

# UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

FAMAF

Trabajo Especial de la Licenciatura en Astronomía

Título: **Modelos Analíticos de la Distribución de Estructuras en el Universo**

**Director: Dr. Diego García Lambas**

**Alumno: Maximiliano Claudio Pivato**

Grupo de Investigaciones en Astronomía Teórica y Experimental (IATE)

Observatorio Astronómico Córdoba

Marzo de 2002

## Resumen

En este trabajo se desarrolla un nuevo método para determinar los coeficientes de sesgo de alto orden en el modelo de colapso elipsoidal, a partir de la función sobredensidad Euleriana de halos de materia oscura. Para definir esta función, se desarrolla y extiende el trabajo de *Sheth & Tormen (2001)* y obtener así expresiones analíticas para las funciones de masa universal y condicional en el modelo de colapso elipsoidal. Los resultados obtenidos en este trabajo se comparan analíticamente con los obtenidos por *Mo, Jing & White (1997)* para el modelo de colapso esférico. Se evalúa numéricamente los coeficientes de sesgo obtenidos, midiendo las amplitudes de correlación jerárquicas  $S_3$  y  $S_4$  en simulaciones numéricas de N-cuerpos y a partir de los coeficientes de sesgo se calculan las amplitudes de correlación jerárquicas para los halos de materia oscura  $S_{3,g}$  y  $S_{4,g}$  que luego se comparan con los resultados de la medición directa de estas cantidades en las simulaciones numéricas.

A Ignacio y Blanca,  
y a Alfredo.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Cosmología y Estadística</b>	<b>4</b>
<b>1.</b>	<b>La distribución de materia en gran escala en el universo</b>	<b>5</b>
1.1.	Velocidad de rotación de las galaxias. . . . .	6
1.2.	Relación Masa-Luminosidad . . . . .	6
1.3.	El coeficiente de sesgo . . . . .	8
1.3.1.	Formación sesgada de galaxias . . . . .	8
1.3.2.	Dependencia con las propiedades de las Galaxias . . . . .	10
1.4.	El campo de fluctuaciones en la densidad . . . . .	11
<b>2.</b>	<b>La estadística en el análisis del campo de fluctuaciones</b>	<b>16</b>
2.1.	Correlaciones . . . . .	17
2.1.1.	La función de correlación de 2-puntos. . . . .	17
2.1.2.	La función de correlación de $n$ -puntos . . . . .	19
2.1.3.	Momentos y cumulantes . . . . .	22
2.2.	Análisis de Fourier del campo de fluctuaciones. . . . .	23
2.2.1.	El espectro de potencias inicial . . . . .	24
2.2.2.	La varianza de la masa y el suavizado de los campos. . . . .	25
<b>II</b>	<b>La Formación de Estructuras</b>	<b>28</b>
<b>3.</b>	<b>Modelos de colapso</b>	<b>29</b>
3.1.	Colapso esférico . . . . .	30
3.2.	Colapso elipsoidal . . . . .	33
3.2.1.	Campos externos e internos . . . . .	33
3.2.2.	Desplazamientos lineales y mareas. . . . .	34
3.2.3.	El colapso de la Región del Máximo Local . . . . .	37
<b>4.</b>	<b>La función de masa universal y condicional en el modelo de colapso esférico</b>	<b>40</b>
4.1.	La función de masa universal: El enfoque de Press - Schechter. . . . .	40
4.2.	El modelo de Press-Schechter extendido: conjuntos de excursión . . . . .	45
4.3.	La función condicional de masa en el modelo de Press-Schechter. . . . .	48

<b>5. Las estructuras en el modelo de colapso elipsoidal: La función de masa universal y condicional.</b>	<b>53</b>
5.1. La función de masa universal en el modelo de colapso elipsoidal . . . . .	54
5.2. Las funciones de masa . . . . .	58
5.3. Aproximaciones analíticas para las funciones de masa condicional y universal . . . . .	60
5.3.1. Nueva aproximación para la función de masa universal . . . . .	60
5.3.2. Analogías para determinar la función de masa condicional . . . . .	62
<b>III El Sesgo entre la Distribución de Galaxias y Materia</b>	<b>66</b>
<b>6. Las amplitudes jerárquicas y los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso esférico.</b>	<b>67</b>
6.1. Método de conteo en celdas . . . . .	68
6.2. Las amplitudes de correlación jerárquicas . . . . .	69
6.3. Los coeficientes de sesgo para el modelo de colapso esférico . . . . .	73
<b>7. El colapso elipsoidal: Un modelo para los factores de sesgo.</b>	<b>77</b>
7.1. Los coeficientes de sesgo a partir de las funciones de masa de <i>Sheth &amp; Tormen (2001)</i> . . . . .	78
7.2. Comparación con el modelo de <i>Mo, Jing &amp; White (1997)</i> . . . . .	82
<b>IV Resultados</b>	<b>87</b>
<b>8. Medición de <math>S_J(R)</math> en simulaciones numéricas: comparación con los modelos analíticos.</b>	<b>88</b>
8.1. Medición de $S_J(R)$ en la distribución de materia: simulaciones numéricas. . . . .	88
8.2. Comparación entre las amplitudes de correlación medidas para la distribución de halos y los modelos analíticos . . . . .	91
<b>9. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>A. Evolución de los semiejes en una perturbación elipsoidal con un campo de marea externo</b>	<b>99</b>
<b>B. La distribución de los parámetros <math>e</math> y <math>p</math> en un campo de fluctuaciones Gaussiano</b>	<b>104</b>

# Parte I

## Cosmología y Estadística

# Capítulo 1

## La distribución de materia en gran escala en el universo

Las estructuras que se observan en el universo, tales como galaxias, cúmulos, supercúmulos, etc. y la radiación, se distribuyen de tal forma que muestran un universo que tiende a la homogeneidad e isotropía en escalas suficientemente grandes. La teoría estandar para el origen de las estructuras en el universo, sostiene que éstas crecen debido al proceso conocido como inestabilidad gravitacional, partiendo de pequeñas fluctuaciones en la densidad de materia en un universo en expansión. Eventualmente, la auto-gravedad actuando sobre estas regiones se hace más grande que la presión de expansión, y las estructuras detienen la expansión y colapsan para formar estructuras ligadas. Los procesos de acreción y el colapso continuo de las estructuras en escalas cada vez más grandes se denomina *modelo jerárquico de formación de estructuras*, ya que las estructuras más pequeñas colapsan primero y luego se incorporan a estructuras más grandes que colapsan en un tiempo posterior. En este modelo jerárquico se asume la presencia de fluctuaciones primitivas en la densidad que, teóricamente, se generaron a partir de fluctuaciones cuánticas en el campo escalar de densidades presentes en la etapa inflacionaria del universo (*Guth 1981, Albrecht 2000*) y fueron amplificadas por un período de rápida inflación haciéndose más densas con respecto a su entorno a medida que el universo se expande (*Liddle 1999, Liddle & Lyth 2000*).

La abundante evidencia observacional ha puesto en manifiesto que la materia observada (bariones + fotones) contribuye en aproximadamente un 10% a la densidad total del universo (*Faber & Gallagher 1979*); esto quiere decir que la mayor parte de la densidad de materia en el universo está constituida por materia no visible o *materia oscura*, que sólo interactúa gravitacionalmente (*White 1988*); la posible naturaleza de la composición de este tipo de materia, ha sido estudiada en numerosos trabajos (*Primack 1999; Berkes 1997; Trimble 1987; Faber 1987*), la mejor hipótesis, hasta el momento, es que estaría constituida de material no bariónico, consistente con las predicciones de la teoría de nucleosíntesis. Debido a ésto es que la materia oscura debe haber tenido un papel relevante en la distribución de materia luminosa que hoy

observamos (*Lambas 1986*).

Como las regiones sobredensas, con estructuras gravitacionalmente ligadas, son el ambiente propicio donde las galaxias pueden formarse, ésto nos lleva a buscar la forma de correlacionar la distribución observada de materia (*e.g.* galaxias), con la distribución real de materia (materia oscura + materia visible). La definición del *coeficiente de sesgo*, o “*bias*” nos permitirá inferir esta relación, usando como principal herramienta la formación jerárquica de las estructuras, que nos brinda una explicación natural a las estructuras en gran escala complejas que se observan en el universo.

En este capítulo mostraremos algunas de las evidencias observacionales de la existencia de materia oscura, definiremos conceptualmente el coeficiente de sesgo, para luego, en capítulos posteriores, desarrollarlo en un marco teórico más adecuado.

## 1.1. Velocidad de rotación de las galaxias.

Esta es una de las evidencias más notables de la existencia de materia oscura. Si colocamos una partícula de prueba a una distancia  $r$  de una distribución de masa  $M(r)$  que se encuentra en equilibrio rotacional, su velocidad circular  $v_c$  debe satisfacer la siguiente ecuación:  $v_c = [GM(r)/r]^{1/2}$ , donde  $G$  es la constante de la gravitación ( $G = 6,67259 \times 10^{-11} [m^3 kg^{-1} s^{-2}]$ ). De acuerdo a esto último, si la distribución de masa fuera acotada espacialmente, tal como se observa para la componente luminosa, las curvas de rotación deberían tener una caída kepleriana a partir de los límites de la distribución (*Sérsic 1980*); sin embargo, mediciones de la línea de 21-cm. en hidrógeno neutro, indican que en lugar de la caída kepleriana esperada, las curvas de velocidad de rotación se mantienen planas para  $r$  grandes (más allá de la distribución luminosa), indicando que  $v_c \sim cte.$ . A partir de estos resultados se puede deducir que la masa aumenta en forma proporcional a  $r$ ,  $M(r) \propto r$ ; a diferencia de la luminosidad, que cae rápidamente (*Ostriker, Yahil & Peebles 1974; Einasto, Kraasik & Saar 1974; Flores et. al. 1993; de Blok 2002*)

## 1.2. Relación Masa-Luminosidad

La materia con distinta densidad y temperatura puede detectarse por emisión o absorción en alguna zona del espectro electromagnético; sin embargo, la gravedad puede detectar materia independientemente de si esta emite o no. Idealmente, estas dos formas de “*encontrar*” materia deberían coincidir; en la práctica, la gravedad detecta más materia (aproximadamente en un factor 10) que la detectada en alguna otra forma.

El teorema del virial, que relaciona velocidades, distancias mutuas y masas en un sistema ligado a través de la energía cinética ( $T$ ) y potencial ( $W$ ):  $2T + W = 0$ , planteó la discrepancia entre la materia luminosa y no luminosa en los cúmulos ricos para que éstos se encontraran en equilibrio virial (*Zwicky, 1933*), detectándose mate-



ria que no se observaba directamente. La relación Masa-Luminosidad,  $M/L$ , que se mide en estructuras de una determinada escala, es el cociente entre la masa necesaria para mantener el sistema ligado ( $M$  masa virial), con la luminosidad  $L$  del sistema (usualmente, los valores se dan en relación al cociente  $M_{\odot}/L_{\odot}$  para el sol). Los relevamientos de galaxias en redshift nos permiten determinar la función de luminosidad de las galaxias, o sea, el número de galaxias con una determinada luminosidad; a partir de estas funciones de luminosidad podemos obtener la densidad de luminosidad total  $\rho_L$ . Ahora podemos tomar dos caminos:

- 1)- A través del valor determinado para  $\rho_L$  (Efstathiou et. al. 1988a) podemos encontrar el valor de  $M/L_{crit.}$  necesario para un modelo de universo cerrado ( $M/L_{crit} \simeq 1390h$ ).
- 2)- De determinaciones dinámicas de la masa en escalas grandes y la medición de  $\rho_L$ , podemos obtener  $M/L_R$  para escalas grandes.

Se encuentra que los valores para  $M/L_{crit}$  y  $M/L_R$  difieren en un factor 5 (Ver 1.2). Si queremos un modelo de universo plano (*de Bernardis et. al. 2000*), debe asumirse que hay algún tipo de materia oscura fuera de los sistemas virializados. La idea de que la luminosidad puede no seguir la distribución de materia, aún en grandes escalas, ha dado origen a lo que se conoce como “*formación sesgada de galaxias*” (Ver *Capítulo 12 de Peacock 1999*).

Tabla 1.1: Los valores fueron extraídos de *Padmanabhan (1995)* y *Peacock (1999)*. Los valores de  $M/L$  en cada escala dependen del método utilizado, por lo que en la tabla se han colocado valores promedio ( $h$  es la constante de Hubble reducida).

Sistema	Escala	$\frac{M}{L}$ (en unidades solares)
Vía Lactea	100kpc	45
Elípticas	100kpc	100
Espirales	50kpc	$30h$
Grupos	1Mpc	$260h$
Cúmulos	2Mpc	$350h$

En los cúmulos lejanos se han detectado numerosos objetos en forma de arco que corresponderían a imágenes de galaxias lejanas, fuertemente distorcionadas por efectos relativistas, provocadas por un objeto masivo entre la fuente y el observador (*Blanford & Narayan 1992*); este fenómeno se conoce como “*lente gravitaional*”. Se han desarrollado métodos que, conociendo la distancia a la región responsable de la distorción y al objeto distorcionado, permiten determinar la masa  $M_{lg}$  (visible y no visible) contenida en dicha región (*Bartelmann & Narayan 1995*; *Narayan & Bartelmann 1999*,

*Mollerach 1998*); en los casos donde los métodos desarrollados a partir del fenómeno de lente gravitacional han permitido calcular la masa  $M_{lg}$ , se han obtenido resultados comparables con las determinaciones dinámicas de galaxias ( $M_{gald}$ ) y gas ( $M_{gasd}$ ):

$$M_{lg} \simeq M_{gasd} \simeq M_{gald}$$

El fenómeno de *micro-lentes* ha permitido el uso de la teoría de lentes gravitacionales en grupos de galaxias, e incluso en galaxias mismas (*Mollerach & Roulet 1996*), en donde los resultados de la medición de masa son similares a los valores obtenidos por los métodos dinámicos.

## 1.3. El coeficiente de sesgo

### 1.3.1. Formación sesgada de galaxias

En el estudio de la distribución en gran escala del universo, podemos preguntarnos lo siguiente: *¿la distribución de galaxias es equivalente a la distribución de materia?* y, antes de poder responderla, debemos tener en cuenta los siguientes resultados observacionales:

- Los cúmulos ricos de galaxias determinados por Abell (*Abell 1958, 1961*) son objetos que no están distribuidos aleatoriamente, sino que están agrupados. Una forma de caracterizar la distribución de los cúmulos de Abell, es a través de la función de correlación espacial (Ver Sección 2.1). *Bahcall & Soneira (1983)* encuentran que la función de correlación espacial de dichos cúmulos toma el valor unitario (la longitud de coherencia de la distribución) en la escala característica  $r_c \approx 25 h^{-1} Mpc$  ( $h$  es la constante de Hubble reducida  $h = H/100 km s^{-1} Mpc^{-1}$ ). En contraste, la distribución de galaxias, tienen una escala característica de  $r_g \approx 4 - 7 h^{-1} Mpc$ . De éstos resultados podemos concluir que las galaxias y los cúmulos de galaxias no pueden ser ambos buenos trazadores de la masa (*Davis & Peebles 1983*).
- *Peacock & Dodds (1994)* encuentran que la amplitud de la función de correlación espacial de las galaxias seleccionadas en el infrarrojo difiere en aproximadamente un factor 1,7 de la amplitud de la función de correlación de las galaxias seleccionadas en el óptico, por lo que claramente no pueden ser ambas trazadoras de la distribución de materia.

En respuesta a la pregunta anterior, encontramos que no hay ninguna razón *a priori* por la cual la distribución de galaxias sea buena trazadora de la distribución de masa en el universo; de hecho, los resultados mencionados anteriormente sugieren que esto último no sucede así. La “*diferencia*” entre las distribuciones de materia y galaxias se conoce como “*sesgo*” en la distribución de galaxias, y esto limita nuestras posibilidades de restringir el espectro de materia.

En lugar de utilizarse la densidad de materia para describir su distribución, suele usarse una variable adimensional: la fluctuación en el campo de densidad,  $\delta(\vec{x}, t)$ , que se define por

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (1.1)$$

donde  $\rho(\vec{x}, t)$  es la densidad de masa en el punto  $\vec{x}$ , al tiempo  $t$ ; y  $\bar{\rho}(t)$  es la densidad media del universo en el tiempo  $t$ .

El problema de la formación de galaxias a partir de las fluctuaciones en el campo de densidades es bastante complicado, y en trabajos recientes se ha comenzado a resolverlo de una forma más detallada a través de modelos analíticos y semi-analíticos (*Baugh et al. 1999; Somerville 1997*). Sin embargo, es posible desarrollar un concepto de sesgo sin un modelo detallado de los procesos de formación de galaxias.

El concepto de sesgo apareció cuando *Kaiser (1984)* intentó explicar la agrupación de galaxias en los cúmulos de galaxias. Asumiendo que las galaxias se forman en los máximos de la distribución de materia (suavizada en escalas apropiadas) y usando el modelo de formación jerárquica de estructuras, puede realizarse un análisis más profundo del sesgo entre las distribuciones de materia y de galaxias (*Peacock & Heavens, 1985; Bardeen et al. 1986 -BBKS de aquí en adelante-, Jensen & Szalay 1986*). En este modelo simple, la correlación entre las galaxias será mayor que la masa por un factor independiente de la escala,  $b$ , denominado *factor o parámetro de sesgo*. Este parámetro de sesgo o “*bias*” fue el comienzo en el estudio de la formación sesgada de galaxias (*Rees 1985; Dekel & Silk 1986; Dekel & Rees 1987*) que actualmente, a través de los modelos semi-analíticos, está reproduciendo los resultados observacionales.

En la literatura actual pueden encontrarse al menos tres aplicaciones diferentes para el parámetro de sesgo, las cuales no son equivalentes una con otra, y debe tenerse especial atención con la definición de cada uno de ellos ya que ésto nos determinará el contexto en donde se podrán utilizar.

Si definimos  $\sigma^2(r)$  como la variancia de la distribución de masa en escala  $r$ , podemos definir el factor de sesgo en una forma simple como:

$$b \equiv \frac{\sigma_8^{gal}}{\sigma_8} \quad (1.2)$$

donde  $\sigma_8 \equiv \sigma(8h^{-1}Mpc)$  y  $h$  es una constante que toma valores en el intervalo  $(0, 1)$  y depende del modelo cosmológico que utilicemos;  $\sigma_8^{gal}$  es la variancia de galaxias en escala  $r = 8h^{-1}Mpc$ . Se puede ver claramente en esta definición que  $b$  es una constante; históricamente, esta definición se usó para normalizar funciones de distribución de materia (*i.e.* espectro de potencias) ya que la variancia en la distribución de galaxias observada es aproximadamente 1 en escalas de  $8h^{-1}Mpc$ . De esto último, se requiere que  $\sigma_8 = 1/b$ , donde  $b$  sería un parámetro libre, en este contexto,  $b$  hace referencia a la agrupación de galaxias identificadas ópticamente. Este método de normalización a través de la constante  $b$  ha sido dejado de lado por la normalización que se obtiene a partir del fondo cósmico de radiación en microondas, CMB (*Ratra et. al. 1997*)

obtenida de los datos del satélite COBE (*White, Scott & Silk 1994; Partridge 1995*) que, asumiendo alguna relación sencilla entre materia y radiación, hacen referencia directamente al espectro de la masa.

La segunda definición se refiere a la función de correlación, por lo que ahora definiremos en forma sencilla y simple la función de correlación y luego, en capítulos siguientes, la definiremos en una forma más detallada. Si tomamos el campo de fluctuaciones en la densidad, dado por la expresión (1.1), lo valuamos en  $\vec{x} + \vec{r}$  ( $\vec{r} = r\hat{r}$ ), lo multiplicamos por el campo de fluctuaciones valuado en  $\vec{x}$  y luego promediamos el producto en el volumen, o sea en  $\vec{x}$ , obtendremos una función de la forma  $\xi(r) = \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle$ , donde  $\xi(r)$  se denomina *función de correlación*. Definimos ahora el factor de sesgo como:

$$\xi_{gal}(r) = b^2\xi(r) \quad (1.3)$$

donde  $\xi_{gal}(r)$  es la función de correlación de galaxias. Esta definición hace referencia al tamaño relativo de la función de correlación de materia y de galaxias; y como  $\xi(r)$  no necesariamente es independiente de la escala  $r$ , en general  $b$  no es una constante. Sin embargo, en ciertos rangos de escala, puede representarse adecuadamente por una constante; de hecho, hay evidencia observacional de esto (*Peacock & Dodds 1994*), siempre y cuando se analice en escalas suficientemente grandes, que en la práctica es mirar escalas en el régimen lineal.

La tercera definición relaciona las perturbaciones en el campo de galaxias con el campo de materia, en un sentido de relación punto-a-punto, o sea, para cada punto en el que miremos en el espacio. Definimos el parámetro de sesgo como:

$$\frac{\delta n}{n}(\vec{x}) = b\frac{\delta\rho}{\rho}(\vec{x}) \quad (1.4)$$

donde  $n$  se refiere a la densidad numérica de galaxias (en la determinación de  $n$  se utilizan funciones de suavizado para tener una distribución continua).

De acuerdo a como se definieron los parámetros de sesgo, se puede ver que la definición (1.2) implica a (1.3), la cual implica a (1.4); sin embargo, las implicaciones inversas no son ciertas. La primera definición siempre existe, la segunda es una aproximación bastante buena en algunos rangos de escala, y la tercera es la más incierta pero la más útil, particularmente en la conexión del campo de fluctuaciones en la densidad con el campo de velocidades peculiares (*Peebles 1980; Dekel 1997*).

### 1.3.2. Dependencia con las propiedades de las Galaxias

Otro punto que debe tenerse en cuenta en lo relacionado al sesgo entre la distribución de galaxias y de materia, que ya hemos mencionado antes, es que el parámetro de sesgo también depende del tipo de objeto bajo estudio. Por ejemplo, *Peacock & Dodds* (1994) encuentran una relación para la función de correlación entre galaxias identificadas en el óptico y galaxias identificadas en el infrarrojo de la forma:

$$\xi_{opt}(r) \simeq 1,7\xi_I(r) \quad (1.5)$$

en un rango de escalas que va desde  $10h^{-1}Mpc$  hasta  $50h^{-1}Mpc$ ; el subíndice I hace referencia a las galaxias identificadas en el infrarrojo por el satélite IRAS (Satélite Astronómico en el Infra-Rojo). La relación (1.5) entre las funciones de correlación para objetos identificados en distintas longitudes de ondas, implica una relación entre los parámetros de sesgo de  $b_{opt} \simeq 1, 3b_I$ . Las galaxias identificadas por IRAS, usualmente se las ha interpretado como galaxias jóvenes, con un alto flujo en el infrarrojo debido a la formación estelar activa; en este contexto, estas galaxias identificadas se habrían formado más tarde, y por lo tanto en regiones poco densas del campo de fluctuaciones en la densidad, lo cual encuadra en forma natural en el modelo jerárquico de crecimiento de estructuras.

*Peacock* (1997), utilizando conjuntos de datos de fuentes diversas, entre los que se incluyen los Cúmulos de Abell, radio-galaxias, galaxias identificadas en el óptico y en el infrarrojo, y otros, y haciendo las correcciones en las observaciones, encuentra la siguiente relación para los parámetros de sesgo de cada una de las distribuciones:

$$b_{Abell} : b_{radio} : b_{opt} : b_I \simeq 4, 5 : 1, 9 : 1, 3 : 1$$

El punto fundamental de esta última relación entre los distintos parámetros de sesgo, es que las galaxias identificadas en el óptico, en el infrarrojo o en radio, no pueden ser al mismo tiempo trazadoras de la distribución de masa debido al sesgo intrínseco que existe entre las respectivas distribuciones, y además no tenemos ningún fundamento físico para decir que un dado tipo de galaxias serán trazadoras de la distribución de masa. Este es otro motivo por el cual debemos plantear que la distribución de galaxias no traza la distribución de masa.

El hecho de que no podamos inferir directamente la distribución de masa presenta un problema para el estudio de la estructura del universo en gran escala, ya que necesitamos saber como se distribuye la masa y sólo tenemos acceso a la distribución observable de galaxias, por lo que el parámetro de sesgo es una conexión importante entre los modelos y las observaciones. En los capítulos siguientes, estudiaremos y desarrollaremos modelos analíticos que nos permitirán inferir la forma del parámetro o factor de sesgo entre las distribuciones de galaxias y de masa.

## 1.4. El campo de fluctuaciones en la densidad

Como mencionamos en la sección anterior, el estudio de las fluctuaciones en el campo de densidades, o perturbaciones, es un punto fundamental para entender como se forman las estructuras en gran escala del universo. El estudio del crecimiento, colapso y agrupación de estas perturbaciones brinda un marco analítico para el análisis de la distribución de masa en el universo. En esta sección daremos una aproximación al crecimiento de las perturbaciones en el tiempo.

El tamaño de las inhomogeneidades que deseamos estudiar van del orden de unas decenas de  $kpc$  (galaxias) hasta unas decenas de  $Mpc$  (cúmulo de galaxias); por lo que la escala de las perturbaciones  $\lambda(t)$  satisface

$$\lambda(t) \ll d_H(t)$$

donde  $d_H(t)$  es el radio de Hubble ( $d_H(t) = c/H(t)$ ) y es del orden de  $3 \times 10^3 Mpc$ . Esto implica que podemos usar la aproximación Newtoniana de la Relatividad General para estudiar el crecimiento de las inhomogeneidades.

Para describir el crecimiento de las perturbaciones, es útil trabajar en un sistema de coordenadas que sigue la expansión general del universo en los modelos donde se asume el Principio Cosmológico (*Capítulo 14 de Weinberg 1972*). Dicho sistema de coordenadas se denomina “sistema de coordenadas comóviles” (*Peebles 1980*), en el cual las posiciones comóviles,  $\vec{x}$  (en un universo en expansión con este sistema de coordenadas, un par de partículas con velocidad relativa cero tienen posiciones comóviles constantes)<sup>1</sup> se definen como:

$$\vec{x} = \frac{\vec{r}}{a} \quad (1.6)$$

donde  $\vec{r}$  es la posición en un sistema de coordenadas estático, y  $a$  es el factor de escala. Este cambio de sistema de coordenadas, nos dá la idea de que podemos “dividir” la velocidad total  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  en dos componentes, una debida a la expansión uniforme de Hubble, y otra debida a la *velocidad peculiar*,  $\vec{u} = a\frac{d\vec{x}}{dt}$ , producida por el apartamiento respecto de la expansión isotrópica; por lo que si derivamos la ecuación (1.6) obtenemos:

$$\vec{v} = \mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a} \cdot \mathbf{r} + a\dot{\mathbf{x}} = H\vec{r} + \vec{u}$$

Este cambio de coordenadas modifica la forma en que describimos la evolución temporal de las coordenadas. Para describir la materia en el universo, podemos pensar que se comporta como un fluido ideal, cuyo comportamiento en un sistema estático (no-comóvil) estará regido por las ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_r(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.7)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v} \right] = -\nabla_r p - \frac{\nabla_r \Phi}{\rho} \quad (1.8)$$

donde (1.7) es la ecuación de continuidad, (1.8) es la ecuación de Euler para un fluido ideal;  $\nabla_r$  denota derivación respecto a la coordenada  $\vec{r} = a\vec{x}$  y el potencial gravitatorio  $\Phi$ , estará determinado por la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}, t) \quad (1.9)$$

---

<sup>1</sup>A lo largo del trabajo se utilizará indistintamente la notación para los vectores de la forma clásica  $\vec{x}$  o en negrita  $\mathbf{x}$ .

En un sistema de coordenadas comóvil, podemos modificar la ecuación (1.9) para el potencial si redefinimos el potencial<sup>1</sup>  $\Phi$  de la forma

$$\phi = \Phi - \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2$$

tendremos una ecuación de campo para este nuevo potencial  $\phi$  dada por:

$$\nabla_x^2 \phi(\mathbf{x}, t) = a^2 \nabla_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t) + 3a\ddot{a} = a^2 4\pi G \rho(\mathbf{x}, t) + 3a\ddot{a} \quad (1.10)$$

donde  $\nabla_x$  denota derivación respecto a las coordenadas  $\mathbf{x}$ . Si ahora usamos la aproximación Newtoniana ( $v \ll c$ ) en las ecuaciones de campo, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} \equiv \ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \bar{\rho}(t) a$$

que podemos reemplazar en (1.10) y obtener la ecuación:

$$\nabla_x^2 \phi = 4\pi G a^2 [\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)] = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

donde  $\delta(\mathbf{x}, t)$  es el campo de perturbaciones en la densidad definido en (1.1). En la ecuación (1.11) puede verse que la fuente del nuevo potencial son las perturbaciones de la densidad  $\rho$  con respecto de la densidad media  $\bar{\rho}$ .

