, W = W, PI = PI,
  DELTA = DELTA, GAMMA = GAMMA, R0 = R0, RK = RK, bp = tau.bp,
  test.name = "Johansen-Procedure")
}

```

### A.3 Función *cajolstb*

```

cajolstb <- function (x, bp = bp, K = 2, h = 0.05, season = NULL)
{
  x <- as.matrix(x)
  K <- as.integer(K)
  if (K < 2) {
    stop("\nK must be at least K=2.\n")
  }
}

```

```

}
P <- ncol(x)
arrsel <- P
N <- nrow(x)
if (N * P < P + s * P + K * P^2 + P * (P + 1)/2)
  stop("\nInsufficient degrees of freedom.\n")
if (P > 15)
  warning("\nToo many variables, critical values cannot be computed.\n")
x2 <- na.omit(x)
Ntot <- nrow(x2)
y <- embed(x2, (K + 1))
rhs <- y[, -c(1:P)]
if (bp == 1) {
  trd <- seq(K + 1, nrow(y) + K)
  rhs <- cbind(trd, y[, -c(1:P)])
  N <- nrow(y)
  lhs <- y[, 1:P]
  idx <- 1:(N - 1)
  tau <- function(t) {
    dt <- c(rep(0, t), rep(1, N - t))
    dtt <- dt*trd
    det(crossprod(resid(lm(lhs ~ dt + dtt + rhs))))
  }
  tau.hat <- sapply(idx, tau)
  tau.opt <- which.min(tau.hat) + K
  tau.bp <- tau.opt + 1
  dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))
  trd <- 1:N
  dtt <- dt*trd
  rhs.aux <- cbind(dt, dtt, rhs[, -c((ncol(rhs) - K * ncol(x) +
    1):ncol(rhs))])
  reg.opt <- lm(lhs ~ rhs.aux)
  dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, Ntot - tau.opt))
  trd <- 1:Ntot
  dtt <- dt * trd
  uv <- c(rep(1, Ntot))
  trd <- 1:Ntot
  yfit <- x - uv %*% t(coef(reg.opt)[1, ]) - dt %*%
    t(coef(reg.opt)[2, ]) - dtt %*%
    t(coef(reg.opt)[3, ]) - trd %*% t(coef(reg.opt)[4,
    ])
}
else {
  trd <- seq(K + 1, nrow(y) + K)
  rhs <- cbind(trd, y[, -c(1:P)])
  N <- nrow(y)
  lhs <- y[, 1:P]
  idx <- 1:(N - 1)

  tau <- function(t) {
    dt <- c(rep(0, t), rep(1, N - t))
    dtt <- dt*trd
    det(crossprod(resid(lm(lhs ~ dt + dtt + rhs))))
  }
}

```

```

}
tau.hat <- sapply(idx, tau)
tau.opt <- which.min(tau.hat) + K
tau.bp <- tau.opt + 1
dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))
trd <- 1:N
dtt <- dt*trd
dt0 <- dt
dtt0 <- dtt
rhs.aux <- cbind(dt, dtt, rhs[, -c((ncol(rhs) - K * ncol(x) + 1):ncol(rhs))])
if (bp==bp) {
for(i in 2:bp) {
trd <- seq(K + 1, nrow(y) + K)
rhs <- cbind(dt0, dtt0, trd, y[, -c(1:P)])
N <- nrow(y)
lhs <- y[, 1:P]
idx <- 1:(N - 1)
trim=round(NROW(x)*h/2)
for (j in seq_along(tau.bp)) {
idx = idx[-idx[abs(idx-tau.bp[j])<=trim]]
}
tau <- function(t) {
dt <- c(rep(0, t), rep(1, N - t))
det(crossprod(resid(lm(lhs - dt + dtt + rhs))))
}
tau.hat <- sapply(idx, tau)
tau.opt <- which.min(tau.hat) + K
tau.bp <- c(tau.bp, tau.opt + 1)
dt <- c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))
trd <- 1:N
dtt <- dt*trd
dt0 <- cbind(as.matrix(dt0), as.matrix(c(rep(0, tau.opt), rep(1, N - tau.opt))))
dtt0 <- dt0*trd
}
}
rhs.aux <- cbind(dt0, dtt0, trd)
reg.opt <- lm(lhs - rhs.aux)
dt.opt <- rbind(dt0, matrix(rep(1, (Ntot-N)*ncol(dt0)), ncol=ncol(dt0)))
trd <- 1:Ntot
dtt.opt <- dt.opt * trd
uv <- c(rep(1, Ntot))
trd <- 1:Ntot
yfit <- x - uv %*% t(coef(reg.opt)[1, ]) - dt.opt %*% coef(reg.opt)[2:(ncol(dt0)+1), ] - dtt.opt %*% coef(reg.opt)[(ncol(dt0)+2):(2*ncol(dt0)+1), ]
}
x <- na.omit(yfit)
N <- nrow(x)
spec <- "transitory"
Z <- embed(diff(x), K)
Z0 <- Z[, 1:P]
Z1 <- Z[, -c(1:P)]
ZK <- x[-N, ] [K:(N - 1), ]
idx <- 0:(P - 1)
cvals <- matrix(c(2.996, 10.446, 21.801, 36.903, 55.952,

```