Con estas nuevas coordenadas y con el potencial definido en el sistema comóvil, las ecuaciones (1.7) y (1.8) toman la forma (*Peebles 1980*)

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot [(1 + \delta)\mathbf{u}] = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u} + \frac{1}{a} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = -\frac{1}{a} \nabla \phi = -\frac{1}{\rho a} \nabla p - \frac{1}{a} \nabla \phi \quad (1.13)$$

Vemos que si asumimos que la materia se puede aproximar por un fluido con presión cero y sin viscosidad, las ecuaciones (1.11)- (1.13) describen la evolución de perturbaciones no-relativistas.

Si consideramos que las perturbaciones son pequeñas respecto de una densidad homogénea, podemos linealizar estas dos ecuaciones conservando  $\delta$  y  $\mathbf{u}$  hasta el primer orden. Hay que notar que esta aproximación será válida en la época temprana del universo y en escalas grandes; la evolución de las estructuras en las escalas de las galaxias actuales es fuertemente no-lineal. A pesar de esto, la aproximación de primer orden en  $\delta$  permite describir como se comportan las perturbaciones que originan estructuras como los cúmulos y grupos de galaxias.

---

<sup>1</sup>Podemos redefinir el potencial si al Lagrangiano de una partícula en coordenadas comóviles le sumamos una función de la forma  $f(\mathbf{x}, t) = 1/2 m a \ddot{a} x^2$ , tal que deje invariante el Lagrangiano.

Para resolver las ecuaciones, usamos las aproximaciones (1.12) y (1.13), luego de lo cual tomamos la divergencia en la ecuación de Euler y se la sumamos a la ecuación de continuidad, obteniendo así una ecuación para la evolución temporal de las perturbaciones que es lineal en  $\delta$ :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (1.14)$$

Debido a la linealidad de  $\delta$ , cada modo evoluciona independientemente, por lo que podemos escribir la solución general como:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = f_1(\mathbf{x})D_1(t) + f_2(\mathbf{x})D_2(t)$$

donde  $D_1(t)$  y  $D_2(t)$  son soluciones independientes a la ecuación (1.14). En general, una de las soluciones,  $D_1(t)$ , aumentará con el tiempo y la otra,  $D_2(t)$ , decrecerá con el tiempo; por esto se las suele referir como modo creciente y decreciente, respectivamente. A medida que el sistema evoluciona, el modo decreciente tiende a cero ya que las estructuras evolucionan basicamente por efectos gravitatorios, por lo que nos enfocamos en el estudio del modo creciente  $D_1$ . En el régimen lineal, el crecimiento de las perturbaciones escala con el tiempo como:

$$\delta(t) = \delta(t_0)\frac{D_1(t)}{D_1(t_0)} \quad (1.15)$$

En la ecuación (1.15) vemos que toda la información que necesitamos a cerca del crecimiento de las perturbaciones en el regimen lineal esta contenida en la función  $D_1(t)$ , que suele llamarse *factor de crecimiento lineal*. En un modelo cosmológico Einstein-de Sitter ( $\Lambda = 0$ ,  $\Omega = 1$ ) el factor de crecimiento lineal tiene una forma sencilla que depende del corrimiento al rojo o redshift  $z(t)$ :

$$D_1(t) \propto a(t) = \frac{1}{1+z(t)}$$

En un modelo cosmológico más general, con  $\Lambda \neq 0$  y  $\Omega \neq 0$  tiene la forma (Heath 1977):

$$D_1(t) \propto \frac{(\Omega_\Lambda a^3 + \Omega_k a + \Omega_m)^{1/2}}{a^{3/2}} \int_0^a \frac{\tilde{a}^{3/2}}{(\Omega_\Lambda \tilde{a}^3 + \Omega_k \tilde{a} + \Omega_m)^{3/2}} d\tilde{a} \quad (1.16)$$

donde  $\Omega_m$  es el parámetro de densidad de materia y  $\Omega_\Lambda$  y  $\Omega_k$  hace referencia a la energía del vacío y a la curvatura respectivamente. Cuando  $\Lambda = 0$  ( $\Omega_\Lambda = 0$ ) la ecuación (1.16) puede integrarse analíticamente y obtener así una expresión concreta para  $D_1(t)$  (Peebles 1993). Una fórmula de ajuste, con un alto grado de certeza fue dada por Carroll, Press & Turner (1992), quienes encontraron una buena aproximación para distintos valores de  $\Omega_m$  y  $\Omega_\Lambda$  desde épocas tempranas ( $a \approx 0$ ) hasta el presente ( $a(t_0) = 1$ ,  $\dot{a}(t_0) = 1$ ); el ajuste es de la forma<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>La contante de proporcionalidad en este ajuste y en la ecuación (1.16) son tales que cuando  $\Omega_m = 1$  y  $\Omega_\Lambda = 0$ , se obtenga  $\delta(t) = a(t)$ ; la constante dada por esta condición es  $\frac{5}{2}\Omega_m$



$$\begin{aligned}
D_1(t) |_{a=1} &\equiv D_1(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = \frac{5}{2} \Omega_m \int_0^1 \frac{\tilde{a}^{3/2}}{(\Omega_\Lambda \tilde{a}^3 + \Omega_k \tilde{a} + \Omega_m)^{3/2}} d\tilde{a} \\
D_1(\Omega_m, \Omega_\Lambda) &\approx \frac{5}{2} \Omega_m \left[ \Omega_m^{4/7} - \Omega_\Lambda + \left(1 + \frac{1}{2} \Omega_m\right) \left(1 + \frac{1}{70} \Omega_\Lambda\right) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

recordemos que  $\Omega_k$  podemos escribirlo como  $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$ .

## Capítulo 2

# La estadística en el análisis del campo de fluctuaciones

El estudio de la distribución de materia en gran escala en el universo, se ha realizado de dos formas distintas. Los primeros estudios se realizaron reduciendo el fenómeno a tipos específicos de objetos como galaxias o cúmulos de galaxias, esta forma de reducción es bastante directa y ha probado ser muy útil. Sin embargo, en estos últimos 30 años existe una tendencia a pensar que la distribución general de la materia es complicada y la reducción a géneros y tipos de agrupación puede no ser útil. La alternativa a esto son las mediciones estadísticas que permite la posibilidad de realizar estudios estadísticos con los objetos que observamos (*e.g.* galaxias; cúmulos de galaxias).

La amplificación de las fluctuaciones primordiales en la densidad y la inestabilidad gravitatoria son los responsables en la existencia de inhomogeneidades en la distribución de materia; la distribución de estas inhomogeneidades es lo que debe contrastarse con mediciones estadísticas de la distribución de materia observada. Para el estudio de la distribución de materia usaremos el campo (escalar) de perturbaciones o fluctuaciones en la densidad definido en (1.1), que no necesariamente es una cantidad pequeña; de hecho, surgen resultados muy interesantes al comprender la evolución del campo de fluctuaciones para valores grandes de  $\delta$ .

Hay que hacer una aclaración para hacer un estudio estadístico correcto. El campo de densidades  $\delta$  se encuentra en un universo que tiene propiedades de homogeneidad e isotropía en gran escala, esto sugiere que las propiedades estadísticas de  $\delta$  también deben ser homogéneas. Con esto nos referimos a que, estadísticamente hablando, si tenemos un conjunto o muestra de universos y medimos en cada punto  $\mathbf{x}$  valores diferentes de  $\delta(\mathbf{x})$  en cada uno de ellos, con una variancia total  $\langle\delta^2\rangle$  entre los miembros de la muestra, la homogeneidad estadística de  $\delta$  nos dice que la cantidad  $\langle\delta^2\rangle$  medida no depende de la posición  $\mathbf{x}$ . Si llevamos esto a la realidad, nos encontramos con el problema de como medir la variancia  $\langle\delta^2\rangle$ , ya que sólo contamos con una muestra (nuestro universo actual) y no un conjunto de universos; esto lo resolvemos midiendo en partes bien separadas del espacio, como el campo  $\delta$  debe ser causalmente inconexo,

esto se parece bastante a medir en dos miembros distintos del conjunto de universos. Básicamente, lo que hacemos es medir la variancia  $\langle \delta^2 \rangle$  promediando en un volumen suficientemente grande; este resultado se aproximaría bastante al resultado verdadero que se obtendría de promediar en el conjunto de universos<sup>1</sup>. Utilizando un lenguaje más específico, a los campos que satisfacen la propiedad de  $\langle \dots \rangle_{\text{volumen}} \Leftrightarrow \langle \dots \rangle_{\text{conjunto}}$  (el promedio en el volumen de un elemento del conjunto es equivalente al promedio sobre todos los elementos del conjunto, y viceversa) se los denomina *campos ergódicos* (Adler 1981).

En este capítulo desarrollaremos los métodos y las herramientas estadísticas que se utilizarán para el análisis del campo de fluctuaciones, teniendo en cuenta lo aclarado anteriormente.

## 2.1. Correlaciones

### 2.1.1. La función de correlación de 2-puntos.

En el primer capítulo dimos una definición sencilla de la función de correlación; ahora intentaremos formalizar la definición dada anteriormente para dos casos: una distribución puntual y una distribución continua de materia. Muchos catálogos dan la posición de las galaxias o cúmulos de galaxias, por lo que es útil pensar que la materia está distribuída en objetos puntuales que podrían ser las galaxias y los cúmulos de galaxias.

Si ignoramos la diferencia entre los objetos, la naturaleza de esta distribución es de posiciones  $\mathbf{r}_j$ , y esto puede describirse por una función de correlación puntual, que definimos de la siguiente forma: Supongamos que tenemos una distribución de puntos en el espacio, la probabilidad  $dP$  de encontrar un objeto en un volumen infinitesimal  $dV$  es:

$$dP = n dV$$

donde  $n$  es la densidad numérica media (no depende de la posición). Esta probabilidad es proporcional al volumen, ya que si tomamos el doble de  $dV$  se duplica la chance de encontrar un objeto. Definimos entonces la función de correlación de dos puntos,  $\xi$ , como la *probabilidad conjunta de encontrar algún objeto en cada uno de los elementos de volumen  $dV_1$  y  $dV_2$  a una separación  $r_{12}$* :

$$dP = n^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r_{12})] \quad (2.1)$$

consistente con la homogeneidad e isotropía,  $\xi$  sólo es función del módulo del vector separación  $\mathbf{r}_{12}$ ; el factor  $n^2$  hace que la función de correlación sea adimensional. Nuevamente la probabilidad es proporcional al producto de los volúmenes  $dV_1 dV_2$ . En una

---

<sup>1</sup>Generalmente, el operador promedio  $\langle \dots \rangle$ , se utiliza sin especificar que tipo de promedio se está realizando.

distribución Poisson uniforme de los objetos, la probabilidad de encontrar un objeto en  $dV_1$  y en  $dV_2$  es independiente de la probabilidad conjunta, por lo que será de la forma  $dP = n^2 dV_1 dV_2$ , en este caso  $\xi \equiv 0$ ; si las posiciones estuvieran correlacionadas, tendríamos  $\xi > 0$ , en cambio, si estuvieran anticorrelacionadas tendríamos  $-1 \leq \xi < 0$ .

Debe notarse que la chance de encontrar un objeto en  $dV_1$  es  $ndV_1$ , por lo que la probabilidad condicional,  $dP(2 | 1)$ , de encontrar un objeto en  $\delta V_2$  teniendo ya un objeto en  $dV_1$  está dada por:

$$dP(2 | 1) = ndV_2[1 + \xi(r_{12})]$$

Otra forma de decir esto es pensar que elegimos un objeto al azar del conjunto, entonces la probabilidad de que este objeto tenga un vecino a una distancia  $r$  en un volumen  $dV$  de la muestra es

$$dP = ndV[1 + \xi(r)] \quad (2.2)$$

Las probabilidades (2.1) y (2.2) definen la función de correlación de dos puntos para una muestra puntual de objetos, lo que resulta útil a la hora de estudiar la distribución de galaxias y de cúmulos de galaxias. Si pretendemos estudiar la distribución de las fluctuaciones en la densidad, necesitaremos definir una estadística para una distribución continua ya que el campo  $\delta$  está definido en todo punto del espacio.

Análogamente a la definición dada anteriormente; podemos definir la función de correlación de dos puntos para una distribución continua no homogénea, como el exceso de probabilidad de encontrar un objeto a una distancia  $r$  de otro objeto dado, respecto de una densidad media  $\bar{\rho}$ :

$$dP = (\bar{\rho})^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r)]$$

a pesar de haber hecho la analogía entre las definiciones, no es claro aún el papel de la función de correlación en una distribución continua. Una distribución discreta de objetos puede aproximarse por una función de densidad  $\rho(\mathbf{r})$  (continua en todo el espacio), con una media

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle \equiv \bar{\rho} = n \quad (2.3)$$

tal que la función de auto-correlación adimensional es:

$$\xi(r) = \frac{\langle [\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \langle \rho \rangle][\rho(\mathbf{x}) - \langle \rho \rangle] \rangle}{\langle \rho \rangle^2} \quad (2.4)$$

y puede reescribirse como:

$$\langle \rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})\rho(\mathbf{x}) \rangle = n^2 [1 + \xi(r)] \quad (2.5)$$

Debe notarse que si en la expresión de  $\xi$  en (2.4) utilizamos la definición del campo de fluctuaciones  $\delta$  dada en (1.1), se obtiene:

$$\xi(r) = \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle \quad (2.6)$$

que es la definición dada en el Capítulo 1.

Puede verse que las ecuaciones (2.1) y (2.5) son bastante similares; podemos establecer una correspondencia más formal entre ellas. Para construir una distribución de objetos partiendo de la distribución continua, primero seleccionamos  $\rho(\mathbf{r})$  de la muestra, y luego en la región de cada elemento de volumen infinitesimal  $dV$  de la muestra, colocamos un objeto con una probabilidad

$$dP = \rho(\mathbf{r})dV$$

esto es un proceso de Poisson, en el cual la densidad de probabilidad es una función de la posición:  $\rho(\mathbf{r})$ . Para un dado  $\rho$ , la probabilidad conjunta de que un objeto sea asignado a los elementos de volumen  $dV_1$  y  $dV_2$  es:

$$dP = \rho(\mathbf{r}_1)dV_1\rho(\mathbf{r}_2)dV_2$$

si promediamos esto en toda la muestra de funciones y usamos (2.5) con la relación  $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ , encontramos que

$$dP = n^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r)]$$

donde ahora  $\xi(r)$  es la función de autocorrelación de  $\rho(\mathbf{r})$  y  $n^2$  está dado por (2.3)

Téngase en cuenta que esta definición dada para  $\xi$  es sólo un modelo; la definición dada en (2.1) le dá un sentido *descriptivo* a esta estadística, y por definición se prescribe la estima de esta función. El uso del modelo de Poisson tiene propiedades convenientes a la hora de comparar las predicciones teóricas con la distribución empírica de galaxias o cúmulos de galaxias.

Las estimaciones de la función de correlación de dos puntos para las galaxias muestra que  $\xi(r)$  puede ser aproximada por una ley de potencias (*Peebles 1993*) de la forma

$$\xi(r) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{-\gamma} \quad \text{con} \quad r_0 = (5,4 \pm 1)h^{-1}Mpc \quad \text{y} \quad \gamma = 1,77 \pm 0,04$$

esta aproximación es válida en el rango de escalas  $10kpc \leq rh \leq 10Mpc$ . Existe un apartamiento de la ley de potencias para  $r > 50Mpc$ , consistente con la homogeneidad en escalas grandes (*Groth & Peebles 1977*).

### 2.1.2. La función de correlación de $n$ -puntos

Así como definimos la función de correlación para dos puntos, la definición puede extenderse a  $n$ -puntos haciendo las consideraciones adecuadas. Recurriendo nuevamente a las analogías, podemos ampliar las definiciones dadas anteriormente y definir una

función de correlación de  $n$ -puntos  $\xi^{(n)}$  (funciones de correlación de altos órdenes) como el “exceso” en la probabilidad  $dP$ , con respecto a una distribución tipo Poisson, de encontrar una  $n$ -upla de objetos (*e.g.* galaxias) en volúmenes infinitesimales diferentes:

$$dP = \bar{\rho}^n [1 + \xi^{(n)}(r_{12}, r_{23}, \dots, r_{(n-1)n}, r_{n1})] dV_1 \dots dV_n$$

donde  $r_{ij}$  es la distancia entre el objeto  $i$  y el objeto  $j$ :  $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$

Como la probabilidad es proporcional al promedio espacial de las densidades en los  $n$  puntos, puede darse una relación entre  $\xi^{(n)}$  y las sobredensidades  $\delta_i$  en los puntos  $r_i$  de forma similar a (2.5):

$$1 + \xi^{(n)} = \left\langle \prod_i^n (1 + \delta_i) \right\rangle$$

La expansión de este producto da una expresión para el  $n$ -ésimo orden de la función de correlación. En el caso de  $n = 3$  ( $\xi^{(n)} = \xi^{(3)}$ ), se tiene:

$$\xi^{(3)} = \xi(r_{12}) + \xi(r_{23}) + \xi(r_{31}) + \zeta^{(3)}(r_{12}, r_{23}, r_{31})$$

donde  $\zeta^{(3)}(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \langle \delta(r_{12})\delta(r_{23})\delta(r_{31}) \rangle$  y se la define como la *función de correlación reducida de orden 3*; a continuación veremos una definición más completa.

En general, pueden definirse funciones de correlación de alto-orden como la parte *conectada* (subíndice  $c$ ) del promedio de una muestra del conjunto de la densidad en un número arbitrario de puntos, lo que puede escribirse como:

$$\xi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \langle \delta(\mathbf{x}_1), \dots, \delta(\mathbf{x}_n) \rangle_c \quad (2.7)$$

$$\equiv \langle \delta(\mathbf{x}_1), \dots, \delta(\mathbf{x}_n) \rangle - \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\})} \prod_{s_i \in \mathcal{S}} \xi_{s_i}^{(m)}(\mathbf{x}_{(1)s_i}, \dots, \mathbf{x}_{(m)s_i}) \quad (2.8)$$

donde  $\xi^{(n)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  es la función de correlación de  $n$  puntos y la suma se hace sobre todas las particiones propias  $\mathcal{P}$  (con el cardinal de  $\mathcal{P}$  siempre menor que  $n$ ) del conjunto  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  y  $s_i$  es un sub-conjunto de  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  contenido en la partición  $\mathcal{S}$ . Esta descomposición en la parte conectada y no-conectada puede visualizarse en forma más sencilla si notamos el hecho de que cualquier muestra promediada puede descomponerse en un producto de partes conectadas. Las figuras 2.1 y 2.2 muestran esquemáticamente el significado de la parte conectada y no conectada de una muestra de puntos para el caso de  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Un caso particular es cuando la distribución de las fluctuaciones es Gaussiana. En este caso, todas las funciones de correlación (o parte conectada de la distribución de fluctuaciones) son cero, excepto  $\xi_2$ ; esto es un resultado del *teorema de Wick*<sup>2</sup>. Como

<sup>2</sup>El teorema de Wick enuncia que si se consideran campos Gaussianos, cualquier promedio en una muestra de un producto de las variables, puede obtenerse como el producto del promedio de una muestra de pares.

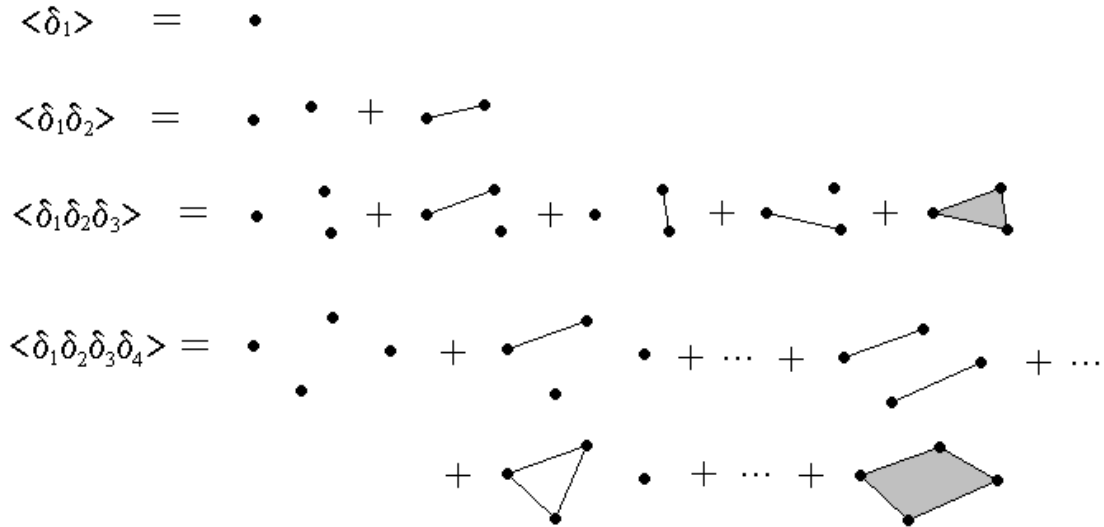


Figura 2.1: Diagrama esquemático donde se representan las correlaciones en una muestra de 1, 2, 3 y 4 puntos. En sombreado gris se muestra la parte conectada de la distribución.

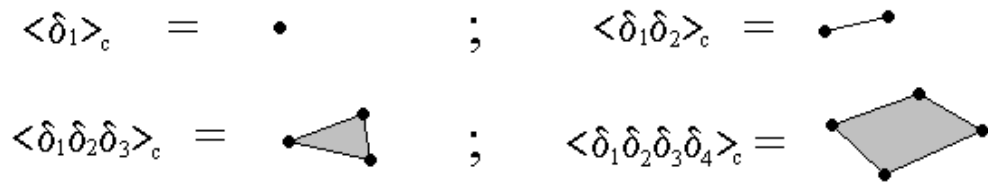


Figura 2.2: Diagrama esquemático de la parte conectada de las correlaciones en una distribución de puntos, para el caso de 1, 2, 3 y 4 puntos.

resultado, la única parte conectada distinta de cero es la función de correlación de dos puntos. Una consecuencia importante de esto es que las propiedades estadísticas de cualquier campo, no necesariamente lineal, construido a partir de un campo Gaussiano  $\delta$ , puede escribirse en término de una combinación de la función de correlación de dos puntos de  $\delta$ .

La parte conectada tiene una propiedad muy importante, y es que se hace cero cuando uno o más puntos están separados por una distancia infinita; esto da una forma útil de caracterizar las propiedades estadísticas ya que cada correlación conectada ofrece información independiente.

### 2.1.3. Momentos y cumulantes

Un caso particular de la ecuación (2.8) es cuando todos los puntos  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  se encuentran en el mismo lugar, debido a la homogeneidad estadística,  $\xi_p(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x})$  es independiente de la posición  $\mathbf{x}$  y se reduce a los cumulantes de una función densidad de probabilidades,  $\langle \delta^p \rangle_c$ . Ahora bien, la relación (2.8) nos dice como se relacionan los cumulantes con los momentos de la distribución, donde el  $p$  –ésimo momento se define como  $\langle \delta^p \rangle$ . Esta relación se obtiene expandiendo la función característica en series de potencia, sin embargo no hay ninguna fórmula analítica simple que pueda darse para encontrar los cumulantes, pero existen algoritmos simples para encontrar los cumulantes en función de los momentos (*Gardiner 1997; Meeron 1957; van Kampen 1973a, 1973b*). Las relaciones hasta el orden  $p = 5$  son:

$$\begin{aligned}
\langle \delta \rangle_c &= \langle \delta \rangle \\
\langle \delta^2 \rangle_c &= \sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle - \langle \delta \rangle_c^2 \\
\langle \delta^3 \rangle_c &= \langle \delta^3 \rangle - 3\langle \delta^2 \rangle_c \langle \delta \rangle_c - \langle \delta \rangle_c^3 \\
\langle \delta^4 \rangle_c &= \langle \delta^4 \rangle - 4\langle \delta^3 \rangle_c \langle \delta \rangle_c - 3\langle \delta^2 \rangle_c^2 - 6\langle \delta^2 \rangle_c \langle \delta \rangle_c^2 - \langle \delta \rangle_c^4 \\
\langle \delta^5 \rangle_c &= \langle \delta^5 \rangle - 5\langle \delta^4 \rangle_c \langle \delta \rangle_c - 10\langle \delta^3 \rangle_c \langle \delta^2 \rangle_c - 10\langle \delta^3 \rangle_c \langle \delta \rangle_c^2 - 15\langle \delta^2 \rangle_c^2 \langle \delta \rangle_c - \dots \\
&\quad \dots 10\langle \delta^2 \rangle_c \langle \delta \rangle_c^3 - \langle \delta \rangle_c^5
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Usualmente se denota  $\sigma^2$  al cumulante de segundo orden local; luego, el teorema de Wick, implica que en casos de campos de densidad Gaussianos  $\sigma^2$  es el único cumulante distinto de cero (decimos que es el único porque cuando se consideran distribuciones de fluctuaciones en la densidad se tiene que  $\langle \delta \rangle = 0$ ). Es importante mencionar que la función distribución de probabilidad se caracteriza esencialmente por sus cumulantes<sup>3</sup>, que constituyen un conjunto independiente; esto es importante ya que en lo que sigue de este trabajo los cumulantes se utilizarán en forma individual para inferir las propiedades estadísticas de la distribución de materia.

Para simplificar la notación, definiremos el  $p$  –ésimo momento como  $\langle \delta^p \rangle = m_p$  y al cumulante de orden  $n$  como  $\xi_n(\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}) \equiv \langle \delta^n \rangle_c = \mu_n$ . Como se había mencionado

<sup>3</sup>Nótese que una propiedad importante de los cumulantes es que satisfacen:  $\langle (b\delta)^n \rangle_c = b^n \langle \delta^n \rangle_c$  y  $\langle (b + \delta)^n \rangle_c = \langle \delta^n \rangle_c$ , donde  $b$  es cualquier número real.



anteriormente, tenemos que  $\langle \delta \rangle = 0$ , lo que simplifica notablemente las relaciones (2.9); se tiene entonces que (Fry 1984b, Fry 1985, Gaztañaga 1994, Bernardeau et al. 2002):

$$\mu_2 = m_2 \quad (2.10)$$

$$\mu_3 = m_3 \quad (2.11)$$

$$\mu_4 = m_4 - 3m_2^2 \quad (2.12)$$

$$\mu_5 = m_5 - 10m_3m_2 \quad (2.13)$$

estas expresiones para los cumulantes en función de los momentos son las que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

## 2.2. Análisis de Fourier del campo de fluctuaciones.

Es conveniente considerar el campo de fluctuaciones en la densidad como la superposición de muchos modos; para una geometría plana comóvil, el modo natural de hacerlo es a través del análisis de Fourier. Para otros modelos, las ondas planas no son un conjunto completo y deben usarse auto-funciones de la ecuación de onda en un espacio curvo; normalmente la diferencia es despreciable ya que aún en un universo abierto, las diferencias sólo importan en escalas del orden del horizonte actual

Usaremos la siguiente convención para la transformada de Fourier:

$$\delta(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \delta_k(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (2.14)$$

$$\delta_k(\mathbf{k}) = \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x$$

esto nos permite definir una herramienta estadística muy útil para el estudio del campo de fluctuaciones en el espacio de Fourier, definimos así el *espectro de potencias*  $P(k)$  como:

$$P(k) = \langle |\delta_k(\mathbf{k})|^2 \rangle \quad (2.15)$$

donde el promedio se realiza en ángulo sólido en el espacio de Fourier. Si además asumimos que el universo es isotrópico, el espectro de potencias debe ser independiente de la dirección de los vectores de onda, o sea, no puede tener una dirección privilegiada, por lo que tendremos un *espectro de potencias isotrópico* de la forma:

$$P(k) = \langle |\delta_k(\mathbf{k})|^2 \rangle = |\delta_k(k)|^2 \quad (2.16)$$

vemos así que el espectro de potencias tiene información de las amplitudes en el campo de fluctuaciones en las escalas dadas por  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Puede verse que el espectro de potencias está relacionado con la función de correlación; si utilizamos la definición dada en (2.6) de la función de correlación y usamos la convención dada anteriormente para la transformada de Fourier con la definición (2.16) para el espectro de potencias, se puede hacer la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\xi(r) &= \langle \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\delta(\mathbf{x}) \rangle \\ \xi(r) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int |\delta_k(\mathbf{k})|^2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^\infty P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} 4\pi k^2 dk\end{aligned}$$

es decir, el espectro de potencias es la transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos. Podemos ver entonces que usar la función de correlación es hacer estadística en el espacio real, y usar el espectro de potencias es hacer estadística en el espacio de Fourier.

Además de la isotropía estadística del campo de fluctuaciones, podemos requerir que las fases de los distintos modos de Fourier  $\delta_k(\mathbf{k})$  no estén correlacionadas y sean *aleatorias*. Esto corresponde a establecer las perturbaciones iniciales como un “*ruido aleatorio*”. El hecho de hacer la aproximación de fases-aleatorias tiene una consecuencia muy importante que se deriva del Teorema del Límite Central (*Rice 1945, 1954; Kendall & Stuart 1958; Riley et. al. 1997*), vagamente, éste establece que la suma de un gran número de variables aleatorias independientes tienden a una distribución normal. Analizando la definición dada en (2.14), se ve que para el campo de fluctuaciones en la densidad  $\delta(\mathbf{x})$  se obtiene una distribución Gaussiana, caracterizada completamente por su espectro de potencias. Esta aproximación de campos Gaussianos es muy útil cuando se trabaja con *máximos o picos de densidad* (*Peacock & Heavens 1985; Bardeen et. al. 1986*).

### 2.2.1. El espectro de potencias inicial

Como podemos ver, el espectro de potencias es una cantidad importante para el estudio de la formación de estructuras, por lo tanto haremos la cantidad mínima de asunciones para determinar la forma del espectro de potencias. En ausencia de alguna evidencia o teoría física, asumiremos que el espectro de potencias no tiene alguna escala privilegiada; consecuentemente,  $P(k)$  debe ser una ley de potencias:

$$P(k) \propto k^n$$

el índice  $n$  gobierna el balance entre las amplitudes de las fluctuaciones en pequeña y gran escala

Pueden establecerse restricciones al valor del índice  $n$  (*Peacock 1999*). Una homogeneidad asintótica del campo  $\delta(\mathbf{x})$  requiere que  $n > 3$ . Un límite superior de  $n < 4$  puede obtenerse a partir de un argumento debido a Zel’dovich el cual se basa en que

la agrupación de materia con la conservación del momento implica que no se puede obtener un espectro que tienda a cero en valores de  $k$  chicos (escalas grandes) más rápido que  $\delta_k \propto k^2$ , o sea,  $P(k) \propto k^4$ . Cuando  $n = 4$  el espectro se conoce como *espectro minimal*.

Existen alternativas más plausibles entre los extremos mencionados anteriormente. El valor de  $n = 0$  corresponde al denominado *ruido blanco* (distribución Poisson) ya que le asigna la misma amplitud a todas las longitudes de onda; este espectro también se conoce como *espectro de potencia de Poisson* ya que es el que se corresponde con una distribución aleatoria de puntos.

El más importante de todas las formas del espectro es el *espectro invariante en escala*, o *espectro de Zel'dovich*<sup>4</sup> que es el caso de  $n = 1$ ; un espectro de potencias de este tipo se corresponde con una distribución de materia que, correctamente balanceada con la escala, posee las mismas características en cualquier escala que se analice.

### 2.2.2. La variancia de la masa y el suavizado de los campos.

Para definir la variancia de la masa, definimos  $\langle M \rangle$  como la masa media dentro de un volumen esférico de radio  $R$ :

$$\langle M \rangle = \bar{\rho}V = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho} \quad (2.17)$$

definimos así la *variancia de la masa*  $\sigma^2(M)$  en la escala  $R$  como:

$$\sigma^2(M) = \frac{\langle M - \langle M \rangle^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} = \frac{\langle \delta M^2 \rangle}{\langle M \rangle^2}$$

y, a través de la equivalencia de las variables  $M$  y  $R$  dada por (2.17), podemos definir de manera análoga la variancia en la escala  $R$  como  $\sigma^2(M) \Rightarrow \sigma^2(R) = \langle [\delta(x; R)]^2 \rangle$ . Puede verse entonces que las variables  $M$ ,  $R$  y  $\sigma$  son equivalentes, por lo que se las usarán indistintamente a lo largo de este trabajo.

El campo de fluctuaciones en la densidad,  $\delta(\mathbf{x})$  no es una función suave de la posición  $\mathbf{x}$ , por lo que se lo suaviza convolucionándolo con una función ventana en la escala  $R$ ,  $W(r; R)$  de la forma:

$$\delta(\mathbf{x}; R) \equiv \int W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; R) \delta(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.18)$$

si usamos las definiciones (2.14) en la expresión anterior, y denotamos con  $\tilde{W}(kR)$  a la transformada de Fourier de la función ventana  $W(r; R)$ , y  $k \equiv |\mathbf{k}|$ , podemos escribir la expresión anterior como:

$$\delta(\mathbf{x}; R) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{W}(kR) \delta(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{k} \quad (2.19)$$

Las funciones ventanas, o filtros, en la escala de suavizado  $R$  más usados son:

<sup>4</sup>Este tipo de espectro también se lo conoce como *espectro Zeldovich-Harrison-Peebles*.

1. Filtro de sombrero, o “*Top-Hat*”:

$$W(r; R) = \frac{3}{4\pi R^3} \theta(R - r) = \frac{3}{4\pi R^3} \theta\left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (2.20)$$

$$\tilde{W}(kR) = \frac{3}{kR} j_1(kR) = \frac{3}{(kR)^3} (\sin kR - kR \cos kR) \quad (2.21)$$

donde  $\theta(x)$  es la función escalón de Heaviside y  $j_1(x)$  es la función esférica de Bessel de primer orden

2. Filtro Gaussiano:

$$W(r; R) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi R^2)^3}} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right) \quad (2.22)$$

$$\tilde{W}(kR) = \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right) \quad (2.23)$$

3. Filtro escalón en el espacio de Fourier, o “*Sharp k-space*”:

$$W(r; R) = \frac{1}{2\pi^2 R^3} \frac{R}{r} j_1\left(\frac{r}{R}\right) \quad (2.24)$$

$$\tilde{W}(kR) = \theta\left(\frac{1}{R} - k\right) \quad (2.25)$$

Podemos ahora definir la variancia del campo de densidad con un suavizado en la escala  $R$ ,  $\sigma^2(R)$  usando el hecho de que  $P(k)$  está dado por (2.15) y que tenemos isotropía angular en el espacio de Fourier:

$$\sigma^2(R) \equiv \langle \delta^2(x; R) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{W}^2(kR) P(k) d^3k \quad (2.26)$$

Definida de esta forma, la variancia puede relacionarse directamente con la función de correlación media, ya que la definición dada en (2.6), valuada en  $r = 0$ , y la primera igualdad de (2.26) establecen que:

$$\sigma^2(R) \equiv \langle \delta^2(x; R) \rangle \equiv \xi(0; R)$$

En la sección anterior definimos el espectro de potencias a menos de una constante  $\mathcal{A}$  que definimos como la amplitud. Esta constante se determina planteando que cuando  $R = R_* = 8h^{-1} Mpc$  y suavizamos el campo con un filtro Top-Hat<sup>5</sup> (esferas en el espacio real) se observa que  $\sigma(R_*)$ , usualmente denotado por  $\sigma_8$ , tiene un valor muy cercano a la unidad, lo que permite determinar el valor de  $\mathcal{A}$ ; este método para estimar la amplitud del espectro de potencias fue desarrollado por *White Efstathiou & Frenk (1993)*, quienes deducen un valor de  $\sigma_8 = 0,57 \pm 0,06$  para  $\Omega = 1$ . Estos resultados

<sup>5</sup>El valor de  $R_*$  define también un valor característico de la masa en las esferas de ese radio,  $M_*$  definida a través de la relación  $M_* = \frac{4}{3}\pi R_*^3 \bar{\rho}$  que depende del modelo.

se chequearon con simulaciones numéricas de N-cuerpos y los resultados muestran un buen acuerdo. En casos donde  $\Omega \neq 1$ , puede hacerse la siguiente aproximación:

$$\sigma_8 \simeq (0,5 - 0,6)\Omega^{-0,56}$$

El valor de  $\sigma_8$  como medida de la verdadera agrupación de la masa (constante de normalización) es un valor cosmológico fundamental; una medición de este valor nos da una idea del grado de sesgo ya que podemos comparar directamente las distribuciones de galaxias y de materia.

## Parte II

# La Formación de Estructuras

# Capítulo 3

## Modelos de colapso

En el comienzo de este trabajo hablamos acerca del modelo jerárquico en el cual las estructuras pequeñas colapsan primero, y luego le siguen las más grandes. Dijimos también que, bajo ciertos criterios, podemos asociar estas estructuras con sobredensidades del campo de densidad, y encontramos ecuaciones que nos dicen cómo evolucionan estas perturbaciones (Sección 1.4); pero las ecuaciones son para el régimen lineal, y fallan cuando  $\delta(x, t) \simeq 1$ . Como la mayoría de las estructuras observadas (galaxias, cúmulos de galaxias, etc) tienen sobredensidades mayores que la unidad, su estructura sólo puede entenderse a través de un tratamiento no-lineal para la evolución de las perturbaciones.

El estudio de la evolución no-lineal de las perturbaciones no es sencillo, pero podemos hacer un estudio analítico si asumimos algunas simplificaciones en los modelos de evolución. Las simplificaciones que se hacen se basan en asumir simetrías para la distribución de la materia. En este capítulo estudiaremos dos tipos de simetrías: simetría esférica, la cual se asocia con el modelo de colapso esférico; y la simetría elipsoidal, asociada con el modelo de colapso elipsoidal.

El *modelo de colapso esférico* (Peebles & Partridge 1967; Gunn & Gott 1972) ha sido ampliamente estudiado (Peebles 1980; Bertschinger 1985) y, como su nombre lo indica, utiliza una simetría esférica para una sobredensidad de materia que colapsa, teniendo en cuenta que la densidad fuera de esta perturbación<sup>1</sup>,  $\rho_b$ , se expande con la velocidad de Hubble.

El *modelo de colapso elipsoidal* plantea una simetría triaxial para la perturbación que colapsa (Icke 1973; White & Silk 1979; Peebles 1980; Monaco 1995; Bond & Myers 1996), pero algunos estudios no tienen en cuenta la densidad de materia fuera de la perturbación (White & Silk 1979), e incluso algunos no se reducen al régimen lineal cuando  $\delta \ll 1$  y asumen que dos de los tres ejes del elipsoide son siempre iguales -esferoides- (Icke 1973; Peebles 1980)<sup>2</sup>; en este capítulo estudiaremos el modelo de Bond

---

<sup>1</sup>En el caso de un universo con  $\Omega = 1$ , tendremos que  $\rho_b = \rho_c$

<sup>2</sup>Debe notarse que en el estudio de Peebles (1980) se advierte que sólo puede utilizarse el modelo descrito para el estudio de la evolución no-lineal, y que no debe aplicarse en el régimen lineal.

*ℰ Myers (1996)*, el cual tiene en cuenta la densidad de materia fuera de la perturbación, y se reduce al régimen lineal para valores pequeños de  $\delta$ . Cabe mencionar que *Monaco (1995)*, en forma independiente, a través de un método similar al de *Bond & Myers (1996)* obtuvo los mismos resultados.

### 3.1. Colapso esférico

Consideremos una sobredensidad  $\delta_i$  en el universo en un dado instante de tiempo  $t_i$ . Este contraste en densidad dividirá el universo en regiones sobredensas ( $\delta > 0$ ), y subdensas ( $\delta < 0$ ); es razonable esperar que las regiones significativamente sobredensas colapsarán formando objetos ligados gravitacionalmente. En estas regiones sobredensas la auto-gravedad de la concentración de masa actuará en contra de la expansión del universo, o sea, la expansión de la región será progresivamente más lenta que el campo de fondo. Esta disminución hará aumentar el contraste en densidad y, consecuentemente, el potencial gravitacional de esa región será más dominante. Eventualmente, esta región colapsará bajo la acción de su propia auto-gravedad y formará objetos ligados gravitacionalmente.

En este modelo tenemos una perturbación de simetría esférica con radio  $r_i$  en el campo de densidad  $\rho_b$  del universo, con una sobredensidad media  $\delta_i$  dentro de  $r_i$ , tal que  $\rho(t_i) = \rho_b(t_i) + \delta\rho(t_i) = \rho_b(t_i)[1 + \delta_i]$  en el tiempo  $t_i$ . Asumiremos también que la materia se comporta como un fluido ideal, y que las cáscaras esféricas del material que está colapsando hacia la perturbación no se cruzan.

Ponemos ahora una partícula a una distancia  $r$  del centro de la perturbación con  $r > r_i$ , debido a la simetría utilizada en el modelo, la ecuación de movimiento de una partícula en  $r$ , será la misma que la de una cáscara de radio  $r$ , por lo que la ecuación de movimiento para esta cáscara será:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

donde  $M$  estará dado por  $M = \bar{\rho}V$  y  $\bar{\rho}$  es la densidad dentro de la cáscara de radio  $r$ . Pedimos que fuera de la perturbación la densidad sea  $\rho_b$ , entonces:  $\bar{\rho} = \rho_b(t_i)[1 + \delta_i]$ ; con lo que la ecuación anterior podremos expresarla como:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{4\pi}{3}Gr\rho_b(1 + \delta_i) \quad (3.1)$$

Pueden encontrarse soluciones para  $r$  y  $t$  en forma paramétrica:

$$\begin{aligned} r &= A[1 - \cos(\mu)] \\ t &= B[\mu - \sin(\mu)] \end{aligned}$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes y satisfacen  $A^3 = GMB^2$ ; los valores de estas constantes se determinan fijando los valores de  $\delta_i$  y  $r_i$ . En las soluciones de  $r$  y  $t$  puede verse



que cuando  $\mu = \pi$ ,  $r$  alcanza su valor máximo, o “radio de turn-around”,  $r_{ta}$ , que estará dado por:  $r_{ta} = 2A$ ; esto sucede en el instante  $t_{ta}$  dado por:  $t_{ta} = \pi B$ . Podemos entonces re-escribir las ecuaciones para  $r$  y  $t$  como:

$$r = \frac{r_{ta}}{2}[1 - \cos(\mu)] \quad (3.2)$$

$$t = \frac{t_{ta}}{\pi}[\mu - \sin(\mu)] \quad (3.3)$$

Haciendo un desarrollo en serie de Taylor de la función seno en (3.3), y de la función coseno en (3.2), y truncando el desarrollo en el tercer término, podemos encontrar una función de la forma  $r(t)$  para valores pequeños de  $\mu$  (equivalentemente: valores pequeños de  $t$ ), que estará dada por:

$$r(t) \simeq \frac{r_{ta}}{4} \left( \frac{6\pi t}{t_{ta}} \right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{6\pi t}{t_{ta}} \right)^{2/3} \right] \quad (3.4)$$

Podemos plantear que la sobredensidad en la región de radio  $r$  será tal que:

$$\delta = \left( \frac{r_i}{r} \right)^3 \Rightarrow r = r_i \delta^{1/3} \quad (3.5)$$

si aproximamos la raíz cúbica hasta el primer orden (aproximación lineal) tendremos:

$$r \simeq r_i \left( 1 - \frac{1}{3} \delta \right) \quad (3.6)$$

Comparando esta última expresión con (3.4) y notando que estamos en la misma aproximación, podemos identificar el segundo término de (3.6) con el último término de (3.4), con lo que la sobredensidad  $\delta^{lin}$  en la aproximación lineal está dada por:

$$\delta^{lin} = \frac{3}{20} \left( \frac{6\pi t}{t_{ta}} \right)^{2/3} \quad (3.7)$$

En esta misma comparación, puede identificarse el primer factor de (3.4) con  $r_i$ .

Podemos ahora evaluar la solución aproximada (3.7) y compararla con la sobredensidad real (3.5) en distintos instantes de tiempo. Los instantes de tiempo en los que es interesante comparar estas aproximaciones son:

- *Turn-around (ta)*: La cáscara se separa de la expansión general y alcanza un radio máximo  $r_{ta}$  en el instante  $t_{ta}$ , a partir del cual comienza su contracción. En las ecuaciones (3.2) y (3.3) vemos que esto ocurre cuando  $\mu = \pi$ , con lo que:

$$\begin{aligned} \delta^{lin}|_{ta} &= 1,062 \\ \delta|_{ta} &= \left( \frac{r_i}{r_{ta}} \right)^3 \Big|_{ta} = 5,551 \end{aligned}$$

- *Colapso (coll)*: Bajo la acción de la gravedad, la cáscara que alcanza el “*turn-around*” colapsará en una singularidad con  $r_{coll} = 0$  en el instante  $t_{coll}$ . Esto sucede cuando  $\mu = 2\pi$ , con lo que  $t_{coll} = 2t_{ta}$ , entonces:

$$\begin{aligned}\delta^{lin}|_{coll} &= 1,686 \\ \delta|_{coll} &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

- *Virialización (vir)*: En la práctica el colapso nunca ocurre ya que intervienen otros procesos, además de la gravedad, que transformarán la energía cinética del colapso en movimientos aleatorios de las partículas, lo que ocasionará que las cáscaras se crucen; cuando esto sucede decimos que el sistema virializa. Se asume que esto ocurre en  $r_{vir} = \frac{r_{ta}}{2}$  en el instante  $t_{vir}$ . Esto es cuando  $\mu = \frac{3}{2}\pi$ , con lo que  $t_{vir} = \frac{t_{ta}}{\pi} \left(\frac{3}{2}\pi + 1\right)$ ; se tiene que:

$$\begin{aligned}\delta^{lin}|_{vir} &= 1,58 \\ \delta|_{vir} &= \left(\frac{r_i}{r_{vir}}\right)^3 \Big|_{vir} = 146,8\end{aligned}$$

Generalmente, se asume que la virialización ocurre en  $r_{vir} = \frac{r_{ta}}{2}$ , pero en un intervalo de tiempo equivalente al de colapso, o sea,  $t_{vir} = t_{coll} = 2t_{ta}$ . Con estos valores obtenemos que<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}\delta^{lin}|_{vir} &= 1,686 \\ \delta|_{vir} &= \left(\frac{2r_i}{r_{ta}}\right)^3 \Big|_{vir} = 177,65\end{aligned}\tag{3.8}$$

Puede notarse como se quiebra la aproximación lineal en las distintas instancias analizadas; aún así, la aproximación lineal no deja de ser útil a la hora de analizar la evolución de una perturbación cuando la densidad comienza a apartarse de la expansión general.

Hemos construido un modelo de lo que le sucede a una sobredensidad de materia en el universo en expansión determinando los valores, en distintas aproximaciones, de sobredensidad que tienen las estructuras cuando colapsan. Esto será útil cuando querramos construir un modelo para saber cuantos objetos ligados gravitacionalmente tenemos con una dada masa y en un dado redshift: la función de masa.

---

<sup>3</sup>En muchas ocasiones, el radio de los cúmulos de galaxias se fija tal que contenga una sobredensidad  $\delta_{vir} = 178$ . A veces se usa el valor  $\delta_{vir} = 200$ ; y el radio fijado de esta forma se denota  $r_{200}$ .

## 3.2. Colapso elipsoidal

El modelo de colapso esférico descrito en la sección anterior asume movimientos radiales para las capas de materia que están colapsando. Una forma simple para desarrollar un modelo que tenga en cuenta movimientos no-radiales, es considerar las cáscaras de materia como elipsoides y aproximar la materia por un fluido ideal con presión cero. Los primeros trabajos realizados con esta aproximación establecían, por simplicidad, la igualdad de dos de los tres ejes del elipsoide y que la densidad de materia fuera del elipsoide es cero (*Lynden-Bell 1964; Lin, Mestel & Shu 1965; Icke 1973*). Si en estos modelos, donde las cáscaras de materia son esferoides, se toman valores pequeños de la sobredensidad,  $\delta \ll 1$ , los resultados no se reducen al modelo de colapso esférico, como es de esperarse. El modelo de Peebles (1980) también falla en la aproximación  $\delta \ll 1$ , por lo que sólo puede utilizarse para comprender la evolución no-lineal de las perturbaciones y no debe aplicarse al régimen lineal. *White & Silk (1979)* desarrollaron un modelo en el que la densidad fuera del elipsoide es distinta de cero, pero no tuvieron en cuenta las fuerzas de marea generadas en el entorno de la perturbación y que son cruciales para determinar la evolución de la misma.

*Bond & Myers (1996)* obtuvieron un modelo que tiene en cuenta las fuerzas en torno a la perturbación, y sus resultados se reducen al los obtenidos en el modelo de colapso esférico en la aproximación lineal  $\delta \ll 1$ ; por lo que, en esta sección describiremos el modelo de *Bond & Myers (1996)* -BM de aquí en adelante.

El modelo de BM surge del desarrollo de un método para diferenciar, en las estructuras que están colapsando, la dinámica rápida interna (no-lineal) de la dinámica externa lenta (lineal). La imagen conceptual es la de una sección local de un máximo en la densidad o “*peak patch*” colapsando para formar un objeto, con dicha sección moviéndose como un todo con una velocidad peculiar debido a un campo de marea externo. La ubicación de la sección local del máximo será puntual (determinamos el máximo en dicha área), y la frontera entre lo interno (no-lineal) y lo externo (lineal) será necesariamente dependiente del tiempo para tomar en cuenta, por ejemplo, la acreción de masa o la fusión con otros objetos.

Un compendio muy completo acerca de resultados analíticos y análisis de aproximaciones numéricas al modelo de colapso elipsoidal puede encontrarse en el trabajo de *Del Popolo (2002)*.

### 3.2.1. Campos externos e internos

La evolución gravitacional no-lineal es un proceso altamente complejo, aún sin la complicación de la dinámica de gases o la dispersión inicial de velocidades. En un modelo CDM, la evolución gravitacional es un mapeo de coordenadas en el espacio Lagrangiano, de coordenadas no-perturbadas en las que las partículas tienen posiciones iniciales  $\mathbf{r}$ , a coordenadas en el espacio Euleriano altamente perturbadas con las partículas en las coordenadas (comóviles) Eulerianas dadas por  $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) \equiv \bar{a}(t)\mathbf{x}(\mathbf{r}, t)$  en el tiempo  $t$ , donde la coordenada Euleriana  $\mathbf{x}$  tiene factoreado el factor de expansión

promedio  $\bar{a}(t)$ . El mapeo puede, generalmente, escribirse en términos del campo de desplazamiento  $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$ , que describe la desviación de las partículas desde su posición inicial:

$$\mathbf{x}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{r} - \mathbf{s}(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

La velocidad peculiar está dada por:

$$\mathbf{V}_p \equiv \dot{\mathbf{X}} - H\mathbf{X} = -\bar{a}(t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$$

donde  $H \equiv \frac{d \ln(\bar{a})}{dt}$  es el parámetro de Hubble.

En la evolución temprana del medio, podemos usar la teoría lineal, por lo que podremos usar la separación de variables del campo de desplazamiento y la velocidad peculiar, lo que se conoce como aproximación de Zeldovich (*Zeldovich 1970*):

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = D(t)\mathbf{s}(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{V}_p(\mathbf{r}, t) = -\bar{a}(t)H_D\mathbf{s}(\mathbf{r}) \quad (3.11)$$

donde  $D(t)$  describe el modo de crecimiento lineal de las fluctuaciones<sup>4</sup> (Ver sección 1.4),  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  es el campo inicial de desplazamiento<sup>5</sup> y  $H_D \equiv \frac{\dot{D}}{D}$ .

### 3.2.2. Desplazamientos lineales y mareas.

Las cantidades que deben especificarse en un punto  $\mathbf{r}_{pk}$  para que sea un máximo del campo de densidad suavizado en la escala  $R_f$ ,  $\delta(\mathbf{r}, t; R_f)$  son:

- $\nabla_i \delta = 0$
- El tensor  $\nabla_i \nabla_j \delta < 0$

Aunque estas cantidades son importantes a la hora de determinar las características del núcleo del máximo en la densidad (BBKS), es la expansión del campo de desplazamiento,  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$ , en el entorno del máximo, el que es fundamental para la dinámica más que la expansión local del campo de densidad  $\delta$ ; ya que  $\mathbf{s}$  determina el camino a seguir de la región en torno al máximo.

Separaremos el campo  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  en dos términos.

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}_b(\mathbf{r}) + \mathbf{s}_f(\mathbf{r})$$

<sup>4</sup>Se normaliza la función  $D(t)$  tal que en el presente, su valor sea 1; por lo que en un modelo de un universo CDM con  $\Omega = 1$ ,  $D(t) \equiv \bar{a}(t)$ .

<sup>5</sup>El campo  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  está normalizado en  $D = 1$ , por lo que corresponde con la extrapolación del crecimiento lineal hasta el presente.

donde el campo  $\mathbf{s}_b(\mathbf{r})$  se suaviza en una escala grande, con  $R_f = R_{pk}$  ( $R_{pk}$  es la escala de suavizado de la fluctuación  $\delta(\mathbf{r}, t; R_{pk})$ ) y  $\mathbf{s}_f(\mathbf{r})$  es el residuo. Es conveniente considerar el campo “*fluctuante*”,  $\mathbf{s}_f$ , estadísticamente independiente del campo general “*de fondo*”,  $\mathbf{s}_b$ ; esto ocurre si el filtro de suavizado es un filtro escalón en el espacio de Fourier (2.25).

En la vecindad inmediata del máximo, el campo de fondo  $\mathbf{s}_b$  está completamente especificado por el desplazamiento del máximo como un todo  $\mathbf{s}_{pk} = \mathbf{s}_b(\mathbf{r}_{pk})$ , y por el tensor de deformación del máximo,  $e_{pk,ij}$ :

$$\mathbf{s}_{bi}(\mathbf{r}) \simeq \mathbf{s}_{pk,i} - \sum_j^i e_{pk,ij}(r - r_{pk})_j + \dots \quad (3.12)$$

donde el tensor de deformación está dado por (*Feynman et. al. 1998 Capítulo 39 -FLS de aquí en adelante*):

$$e_{pk,ij} \equiv -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial s_{bi}}{\partial r_j} + \frac{\partial s_{bj}}{\partial r_i} \right) (\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

y  $e_{pk,ij} \equiv e_{b,ij}(\mathbf{r}_{pk})$ . El campo fluctuante residual  $\mathbf{s}_f$ , predominantemente constituido de componentes espaciales con números de onda mayores a  $R_{pk}^{-1}$ , es importante para determinar sub-estructuras y tendrá influencia en el instante de colapso general; aún así,  $\mathbf{s}_{pk}$  y  $e_{pk,ij}$  serán fundamentales para determinar las características globales de la evolución del máximo en la densidad.

El tensor de deformación  $e_{pk,ij}$  puede separarse en su traza, que será igual a la sobredensidad lineal del máximo  $\delta_{pk} \equiv \delta(\mathbf{r}_{pk})$  (*BM, FLS*):

$$\delta_{pk} = -e_{pk,i}^i = [\nabla \cdot \mathbf{s}_b](\mathbf{r}_{pk})$$

y su parte anisotrópica  $e'_{pk,ij}$ :

$$e'_{pk,ij} = e_{pk,ij} + \frac{1}{3} \delta_{pk} \delta_{ij}$$

donde  $\delta_{ij}$  es la función *delta de Kronecker*. En la teoría lineal, el campo de marea peculiar,  $T_{l,ij}$ , actuando sobre la sección de máximo local es proporcional a  $e_{pk,ij}$ :

$$T_{l,ij} = -4\pi G \bar{\rho}_m e_{pk,ij} \quad (3.14)$$

El campo de marea peculiar se define como  $T_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi_P}{\partial X_i \partial X_j}$ , donde  $\Phi_P$  es el potencial gravitacional peculiar (Ver Apéndice A).