```

79.062, 105.841, 136.487, 171.519, 210.461,
252.969, 299.156, 349.604, 403.580, 461.733,
4.118, 12.276, 24.282, 40.067, 59.749,
83.364, 110.721, 142.222, 177.801, 217.325,
260.676, 307.161, 358.172, 412.966, 471.300,
6.888, 16.42, 29.467, 46.305, 67.17,
92.338, 120.902, 153.066, 190.053, 231.072,
274.618, 323.007, 374.872, 431.355, 489.888), nrow = 15, ncol = 3)

model <- "without linear trend in shift correction"
N <- nrow(ZO)
M00 <- crossprod(ZO)/N
M11 <- crossprod(Z1)/N
MKK <- crossprod(ZK)/N
M01 <- crossprod(Z0, Z1)/N
M0K <- crossprod(Z0, ZK)/N
MKO <- crossprod(ZK, Z0)/N
M10 <- crossprod(Z1, Z0)/N
M1K <- crossprod(Z1, ZK)/N
MK1 <- crossprod(ZK, Z1)/N
M1inv <- solve(M11)
RO <- ZO - t(M01 %*% M1inv %*% t(Z1))
RK <- ZK - t(MK1 %*% M1inv %*% t(Z1))
S00 <- M00 - M01 %*% M1inv %*% M10
S0K <- M0K - M01 %*% M1inv %*% M1K
SKO <- MKO - MK1 %*% M1inv %*% M10
SKK <- MKK - MK1 %*% M1inv %*% M1K
Ctemp <- chol(SKK, pivot = TRUE)
pivot <- attr(Ctemp, "pivot")
oo <- order(pivot)
C <- t(Ctemp[, oo])
Cinv <- solve(C)
S00inv <- solve(S00)
valeigen <- eigen(Cinv %*% SKO %*% S00inv %*% SOK %*% t(Cinv))
lambda <- valeigen$values
e <- valeigen$vector
V <- t(Cinv) %*% e
rownames(V) <- colnames(x)
Vorg <- V
V <- sapply(1:P, function(x) V[, x]/V[1, x])
W <- SOK %*% V %*% solve(t(V) %*% SKK %*% V)
PI <- SOK %*% solve(SKK)
DELTA <- S00 - SOK %*% V %*% solve(t(V) %*% SKK %*% V) %*%
t(V) %*% SKO
GAMMA <- M01 %*% M1inv - PI %*% MK1 %*% M1inv
type <- "trace statistic"
teststat <- as.matrix(rev(sapply(idx, function(x) N * sum(log(1 + lambda[(x + 1):P])))))
colnames(teststat) <- "trace"
if (arrsel > 11) {
cval <- NULL
}
else {
cval <- round(cvals[1:arrsel, ], 2)
colnames(cval) <- c("10pct", "5pct", "1pct")
}

```

```

    rownames(cval) <- c(paste("r <= ", (arrsel - 1):1, " |", sep = ""), "r = 0 |")
  }
  temp1 <- NULL
  for (i in 1:(K - 1)) {
    temp <- paste(colnames(x), ".dl", i, sep = "")
    temp1 <- c(temp1, temp)
  }
  colnames(Z1) <- temp1
  colnames(ZK) <- paste(colnames(x), "l1", sep = ".")
  colnames(Z0) <- paste(colnames(x), "d", sep = ".")
  colnames(V) <- colnames(ZK)
  rownames(V) <- colnames(ZK)
  colnames(W) <- colnames(V)
  rownames(W) <- colnames(x)
  colnames(Vorg) <- colnames(V)
  rownames(Vorg) <- rownames(V)
  rownames(PI) <- colnames(x)
  colnames(PI) <- colnames(W)
  colnames(R0) <- paste("R0", colnames(Z0), sep = ".")
  colnames(RK) <- paste("RK", colnames(ZK), sep = ".")
  new("ca.jo", x = x, Z0 = Z0, Z1 = Z1, ZK = ZK, type = type,
      model = model, ecdet = "none", lag = K, P = arrsel, season = season,
      dumvar = NULL, cval = cval, teststat = as.vector(teststat),
      lambda = lambda, Vorg = Vorg, V = V, W = W, PI = PI,
      DELTA = DELTA, GAMMA = GAMMA, R0 = R0, RK = RK, bp = tau.bp,
      test.name = "Johansen-Procedure")
}

```

## A.4 Función *TSLcrit*