Podemos expandir el tensor de deformación (3.13) en sus auto-valores  $\lambda_{va}$  y sus auto-vectores unitarios  $\hat{n}_{va}$ , que determinarán los ejes principales del tensor<sup>6</sup>:

$$e_{pk}^{ij} = - \sum_{a=1}^3 \lambda_{va} \hat{n}_{va}^i \hat{n}_{va}^j \quad (3.15)$$

---

<sup>6</sup>Por la notación utilizada,  $e_{pk}^{ij}$  es la componente  $ij$  del tensor  $e_{pk,ij}$ .

con:

$$\begin{aligned}\lambda_{v1} &= \frac{\delta_{pk}}{3}(1 - 3e_v + p_v) \\ \lambda_{v2} &= \frac{\delta_{pk}}{3}(1 - 2p_v) \\ \lambda_{v3} &= \frac{\delta_{pk}}{3}(1 + 3e_v + p_v)\end{aligned}$$

donde  $e_v$  y  $p_v$  son parámetros del modelo. Puede verse que los auto-valores así definidos satisfacen que:

$$Tr(e_{pk,ij}) = \lambda_{v1} + \lambda_{v2} + \lambda_{v3} = \delta_{pk}$$

Los auto-valores quedan parametrizados en función de la altura relativa del máximo de sobredensidad  $\nu_{pk} = \frac{\delta_{pk}}{\sigma(R_{pk})}$ , la excentricidad  $e_v$  y el alargamiento hacia los polos  $p_v$ . Estos autovalores están definidos tal que satisfacen el siguiente ordenamiento:

$$\lambda_{v1} \leq \lambda_{v2} \leq \lambda_{v3} \quad (3.16)$$

por lo que el colapso ocurrirá primero en el tercer eje; dicho ordenamiento establece restricciones a los parámetros  $e_v$  y  $p_v$ :

$$\begin{aligned}0 &\leq e_v \\ -e_v &\leq p_v \leq e_v\end{aligned}$$

Los tres parámetros faltantes para fijar los seis grados de libertad del tensor simétrico  $e_{pk,ij}$  son los ángulos de Euler que establecen la orientación de los tres auto-vectores  $\hat{n}_{va}$ . La parte anisotrópica del tensor de deformación tiene autovalores  $\lambda'_{vi} \equiv \lambda_{vi} - \frac{\delta_{pk}}{3}$ , tal que su suma dé como resultado cero.

Usamos ahora el sistema de ejes principales del tensor de deformación, dados por sus autovectores, para describir la evolución del sistema en la vecindad de la coordenada del máximo,  $\mathbf{r}_{pk}$ . De la ecuación (3.12) para el  $a$  -ésimo eje, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{bi} - \mathbf{s}_{pki} &\simeq - \sum_j e_{pk,ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{pk}) \\ s_a - s_{pk,a} &\simeq -[-\lambda_{va}](r_a - r_{pk,a})\end{aligned} \quad (3.17)$$

donde se ha usado la expansión (3.15) para  $e_{pk,ij}$ , y que sus autovectores son unitarios. Para describir la evolución en la vecindad del máximo, tiene que determinarse la diferencia de coordenadas Eulerianas  $\mathbf{X} - \mathbf{X}_{pk}$ ; de (3.9) y (3.17) la diferencia en el  $a$  -ésimo eje es:

$$\begin{aligned}
X_a - X_{pk,a} &\simeq \bar{a}(r_a - s_a) - \bar{a}(r_{pk,a} - s_{pk,a}) \\
&\simeq \bar{a}(r_a - r_{pk,a})[1 - \lambda_{va}]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

en esta última ecuación puede verse el efecto local del campo en el que se encuentra la sección local del máximo: la región esférica en el espacio Lagrangiano (dada por el factor  $r_a - r_{pk,a}$ ) se distorsionará en un elipsoide homogéneo en el espacio Euleriano, dado por (3.18) en cada eje, tal que los ejes principales del elipsoide son los del tensor  $e_{pk,ij}$ . Finalmente, esta sección de máximo local se mueve con una velocidad  $\mathbf{V}_{pk} = \bar{a}H_D\mathbf{s}_{pk}$  dada por (3.11).

La dinámica de la región del máximo es mucho más complicada que lo descrito anteriormente, tendremos variaciones espaciales de  $\mathbf{s}_b$ , además, no se ha tenido en cuenta los efectos del campo  $\mathbf{s}_f$ ; sin embargo, los resultados son una buena aproximación para, al menos crudamente, tener en cuenta el campo de mareas en gran escala que actúa sobre la región del máximo. De acuerdo a BM, esta imagen de un elipsoide homogéneo puede pensarse como un “teorema del virial tensorial” a la dinámica interna.

### 3.2.3. El colapso de la Región del Máximo Local

Las ecuaciones dinámicas para el elipsoide se derivan en el Apéndice A. Por simplicidad se considera un modelo de universo con curvatura cero y  $\Omega = 1$ , con una densidad media de materia  $\bar{\rho}$ . Los límites de una esfera en el espacio Lagrangiano de radio  $R_{pk}$  evoluciona como  $X_i(t) = a_i(t)R_{pk}$ , donde  $a_i$  es el factor de escala para los tres ejes principales del elipsoide. Las ecuaciones que hay que resolver para  $X_i(t)$  son<sup>7</sup>:

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = -4\pi G\bar{\rho}_m X_i \left[ \frac{1}{3} + \frac{\delta_m}{3} + \frac{b'_i}{2}\delta_m + \lambda'_{vi}(t) \right] \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.19}$$

donde la sobredensidad  $\delta_m$  es:

$$\delta_m \equiv \frac{\delta\rho_m}{\bar{\rho}_m} \equiv \frac{\bar{a}^3}{a_1 a_2 a_3} - 1$$

y el parámetro  $b'_j(t)$  se define como (*Chandrasekhar 1969, Binney & Tremaine 1987*):

$$\begin{aligned}
b'_j(t) &\equiv b_j(t) - \frac{2}{3} \\
b_j(t) &\equiv a_1(t)a_2(t)a_3(t) \int_0^\infty \frac{d\tau}{[a_j^2(t) + \tau] \prod_{m=1}^3 [a_m^2(t) + \tau]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Las condiciones iniciales en el instante  $t_0$  se obtienen a partir de la aproximación de Zeldovich para el campo  $\mathbf{s}$ , (3.10) y (3.18), con lo que:

---

<sup>7</sup>Sólo se tiene en cuenta partículas de materia oscura fría y gas en la deducción de esta ecuación.

$$X_i(t_0) = \bar{a}(t_0)R_{pk}[1 - \lambda_{vi}(t_0)]$$

y para el campo de velocidades (3.11):

$$\begin{aligned}\dot{X}_i(t_0) &= \dot{V}_i(t_0) \\ &= V_{p,i} + HX_i \\ &= -a(t_0)H_D(t_0)\lambda_{vi} + H(t_0)X_i(t_0)\end{aligned}$$

Una vez que el elipsoide comienza a colapsar, el proceso simplemente se “congela” en el eje  $i$  una vez que  $a_i$  alcanza un valor crítico dado por  $a_{eq,i} = f_r \bar{a}$ , donde  $f_r$  es un factor constante que se denomina factor de detención radial. El redshift  $z_{c,1}$  del último eje en detenerse, que por (3.16) es el eje-1, es el redshift que se toma como indicador de virialización y de acuerdo a BM, es insensible al valor de  $f_r$ . Se elige el valor  $f_r = 0,18$  para este factor, ya que de esta forma se reproduce el contraste en densidad virial igual a 178 que se obtiene en el modelo de colapso esférico (3.8).

Puede verse la dependencia del redshift de colapso para la región elipsoidal con los parámetros del modelo, simplemente tabulando los valores de  $1 + z_{c,1}$  como función de los parámetros  $e_v$  y  $p_v$  para un dado valor de  $\delta_{pk}$ , para lo cual necesitamos resolver la ecuación (3.19) para  $i = 1$ :

$$\frac{d^2 a_1}{dt^2} = -4\pi G \bar{\rho}_m a_1 \left[ \frac{1}{3} - \frac{\delta_m}{3} + \frac{\delta_m}{2} a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{(a_1^2 + \tau)^{-3/2} d\tau}{(a_2^2 + \tau)^{1/2} (a_3^2 + \tau)^{1/2}} + \frac{\delta_{pk}}{3} p_v - \delta_{pk} e_v \right] \quad (3.21)$$

Para  $\Omega = 1$ ,  $1 + z_{c,1}$  es proporcional a  $\delta_{pk}$  (se tiene que  $D = \bar{a} \propto t^{2/3}$  cuando  $k = 0$ ), por lo que sólo se necesita una tabla de valores  $e_v - p_v$ .

En la figura 3.1 se muestran los redshift de colapso para los tres ejes, en función del parámetro  $e_v$ , que se obtienen al resolver la ecuación (3.19) cuando  $p_v = 0$  y  $\delta_{pk} = 2$  en un modelo CDM. Estos resultados se comparan con los obtenidos a partir de la aproximación de Zeldovich, la cual no sigue un acuerdo con los resultados obtenidos; sólo en el límite de  $e_v$  grandes el redshift de colapso del tercer eje tiende al comportamiento obtenido a partir de la aproximación de Zeldovich. Puede verse también que cuando un eje se hace casi nulo, la atracción gravitatoria sobre los otros dos ejes se hace tan grande que el colapso en estos dos ejes ocurre poco tiempo después. Se destaca también el hecho de que cuando  $e_v > 0,33$ , el autovalor  $\lambda_{v1}$  es negativo y el colapso total aún puede ocurrir.

Si reducimos estos resultados a la aproximación esférica, el campo de marea externo se anula, con lo que  $b'_j(t) = 0$  y la ecuación (3.19) se simplifica obteniéndose:

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_m (1 + \delta_m) X_i$$

que es idéntica a la solución (3.1) encontrada en el modelo de colapso esférico con  $k = 0$ .



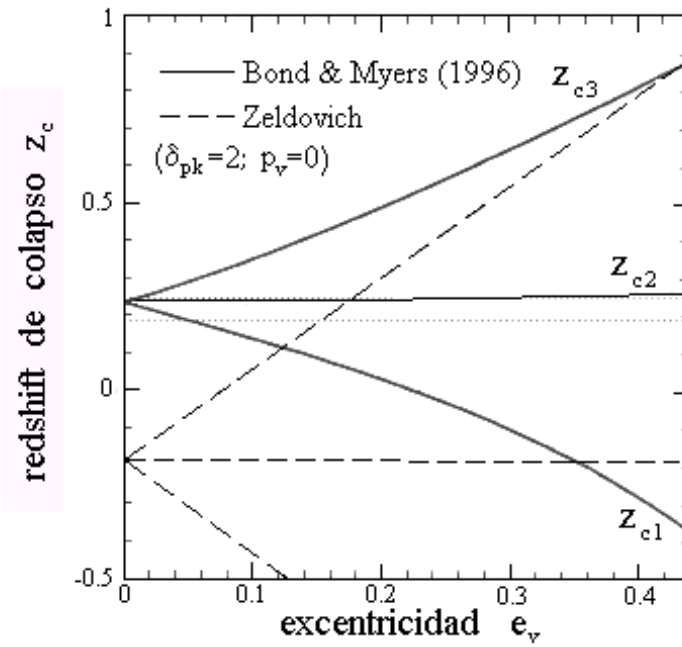


Figura 3.1: Los redshift de colapso para los tres ejes del elipsoide en función de la excentricidad  $e_v$ ; asumiendo  $p_v = 0$  y  $\delta_{pk} = 2$ . En línea continua se muestran los resultados de BM, y en línea discontinua se muestran los resultados cuando sólo se utiliza la aproximación de Zeldovich. También se muestra el resultado de cuando, en el caso del modelo de colapso esférico, la sobredensidad de la región llega a 170 (línea punteada superior) y cuando ocurre el colapso (línea punteada inferior)

# Capítulo 4

## La función de masa universal y condicional en el modelo de colapso esférico

Antes de comenzar a tratar el sesgo entre las distribuciones de galaxias y materia, primero debemos caracterizar las distribuciones. Usaremos la denominación más general de “halo” para referirnos a aglomeraciones de materia, usualmente se los denomina “halos de materia oscura” debido a que la materia que los forma es mayormente materia oscura. En este capítulo mostraremos los distintos modelos para la función de masa  $n(M, z)$  que nos dice la cantidad de halos de masa  $M$  que se forman en un redshift  $z$ . Existen dos teorías que pueden usarse para predecir el número de objetos que se forman con una dada masa: La teoría de *Press-Schechter (1974)* -PS de aquí en adelante-, y la teoría de picos de BBKS; ambas teorías son semi-analíticas por el hecho que debe lidiarse con integrales numéricas, pero la estructura básica de la teoría es analítica. En este capítulo estudiaremos la teoría de PS y su extensión hacia los llamados conjuntos de excursión<sup>1</sup>.

### 4.1. La función de masa universal: El enfoque de Press - Schechter.

La teoría de PS es un modelo simple y muy efectivo a la hora de estimar la densidad de halos de materia oscura. El modelo tiene tres pilares fundamentales que son los siguientes:

- i)* La teoría de crecimiento lineal de las perturbaciones.

---

<sup>1</sup>N. del T. La denominación en inglés es “*excursion set*”.

ii) El modelo de colapso esférico.

iii) La hipótesis de gaussianidad del campo de fluctuaciones  $\delta$ .

El primer ítem es necesario para poder determinar la evolución con el redshift  $z$ ; esto también restringe la aplicabilidad del modelo a escalas en donde los efectos no-lineales no son importantes. El segundo ítem nos proporciona un marco de referencia en el cual se forman los halos a partir de la agrupación de materia. El tercer y último ítem establece un punto de partida para la distribución de las perturbaciones en el campo de densidad.

La ubicación y propiedades de los objetos que colapsan pueden estimarse a través de un suavizado artificial del campo de densidades lineal inicial. Esto nos lleva a que el primer paso en este modelo sea suavizar el campo de fluctuaciones en una escala característica  $R$ , convolucionando dicho campo con una función ventana (algunas de las más usadas se definieron en la sección 2.2.2) y usar el hecho de que la transformada de Fourier de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas, con lo que:

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{x}; R) &\equiv \int W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|; R)\delta(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{W}(kR)\delta(\mathbf{k})e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}d\mathbf{k}\end{aligned}$$

definiendo la variancia en la masa como en (2.26), obtenemos una expresión para  $\sigma^2(R)$ :

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int \tilde{W}^2(kR)P(k)k^2dk \quad (4.1)$$

donde  $P(k)$  está dado por modelo (2.16). La variancia en la masa evoluciona con el redshift; para saber como evoluciona debemos encontrar una ecuación para  $\sigma$  que nos diga como cambia con el tiempo. Puede probarse (*Padmanabhan 1995*) que para  $R$  suficientemente grande,  $\sigma$  satisface la misma ecuación que el campo de fluctuaciones (1.14), o sea:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 4\pi G\bar{\rho}\sigma$$

con lo que, para un modelo de universo Einstein-de Sitter, la solución es:

$$\sigma(R, t) = \sigma(R, t_0)\frac{D(t)}{D(t_0)} = \sigma(R, t_0)(1+z)^{-1}$$

Podemos así expresar la variancia (4.1) con evolución en el tiempo de la forma:

$$\sigma^2(R) = \left(\frac{D(z)}{D(z_0)}\right)^2 \frac{1}{2\pi^2} \int \tilde{W}^2(kR)P(k)k^2dk = \frac{1}{2\pi^2(1+z)^2} \int \tilde{W}^2(kR)P(k)k^2dk$$

En el segundo paso del modelo usamos que el campo de fluctuaciones, ya convolucionado, sigue una función distribución de probabilidades gaussiana, por lo que:

$$p(\delta; R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(R)} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta \quad (4.2)$$

Antes de continuar, deben hacerse algunas consideraciones. En la aproximación del modelo de colapso esférico, asumiremos que los halos son aglomeraciones de materia oscura esféricamente simétrica y virializada, por lo que a la escala característica de suavizado  $R$  podemos asociarle la masa promedio  $\bar{M}$  de un halo con el radio comóvil de la región en donde se formó:

$$\bar{M} = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}$$

Además de la escala (nos dá una idea del tamaño), podemos determinar el instante de tiempo de colapso, ya que en un universo Einstein-de Sitter una perturbación esférica de sobredensidad  $\delta$  colapsa en un redshift  $z_c$  tal que:

$$\delta = \delta_c(1 + z_c)$$

donde  $\delta_c = 1,686$  es una constante determinada por el modelo de colapso (sección 3.1).

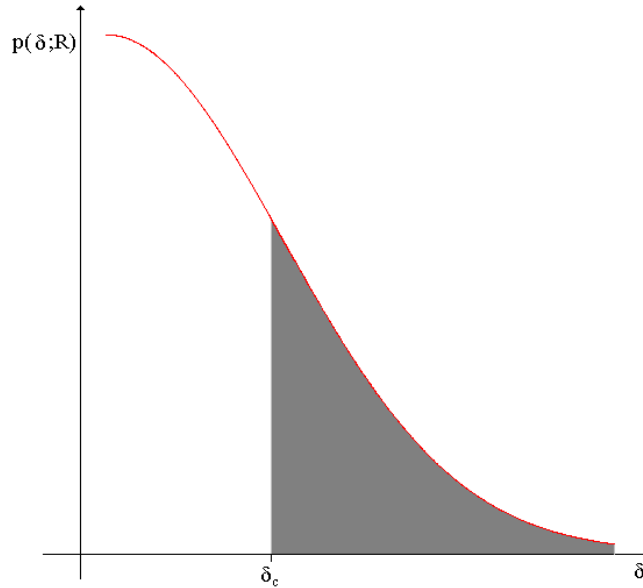


Figura 4.1: En este diagrama vemos la distribución de probabilidades de  $\delta$ . En sombreado gris se indica la probabilidad de que, bajo la hipótesis de Press-Schechter, las sobredensidades  $\delta > \delta_c$  hayan formado halos.

La hipótesis de la teoría de PS es que los halos existentes en un redshift  $z_1$  se corresponden con las regiones que en dicho redshift tienen una sobredensidad  $\delta(z_1)$  tal

que  $\delta(z_1) > \delta_c(z_1)$ , o sea, regiones que de acuerdo al modelo de colapso esférico, en su aproximación lineal, ya habrían colapsado<sup>2</sup>. En la figura 4.1 se muestra un diagrama de la distribución de probabilidades del campo de fluctuaciones, y en sombreado gris las amplitudes del campo  $\delta$  que se corresponden con halos (satisfacen  $\delta > \delta_c$ ).

Partiendo de la hipótesis planteada anteriormente y con la función distribución dada en (4.2), podemos calcular la probabilidad de que un elemento diferencial de masa  $dM$  forme parte de un halo de masa mayor que  $M$  en un dado redshift  $z$ ; esto lo hacemos integrando la función distribución del campo de fluctuaciones entre la sobredensidad  $\delta_c$  e  $\infty$  (calculamos el área sombreada de la figura 4.1), y llamamos a esa probabilidad  $F(M, z)$ :

$$\begin{aligned} F(M, z) &= \int_{\delta_c}^{\infty} p(\delta; R) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{1}{\sigma(R)} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(R)} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\operatorname{erfc}(x)$  es el complemento de la función error y está dada por:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

Para obtener la función diferencial de masa  $f(M, z)$ , o sea, la probabilidad de que un elemento de masa aleatorio forme parte de un halo con masa entre los valores  $M$  y  $M + dM$ , tenemos que tomar la diferencia de las probabilidades para halos de masa  $M$  y para halos de masa  $M + dM$ :

$$\begin{aligned} f(M, z) dM &= F(M, z) - F(M + dM, z) \\ &= -\frac{\partial F(M, z)}{\partial M} dM \end{aligned}$$

se tiene así que:

$$\begin{aligned} f(M, z) dM &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta_c}^{\infty} \frac{d\sigma}{dM} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{\sigma} e^{-\left(\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)} \right) d\delta dM \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dM} \int_{\delta_c}^{\infty} \left( \frac{\delta^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\left(\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)} d\delta dM \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Nótese que, extrapolado linealmente al presente, esto implica que la sobredensidad  $\delta_1$  del halo satisface  $\delta_1 > \delta_c = 1,686$ .

si integramos por partes esta última expresión encontramos que:

$$f(M, z)dM = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma^2(M, z)} \frac{d\sigma}{dM} e^{-\left(\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2(M, z)}\right)} dM \quad (4.4)$$

Para obtener la densidad numérica de halos, multiplicamos la expresión (4.4) por la densidad media de los halos y la dividimos por su masa (multiplicamos por  $\frac{\bar{\rho}}{M}$ ). Obtenemos así la cantidad de halos con masa entre  $M$  y  $M + dM$  en un dado redshift  $z$ , que es la función de masa  $n(M, z)$  que buscábamos:

$$n(M, z)dM = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma(M, z)} \left| \frac{d \ln(\sigma)}{d \ln(M)} \right| e^{-\left(\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right)} dM$$

Antes de continuar, debemos notar que esta última expresión tiene un problema. Partimos de plantear que la probabilidad de que un elemento diferencial de masa forme parte de un halo es:

$$F(M, z) = \int_{\delta_c}^{\infty} p(\delta; R) d\delta$$

si tomamos el límite  $M \rightarrow 0$ , con lo que  $\sigma(R) \rightarrow \infty$ , estamos calculando la probabilidad de que un elemento de masa esté en un aglomerado de cualquier masa; el efecto en  $p(\delta; R)$  es el de achatar y ensanchar la distribución dejando el área bajo la curva  $p(\delta; R)$  *vs.*  $\delta$  constante e igual a 1. Esto equivale a tomar valores de  $\delta_c$  cada vez más chicos, con lo que en el límite se obtiene:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} F(M, z) = \lim_{M \rightarrow 0} F(M, z) = \frac{1}{2}$$

por lo tanto, sólo la mitad de la masa del universo está en aglomerados de cualquier masa. Este problema en la teoría de PS se denominó “*the cloud in cloud problem*”. Una solución *ad-oc* es multiplicar  $F(M, z)$  por un factor 2 para obtener el valor esperado al obtener el límite; esto puede justificarse pensando que la contribución de la masa en regiones que en una dada escala de suavizado  $R$  no poseían sobredensidades mayores a  $\delta_c$ , pero fueron incorporadas a regiones de mayor densidad incrementando  $n(M, z)$  en un factor 2. El modelo de PS extendido es una solución alternativa a este problema y ofrece una justificación más seria.

Obtenemos así la función de masa diferencial que nos dice el número de halos de masa  $M$  que se encuentran en el redshift  $z$ :

$$n(M, z)dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{M^2} \frac{\delta_c}{\sigma(M, z)} \left| \frac{d \ln(\sigma)}{d \ln(M)} \right| \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma^2}\right) dM \quad (4.5)$$

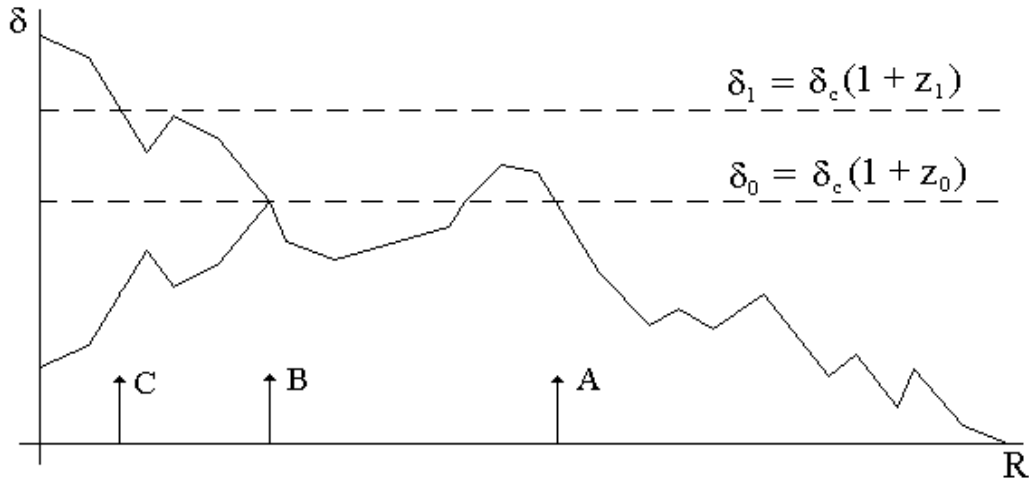


Figura 4.2: En este diagrama se muestra el campo de fluctuaciones en la densidad  $\delta$  suavizado en la escala  $R$ , en un mismo punto del espacio, para distintos valores de  $R$ . Si el filtro de suavizado se corresponde con un escalón en el espacio de Fourier, la trayectoria  $\delta(R)$  es un camino aleatorio.

## 4.2. El modelo de Press-Schechter extendido: conjuntos de excursión

El “*cloud in cloud problem*” en la teoría de PS se ha notado como una debilidad de la misma. En los trabajos de *Peacock & Heavens (1990)* y *Bond et. al. (1991)* -BCEK de aquí en adelante- se propone una solución a este problema al tener en cuenta la probabilidad de que, para un punto  $\mathbf{x}$  fijo en el espacio, el suavizado en escalas grandes, digamos  $R_1$ , dé como resultado una sobredensidad  $\delta_1$  tal que  $\delta_1 < \delta_c$  en  $\mathbf{x}$ , y para escalas de suavizado menores  $R_2 < R_1$  se obtenga  $\delta_2 > \delta_c$  en el mismo punto. El formalismo desarrollado al tener en cuenta esta probabilidad se denominó “*conjuntos de excursión*”.

Consideremos la figura 4.2, en donde se muestra una trayectoria aleatoria que sigue el campo suavizado  $\delta$ , en un punto fijo, como función de la escala de suavizado  $R$ . Esta trayectoria comienza cuando  $\delta = 0$  en  $R = \infty$ , y se producen fluctuaciones de amplitudes cada vez mayores a medida que nos movemos hacia valores de  $R$  más pequeños; por lo tanto, si  $\delta < \delta_c$  en un dado punto, es posible que supere el umbral  $\delta_c$  a partir de algún valor de  $R$ , de hecho, la variancia del campo  $\delta$  diverge cuando  $R \rightarrow 0$ , por lo que es inevitable que el umbral se supere. Por lo tanto, en vez de descartar los valores de  $\delta$  que para un valor de  $R$  no superan el umbral  $\delta_c$ , como plantea la teoría de PS, debemos encontrar el “primer cruce en dirección superior” de la trayectoria aleatoria  $\delta(R)$ , el valor más grande de  $R$  para el cuál  $\delta = \delta_c$ .

Si observamos la figura 4.2, vemos que a medida que nos movemos hacia valores de  $R$  pequeños, la variancia de  $\delta$  aumenta y en el punto  $R_A$  (correspondiente al indicador

A en la figura) se produce el primer cruce del umbral de colapso. La trayectoria  $\delta(R)$  puede caer por debajo del umbral para valores de  $R < R_A$  y volver a cruzar el umbral  $\delta_c$  en  $R_B$ , sin embargo, el objeto ya se asocia con un sistema colapsado en  $R_A$ , y no en  $R_B$ .

Mencionamos antes que  $\delta(R)$  es un camino aleatorio, o “*random walk*”, pero esto es cierto sólo para una elección particular de filtro: el filtro escalón en el espacio de Fourier (2.24). Cuando disminuimos  $R$ , lo que hacemos en la expresión que obtuvimos para  $\sigma^2$ :

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int \tilde{W}^2(kR)P(k)k^2 dk$$

se corresponde con agregar nuevas “*cáscaras*” al realizar la integración en la variable  $k$  para una dada escala. Con un filtro como el mencionado anteriormente logramos que cuando hacemos la integral en  $k$  para  $\sigma^2$ , y cambiamos el valor de  $R$ , tengamos un conjunto de cáscaras que no dependen del valor de  $k$  en una escala anterior (para cada valor de  $R$ , el resultado de la integración no depende de  $k$ ), por lo que el resultado es que  $\delta(R)$  es un camino aleatorio<sup>3</sup> (*Chandrasekhar 1943, 1954; BCEK; Cole 1989*).

Una vez que la trayectoria  $\delta(R)$  ha alcanzado el umbral  $\delta_c$  en  $R_B$ , su movimiento subsecuente será simétrico, por lo que es igualmente probable encontrar dicha trayectoria por encima como por debajo del umbral para valores de  $R < R_B$ . Los puntos que yacen sobre el umbral en un dado valor de  $R$  corresponden a trayectorias que ya han cruzado el umbral  $\delta_c$  en algún valor de  $R$  más grande; podemos encontrar la distribución de los puntos que están por debajo del umbral, y que alguna vez lo cruzaron o alcanzaron su valor, tomando la parte de la trayectoria que yace sobre el umbral y reflejándola verticalmente en dicho umbral<sup>4</sup>. De esta forma podemos construir la distribución de probabilidades de que el umbral  $\delta_c$  nunca haya sido cruzado (la probabilidad de supervivencia) restando a la distribución Gaussiana de  $\delta$  (los caminos que llegan al umbral) la distribución reflejada en el umbral (las trayectorias que han llegado o cruzado el umbral alguna vez, pero que ahora están por debajo); se obtiene así:

$$p_s(\delta; R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(R)} \left[ \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{(2\delta_c - \delta)^2}{2\sigma^2}\right) \right] d\delta \quad (4.6)$$

Si integramos esta cantidad entre  $\delta_c$  e  $\infty$ , y se la restamos a 1, obtendremos la probabilidad de que el umbral haya sido cruzado al menos una vez; esta condición es la pedida por PS, por lo que obtendremos la probabilidad  $F(M, z)$  de tener un halo con masa  $M$  en el redshift  $z$ :

---

<sup>3</sup>Téngase en cuenta que el camino aleatorio es en el espacio  $\delta - R$ , no en el espacio real. Siempre estamos considerando una única posición en el espacio en donde suavizamos la sobredensidad en distintas escalas.

<sup>4</sup>Una vez que el camino aleatorio llega al umbral  $\delta_c$ , es igualmente probable que cruce el umbral o que se refleje en él.



$$\begin{aligned}
F(M, z) &= 1 - \int_{\delta_c}^{\infty} p_s(\delta; R) d\delta \\
&= 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(R)} \right) = \operatorname{erfc} \left( \frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(R)} \right)
\end{aligned}$$

Puede notarse que esta expresión para la probabilidad  $F(M, z)$  es exactamente el doble que la encontrada en la teoría de PS (4.3), por lo que el factor 2 faltante ha sido encontrado. Desafortunadamente, este análisis se basó en que la trayectoria  $\delta(R)$  es un camino aleatorio y esto es únicamente válido cuando el filtro es un escalón en el espacio de Fourier, usando otro filtro volvemos al mismo problema de la teoría de PS: nos falta un factor 2. Sin embargo, la teoría de PS ha probado ser muy buena al comparar sus resultados con los obtenidos en simulaciones numéricas (*Efstathiou et al. 1988; Lacey & Cole 1994*).

Otro enfoque en la solución del “*cloud in cloud problem*” fue dado por *Jedamzik (1995)* en donde la solución propuesta se basa en resolver ecuaciones integrales en el espacio  $\delta - R$  redefiniendo las distribuciones de probabilidad; este desarrollo ha dado lugar el llamado “*formalismo de Jedamzik*” (*Nagashima 2001*).

Esta imagen, en donde la formación de los halos a partir de la distribución del campo de fluctuaciones  $\delta$  depende de la sobredensidad crítica  $\delta_c$  y de la escala de suavizado, ha permitido estudiar la formación de halos en distintas épocas simplemente moviendo el valor de la “*barrera*”  $\delta_c$  (que en el ejemplo mostrado en la figura 4.2 es una constante respecto a  $R$ ) con el redshift  $z$  (*Lacey & Cole 1993*). Otros modelos han desarrollado una expresión para la función de masa partiendo de una barrera lineal en el espacio  $\delta - R$  (*Sheth 1998*).

Analizar la función de masa en el espacio  $\delta - R$  permite expresar dicha función a partir del conteo estadístico de los caminos aleatorios que cruzan la barrera constante  $\delta_c$ . Si definimos  $\nu = \frac{\delta_c(1+z)}{\sigma(m)}$ , donde  $m$  es la masa correspondiente a la escala  $R$ , y definimos la función  $f(\nu)\nu$  como la distribución de los primeros cruces de la barrera  $B_\nu$  (a partir de la cuál la distribución de materia ha colapsado y formado objetos) por caminos aleatorios independientes no-correlacionados, se tiene entonces que la función de masa de objetos colapsados en el redshift  $z$ ,  $n(m, z)$ , satisface (*BCEK*):

$$\nu f(\nu) \equiv m^2 \frac{n(m, z)}{\bar{\rho}} \frac{d \ln(m)}{d \ln(\nu)} \quad (4.7)$$

Este enfoque permite determinar la función de masa para una barrera  $B_\nu$  elegida con alguna dependencia de  $\nu$  dada a partir de la realización de caminos aleatorios independientes, y computando la distribución de los cruces de  $B_\nu$  por estos caminos aleatorios.

En el caso del modelo de colapso esférico, la sobredensidad crítica requerida para el colapso en  $z$  es independiente de la masa  $m$  de la región colapsada y, consecuentemente, de  $\sigma(m)$ , entonces  $B_\nu$  debe ser constante para todo  $\nu$  ya que  $\nu \equiv \frac{\delta_c(z)}{\sigma(m)}$ . Para este modelo, y en un universo Einstein-de Sitter, se tiene entonces que  $B_\nu = \delta_c(z) =$

$\delta_c(1+z)$ ; y como los caminos aleatorios se asumen independientes y no-correlacionados, la distribución de los primeros cruces se puede obtener en forma analítica (BCEK):

$$\nu f(\nu) = 2 \left( \frac{\nu^2}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \right) \quad (4.8)$$

reemplazando esta expresión en (4.7) recuperamos la función de masa de PS con el factor 2 corregido.

Este enfoque permite separar los efectos cosmológicos del espectro de potencias ya que, el modelo cosmológico establece la dependencia de  $\delta_c(z)$  con  $z$  y su relación con la barrera  $B_\nu$ , y la forma del espectro de potencias fija la dependencia de la variancia  $\sigma(r)$  con la escala  $r$ .

### 4.3. La función condicional de masa en el modelo de Press-Schechter.

En la figura 4.2 se muestra también cómo se puede obtener la función condicional de masa al considerar dos barreras, una en el presente  $z_0$  con sobredensidad de materia  $\delta_0 = \delta_c$ , y otra en un tiempo anterior  $z_1$  tal que las estructuras colapsadas en este redshift tienen sobredensidades mayores a  $\delta_1 = \delta_c(1+z_1)$ . En este caso estamos considerando sobredensidades  $\delta = \delta_0$  que en el tiempo  $z = z_0$  estaban en sistemas de escala  $R_A$ , y que en un tiempo anterior  $z = z_1$  se encontraban en sistemas más pequeños de escala  $R_C$ . La expresión de la función de masa condicional fue encontrada independientemente por BCEK y Bower (1991); la formulación de Bower es más sencilla y directa y muy similar a la metodología seguida en la teoría de PS, por lo que a continuación describiremos dicha formulación.

Para determinar una expresión para la función condicional de masa, debemos primero encontrar la distribución de probabilidades del campo de fluctuaciones  $\delta_V$  en el volumen  $V$ , que está contenido en un volumen mayor  $V'$  en donde la sobredensidad promedio es  $\delta_{V'}$ ; además de pedir que  $V$  esté enteramente contenido en  $V'$ , también pediremos que  $V$  sea elegido aleatoriamente. La fórmula de Bayes nos permite expresar la distribución de probabilidad condicional de que dada la distribución de  $\delta_{V'}$ , tengamos la distribución de  $\delta_V$  a partir de la distribución de probabilidad conjunta de  $\delta_V$  y  $\delta_{V'}$ :

$$P(\delta_V|\delta_{V'}) = \frac{P(\delta_V, \delta_{V'})}{P(\delta_{V'})} \quad (4.9)$$

donde  $P(\delta_V)$  es la probabilidad de medir la sobredensidad  $\delta_V$  dentro de  $V$  (sin hacer referencia alguna a  $V'$ );  $P(\delta_V, \delta_{V'})$  es la probabilidad de medir la sobredensidad  $\delta_{V'}$  en  $V'$  (donde  $V'$  es elegido aleatoriamente) y  $\delta_V$  en  $V$  (donde  $V$  se elige aleatoriamente dentro de  $V'$ ); y  $P(\delta_V|\delta_{V'})$  es la probabilidad de medir  $\delta_V$  en  $V$  habiendo medido una sobredensidad  $\delta_{V'}$  en  $V'$  (contiene a  $V$ ).

Antes de continuar, consideremos lo siguiente: un par de variables aleatorias  $(x, y)$  distribuidas Gaussianamente que tienen una distribución de probabilidades conjunta que también es Gaussiana; o sea, la distribución de probabilidades conjunta puede ponerse como:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\sigma_{ij}|^2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\Delta x, \Delta y) \sigma_{ij}^{-1} (\Delta x, \Delta y)^T \right]$$

donde  $\Delta y = y - \bar{y}$ ;  $\Delta x = x - \bar{x}$  y  $\sigma_{ij}$  es la matriz de covariancia (*van Kampen 1992; Reichl 1998; Riley et. al. 1997*). Usando la fórmula de Bayes (4.9), podemos escribir la probabilidad condicional  $P(x|y)$  como el producto de un factor de normalización y un término exponencial que estará dado por:

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2 \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^4} \left( \frac{\Delta x}{\sigma_x} - \frac{\Delta y}{\sigma_y} \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \right)^2 \right]$$

si se observa bien, puede verse que este término corresponde a una distribución Gaussiana con una media dada por

$$\mu_{x|y} = \left( \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x \sigma_y} \right) \left( \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \right) \Delta y$$

y variancia

$$\sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_y^2 \left( \frac{\sigma_{xy}^4}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \right) \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \right)$$

Podemos entonces calcular la probabilidad  $P(\delta_V | \delta_{V'})$ , ya que la distribución de probabilidad de  $\delta_V$  y de  $\delta_{V'}$  es Gaussiana y puede verse (*Ver Sección 2.2; BBKS; Peacock & Heavens 1985*) que la distribución de probabilidades conjunta de  $\delta_V$  y  $\delta_{V'}$  también es Gaussiana ; debe entenderse a la distribución de probabilidad conjunta de  $\delta_{V'}$  y  $\delta_V$  de un volumen  $V$  elegido aleatoriamente como una suma pesada de la distribución Gaussiana para cada volumen particular  $V$ .

Una vez establecidos los términos de variancia

$$\sigma_V^2 = \langle \delta_V^2 \rangle \quad \sigma_{V'}^2 = \langle \delta_{V'}^2 \rangle$$

y co-variancia

$$\sigma_{VV'}^2 = \langle \delta_V \delta_{V'} \rangle$$

puede calcularse la distribución de probabilidad condicional para  $\delta_V$  elegido aleatoriamente, dado  $\delta_{V'}$ . Las variancias de  $\delta_V$  y  $\delta_{V'}$  están determinadas por el espectro

de potencias  $P(k)$  que se asume para el campo de fluctuaciones en la densidad. Este espectro de potencias también determina la co-variancia  $\sigma_{VV'}^2$ , y puede probarse que<sup>5</sup>

$$\sigma_{VV'}^2 = \sigma_{V'}^2, \quad (4.10)$$

Escribiendo correctamente el factor de normalización de la distribución  $P(x|y)$  y teniendo en cuenta la ecuación (4.10), obtenemos:

$$P(\delta_V|\delta_{V'})d\delta_V = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_V^2 - \sigma_{V'}^2)}} \exp\left[-\frac{(\delta_V - \delta_{V'})^2}{2(\sigma_V^2 - \sigma_{V'}^2)}\right] d\delta_V \quad (4.11)$$

puede verse que esta distribución de probabilidad tiene la media esperada ( $\langle\delta_V\rangle = \delta_{V'}$ ), y que cuando  $V' \gg V$  ( $\sigma_{V'} \ll \sigma_V$ ) la distribución de  $\delta_V$  tiene la misma dispersión en todas partes, pero con un valor medio corrido debido a una “sobre densidad de fondo”  $\delta_{V'}$ .

Por la equivalencia de las variables  $V$  y  $M$ , tenemos que  $\delta_V \equiv \delta_M$ , y  $\delta_{V'} \equiv \delta_{M'}$ ; además haremos el siguiente cambio de notación:  $\delta_M = \delta_1$  y  $\delta_{M'} = \delta_0$ , o sea que a las variables primadas se les asociará el subíndice 0, y a las variables sin primar el subíndice 1.

Ahora podemos seguir el mismo camino que utilizamos en la teoría de PS y, a partir de la distribución de probabilidades (4.11), podemos determinar la probabilidad  $F(M_1, \delta_1|M_0, \delta_0)$  de tener regiones con masa  $M_1$  y sobre densidad mayor o igual a  $\delta_1$ , contenidas en una región de mayor escala con masa  $M_0$  y sobre densidad  $\delta_0$  (estas regiones con masa  $M_1$  serán luego incorporadas en el colapso de la región más grande de masa  $M_0$ ), simplemente integrando entre  $\delta_1$  e  $\infty$ :

$$\begin{aligned} F(M_1, \delta_1|M', \delta') &= \int_{\delta_1}^{\infty} P(\delta_V = \delta|\delta_{V'} = \delta')d\delta & (4.12) \\ &= \int_{\delta_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 - \sigma_{M'}^2)}} \exp\left[-\frac{(\delta - \delta')^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_{M'}^2)}\right] d\delta \\ &= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_{\frac{(\delta - \delta')}{\sqrt{2(\sigma_1^2 - \sigma_{M'}^2)}}}^{\infty} e^{-u^2} du & (4.13) \end{aligned}$$

La ecuación (4.12) nos determina la fracción de masa en halos colapsados con masa mayor a  $M_1$  en el redshift  $z_1$  dado por  $\delta_1(z_1) = \delta_c(1 + z_1)$ ; nótese que hemos usado una dependencia implícita del tiempo ya que estamos utilizando el mismo criterio que

---

<sup>5</sup>Nótese que la sobre densidad media de volúmenes pequeños  $V$ , contenidos en  $V'$ , se asume igual que la sobre densidad de la región  $V'$  como un todo:

$$\sigma_{VV'}^2 = \langle\langle\delta_V\rangle_V, \delta_{V'}\rangle_{V'} = \sigma_{V'}^2,$$

PS para decidir si una región de sobredensidad  $\delta$  colapsa y forma un halo:  $\delta > \delta_c$ , que debido a la evolución lineal de las perturbaciones el criterio anterior se transforma en:  $\delta > \delta_1 = \delta_c(1 + z_1)$ .

De ahora en adelante usaremos la siguiente convención para los subíndices: el subíndice 0 hará referencia a regiones no colapsadas, en el caso de  $\delta_0$  deberá interpretarse como la sobredensidad de la región extrapolada al presente; los subíndices 1, 2, etc., se referirán a halos colapsados, y en el caso de  $\delta_1$  deberá interpretarse como la sobredensidad  $\delta_c$  multiplicada por  $1 + z_1$ , donde  $z_1$  es el redshift en el que el halo es identificado.

Podemos seguir el mismo procedimiento que PS, y calcular la función diferencial condicional de masa  $f(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$  como la fracción de masa que en una región de tamaño  $R_0$  y sobredensidad lineal  $\delta_0$ , en el redshift  $z_1$  está contenida en halos colapsados con masa entre  $M_1$  y  $M_1 + dM_1$  (donde  $M_1 < M_0$ ), para lo cual tomamos la diferencia entre las probabilidades (4.13) para halos con masa  $M_1$ , y para halos con masa  $M_1 + dM_1$ :

$$\begin{aligned} f(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) dM_1 &= F(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) - F(M_1 + dM_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) \\ &= -2 \frac{\partial F(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)}{\partial M_1} dM_1 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Se ha agregado el factor 2 ya que en la formulación de esta teoría también persiste la dificultad del “*cloud in cloud problem*” de la teoría de PS<sup>6</sup>.

Si reemplazamos (4.13) en (4.14) y resolvemos en forma similar a como hicimos en la sección anterior, obtenemos:

$$f(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) dM_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_1}{\sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)^3}} (\delta_1 - \delta_0) \exp \left[ -\frac{(\delta_1 - \delta_0)^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)} \right] \frac{d\sigma_1}{dM_1} dM_1 \quad (4.15)$$

Se tiene así la distribución de halos que en  $z_1$  con masa  $M_1$  terminan en una región con masa  $M_0$  (en una región  $R_0$ ) en  $z_0$ . Podemos obtener el número medio de halos con masa  $M_1$  identificados en  $z_1$  que están en una región con radio comóvil  $R_0$  (masa  $M_0$ ) y sobredensidad  $\delta_0$ , simplemente multiplicando la expresión anterior por el factor  $\frac{M_0}{M_1}$ :

$$\mathfrak{N}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) dM_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M_0}{\sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)^3}} (\delta_1 - \delta_0) \exp \left[ -\frac{(\delta_1 - \delta_0)^2}{2(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)} \right] \frac{d\sigma_1^2}{dM_1} \frac{dM_1}{M_1} \quad (4.16)$$

Debe notarse que  $M_1$  es la masa del halo colapsado en  $z_1 > 0$ , mientras que  $M_0$  es la masa de una región no colapsada en  $z = 0$ , por lo que se tendrá  $\delta_1 > \delta_0$ .

<sup>6</sup>Si utilizamos una función distribución para las sobredensidades como la dada en (4.6), el factor dos aparece naturalmente.

El análisis de estas funciones de probabilidades también permite la determinación de la función de probabilidad conjunta para las sobredensidades en distintas escalas (*Bower 1991*).

# Capítulo 5

## Las estructuras en el modelo de colapso elipsoidal: La función de masa universal y condicional.

Las simulaciones numéricas de N-cuerpos han sido de gran ayuda en el estudio de la aglomeración de la materia en el universo (*Efstathiou et. al. 1985, Hockney & Eastwood 1988, Yepes 1997 y las referencias allí citadas, Bertschinger 1998*). Cuando se dispuso de simulaciones numéricas con un amplio rango de masa para los halos identificados (*simulaciones GIF: Kauffman et. al. 1999; simulaciones Hubble Volume: Jenkins et. al. 1998*), se hizo evidente que el modelo de PS sobreestimaba la cantidad de halos de baja masa, y subestimaba el número de halos de alta masa (*Jing 1998, Sheth & Tormen 1999*). En el modelo analítico para la función de correlación media de dos puntos propuesto por *Mo & White (1996)* se encontró también una discrepancia con las simulaciones en el extremo de baja masa.

*Sheth, Mo & Tormen (2001)* -SMT de aquí en adelante- sugirieron que esta discrepancia en la función de masa y en la función de correlación, se debía a que el modelo asumido para la formación de halos era el modelo de colapso esférico, mientras que el colapso real de las estructuras en un campo de densidad puede aproximarse mejor por un modelo de colapso elipsoidal. De esta forma, SMT encontraron una función de masa a partir de asumir que las estructuras colapsan siguiendo el modelo de colapso elipsoidal (Ver Sección 5.1).

Se han sugerido otras formas para las funciones de masa, partiendo ya sea de un ajuste en los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas (*Sheth & Tormen 1999, Jenkins et. al. 2001*), o de asumir otros modelos para el colapso de las estructuras (*Lee & Shandarin 1998, Chiueh & Lee 2001*) que, en general, son de simetría elipsoidal. Sin embargo, todos estos modelos, al igual que el modelo de SMT, requieren el ajuste de parámetros que se hace a través de simulaciones numéricas (Ver Sección 5.2).

*Sheth & Tormen (2001)* -ST de aquí en adelante-, siguiendo el trabajo de *Lacey &*

*Cole (1993)*, propusieron una expresión analítica para la función de masa condicional obtenida a partir de la función de masa de SMT. En ese trabajo, la determinación de la función de masa condicional en el modelo de colapso elipsoidal se basa en comparaciones con los procedimientos seguidos en la obtención de dicha función en el modelo de colapso esférico (*Bower 1991*), sin embargo, los autores encuentran que los resultados obtenidos no concuerdan en todos los redshifts con las mediciones en las simulaciones numéricas. Se tratará el trabajo de ST en la última sección de este capítulo, y reescribiremos las funciones universal y condicional de masa para una aplicación más directa al modelo de sesgo.

## 5.1. La función de masa universal en el modelo de colapso elipsoidal

En el capítulo anterior se desarrolló la teoría de conjuntos de excursión, en donde la función de masa de PS podía obtenerse analizando los primeros cruces de las trayectorias en el espacio  $\delta - R$  (distintas escalas de suavizado en un mismo punto) a una barrera constante. El hecho de que la barrera sea constante se debe a que, en el modelo de colapso esférico, la sobredensidad a partir de la cual la distribución de masa virializará y formará un halo es constante para cada redshift, y no depende de la escala o, equivalentemente, de la masa (Ver Sección 4.2)

Una de las hipótesis en el trabajo de PS es que las estructuras colapsan siguiendo el modelo esférico, a partir de lo cuál se puede aproximar la función de masa  $n(M, z)$  considerando la estadística del cruce de barrera de los caminos aleatorios no correlacionados, donde la barrera  $B_\nu$  sólo depende del instante de colapso  $z$ . SMT modifican esta hipótesis por el hecho de que una mejor aproximación al modelo de colapso es asumir que las estructuras colapsan siguiendo una simetría triaxial; en particular, usan el modelo de colapso elipsoidal de BM ya que tiene en cuenta los campos de marea externo a la perturbación.

Como en principio un eje puede colapsar hasta radio cero, el colapso se congela en cada eje una vez que se ha alcanzado un cierto factor crítico; este factor se elige tal que se detenga el colapso cuando la sobredensidad dentro de la perturbación es la misma que la obtenida en el modelo de colapso esférico (179 veces la densidad crítica; el mismo criterio de BM).

Si asumimos un modelo de universo Einstein-de Sitter, la evolución de una perturbación elipsoidal estará determinada por tres parámetros: los autovalores del tensor de deformación, que estarán en función de la excentricidad  $e$ , el alargamiento hacia los polos  $p$  y el contraste en densidad  $\delta$  ( $e$  y  $p$  coinciden con lo que BM llaman  $e_\nu$  y  $p_\nu$ ) y satisfacen que  $|p| \leq e$  (Ver Sección 3.2). A partir del modelo de colapso elipsoidal se pueden encontrar soluciones para el instante de colapso en función de la excentricidad, para un dado valor de  $p$  y  $\delta$  (ecuación 3.21) como se ve en la figura 3.1. SMT construyen la figura 5.1 a partir de estas soluciones, en donde se muestra el factor de expansión en el instante de colapso en función de  $e$  y  $p$  para una región con sobredensidad inicial



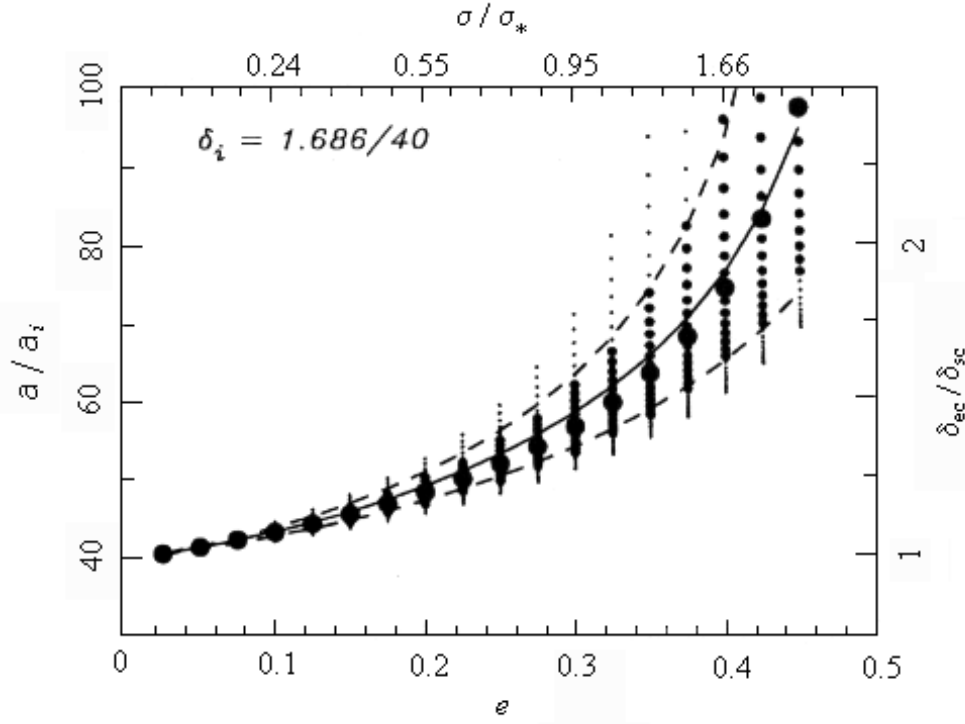


Figura 5.1: Evolución de una perturbación elipsoidal, donde los símbolos muestran el factor de expansión cuando el eje mayor colapsa y virializa en función de  $e$  y  $p$  (los intervalos en  $p$  son de 0,025) para una sobredensidad inicial  $\delta_i$ . La curva sólida continua muestra el ajuste dado por SMT para  $\delta_{ec}(e, p)$  cuando  $p = 0$ ; las curvas discontinuas muestran la relación para  $|p| = e/2$ . El eje derecho del gráfico muestra el valor de la sobredensidad crítica  $\delta_{ec}$  necesaria para el colapso; el eje superior muestra los resultados de la relación  $\delta_{ec} - \sigma$  obtenidos por SMT, partiendo de la relación  $\delta_{ec} - e$  cuando  $p = 0$ .

$\delta = 1,686/40$ ; para un dado valor de  $e$  los círculos más grandes corresponden a  $p = 0$ , los medianos a  $|p| \leq e/2$  y los más chicos a  $|p| \geq e/2$ . En promedio, la virialización ocurre más tarde a medida que  $e$  aumenta y, para un dado valor de  $e$ , ocurre más tarde a medida que  $p$  decrece.

En el caso de un universo Einstein-de Sitter, el factor de crecimiento lineal es proporcional al factor de expansión ( $D(t) \propto a(t)$ ), por lo que el gráfico mostrado en la figura 5.1 puede usarse para construir la sobredensidad en el modelo de colapso elipsoidal<sup>1</sup> en función de las variables  $e$  y  $p$ ,  $\delta_{ec}(e, p)$ . No hay una forma analítica para determinar esta sobredensidad, sino que se determina a través de un ajuste para un rango determinado de  $e$  y  $p$ ; una aproximación razonable para  $\delta_{ec}(e, p)$  se obtiene

<sup>1</sup>En el modelo de colapso esférico (Sección 3.1), la sobredensidad se construye a partir de las soluciones paramétricas a la ecuación diferencial de segundo orden para  $\delta$  (ecuación 3.7)

resolviendo:

$$\frac{\delta_{ec}(e, p)}{\delta_{sc}} = 1 + \beta \left[ 5(e^2 \pm p^2) \frac{\delta_{ec}^2(e, p)}{\delta_{sc}^2} \right]^\gamma \quad (5.1)$$

donde  $\beta = 0,47$  y  $\gamma = 0,615$  son parámetros del ajuste,  $\delta_{sc}$  es la sobredensidad crítica del modelo de colapso esférico y el signo más (menos) corresponde a valores de  $p$  negativos (positivos). La curva continua en la figura 5.1 muestra el ajuste dado en (5.1) para  $p = 0$  y las dos curvas a trazos discontinuos muestran el ajuste para  $|p| = e/2$ . Debe notarse que cuando  $\gamma = 0,5$  la relación dada para  $\delta_{ec}$  tiene solución analítica y para  $p = 0$ , se tiene:

$$\delta_{ec} \approx \frac{\delta_{sc}}{(1 + e)}$$

lo que dá una idea de la dependencia funcional de  $\delta_{ec}$  con los parámetros antes mencionados.

El caso a considerar es el del colapso de un elipsoide a partir de un campo de fluctuaciones Gaussianas. En el Apéndice B se muestra que para una dada escala de suavizado  $R$ , o equivalentemente  $\sigma(R)$ , hay un rango de valores probables de  $e$ ,  $p$  y  $\delta$  que determinaremos a través de una distribución de probabilidades  $p(e, p, \delta/\sigma)$ ; esto significa que hay un rango de instantes de colapso asociado con regiones de tamaño  $R$ . A través de esto podríamos obtener una estima para la sobredensidad crítica en el modelo de colapso elipsoidal como función de  $\sigma$ ,  $\delta_{ec}(\sigma)$ , si promediamos adecuadamente  $\delta_{ec}(e, p)$  en el rango de valores probables de  $e$ ,  $p$  y  $\delta$  para la escala  $R$ , o sea, si lo promediamos en  $p(e, p, \delta/\sigma)$ .

Esta “receta”, como podría llamarse al procedimiento anterior, ha sido llevada a cabo por otros autores (*Monaco 1995; Audit, Teyssier & Alimi 1997; Lee & Shandarin 1998, Chieuh & Lee 2001*) en una forma u otra, ya que lo que se busca es pasar de la sobredensidad en función de los parámetros  $e$  y  $p$ ,  $\delta_{ec}(e, p)$ , a la sobredensidad en función de la escala o de la variancia,  $\delta(\sigma)$ .