```

TSLcrit <- function(nsim, p, q, l, T) {
  p=p
  q=q
  T=T
  nsim=nsim
  l=l
  simu=NULL
  if(p==1){
    for (sim in 1:nsim){
      P12=NULL
      D1=NULL
      for (j in 1:q) {
        e=matrix(rnorm(T*p), nrow=p)
        e_bar=rowMeans(e)
        z = e-e_bar
        suma_T= as.matrix((z[, 1]))%*%t(as.matrix((z[, 1])))
        for (i in 2:(T-1)){
          suma_T= cbind(suma_T, as.matrix(sum(z[, 1:i]))%*%t(as.matrix(sum(z[, 1:i]))))
        }
        P12 = cbind(P12, (1/T^2)* 1[j]^2 * sum(matrix(suma_T, nrow=p*p)))
      }
    }
  }
}

```

```

suma_T= as.matrix((z[, 1]))%*%t(as.matrix((z[, 1])))
for (i in 2:(T-1)){
  suma_T= cbind(suma_T, as.matrix(sum(z[, 1:i]))%*%t(as.matrix((z[, i]))))
}
D1 = cbind(D1, (1/T) * 1[j] * sum(matrix(suma_T, nrow=p*p)))
}
simu[sim] = sum(diag(t(matrix(sum(D1), nrow = p)) %*% solve(matrix(sum(P12), nrow = p))
                %*% matrix(sum(D1), nrow = p)))
}
a= data.frame(sort(simu)[nsim*0.90], sort(simu)[nsim*0.95], sort(simu)[nsim*0.99], row.names="")
colnames(a) <- c("0.90", "0.95", "0.99")
a
}
else{
for (sim in 1:nsim){
  P12=NULL
  D1=NULL
  for (j in 1:q) {
    e=matrix(rnorm(T*p), nrow=p)
    e_bar=rowMeans(e)
    z = e-e_bar
    suma_T= as.matrix((z[, 1]))%*%t(as.matrix((z[, 1])))
    for (i in 2:(T-1)){
      suma_T= cbind(suma_T, as.matrix(rowSums(z[, 1:i]))%*%t(as.matrix(rowSums(z[, 1:i]))))
    }
    P12 = cbind(P12, (1/T^2)* 1[j]^2 * rowSums(matrix(suma_T, nrow=p*p)))
    suma_T= as.matrix((z[, 1]))%*%t(as.matrix((z[, 1])))
    for (i in 2:(T-1)){
      suma_T= cbind(suma_T, as.matrix(rowSums(z[, 1:i]))%*%t(as.matrix((z[, i]))))
    }
    D1 = cbind(D1, (1/T) * 1[j] * rowSums(matrix(suma_T, nrow=p*p)))
  }
  simu[sim] = sum(diag(t(matrix(rowSums(D1), nrow = p)) %*% solve(matrix(rowSums(P12), nrow = p))
                    %*% matrix(rowSums(D1), nrow = p)))
}
a= data.frame(sort(simu)[nsim*0.90], sort(simu)[nsim*0.95], sort(simu)[nsim*0.99], row.names="")
colnames(a) <- c("0.90", "0.95", "0.99")
a
}
}
}

```

## A.5 Función *TY*

```

TY=function(matriz,m) {
  library(vars)
  V= VAR(as.matrix(matriz),lag.max=m, ic="SC")
  lags=as.numeric(V$p)
  VA<-VAR(as.matrix(matriz),p=lags+1,type="const")
  a=wald.test(b=coef(VA$varresult[[2]]), Sigma=vcov(VA$varresult[[2]]), Terms=c(seq(1,2*lags,2)))
  b=wald.test(b=coef(VA$varresult[[1]]), Sigma=vcov(VA$varresult[[1]]), Terms=c(seq(2,2*lags,2)))
}

```

```
c(a$result,b$result)
}
```

## A.6 Función *VARXcausality*

```
VARXcausality=function(z1y,z2,m) {
  library(vars)
  z1y=as.matrix(z1y)
  z2=as.matrix(z2)
  V=VAR(z1y,exogen=z2,lag.max=m, ic="SC")
  lags=as.numeric(V$p)
  z2_=embed(z2, lags+1)[-c(1:ncol(z2))]
  z1y_=z1y[(nrow(z1y)+1-nrow(z2_)):nrow(z1y),]
  V=VAR(z1y_,exogen=z2_,lag.max=m, ic="SC")
  lags=as.numeric(V$p)
  z2=embed(z2, lags+1)[-c(1:ncol(z2))]
  z1y=z1y[(nrow(z1y)+1-nrow(z2)):nrow(z1y),]
  VA<-VAR(z1y,exogen=z2,p=lags+1,type="const", ic="SC")
  a=wald.test(b=coef(VA$varresult[[2]]), Sigma=vcov(VA$varresult[[2]]), Terms=c(seq(1,2*lags,2)))
  b=wald.test(b=coef(VA$varresult[[1]]), Sigma=vcov(VA$varresult[[1]]), Terms=c(seq(2,2*lags,2)))
  c(a$result,b$result)
}
```