En promedio, en un campo de fluctuaciones Gaussiano, se tiene que  $p = 0$ . La curva continua en la figura 5.1 muestra el ajuste dado en (5.1) a través de la cual podemos computar  $\delta_{ec}$  asociado a ese instante de colapso:  $\delta_{ec}(e, z)$  con lo que tendremos

$$\frac{\delta_{ec}(e, z)}{\delta_{sc}} = 1 + \beta \left[ 5e^2 \frac{\delta_{ec}^2(e, z)}{\delta_{sc}^2} \right]^\gamma \quad (5.2)$$

con lo que sólo nos faltaría relacionar  $e$  con la masa  $m$  para obtener una expresión de la sobredensidad crítica  $\delta_{ec}$ , o barrera en el espacio  $\delta - R$ . Esta relación puede establecerse teniendo en cuenta que las regiones que inicialmente tienen un dado valor de  $\delta/\sigma$ , es más probable que tengan una excentricidad  $e_{mp}$  tal que (ecuación B.5 en Apéndice B):

$$e_{mp} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sigma}{\delta} \quad (5.3)$$

y para colapsar y formar un objeto en  $z$ , la sobredensidad inicial de dicha región debería ser la sobredensidad crítica  $\delta_{ec}(e_{mp}, z)$ . Si planteamos entonces que la sobredensidad  $\delta$  en (5.3) sea la sobredensidad crítica  $\delta_{ec}(e, z)$ , fijamos así la variancia  $\sigma(R)$  y como  $R^3$  es proporcional a la masa  $m$  tenemos la relación entre  $e$  y la masa  $m$ , consecuentemente, la relación entre  $\delta_{ec}$  y la masa reemplazando (5.3) en (5.2):

$$\delta_{ec}(\sigma, z) = \delta_{sc}(z) \left\{ 1 + \beta \left[ \frac{\sigma^2}{\delta_{sc}^2(z)} \right]^\gamma \right\} \quad (5.4)$$

Los ejes superior y derecho de la figura 5.1 corresponden a esta relación.

En esta expresión para la sobredensidad crítica vemos que el espectro de potencias sólo aparece en la relación entre  $\sigma$  y  $m$ , mientras que los efectos del modelo cosmológico asumido sólo aparecen en la relación entre  $\delta_{sc}$  y  $z$ . La expresión (5.4) es aproximadamente la misma para los modelos  $\Lambda$ CDM, OCDM, y SCDM si en cada caso la variancia  $\sigma^2(m)$  se computa a partir del espectro de potencias del modelo y  $\delta_{sc}(z)$  a partir del modelo de universo asumido.

A través de la expresión (5.4) para la sobredensidad crítica, podemos incluir los efectos de asumir un modelo de colapso elipsoidal en el formalismo de conjuntos de excursión, ya que simplemente identificamos la barrera  $B(\sigma, z)$  en los conjuntos de excursión como:

$$B(\sigma, z) = \delta_{ec}(\sigma, z)$$

luego, la distribución de los primeros cruces de la barrera por caminos aleatorios independientes, puede usarse para estimar la función de masa asociada con el modelo de colapso elipsoidal. SMT simulan un conjunto de caminos aleatorios no correlacionados y computan la distribución de los primeros cruces de la barrera “*móvil*” del modelo de colapso elipsoidal. Computan la distribución de los primeros cruces a través de la función  $f(\nu)\nu$  definida en la Sección 4.2, y encuentran que una muy buena aproximación es:

$$f(\nu)\nu = 2A \left( 1 + \frac{1}{\nu^{2q}} \right) \left( \frac{\nu^2}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \right) \quad (5.5)$$

donde  $q = 0,3$  y  $A \approx 0,3222$ . Esta expresión para la distribución de los primeros cruces difiere de la obtenida a partir de la barrera constante en el modelo de colapso esférico (ecuación 4.8) para la cual  $q = 0$  y  $A = 1/2$ .

A partir de la distribución de los primeros cruces dada en (5.5) podemos computar la función de masa  $n_{ec}(m, z)$  en el modelo de colapso elipsoidal ya que, la relación (4.7) entre la distribución de los primeros cruces de la barrera en un dado modelo y la función de masa en dicho modelo, establecen que:

$$\begin{aligned}
n_{ec}(m, z) &\equiv \frac{\nu f(\nu)}{m^2} \bar{\rho} \left( \frac{d \ln(m)}{d \ln(\nu)} \right)^{-1} \\
&= \frac{2A\bar{\rho}}{m^2} \left( 1 + \frac{1}{\nu^{2q}} \right) \left( \frac{d \ln(\nu)}{d \ln(m)} \right) \left( \frac{\nu^2}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

y simplificando esta expresión podemos definir la abundancia de halos con masa entre  $m$  y  $m + dm$  en el redshift  $z$ , para el modelo de colapso elipsoidal de SMT como:

$$n_{ec}(m, z) dm = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}}{m^2} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma(m)}{\delta_{sc}(z)} \right)^{2q} \right] \frac{\delta_{sc}(z)}{\sigma(m)} \left| \frac{d \ln \sigma(m)}{d \ln m} \right| \exp \left[ -\frac{\delta_{sc}^2(z)}{2\sigma^2(m)} \right] dm \quad (5.6)$$

## 5.2. Las funciones de masa

Por lo expuesto hasta ahora en este capítulo, y en el capítulo anterior, puede pensarse que un modelo de colapso es imprescindible para determinar una expresión analítica de la función de masa. Sin embargo, las simulaciones numéricas con un rango de masa grande para los halos identificados, permiten realizar ajustes a la función de masa medida y obtener a partir de la medición una expresión para la función de masa.

*Sheth & Tormen (1999)* midieron la función de masa en las simulaciones GIF (*Kauffman et. al. 1999*) y encontraron que un buen ajuste para la distribución de los primeros cruces  $\nu f(\nu)$  estaba dado por:

$$\nu f(\nu) = 2A \left[ 1 + \frac{1}{(\sqrt{a\nu})^{2q}} \right] \left( \frac{a\nu^2}{2\pi} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{a\nu^2}{2} \right)$$

donde  $a = 0,707$ ,  $q = 0,3$  y  $A \simeq 0,322$ . *Sheth & Tormen (1999)* determinan el valor de  $A$  tal que la integración sobre todo  $\nu$  sea 1; el parámetro  $a$  lo determinan los halos masivos identificados en la simulación y el parámetro  $q$  se debe a la forma de la función de masa medida en el extremo de masas chicas. Esta expresión para la función de masa es idéntica a la obtenida por SMT dos años después, a diferencia del factor  $a$ . SMT atribuyen esta diferencia al método con el que se identificaron los halos en la simulación ya que el algoritmo usado para identificar los halos (*Friend-Of-Friend: Davis et. al. 1985*) tiene un parámetro libre, la separación media entre partículas  $b$ , que puede influenciar la forma de la función de masa y si se usan otros valores para este parámetro, se obtiene un valor distinto para  $a$ . Por este motivo es que SMT establece que el valor de  $a = 0,707$  está asociado con la separación media entre partículas que usaron *Sheth & Tormen (1999)*:  $b = 0,2$ .

*Jenkins et. al. (2001)* midieron la función de masa en una serie de simulaciones llevadas a cabo por el grupo “*Virgo Consortium*”<sup>2</sup> en los modelos cosmológicos  $\tau$ CDM

<sup>2</sup>Información a cerca de este grupo puede encontrarse en <http://www.mpa-garching.mpg/Virgo>

y  $\Lambda$ CDM (*Jenkins et. al 1998*) y por las características de estas simulaciones se las ha denominado “*Hubble Volume Simulations*”. A partir de las mediciones que realizaron<sup>3</sup>, encontraron que un buen ajuste a la distribución de los primeros cruces está dado por<sup>4</sup>:

$$\sigma^{-1} f(\sigma^{-1}) = 0,315 \exp \left[ -|\ln(\sigma^{-1}) + 0,61|^{3,8} \right] \quad (5.7)$$

válido en el rango de  $1,2 \leq \ln(\sigma^{-1}) \leq 1,05$ . Este ajuste para la distribución de los primeros cruces puede usarse para definir una función de masa de la forma:

$$n_j(m, z) = \frac{\sigma^{-1} f(\sigma^{-1})}{m^2} \bar{\rho} \left( \frac{d \ln(m)}{d \ln(\sigma^{-1})} \right)^{-1}$$

Si reemplazamos (5.7) en esta última expresión y simplificamos, encontramos que la abundancia de halos con masa  $m$  en el redshift  $z$ ,  $n_j(m, z)$ , está dada por:

$$n_j(m, z) = A \frac{\bar{\rho}}{m^2} \frac{d \ln \sigma^{-1}}{d \ln m} \exp \left[ -|\ln(\sigma^{-1}) + B|^\tau \right]$$

donde  $A = 0,315$ ,  $B = 0,61$  y  $\tau = 3,8$ .

En la figura 5.2 se muestra una comparación entre los tres modelos para las funciones de masa. Puede verse que los ajustes de Jenkins et. al. y SMT son muy similares, pero hay una gran diferencia entre éstos y el modelo de PS en el extremo de masas grandes, en donde el modelo de PS subestima el número de halos, y una diferencia un poco menor, pero apreciable, en el extremo de masas chicas.

*Lee & Shandarin (1998)* se basan en la aproximación de Zeldovich y extienden el formalismo de PS a un modelo dinámico no esférico para determinar analíticamente la función de masa. Esta función de masa depende explícitamente de los autovalores del tensor de deformación de la región que colapsa, a partir de lo cual los autores hacen un extensivo análisis de la relación entre el tiempo de colapso y los autovalores del tensor de deformación.

En una serie de trabajos publicados por *Monaco (1995, 1997a, 1997b)* se hace un análisis intensivo acerca de la determinación de los tiempos de colapso en el modelo elipsoidal para las estructuras y se presenta el método “*cruce de órbitas*” para determinar el valor de  $\delta_c$  crítico, dependiente del modelo elegido, y la función de masa que se deriva a través de este nuevo criterio de colapso. Un compendio de estos resultados fue presentado por *Monaco (1998)*.

---

<sup>3</sup>Identificaron halos con dos algoritmos distintos, el *FOF* de *Davis et. al (1985)*, y el “*Spherical-Overdensity (SO)*” de *Lacey & Cole (1994)*.

<sup>4</sup>Ya que el ajuste no depende de  $\delta_{sc}$ , la función distribución de los primeros cruces sólo será función de  $\sigma^{-1}$

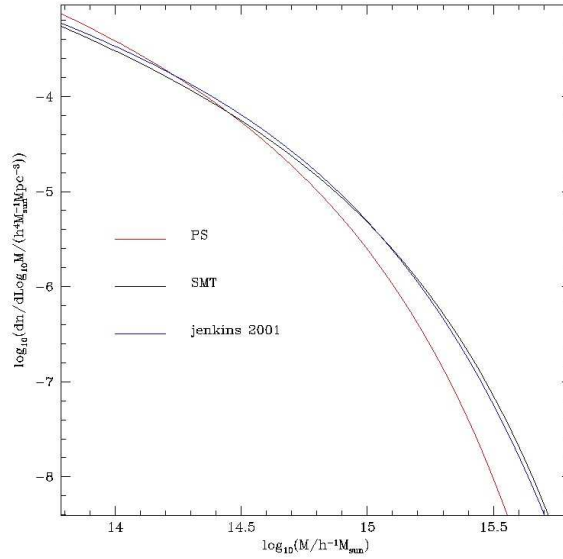


Figura 5.2: La función de masa en el modelo de PS (rojo), SMT (negro) y Jenkins et. al. (azul). Puede verse como el modelo de PS subestima el número de halos con masas grandes, con respecto al modelo de SMT y Jenkins et. al. (2001).

### 5.3. Aproximaciones analíticas para las funciones de masa condicional y universal

ST, desarrollando en serie de Taylor la barrera del modelo de colapso elipsoidal obtenida por SMT, encontraron una nueva aproximación para la distribución de los primeros cruces de la barrera; a partir de este resultado y haciendo analogía al trabajo de *Lacey & Cole (1993)*, encuentran una expresión analítica para la distribución de los cruces de dos barreras sucesivas. En esta sección se presentarán los resultados de ST, a partir de los cuales escribiremos la función de masa universal y la función de masa condicional para utilizarlas en el modelo para los coeficientes de sesgo de alto orden cuando asumimos el colapso elipsoidal.

#### 5.3.1. Nueva aproximación para la función de masa universal

Se ha mencionado anteriormente que sólo para los casos de una barrera  $B_\nu$  constante y lineal existen soluciones analíticas (*BCEK y Sheth 1998 respectivamente*) para la distribución de los primeros cruces de dicha barrera por caminos aleatorios independientes en el espacio  $\delta - R$ . SMT derivaron la expresión (5.4) para la barrera móvil asociada al colapso elipsoidal:

$$B(\sigma^2, z) = \sqrt{a} \left[ \delta_{sc}(z) + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{\sigma^{2\alpha}}{\delta_{sc}^{2\alpha-1}(z)} \right] \equiv \sqrt{a} \delta_{sc}(z) \left[ 1 + \beta \frac{1}{(a\nu)^\alpha} \right] \quad (5.8)$$

donde  $\nu = [\delta_{sc}(z)/\sigma(m)]^2$ ,  $\alpha \simeq 0,615$ ,  $a = 0,707$  y  $\beta = 0,47$ . Los autores notaron que si se multiplica la barrera por un factor, y reescalamos  $\sigma$  por el mismo factor, la barrera es la misma, por lo que puede estudiarse lo que pasa en  $z = 0$  y luego extrapolarlo linealmente a otros redshifts. Esto permite determinar la distribución de los primeros cruces de la barrera  $B(\sigma^2, 0)$  generando numéricamente un gran número de caminos aleatorios independientes; con lo que obtuvieron el ajuste (5.5)

Sin embargo, para estudiar la función de masa condicional a partir del ajuste obtenido por SMT, sería necesario para cada rango de masa del halo principal hacer un nuevo ajuste numérico. Por esta razón ST dan una fórmula analítica aproximada para la distribución de los primeros cruces, sugerida por la expresión analítica para los casos de las barreras constante y lineal; esta aproximación de ST es un muy buen ajuste para un rango amplio de barreras móviles; para halos con variancia entre  $S$  y  $S + dS$ , en el redshift  $z$ , esta expresión está dada por<sup>5</sup>:

$$f(S)dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi S^3}} |T(S)| \exp\left(-\frac{B(S, z)^2}{2S}\right) dS \quad (5.9)$$

donde se ha hecho el cambio de notación  $\sigma^2 = S$ , con lo que  $B(\sigma^2, z) \equiv B(S, z)$ ; y  $T(S)$  es la suma de los primeros términos de la expansión en serie de Taylos de la barrera móvil<sup>6</sup>  $B(S, z)$ :

$$T(S) = \sum_{n=0}^5 \frac{(-S)^n}{n!} \frac{\partial^n B(S, z)}{\partial S^n} \quad (5.10)$$

Podemos escribir la distribución de los primeros cruces  $\nu f(\nu)$  a partir de la expresión (5.9) y (5.10); simplificando se obtiene:

$$\nu f(\nu) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \delta_{sc} \left\{ 1 + \frac{\beta}{(a\nu)^\alpha} \left[ \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{\alpha}{i} \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{a\nu}{2} \left[ 1 + \beta \frac{1}{(a\nu)^\alpha} \right]^2 \right\}$$

Podemos notar que esta expresión se reduce al caso de la barrera constante (sólo el primer término de la serie es distinto de cero) y la barrera lineal (los dos primeros términos de la serie son distintos de cero). La serie se trunca en el quinto término ya que incluir más términos no mejora el ajuste numérico.

El modelo que desarrollaremos para los coeficientes de sesgo, requiere que podamos expresar analíticamente la densidad numérica de halos, por lo que, a partir de (5.9) y

<sup>5</sup>Nuevamente se redefine funcionalmente la distribución de los primeros cruces  $\nu f(\nu)$  como  $f(S)dS$ , ya que en este caso la barrera no es constante: depende de  $\sigma^2 \equiv S$ , por lo que  $\nu f(\nu) \equiv f(S)dS$

<sup>6</sup>Debe tenerse en cuenta que la masa  $M$  está asociada con la variancia  $\sigma^2(M) \equiv S$  en la escala  $R$ , por lo que estas variables se usaran indistintamente.

la relación entre la distribución de los primeros cruces, obtenemos el número de halos por unidad de volumen,  $n_{ST}(M_1, \delta_1)$ , con masa entre  $M_1$  (variancia  $S$ ) y  $M_1 + dM_1$  en el redshift  $z_1$  tal que  $\delta_1 \equiv \delta_{sc}(z_1) = \delta_{sc}(1 + z_1)$ , para lo cuál reescribimos el desarrollo (5.10) como:

$$T(S) = \sqrt{a} \left[ \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \Phi(\alpha) \right]$$

donde  $\Phi(\alpha)$  es una función que está definida como:

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{\alpha}{i} \quad (5.11)$$

De ésta forma podemos obtener el número de halos por unidad de volumen,  $n_{ST}(M_1, \delta_1)$ , y lo expresamos como:

$$\begin{aligned} n_{ST}(M_1, \delta_1) dM_1 &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{\bar{\rho}}{S^{3/2}} \left\{ \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \Phi(\alpha) \right\} \exp \left[ -\frac{a}{2S} \left( \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \right)^2 \right] \dots \\ &\dots \frac{dS}{dM_1} \frac{dM_1}{M_1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

### 5.3.2. Analogías para determinar la función de masa condicional

Lacey & Cole (1993) establecieron que se puede estimar la función de masa condicional al considerar cruces sucesivos de distintas barreras, asociadas a redshifts diferentes. En el caso de la barrera constante, la función de masa condicional se determina considerando caminos aleatorios que comienzan en las coordenadas  $\sigma^2(m) = s$ ,  $\delta_{sc}(z_0)$  del espacio  $\delta - \sigma$  (en vez de comenzar en el origen, como correspondería a  $R \rightarrow \infty$ ), e intersectan una barrera constante  $\delta_{sc}(z_1)$  en algún punto, digamos  $S$  (ver esquema 5.3) En este caso, esto es sencillo de hacer ya que, a pesar del corrimiento del origen, la barrera es constante y la distribución de los primeros cruces es conocida y la función condicional de masa,  $f(S, z_1 | s, z_0)$ , puede derivarse analíticamente ya que tiene la misma forma que la función de masa universal, pero con el cambio de variables<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \delta_{sc}(z) &\rightarrow \delta_{sc}(z_1) - \delta_{sc}(z_0) \\ S(m) &\rightarrow S(m) - s(m) \end{aligned}$$

Puede pensarse que un cambio de variables similar en el modelo presentado anteriormente, para la función de masa universal, puede llevarnos a la función de masa

<sup>7</sup>En este caso (modelo de colapso esférico), debe notarse que si en la expresión condicional (4.15) reemplazamos  $\sigma_1^2 - \sigma_0^2$  por  $\sigma^2$ , y  $\delta_1 - \delta_0$  por  $\delta_{sc}(z_1)$ ; recuperamos la expresión universal (4.4) de PS.



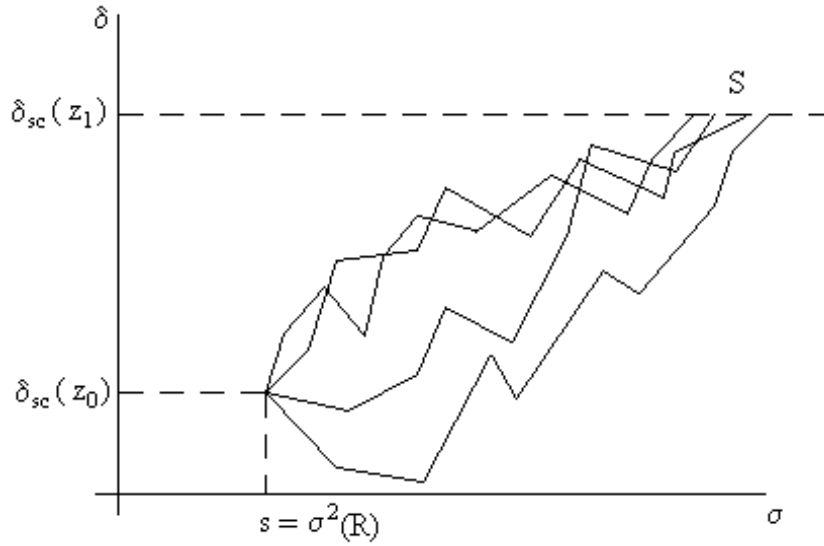


Figura 5.3: En este esquema se muestran caminos aleatorios que parten de la coordenada  $\delta_{sc}(z_0)$ ,  $s$  en el espacio  $\delta - \sigma$ , y cruzan una barrera constante  $\delta_{sc}(z_1)$  en algún valor de  $S$ . La distribución de estos primeros cruces de barreras sucesivas permite dar una expresión analítica para la función de masa condicional.

condicional asociada al modelo de colapso elipsoidal, pero lamentablemente esto no es así, ya que la barrera no es lineal en  $S$  y, al cambiar el origen de coordenadas, no obtenemos una barrera con la misma forma funcional. Esto significa que el problema de dos barreras móviles asociadas al modelo de colapso elipsoidal no se soluciona simplemente reescalando la función de masa universal del modelo de colapso elipsoidal.

Una forma de solucionar el problema es usar algoritmos Monte-Carlo (*Murthy 2001*) para generar caminos aleatorios y computar numéricamente la distribución de los primeros cruces. Otra forma es seguir el camino tomado por ST, y usar los resultados de la subsección anterior para derivar una expresión analítica de la función de masa condicional. ST notaron que la barrera que se debía asociar a la función de masa condicional, no debería ser muy distinta a la asociada a la función de masa universal, por lo que usaron la ecuación (5.9) como forma funcional para aproximar la función de masa condicional. Usando una analogía al cambio de variables hecho por *Lacey & Cole (1993)*, ST hacen el siguiente cambio de variables en la ecuación (5.9):

$$\begin{aligned} B(S, z) &\rightarrow B(S, z_1) - B(s, z_0) \\ S &\rightarrow S - s \end{aligned}$$

a partir de este cambio de variables se define la distribución de los primeros cruces de barreras sucesivas,  $f(S, \delta_1 | s, \delta_0)$  para una fracción de masa en una región con variancia  $s$  y sobredensidad  $\delta_0$  ( $\delta_0$  corresponde a la sobredensidad de una región de masa  $M_0$

no colapsada con variancia  $s$ , extrapolada al presente), que se encuentra en halos colapsados con sobredensidad  $\delta_1 = \delta_{sc}(1 + z_1)$  en el redshift  $z_1$  y con variancias entre  $S$  y  $S + dS$  (la variancia es tal que  $S > s$ , lo que equivale a  $M_1 < M_0$ )

$$f(S, \delta_1 | s, \delta_0) dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi(S-s)^3}} |T(S|s)| \exp \left\{ -\frac{[B(S, \delta_1) - B(s, \delta_0)]^2}{2(S-s)} \right\} dS$$

donde  $|T(S|s)|$  se define en la misma forma que (5.10), pero teniendo en cuenta el cambio de variables:

$$|T(S|s)| = \sum_{n=0}^5 \frac{(s-S)^n}{n!} \frac{\partial^n [B(S, \delta_1) - B(s, \delta_0)]}{\partial S^n} \quad (5.13)$$

y la diferencia entre las barreras se obtiene evaluando la expresión dada para  $B(S, z)$  en (5.8):

$$B(S, \delta_1) - B(s, \delta_0) = \sqrt{a} \left[ \delta_1 - \delta_0 + \frac{\beta}{a^\alpha} \left( \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} - \frac{s^\alpha}{\delta_0^{2\alpha-1}} \right) \right] \quad (5.14)$$

donde  $\delta_1 = \delta_{sc}(z_1)$  y  $\delta_0$  ha sido definido con anterioridad<sup>8</sup>.

A partir de estos resultados, definimos la función de masa condicional en forma similar a como lo hizo *Bower (1991)*, ya que si usamos la equivalencia entre la variancia y la masa, obtenemos:

$$f(S, \delta_1 | s, \delta_0) dS = f(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) \frac{dS}{dM_1} dM_1$$

con lo que definimos el número medio de halos con masa entre  $M_1$  (variancia  $S$ ) y  $M_1 + dM_1$  en el redshift  $z_1$ , y que en  $z_0$  están en una región (no colapsada) con masa  $M_0$  (variancia  $s$ ) en  $z_0$  como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{ST}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) dM_1 &\equiv \frac{M_0}{M_1} f(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) \frac{dS}{dM_1} dM_1 \\ &= \frac{M_0}{\sqrt{2\pi(S-s)^3}} |T(S|s)| \exp \left\{ -\frac{[B(S, \delta_1) - B(s, \delta_0)]^2}{2(S-s)} \right\} \cdots \\ &\quad \cdots \frac{dS}{dM_1} \frac{dM_1}{M_1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Si reemplazamos (5.13) y (5.14) en (5.15) y simplificamos un poco, encontramos que:

<sup>8</sup>A riesgo de ser repetitivo, debe notarse que se usan indistintamente las variables  $M_1$ ,  $S$  y  $\delta_1$  (equivalentemente  $z_1$ ) para caracterizar un halo; y también las variables  $M_0$ ,  $s$  y  $\delta_0$  para caracterizar a una región no colapsada en el redshift  $z_0$ , extrapolada al presente.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_{ST}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) \frac{dS}{dM_1} dM_1 &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{M_0}{(S-s)^{3/2}} \left\{ \delta_1 - \delta_0 + \frac{\beta}{a^\alpha} \left[ \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots G(S, s, \alpha) - \frac{s^\alpha}{\delta_0^{2\alpha-1}} \right] \right\} \exp[\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0)] \dots \\
&\quad \exp \left\{ -\frac{\sqrt{a} \left[ \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \right]}{2(S-s)} \right\} \frac{dS}{dM_1} \frac{dM_1}{M_1} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

donde, para simplicidad de la expresión anterior, hemos definido las funciones  $G(S, s, \alpha)$  y  $\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0)$  como:

$$G(S, s, \alpha) = \sum_{i=0}^5 \left( \frac{s-S}{S} \right)^i \binom{\alpha}{i} = \sum_{i=0}^5 \left( \frac{s}{S} - 1 \right)^i \binom{\alpha}{i} \quad (5.17)$$

$$\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0) = \frac{a}{s-S} \left( \delta_0 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{s^\alpha}{\delta_0^{2\alpha-1}} \right) \left[ \left( \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \right) - \dots \right] \quad (5.18)$$

$$\dots \frac{1}{2} \left( \delta_0 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{s^\alpha}{\delta_0^{2\alpha-1}} \right) \quad (5.19)$$

En el modelo de conjuntos de excursión, con una barrera constante, la función de masa universal, cuando es expresada en función de  $\nu = \delta_{sc}^2/\sigma^2$ , se encuentra que dicha función es independiente del redshift, la cosmología o el espectro de potencias inicial. Es más, si expresamos la función de masa condicional en unidades de  $\nu' = (\delta_1 - \delta_0)^2/(s - S)$ , encontramos que tiene la misma forma que la función de masa universal que obtuvimos en (5.12).

ST notan que si se interpreta a la función de masa universal (5.9) como deducida a partir de un modelo de barrera móvil, entonces no tiene por qué esperarse que la función de masa condicional sea una función universal de  $\nu$ , o sea, un reescalamiento como en el caso de la barrera constante no presenta la misma forma que la función de masa universal. ST usan las simulaciones numéricas GIF (modelos  $\Lambda$ CDM y SCDM) para comparar los resultados analíticos, y encuentran que existe una diferencia muy marcada entre ellos cuando  $M_0/M_1 \geq 1/2$ ; esto indica que el modelo analítico es incapáz de describir la historia de agrupación de los halos cuando se analizan instantes de tiempo posteriores pequeños, con lo que el modelo no ajusta muy bien los resultados numéricos en todos los redshifts. Los autores hicieron un análisis más extensivo acerca de esta discrepancia, pero no se tratará en este trabajo.

## Parte III

# El Sesgo entre la Distribución de Galaxias y Materia

# Capítulo 6

## Las amplitudes jerárquicas y los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso esférico.

Así como se mencionó en el primer capítulo, la formación de galaxias está sesgada respecto a la distribución de materia. En este capítulo desarrollaremos los modelos analíticos utilizados para estudiar el sesgo entre las distribuciones de materia y de halos de materia oscura a través de la estadística de momentos y cumulantes mencionada en la sección 2.1.3. Estos modelos se contrastarán con los resultados de simulaciones numéricas de N-cuerpos en un marco cosmológico (*Efstathiou et. al. 1985, Sellwood 1987, Hockney & Eastwood 1988, Abadi 1993, Merchán 1996, revisadas por Yepes 1997 y Bertschinger 1998*), por lo que se desarrollará el *método de conteo en celdas* para aplicar la estadística de momentos a las simulaciones numéricas.

El método de conteo en celdas permite determinar las amplitudes de correlación jerárquicas de orden  $J$ ,  $S_J$ , para la distribución de materia (partículas en las simulaciones numéricas), y  $S_{J,g}$  para la distribución de halos de materia oscura, los cuales se identifican en las simulaciones numéricas a través de algoritmos desarrollados para tal fin (*Davis et.al. 1985, Lacey & Cole 1994*). La relación entre las amplitudes de correlación para distintos órdenes estará dada por los factores de sesgo de alto orden  $b_k$  determinados por los modelos de formación de halos descriptos en los capítulos anteriores.

Se desarrollará también la teoría de las *amplitudes jerárquicas*  $S_J$  (*Peebles 1980, Fry 1984b, Fry 1985, Fry & Gaztañaga 1993*), la cual establece relaciones entre las amplitudes jerárquicas de la distribución de galaxias,  $S_{J,g}$  y de materia,  $S_J$ . En estas relaciones se introducen directamente los factores de sesgo  $b_k$ , los cuales pueden obtenerse analíticamente por el método desarrollado por *Mo, Jing & White (1997)* -MJW de aquí en adelante- que se describirá en la sección final de este capítulo.

## 6.1. Método de conteo en celdas

Este método permite relacionar los momentos de una distribución de partículas con los momentos correspondientes al campo de densidad continuo (*Peebles 1980 Sección 36, Gaztañaga 1994, Baugh et. al 1995*), así como también estudiar correlaciones de alto orden en simulaciones numéricas de N-cuerpos (*Fry et.al. 1993, Juszkiewicz et.al. 1993, Colombi et.al. 1994, Lucchini et.al. 1994, Bernardeau & Kofman 1995, Frieman & Gaztañaga 1994, Juszkiewicz et.al. 1995, Lokas et.al 1995*). Consiste en dividir el volumen  $V$  que contiene la distribución de partículas en  $M$  celdas de lado comóvil  $R$ ; de esta forma el  $J$ -ésimo momento central,  $m_J$ , del conteo de la distribución de masa es:

$$m_J = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (N_i - \bar{N})^J \quad (6.1)$$

donde  $N_i$  es el número de partículas en la  $i$ -ésima celda y  $\bar{N}$  es el número medio de partículas en cada celda, con lo que si tenemos  $N_p$  partículas se tendrá  $\bar{N} = \frac{N_p}{M}$ .

Las funciones de correlación de  $n$ -puntos pueden relacionarse con los momentos de conteo definidos en (6.1). Definimos el promedio en el volumen de la parte conectada de la función de correlación de  $J$ -puntos,  $\bar{\xi}_J(R)$ , como:

$$\bar{\xi}_J(R) = \frac{1}{V_W^J} \int W(r_1) \dots W(r_J) \xi_J(r_1, \dots, r_J) dr_1 \dots dr_J$$

donde el campo de fluctuaciones en la densidad se ha suavizado con una función ventana  $W(r)$  con volumen  $V_W$ . Siguiendo el trabajo de *Gaztañaga (1994)* y usando la misma notación, este promedio en el volumen de la parte conectada de la función de correlación de  $J$ -puntos puede definirse a través de los cumulantes definidos en la sección 2.1.3, simplemente dividiendo las expresiones (2.10) a (2.13) por  $\bar{N}_J$ , con lo que se obtiene:

$$\bar{\xi}_2(R) = \frac{\mu_2}{\bar{N}^2} = \frac{m_2}{\bar{N}^2} \quad (6.2)$$

$$\bar{\xi}_3(R) = \frac{\mu_3}{\bar{N}^3} = \frac{m_3}{\bar{N}^3} \quad (6.3)$$

$$\bar{\xi}_4(R) = \frac{\mu_4}{\bar{N}^4} = \frac{m_4}{\bar{N}^4} - 3 \frac{m_2^2}{\bar{N}^4} \quad (6.4)$$

$$\bar{\xi}_4(R) = \frac{\mu_5}{\bar{N}^5} = \frac{m_5}{\bar{N}^5} - 10 \frac{m_3 m_2}{\bar{N}^5} \quad (6.5)$$

*Peebles (1980)* establece dos métodos para obtener (6.1), el Método de Celdas Aleatorias y el Método de Conteo en Vecinos. Las relaciones (6.2)-(6.5) se deducen a partir del Método de Celdas Aleatorias. Este método parte de la división del volumen  $V$  en celdas infinitesimales tal que se encuentre una o ninguna partícula en cada celda; al aplicar este método a simulaciones numéricas de N-cuerpos,  $N_i$  no será del orden

de la unidad y los efectos de ruido en (6.1) se corrigen usando el “*Poisson shot-noise model*” o Modelo de Poisson para eliminar el ruido (*Gaztañaga 1994*). Esta corrección se basa en cambiar la función generatriz de los momentos por un factor exponencial (*Peebles 1980 Sección 33, Gaztañaga & Yokoyama 1993*); se obtienen las siguientes expresiones para los cumulantes<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} k_2 &= m_2 - \bar{N} \\ k_3 &= m_3 - 3m_2 + 2\bar{N} \\ k_4 &= m_4 - 3m_2^2 - 6m_3 + 11m_2 - 6\bar{N} \\ k_5 &= m_5 - 10m_3m_2 - 60m_2^2 + 35m_3 - 10m_4 + 30m_2^2 + 24\bar{N} \end{aligned}$$

Con estas expresiones corregidas de los cumulantes, es trivial la separación en dos términos: uno que sólo depende de  $m_J$ , y otro que depende únicamente de  $\bar{N}$ , con lo que los momentos corregidos quedan definidos como:

$$k_J = p_J(m_2, \dots, m_J) + q_J(\bar{N}) \quad (6.6)$$

y la función de correlación media de orden  $J$  corregida con el modelo de ruido de Poisson quedan definida, en forma generalizada, como:

$$\bar{\xi}_J(R) = \frac{p_J(m_2, \dots, m_J)}{\bar{N}^J} + (J-1)! \left( \frac{-1}{\bar{N}} \right)^{J-1} \quad J \geq 2 \quad (6.7)$$

Este método para obtener las funciones de correlación media de orden  $J$  en una distribución de partículas permite, a través de simulaciones numéricas de N-cuerpos, obtener las amplitudes de correlación jerárquicas de la distribución de materia, tema que se desarrollará en la sección siguiente.

## 6.2. Las amplitudes de correlación jerárquicas

Existe una gran cantidad de evidencia observacional respaldando el hecho de que, en gran escala, la función de correlación de  $J - puntos$  muestra un comportamiento jerárquico, hecho que ha sido verificado en mediciones en catálogos angulares en el óptico (*Groth & Peebles 1977, Fry & Peebles 1978, Szapudi et. al. 1992*), en el catálogo IRAS (*Meiksin et. al. 1992, Bouchet et. al. 1993*) y los catálogos en el óptico CfA y SSRS (*Gaztañaga 1992, Gaztañaga & Yokoyama 1993*), Zwicky (*Sharp et. al. 1984*), APM (*Gaztañaga & Frieman 1994, Gaztañaga 1994, Szapudi et. al. 1995*), EDSG (*Szapudi et. al. 1996*), Durham/UKST y Stromlo-APM (*Hoyle et. al. 2000*), PSCz (*Szapudi et. al. 2000*) y SDSS (*Szapudi et. al. 2002*)<sup>2</sup>. Si promediamos la distribución

<sup>1</sup>Cuando se refiera a los cumulantes corregidos, la notación será  $k_J$ ; para los no-correctados será  $\mu_J$ .

<sup>2</sup>Las referencias a los catálogos mencionados son: CfA, *North Zwicky Center for Astrophysics* (Huchra et. al. 1983); SSRS, *Southern Sky Redshift Survey* (da Costa et. al. 1991); Zwicky (Zwicky et. al.

de galaxias en una esfera de radio  $R$ , el comportamiento jerárquico implica que la función de correlación media de orden  $J$  satisface la relación:

$$\bar{\xi}_J(R) = S_J \bar{\xi}_2^{J-1}(R) \quad (6.8)$$

(Fry 1984b) donde, en una primera aproximación, el parámetro  $S_J$  es independiente de la escala  $R$ .

Esta misma estructura jerárquica (6.8) se predice en la teoría de perturbaciones para una distribución de materia que evoluciona gravitacionalmente a partir de fluctuaciones iniciales Gaussianas (Fry 1984a, Goroff et. al. 1986, Bernardeau 1992); en estos resultados, el parámetro  $S_J$  depende de la escala, con lo que  $S_J = S_J(R)$ . Para relacionar los resultados de la teoría de perturbaciones con las observaciones, debe conocerse cuán bien las galaxias trazan la distribución de materia; pero ya se ha mencionado que se debe asumir un sesgo entre las distribuciones de galaxia y materia. La forma más simple de hacer esto, y es la que usualmente se usa en los estudios en gran escala, es asumir que la relación entre el campo suavizado en escala  $R$  de fluctuaciones de las galaxias,  $\delta_g(R)$ , y de la materia,  $\delta(R)$ , es lineal e independiente de la escala,  $\delta_g(R) = b\delta(R)$ .

Una forma más generalizada de la relación entre  $\delta_g$  y  $\delta$  es asumir que el campo suavizado  $\delta_g$  puede escribirse como una función de la sobredensidad de masa,  $\delta_g = f(g)$ . Debido a que, por ahora, no sabemos cómo puede ser definida la función  $f$ , la expresaremos como un desarrollo en serie de Taylor:

$$\delta_g(R) = f(\delta)|_R = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \delta^k(R) \quad (6.9)$$

nótese que el término lineal  $b_1$  corresponde al factor de sesgo lineal usado usualmente,  $b$ . Teniendo en cuenta que la distribución de materia tiene una estructura jerárquica para la función de correlación media (cumulante) de la forma

$$\bar{\xi}_J = \langle \delta^J \rangle_c = S_J(R) \bar{\xi}_2^{J-1}$$

donde  $\bar{\xi}_2 = \langle \delta^2 \rangle_c$ , se tendrá que relacionar el cumulante de orden  $J$  de la distribución de galaxias,  $\langle \delta_g^J \rangle_c$ , con los cumulantes de la distribución de materia. Un resultado importante para posibilitar esta relación es el desarrollo (6.9) que establece una correspondencia entre la sobredensidad de galaxias y de materia.

Usando el método de función generatris (Fry 1985), puede calcularse  $\langle \delta_g^J \rangle_c$  a partir de:

$$\bar{\xi}_{g,J} = \langle \delta_g^J \rangle_c = \left. \frac{d^J \ln(\langle e^{t\delta_g} \rangle)}{dt^J} \right|_{t=0}$$

---

1961-1968); APM, *Automatic Plate Measuring* (Maddox et. al. 1990a,b,c); EDSCG, *Edinburgh Durham Souther Galaxy Catalog* (Heydon-Dumbleton et. al. 1989, Collins et. al. 1992); Durham/UKST (Ratcliffe et. al. 1998); Stromlo-APM (Loveday et. al. 1996); PSCz, *Point Source Catalog* (Saunders et. al. 2000) y SDSS, *Sloan Digital Sky Survey* (York et. al. 2000, Stoughton et. al. 2002).



donde  $\delta_g$  en la función exponencial está dado por (6.9). Esta última ecuación, para  $J = 2 - 5$ , da como resultado para  $\bar{\xi}_{g,J}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{g,2} &= b^2 \bar{\xi}_2 + b^2 \bar{\xi}_2^2 \left( c_2 S_3 + c_3 + \frac{c_2^2}{2} \right) + \mathcal{H}(\bar{\xi}_2^3) \\
\bar{\xi}_{g,3} &= b^3 \bar{\xi}_2^2 (S_3 + 3c_2) + b^3 \bar{\xi}_2^3 \left( \frac{3c_2 S_4}{2} + \frac{9c_3 S_3}{2} + 6c_2^2 S_3 + \frac{3c_4}{2} + 6c_2 c_3 + c_2^3 \right) + \dots \\
&\dots + \mathcal{H}(\bar{\xi}_2^4) \\
\bar{\xi}_{g,4} &= b^4 \bar{\xi}_2^3 (S_4 + 12c_2 S_3 + 4c_3 + 12c_2^2) + b^4 \bar{\xi}_2^4 [2c_2 S_5 + S_4 (8c_3 + 18c_2^2) + \dots \\
&\dots + S_3^2 (6c_3 + 12c_2^2) + S_3 (12c_4 + 78c_2 c_3 + 36c_2^3) + 2c_5 + 18c_2 c_4 + \dots \\
&\dots + 12c_2^2 + 36c_2^2 c_3 + 3c_2^4 + \mathcal{H}(\bar{\xi}_2^5) \\
\bar{\xi}_{g,5} &= b^5 \bar{\xi}_2^4 + [S_5 + 20c_2 S_4 + 15c_2 S_3^2 + S_3 (30c_3 + 120c_2^2) + 5c_4 + 60c_3 c_2 + \dots \\
&\dots + 60c_2^3] + b^5 \bar{\xi}_2^5 + \left[ \frac{5c_2 S_6}{2} + S_5 \left( \frac{25c_3}{2} + 40c_2^2 \right) + S_3 S_4 (25c_3 + 70c_2^2) + \dots \right. \\
&\dots + S_4 (25c_4 + 230c_2 c_3 + 180c_2^2) + S_3^2 \left( \frac{75c_4}{2} \right) + S_3^2 (330c_2 c_3 + 240c_2^3) + \dots \\
&\dots + S_3 (25c_5 + 310c_2 c_4 + 210c_2^3 + 1020c_2^2 c_3 + 240c_2^4) + \frac{5c_6}{2} + 40c_2 c_5 + \dots \\
&\dots + 70c_3 c_4 + 180c_2^2 c_4 + 240c_2 c_3^2 + 240c_2^3 c_3 + 12c_2^5] + \mathcal{H}(\bar{\xi}_2^6)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

donde  $b = b_1$  y se ha definido el coeficiente  $c_k$  para  $k \geq 0$  como  $c_k = \frac{b_k}{b}$ . En escalas donde  $\bar{\xi}_2 \leq 1$  (cuasi-lineales), el término más importante para  $\bar{\xi}_{g,2}$  en la primera ecuación de (6.10) dá como resultado el sesgo lineal usado habitualmente,  $\bar{\xi}_{g,2} = b^2 \bar{\xi}_2$ .

Tomando en cuenta la relación de sesgo lineal, y preservando sólo los términos más importantes de  $\bar{\xi}_2$  en el desarrollo de las ecuaciones (6.10), los resultados que se obtienen para  $\bar{\xi}_{g,J}$  con  $J \geq 3$  son de estructura jerárquica de la forma:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{g,J} &= S_{g,J} \bar{\xi}_{g,2}^{J-1} \\
&= S_{g,J} \bar{\xi}_2^{J-1} b^{2(J-1)} \\
\Rightarrow S_{g,J} &= \frac{\bar{\xi}_{g,J}}{\bar{\xi}_2^{J-1}} b^{2(1-J)}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

donde las amplitudes jerárquicas para las galaxias,  $S_{g,J}$  están dadas en función de las amplitudes jerárquicas de la distribución de materia,  $S_J$ , y los coeficientes de sesgo,  $b_k$ , por las expresiones (deducidas a partir de 6.10 y 6.11):

$$\begin{aligned}
S_{g,3} &= \frac{1}{b}(S_3 + 3c_2) \\
S_{g,4} &= \frac{1}{b^2}(S_4 + 12c_2S_3 + 4c_3 + 12c_2^2) \\
S_{g,5} &= \frac{1}{b^3}[S_5 + 20c_2S_4 + 15c_2S_3^2 + S_3(30c_3 + 120c_2^2) + 5c_4 + 60(c_3c_2 + c_2^3)]
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Se tiene así una relación entre las amplitudes jerárquicas de la distribución de galaxias y de la distribución de materia, en donde sólo se ha asumido la estructura jerárquica de las funciones de correlación media de orden  $J$ , y que la sobredensidad de galaxias puede escribirse como un desarrollo en serie de Taylor de la forma dada en (6.9).

## Resumen

Deben destacarse los siguientes puntos de los resultados presentados:

- Asumimos que  $\delta_g = \delta_g(\mathbf{x}; R)$  está completamente determinada por  $\delta(\mathbf{x}; R)$ , por lo que podemos escribir  $\delta_g$  como función de  $\delta$ ,  $\delta_g = f(\delta)$ ; y esta relación no depende de  $\mathbf{x}$  (aproximadamente<sup>3</sup>). La función  $f(\delta)$  es suave y no diverge para  $\delta \sim 0$ .
- Si para la distribución de materia, la teoría de perturbaciones predice una estructura jerárquica  $\bar{\xi}_J(R) = S_J \bar{\xi}_2^{J-1}(R) \Rightarrow$  una transformación como la dada en (6.9) preserva la forma jerárquica en el límite  $\bar{\xi}_2(R) \ll 1$ ; con lo que para las galaxias se tiene  $\bar{\xi}_{g,J}(R) = S_{g,J} \bar{\xi}_{g,2}^{J-1}(R)$
- Cuando se satisfacen los dos ítems anteriores, las amplitudes jerárquicas de la distribución de galaxias y materia se relacionan a través de las ecuaciones dadas en (6.12).
- Un modelo analítico establecerá la forma de  $f(\delta)$  y, consecuentemente, los coeficientes  $b_k$ ; en la determinación de la forma analítica de  $f(\delta)$  es donde se asume un modelo de colapso. La forma funcional de las relaciones (6.12) es independiente del modelo de colapso de las estructuras, sólo depende del modelo a través de los coeficientes  $b_k$ .

---

<sup>3</sup>En una región con sobredensidad de materia  $\delta$ , se tendrá que  $\delta_g$  no sólo depende de  $\delta$ , sino también de la estructura interna de la región y de las mareas actuando sobre dicha región. Como resultado se tendrá un scatter en el conteo de galaxias en esa región.

### 6.3. Los coeficientes de sesgo para el modelo de colapso esférico

Para relacionar la distribución de galaxias con la distribución de materia, sólo necesitamos un modelo para los coeficientes de sesgo  $b_k$ , lo que implica definir analíticamente la función  $f(\delta)$ . En el trabajo de MJW se define esta función a partir de la función de masa universal y condicional en el modelo de colapso esférico; a continuación veremos cómo definir dicha función.

Para modelar la agrupación de halos en épocas recientes, tenemos que ser capaces de calcular la abundancia de halos en esferas que, en un dado redshift  $z$ , tienen radio  $R$  y sobredensidad (no-lineal)  $\delta$ . Como estas cantidades están definidas en el espacio Euleriano (evolucionado), usamos el modelo de colapso esférico para relacionar estas variables con las cantidades iniciales Lagrangianas  $R_0$  y  $\delta_0$  (la cantidad  $\delta_0$  es la sobredensidad no colapsada de la región, extrapolada al presente). En el modelo de colapso esférico cada cáscara se mueve de tal forma que no se cruza con otras cáscaras, esto implica que la masa dentro de cada cáscara es constante, entonces:

$$(1 + \delta)^{1/3} R = R_0$$

Si asumimos un modelo de universo Einstein-de Sitter, la perturbación esférica con radio físico Euleriano  $R$ , se relaciona con el radio inicial Lagrangiano  $R_0$  y la sobredensidad lineal  $\delta_0$  a través de las ecuaciones paramétricas (Padmanabhan 1995):

$$\frac{R(R_0, \delta_0, z)}{R_0} = \frac{3[1 - \cos(\theta)]}{10|\delta_0|} \quad (6.13)$$

$$(1 + z)^{-1} = \frac{(3 \times 6^{2/3}) [\theta - \sin(\theta)]^{1/2}}{20 |\delta_0|} \quad (6.14)$$

donde  $\theta$  es el parámetro<sup>4</sup>. Si analizamos el agrupamiento de los halos en un dado redshift, digamos  $z = 0$ ,  $\delta_0$  sólo dependerá de la sobredensidad de masa presente  $\delta \equiv (R_0/R)^3 - 1$ . Teniendo en cuenta ésto en las ecuaciones (6.13) y (6.14), se puede encontrar una expresión aproximada para la relación de  $\delta_0$  con  $\delta$  (Mo & White 1996):

$$\delta_0 = 1,686 - 1,35(1 + \delta)^{-2/3} + 0,78785(1 + \delta)^{-0,58661} - 1,12431(1 + \delta)^{-1/2} \quad (6.15)$$

Se tiene así una relación entre  $\delta$  y  $\delta_0$ , la cual es necesaria para la definición de  $f(\delta)$  ya que los modelos analíticos determinan la sobreabundancia de halos en función de la sobredensidad de materia no colapsada extrapolada al presente,  $\delta_0$ .

Bernardeau (1992), usando el hecho de que para las distribuciones de materia se encuentra una relación jerárquica para las amplitudes de correlación de la forma dada

<sup>4</sup>Cuando  $\delta_0 < 0$ , en la ecuación (6.13) debe cambiarse el factor  $(1 - \cos\theta)$  por  $(\cosh\theta - 1)$ ; y en la ecuación (6.14) se debe cambiar  $(\theta - \sin\theta)$  por  $(\sinh\theta - \theta)$ .

en (6.8), y usando valores numéricos para los  $S_J$ , obtenidos a partir de la teoría de perturbaciones de segundo orden (*Peebles 1980, Fry 1984b*), encuentra una expresión analítica para la relación  $\delta - \delta_0$  en serie de potencias:

$$\delta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n \quad (6.16)$$

donde los primeros cinco coeficientes son:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = -\frac{17}{21}; \quad a_3 = \frac{341}{567}; \quad a_4 = -\frac{55805}{130977} \quad (6.17)$$

En el Capítulo 4 se definió la función de masa universal  $n(M_1, z_1)$  como la densidad numérica de halos por unidad de volumen, en función de la masa del halo  $M_1$  y del redshift  $z_1$  (ecuación 4.5), donde el redshift se relaciona con la sobredensidad de colapso a través de  $\delta_1 = \delta_c(1 + z_1)$ . También se definió la función de masa condicional  $\mathfrak{N}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$  como el número promedio de halos con masa  $M_1$  identificados en el redshift  $z_1$  que inicialmente se encontraban en una región con radio comóvil  $R_0$  (se le asocia una masa  $M_0$  a través de la relación  $(4/3)\pi R_0^3 = M_0 \bar{\rho}$ ) y sobredensidad  $\delta_0$  (ecuación 4.16); debe notarse que  $M_1$  es la masa del halo colapsado en  $z_1 > 0$ , mientras que  $M_0$  se refiere a regiones no colapsadas en  $z = 0 \Rightarrow \delta_1 > \delta_0$ .

De este análisis puede verse que el número de halos con masa  $M_1$  identificados en el redshift  $z_1$  que se forman a partir de materia contenida en esferas de radio  $R_0$  y sobredensidad lineal  $\delta_0$ , depende significativamente de  $\delta_0$ . *Mo & White (1996)* introdujeron la función  $\delta_{h,L}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$  para cuantificar la sobredensidad media de halos en dichas esferas (ecuación 4.16), relativa a la sobreabundancia media global de halos (dada por 4.5); esta función se define como:

$$\delta_{h,L}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) = \frac{\mathfrak{N}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)}{n(M_1, z_1)V_0} - 1 \quad (6.18)$$

donde el factor  $V_0$  se debe a que en las esferas de radio  $R_0$ , la abundancia de halos global está dada por unidad de volumen; como el análisis se hace en esferas con radio comóvil inicial Lagrangiano  $R_0$ , se tiene que  $V_0 = (4/3)\pi R_0^3$ .

Una variante en la definición (6.18) nos permite definir la sobreabundancia media de halos, relativa a la abundancia media global en el espacio Euleriano. Esta variante consiste en que, debido a que los halos se definen como objetos identificados en un redshift específico, la abundancia media  $\mathfrak{N}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$  se la puede referir a halos de masa  $M_1$  identificados en el redshift  $z_1$  en esferas de radio Euleriano  $R(R_0, \delta_0, z_0)$  y sobredensidad  $\delta(\delta_0, z_0)$ ; bajo esta variante, la sobreabundancia de halos en esferas de radio  $R$  y sobredensidad  $\delta$  se define como:

$$\delta_{h,E}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) = \frac{\mathfrak{N}[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0(\delta, z_0)]}{n(M_1, z_1)V} - 1 \quad (6.19)$$

donde ahora el factor de volumen es  $V = (4/3)\pi R^3$ , con  $R_0 = R(1 + \delta)^{1/3}$  y  $\delta_0$  está determinado a partir de  $\delta$  por la expresión analítica (6.16) o la aproximación (6.15).

Como resultado de este análisis, podemos calcular los coeficientes de sesgo para una distribución de materia en el espacio Lagrangiano planteando  $f(\delta) = \delta_{h,L}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$ . Pero como deseamos utilizar los coeficientes para comparar la distribución de materia con la distribución de galaxias a través de (6.12), debemos calcular los coeficientes de sesgo en el espacio evolucionado, por lo que debemos calcularlos a partir de la sobreabundancia de halos en esferas con sobredensidad  $\delta$ , con lo que:

$$\begin{aligned} f(\delta) &= \delta_{h,E}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) \\ &= \frac{3 \times \mathfrak{N}[M_1, \delta_1 | \bar{\rho}(4/3)\pi R^3(1 + \delta), \delta_0]}{n(M_1, z_1)4\pi R^3} - 1 \end{aligned} \quad (6.20)$$

Tenemos así una expresión analítica para  $f(\delta)$ . Si escribimos explícitamente la función de masa universal de PS y la función de masa condicional encontrada por *Bower (1991)* en la ecuación (6.20) y simplificamos, se obtiene la función  $f(\delta)$  en el modelo de colapso esférico:

$$\begin{aligned} f(\delta) &= \frac{3(1 + \delta)\mathfrak{N}[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0]}{n(M_1, z_1)4\pi R_0^3} - 1 \\ &= \frac{M_0(1 + \delta)\sigma_1^3(\delta_1 - \delta_0) \exp\left[-\frac{(\delta_1 - \delta_0)}{2(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)}\right]}{\bar{\rho}\delta_1\frac{4}{3}\pi R_0^3(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)^{3/2}} - 1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

donde  $\sigma_1$  es la variancia en escala  $R_1$ ,  $\sigma_1 = \sigma(R_1)$ , y  $\sigma_0$  es la variancia en escala  $R_0$ ,  $\sigma_0 = \sigma(R_0)$ . A través de (6.16), o (6.15),  $\delta_0$  es una función implícita de  $\delta$ . Para determinar los coeficientes de sesgo a partir de (6.21), asumimos que  $R_0 \gg R_1$ , con lo que se puede hacer la aproximación  $\sigma_1^2 - \sigma_0^2 \sim \sigma_1^2$ . Asumiendo también que  $\delta \ll 1$  y usando la relación (6.16), podemos expandir  $f(\delta)$  en la forma dada por el desarrollo en serie (6.9), obteniéndose los primeros cinco coeficientes de sesgo<sup>5</sup>:

---

<sup>5</sup>En la expresión del coeficiente  $b_4$ , se ha corregido un error tipográfico en la fórmula dada por MJW para dicho coeficiente.

$$b_0 = 0 \quad (6.22)$$

$$b_1 = \frac{\nu_1^2 - 1}{\delta_1} + 1 \quad (6.23)$$

$$b_2 = 2(1 + a_2) \frac{\nu_1^2 - 1}{\delta_1} + \left(\frac{\nu_1}{\delta_1}\right)^2 (\nu_1^2 - 3) \quad (6.24)$$

$$b_3 = 6(a_2 + a_3) \frac{\nu_1^2 - 1}{\delta_1} + 3(1 + a_2) \left(\frac{\nu_1}{\delta_1}\right)^2 (\nu_1^2 - 3) + \dots \quad (6.25)$$

$$\dots + \left(\frac{\nu_1}{\delta_1}\right)^2 \frac{\nu_1^4 - 6\nu_1^2 + 3}{\delta_1}$$

$$b_4 = 24(a_3 + a_4) \frac{\nu_1^2 - 1}{\delta_1} + 12[a_2^2 + 2(a_2 + a_3)] \left(\frac{\nu_1}{\delta_1}\right)^2 (\nu_1^2 - 3) + \dots \quad (6.26)$$

$$\dots + 4(1 + 3a_2) \left(\frac{\nu_1}{\delta_1}\right)^2 \frac{\nu_1^4 - 6\nu_1^2 + 3}{\delta_1} + \left(\frac{\nu_1^2}{\delta_1^2}\right)^2 (\nu_1^4 - 10\nu_1^2 + 15)$$

donde  $\nu_1 \equiv \delta_1/\sigma_1$ ; y los coeficientes  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$  están dados en (6.17). Insertando estos coeficientes en las expresiones dadas en (6.12), se pueden obtener las amplitudes de correlación jerárquicas de la distribución de galaxias, ya que las amplitudes de correlación jerárquicas de la distribución de materia,  $S_J$ , se pueden obtener a partir de la aplicación del método de conteo de celdas en simulaciones numéricas de N-cuerpos.

Como lo señalara *Bernardeau (1992)*, la relación  $\delta_0 - \delta$  dada en (6.16) depende muy debilmente del modelo cosmológico, por lo que los coeficientes obtenidos en (6.22)-(6.26) y las relaciones entre las amplitudes de correlación jerárquicas (6.12) no dependerán significativamente del modelo cosmológico.

Debe notarse también que a partir de las definiciones (6.18) y (6.19) se han determinado los coeficientes de sesgo de primer orden en el espacio Euleriano y Lagrangiano (*Sheth & Lemson 1999*) para el estudio de la distribución de halos y determinación de sus abundancias (*Sheth & Tormen 1999*), así como también la evolución temporal de estos coeficientes en distintos modelos de universo (*Basilakos & Plionis 2001*)

# Capítulo 7

## El colapso elipsoidal: Un modelo para los factores de sesgo.

En el análisis del colapso de materia y la formación de halos en las simulaciones numéricas, vemos que los halos se forman con una simetría no fuertemente esférica, por lo que podemos asumir un modelo elipsoidal para la dinámica de formación de los halos. En capítulos anteriores encontramos el número de halos, en un rango de masas, que se forman siguiendo la dinámica elipsoidal; en éste capítulo desarrollaremos un método para determinar los coeficientes de sesgo siguiendo ésta dinámica más realista y analizaremos los resultados obtenidos.

Fue necesario determinar la función de masa universal (PS) y la función de masa condicional (*Bower 1991*) para definir una sobredensidad de halos y a partir de ésta determinar analíticamente los coeficientes de sesgo. En primera instancia, el sesgo entre las distribuciones de materia y galaxias era sólo el primer término del desarrollo en serie de dichos coeficientes (*Mo & White 1996*); con las funciones de masa universal determinadas en el modelo de colapso elipsoidal, como la determinada por SMT, se definieron coeficientes de sesgo de primer orden (*Lin, Chiueh & Lee 2002*), y de órdenes mayores (*Scocimarro et. al. 2001*) a partir de las distintas funciones de masa en el modelo de colapso elipsoidal.

Haciendo una analogía con el procedimiento descrito en el capítulo anterior, y usando las funciones de masa condicional y universal que reescribimos a partir de las obtenidas por ST, definiremos una sobredensidad de halos en el espacio Euleriano y, de esta forma, determinaremos los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso elipsoidal a partir de una definición similar a la dada en la Sección 6.3.

En este capítulo desarrollaremos un método para definir los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso elipsoidal utilizando las funciones de masa universal y condicional en la forma que las reescribimos en la Sección (5.3).

## 7.1. Los coeficientes de sesgo a partir de las funciones de masa de *Sheth & Tormen (2001)*

Se han definido coeficientes de sesgo de primer orden en la aproximación de colapso no esférico (*SMT, Lin Chieuh & Lee 2002*), y coeficientes de sesgo de alto orden usando teoría de perturbación (*Catelan et. al. 1998*) y el modelo de función de masa universal de SMT (*Scoccimarro et. al. 2001*). En esta sección se presenta un nuevo método a partir del cual se pueden definir coeficientes de sesgo de alto orden, adoptando el modelo de funciones de masa universal y condicional de ST.

El método que desarrollaremos será similar al de MJW, en donde se harán las modificaciones necesarias para tener en cuenta en modelo de colapso elipsoidal, y usaremos los resultados de ST. Como la relación entre la sobredensidad de halos (galaxias)  $\delta_h$  y la sobredensidad de materia,  $\delta$ , no depende del modelo de colapso que asumimos, usaremos que la forma general de la sobredensidad de halos en el modelo de colapso elipsoidal  $\delta_h^e$  está dada por el desarrollo (6.9) tal que:

$$\delta_h^e(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k^e}{k!} \delta^k(R) = f^e(\delta, R)$$

donde  $b_k^e$  son los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso elipsoidal. Como se mencionó en la sección 6.2, la relación entre las amplitudes de correlación jerárquicas de las galaxias y de la materia sólo depende del modelo de colapso a través de los coeficientes de sesgo y, de la ecuación anterior, vemos que estos estarán determinados por la definición de  $f^e(\delta)$ , lo que restringe su determinación a resultados del modelo de colapso elipsoidal.

Para definir  $f^e(\delta)$  hemos usado las funciones de masa condicional (5.16) y universal (5.12), reescritas a partir de los resultados de ST en la sección 5.3; estas funciones dependen de la sobredensidad de masa colapsada en el redshift  $z_1$ , dada por  $\delta_1$ , y de la sobredensidad de materia no colapsada que formará parte de algún halo,  $\delta_0$ , extrapolada al presente. Como la función a partir de la cual determinaremos los coeficientes de sesgo depende de  $\delta$ , necesitamos una relación entre  $\delta_0$  y  $\delta$ ; podríamos usar la relación (6.15) dada por *Mo & White (1996)*, sin embargo ST hacen una pequeña modificación a este ajuste para tener en cuenta distintos modelos cosmológicos:

$$\delta_0(\delta, z_0) = \frac{\delta_{sc}(z_0)}{1,68647} \left[ 1,68647 - \frac{1,35}{(1 + \delta)^{2/3}} - \frac{1,12431}{(1 + \delta)^{1/2}} + \frac{0,78785}{(1 + \delta)^{0,58661}} \right] \quad (7.1)$$

donde  $M/\bar{\rho}V \equiv (1 + \delta)$  es la sobredensidad no lineal de materia en regiones con masa  $M$  en un volumen  $V$  en el redshift  $z_0$ , y  $\delta_{sc}(z_0)$  es la sobredensidad crítica en el modelo de colapso esférico en  $z_0$ . Cuando asumimos colapso elipsoidal, no existe una relación analítica entre  $\delta$  y  $\delta_0$  como la que encontrara *Bernardeau (1994)* para el caso de colapso esférico, para obtener una relación entre  $\delta$  y  $\delta_0$  en la forma de series



de potencias, desarrollamos en serie de Taylor la expresión anterior, hasta el quinto orden:

$$\delta_0(\delta, z_0) \simeq \sum_{k=0}^4 a_k^e \delta^k \quad (7.2)$$

donde los coeficientes son:

$$a_0^e = 0,00001; \quad a_1^e = 0,99999; \quad a_2^e = -0,80498; \quad a_3^e = 0,70190; \quad a_4^e = -0,63509$$

y los coeficientes  $a_0$  y  $a_1$  pueden aproximarse por  $a_0 \sim 0$  y  $a_1 \sim 1$ .

La relación (7.1), o su desarrollo en serie de potencias (7.2), nos permite obtener la densidad numérica de halos con masa  $M_1$  que se formaron en una región con sobreabundancia no lineal  $\delta$  (extrapolada a  $z_0$ ) a partir de la función  $\mathfrak{N}_{ST}[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0(\delta, z_0)]$  dada por la ecuación (5.16).

Podemos determinar la sobreabundancia de halos en una región de escala  $R_0$  y sobreabundancia no colapsada  $\delta_0$ , definiendo una función  $\delta_{h,L}^e(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$  en el espacio Lagrangiano que represente la sobreabundancia media de halos en dicha región (función de masa condicional), relativa a la sobreabundancia media global de halos (función de masa universal) en el modelo de colapso elipsoidal<sup>1</sup>:

$$\delta_{h,L}^e(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) = \frac{\mathfrak{N}_{ST}[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0]}{n_{ST}(M_1, z_1)V_0} - 1 \quad (7.3)$$

donde el factor  $V_0$  se debe a que en la región esférica de escala  $R_0$ , la abundancia global de halos  $n_{ST}(M_1, z_1)$  está dada por unidad de volumen. Usamos el volumen  $V_0$  ya que estamos computando la sobreabundancia media global de halos en una esfera de radio  $R_0$ ; no debe confundirse  $V_0$  con un volumen elipsoidal, ya que no tiene nada que ver con el modelo de colapso que asumimos (el modelo de colapso determina funcionalmente  $\mathfrak{N}_{ST}$  y  $n_{ST}$ ).

Al igual que hicieron *Mo & White (1996)*, definimos la sobreabundancia de halos, relativa a la abundancia media global, en el espacio Euleriano a través de la función  $\delta_{h,E}^e[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0(\delta, z_0)]$ , ya que el número de halos con masa  $M_1$  en  $z_1$  que se formaron en regiones no colapsadas de radio  $R$  y sobreabundancia no lineal  $\delta$  está dado por  $\mathfrak{N}_{ST}[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0(\delta, z_0)]$ , se define entonces:

$$\delta_{h,E}^e[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0(\delta, z_0)] = \frac{\mathfrak{N}_{ST}[M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0(\delta, z_0)]}{n_{ST}(M_1, z_1)V} - 1 \quad (7.4)$$

donde  $\delta_0$  se determina a partir de  $\delta$  de la expresión (7.1), y el factor de volumen  $V$  está dado por:

---

<sup>1</sup>Nótese que la definición de la función  $\delta_{h,L}^e(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)$  es idéntica a la definida por *Mo & White (1996)* en el modelo de colapso esférico, a diferencia que está determinada a partir de las funciones de masa universal y condicional encontradas por ST en el modelo de colapso elipsoidal.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi \frac{R_0^3}{(1+\delta)}
\end{aligned}$$

Podemos identificar entonces la función  $f^e(\delta, R_1)$  con la definición (7.3) dada para  $\delta_{h,L}^e(M_1, \delta_1|M_0, \delta_0)$  si queremos determinar los coeficientes de sesgo en el espacio Lagrangiano, o con  $\delta_{h,E}^e[M_1, \delta_1|M_0, \delta_0(\delta, z_0)]$  para determinar dichos coeficientes en el espacio Euleriano. Para contrastar los resultados de este modelo con las simulaciones numéricas de N-cuerpos, debemos usar los coeficientes de sesgo en el espacio evolucionado (el espacio Euleriano) que es donde se identifican los halos en las simulaciones, por lo que planteamos  $f^e(\delta, R_1) \equiv \delta_{h,E}^e[M_1, \delta_1|M_0, \delta_0(\delta, z_0)]$ , entonces:

$$f^e(\delta, R_1) = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{N}_{ST}[M_1, \delta_1|M_0, \delta_0(\delta, z_0)]}{n_{ST}(M_1, z_1)\pi R_0^3} (1+\delta) - 1$$

Si reemplazamos las expresiones (5.16) y (5.12) para las funciones de masa universal,  $n_{ST}(M_1, z_1)$ , y condicional  $\mathfrak{N}_{ST}[M_1, \delta_1|M_0, \delta_0(\delta, z_0)]$  respectivamente, en la ecuación anterior, encontramos que:

$$\begin{aligned}
f^e(\delta, R_1) &= \frac{\sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{M_0}{(S-s)^{3/2}} \left\{ \delta_1 - \delta_0 + \frac{\beta}{a^\alpha} \left[ \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} G(S, s, \alpha) - \frac{s^\alpha}{\delta_0^{2\alpha-1}} \right] \right\}}{\sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{\bar{\rho}}{S^{3/2}} \left\{ \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \Phi(\alpha) \right\} V_0 (1+\delta)^{-1}} \dots \\
&\quad \frac{\exp[\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0)] \exp\left[-\frac{a}{2(S-s)} \left(\delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}}\right)^2\right] \frac{dS}{dM_1} \frac{1}{M_1}}{\dots \frac{\exp\left[-\frac{a}{2S} \left(\delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}}\right)^2\right] \frac{dS}{dM_1} \frac{1}{M_1}}{\dots}} \\
&= \frac{S^{3/2}}{(S-s)^{3/2}} \frac{\left\{ \delta_1 - \delta_0 + \frac{\beta}{a^\alpha} \left[ \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} G(S, s, \alpha) - \frac{s^\alpha}{\delta_0^{2\alpha-1}} \right] \right\}}{\left\{ \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \Phi(\alpha) \right\} (1+\delta)^{-1}} \dots \quad (7.5) \\
&\quad \dots \exp[\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0)] \exp\left\{ \frac{a}{2} \left[ \frac{1}{S} - \frac{1}{(S-s)} \right] \left( \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

donde las funciones  $\Phi(\alpha)$ ,  $G(S, s, \alpha)$  y  $\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0)$  están dadas por (5.11), (5.17) y (5.18) respectivamente, y se ha usado el hecho que  $V_0 = M_0/\bar{\rho}$ ;  $S = \sigma^2(R_1)$  es la variancia en la escala  $R_1$ ,  $s = \sigma^2(R_0)$  es la variancia en escala  $R_0$ ,  $\delta_0$  está dado por la serie de potencias (7.2) y  $\delta$  es la sobredensidad no lineal de materia.

Para analizar el sesgo de las estructuras con la distribución de materia, hacemos la aproximación de que la escala de las estructuras satisface  $R_1 \ll R_0$ , entonces  $\sigma(R_0) \ll \sigma(R_1)$ , lo que implica:

$$\begin{aligned}\frac{s}{S} &\rightarrow 0 \\ G(S, s, \alpha) &\rightarrow \Phi(\alpha) \\ \mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0) &\rightarrow \frac{a}{S}\delta_0 \left[ \frac{1}{2}\delta_0 - \left( \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \right) \right]\end{aligned}$$

Podemos entonces usar estas aproximaciones en la expresión (7.5) de la función  $f^e(\delta)$  y obtener:

$$f^e(\delta) = \frac{\delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \Phi(\alpha) - \delta_0}{\left[ \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \Phi(\alpha) \right]} (1 + \delta) \exp [\mathfrak{L}(S, s, \alpha, \delta_0)]$$

donde, además del factor  $1 + \delta$ , esta función depende de  $\delta$  a través de  $\delta_0$ . A partir de esta función, podemos encontrar los coeficientes de sesgo  $b_k^e$  en el modelo de colapso elipsoidal y, desarrollando hasta el quinto orden, obtenemos:

$$b_0^e = 0 \quad (7.6)$$

$$b_1^e = \frac{a}{S} \mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}_f} + 1 \quad (7.7)$$

$$b_2^e = 2(1 + a_2^e) \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}_f} \right) - \frac{a}{S} \left( 1 + 2 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_f} \right) + \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} \right)^2 \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} b_3^e &= 6(a_2^e + a_3^e) \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}_f} \right) - 12a_2^e \frac{a}{S} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_f} + 3(1 + 2a_2^e) \left[ \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} \right)^2 - \frac{a}{S} \right] - \dots \\ &\dots - 6 \frac{a}{S} \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_f} - 3 \frac{a}{S} \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}_f} \right) - \frac{3}{\mathfrak{D}_f} \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} \right)^2 + \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} \right)^3 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} b_4^e &= 24(a_4^e + a_3^e) \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}_f} \right) + 12[(a_2^e)^2 + 2(a_2^e + a_3^e)] \frac{a}{S} \mathfrak{D} \left[ \frac{a}{S} \mathfrak{D} - \frac{1}{\mathfrak{D}_f} - \dots \right. \\ &\dots \left. - \frac{2}{\mathfrak{D}_f} \right] + 4(1 + 3a_2^e) \frac{a}{S} \left[ \frac{3}{\mathfrak{D}_f} - 3 \frac{a}{S} \mathfrak{D} \left( \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_f} + 1 \right) + \left( \frac{a}{S} \right)^2 \mathfrak{D}^3 \right] + \dots \\ &\dots + 3 \frac{a^2}{S^2} \left( 1 + 4 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_f} \right) - 2 \frac{a^3}{S^3} \mathfrak{D}^2 \left( 2 \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_f} + 3 \right) + \left( \frac{a}{S} \mathfrak{D} \right)^4 \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde hemos definido  $\mathfrak{D}$  y  $\mathfrak{D}_f$  como:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \delta_1 + \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}} \\ \mathfrak{D}_f &= \delta_1 + \Phi(\alpha) \frac{\beta}{a^\alpha} \frac{S^\alpha}{\delta_1^{2\alpha-1}}\end{aligned}$$

y los coeficientes  $a_2^e$ ,  $a_3^e$  y  $a_4^e$  están dados por (7.2) y  $a$  es un parámetro del modelo de colapso elipsoidal tal que  $a = 0,707$ .

En las ecuaciones (7.6)-(7.10) hemos definido los coeficientes de sesgo en el espacio Euleriano, por lo que podremos relacionar las amplitudes jerárquicas de correlación para la distribución de materia y de galaxias a través de las ecuaciones determinadas en el capítulo anterior (ecuación 6.12).

## 7.2. Comparación con el modelo de *Mo, Jing & White (1997)*.

El primer paso para corroborar los resultados de la sección anterior, es comparar las ecuaciones (7.6)-(7.10) obtenidas para los coeficientes  $b_k^e$  con las ecuaciones (6.22)-(6.26) para los coeficientes  $b_k$  en el modelo de colapso esférico cuando el conjunto de parámetros  $(a, \alpha, \beta)$  del modelo de colapso elipsoidal toma los valores correspondientes al modelo esférico.

Podemos ver que cuando  $a = 1$ ,  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ , valores en los que el modelo de colapso elipsoidal se reduce al modelo de colapso esférico, las expresiones que encontramos en la Sección 5.3 para las funciones de masa universal (5.12) y condicional (5.16), se reducen a las obtenidas por PS y *Bower(1991)* en el modelo de colapso esférico (para el modelo de colapso elipsoidal se tiene que  $a = 0,707$ ,  $\alpha = 0,615$  y  $\beta = 0,485$ ):

$$\begin{aligned} n_{ST}(M_1, \delta_1)_{(a=1, \alpha=0, \beta=0)} &\rightarrow n(M_1, \delta_1) \\ \mathfrak{N}_{ST}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0)_{(a=1, \alpha=0, \beta=0)} &\rightarrow \mathfrak{N}(M_1, \delta_1 | M_0, \delta_0) \end{aligned}$$

Reduciendo los parámetros  $(a, \alpha, \beta)$  a los correspondientes para el modelo de colapso esférico, obtenemos que las funciones y constantes usadas para definir los coeficientes  $b_k^e$  toman la forma:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &\rightarrow 1 \\ \mathfrak{D} , \mathfrak{D}_f &\rightarrow \delta_1 \\ \frac{a}{S} &\rightarrow \left( \frac{\nu_1}{\delta_1} \right)^2 \\ a_2^e , a_3^e , a_4^e &\rightarrow a_2 , a_3 , a_4 \end{aligned}$$

donde  $\nu_1 = \delta_1/\sigma_1$ . Reemplazando estas reducciones en las expresiones (7.6)-(7.10) obtenidas en la sección anterior para los coeficientes  $b_k^e$ , encontramos que, efectivamente, éstos coeficientes se reducen a los obtenidos en el modelo de colapso esférico:

$$b_0^e, b_1^e, b_2^e, b_3^e, b_4^e_{(a=1, \alpha=0, \beta=0)} \rightarrow b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$$

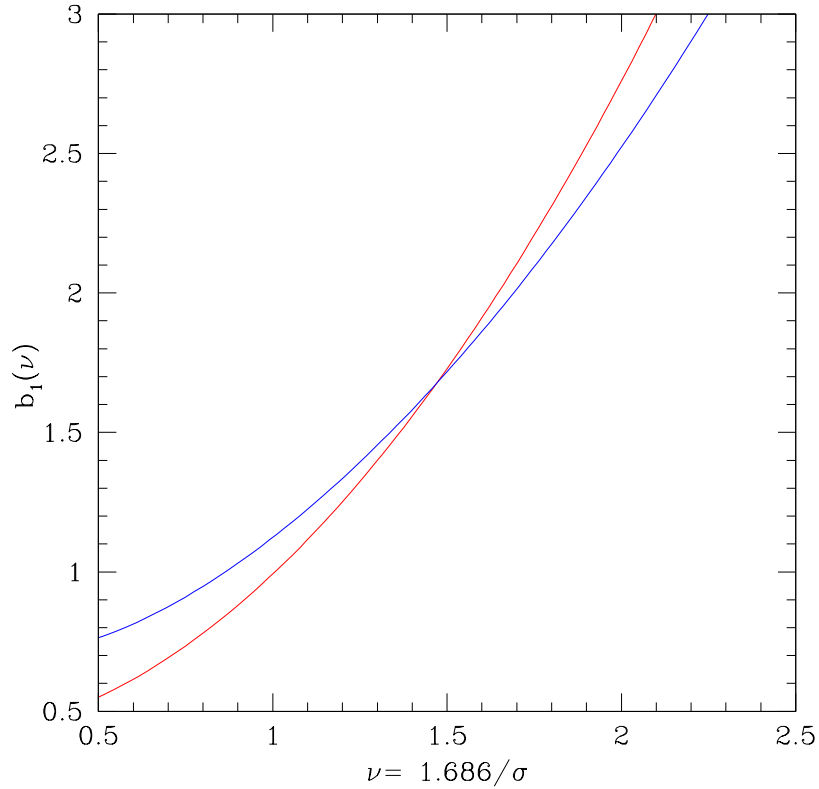


Figura 7.1: Curvas para el coeficiente de sesgo analítico de primer orden en el modelo de colapso esférico (rojo) y colapso elipsoidal (azul).

En las figuras 7.1-7.4 se muestra el comportamiento de los coeficientes de sesgo, en función de la variable  $\nu$  cuando  $z_1 = 0$ ; en rojo se muestran los coeficientes  $b_k$  obtenidos por MJW, y en azul los obtenidos en éste trabajo para el modelo de colapso elipsoidal. Puede notarse que para cada valor de  $k$  las curvas son muy similares. Cuando  $k = 3, 4$  encontramos que para los coeficientes  $b_k^e$  los máximos y mínimos locales ocurren en valores de  $\nu$  mayores, y su amplitud también es mayor para los coeficientes  $b_k^e$ . Para  $k = 2$  el mínimo ocurre en valores de  $\nu$  mayores para  $b_2^e$ , pero su amplitud es menor en  $b_2$ . Para  $k = 1$  encontramos que  $b_1^e > b_1$  si  $\sigma > 1,686$ , y que  $b_1^e < b_1$  si  $\sigma < 1,686$ ; como el coeficiente de sesgo de primer orden es el que más pesa en la relación entre la distribución de materia y de galaxias, podemos deducir que en escalas grandes (valores de  $\sigma$  chicos), el sesgo es mayor cuando usamos la dinámica esférica, y para escalas chicas la dinámica elipsoidal da como resultado una amplitud mayor para el sesgo. La dinámica elipsoidal ofrece mejores resultados para la evolución de las estructuras en escalas chicas por lo que podemos decir que, en escalas chicas, el sesgo es mayor que el obtenido en el modelo de colapso esférico.

Nótese que las escalas de las figuras (7.1)-(7.4) se eligieron de forma tal de mostrar

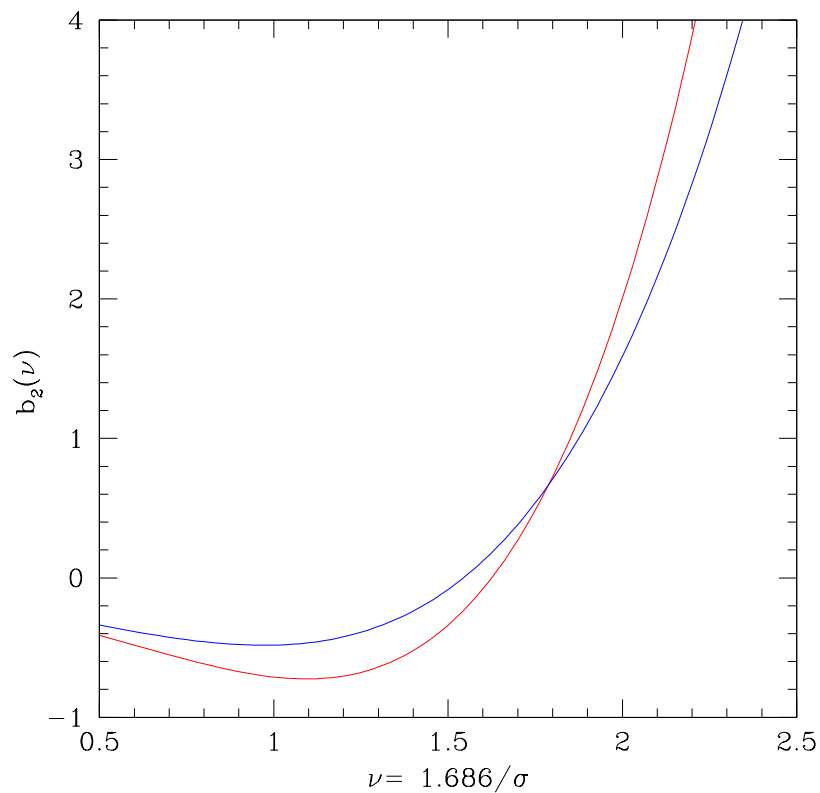


Figura 7.2: Idem que la figura 7.1 para el coeficiente de sesgo de segundo orden.

las diferencias entre las curvas para ambos modelos, ya que para valores de  $\sigma$  chicos ambas curvas crecen rápidamente alcanzando amplitudes muy grandes, ocasionando que la diferencia entre las amplitudes de las curvas en los valores de  $\sigma$  grandes sean imperceptibles.

En la curva para el coeficiente de sesgo  $b_4^e$  mostrada en la figura 7.4, existe otro máximo y otro mínimo para valores de  $\sigma$  mayores a los mostrados en el gráfico, pero en escalas suficientemente grandes ( $\sigma$  suficientemente chico), ambas curvas tienen el mismo comportamiento.

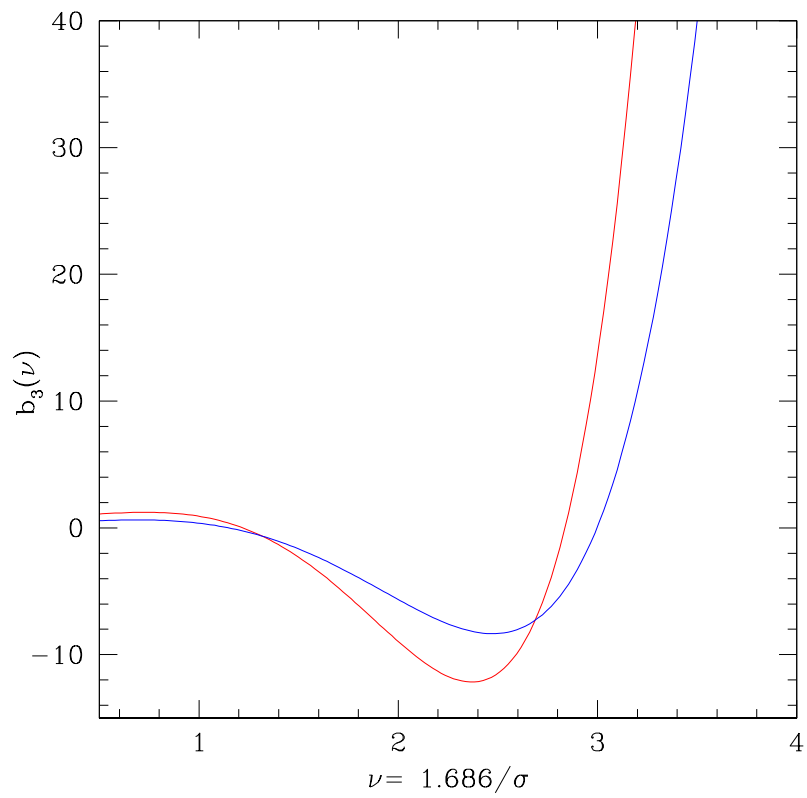


Figura 7.3: Idem a la figura 7.1 para el coeficiente de sesgo de tercer orden.

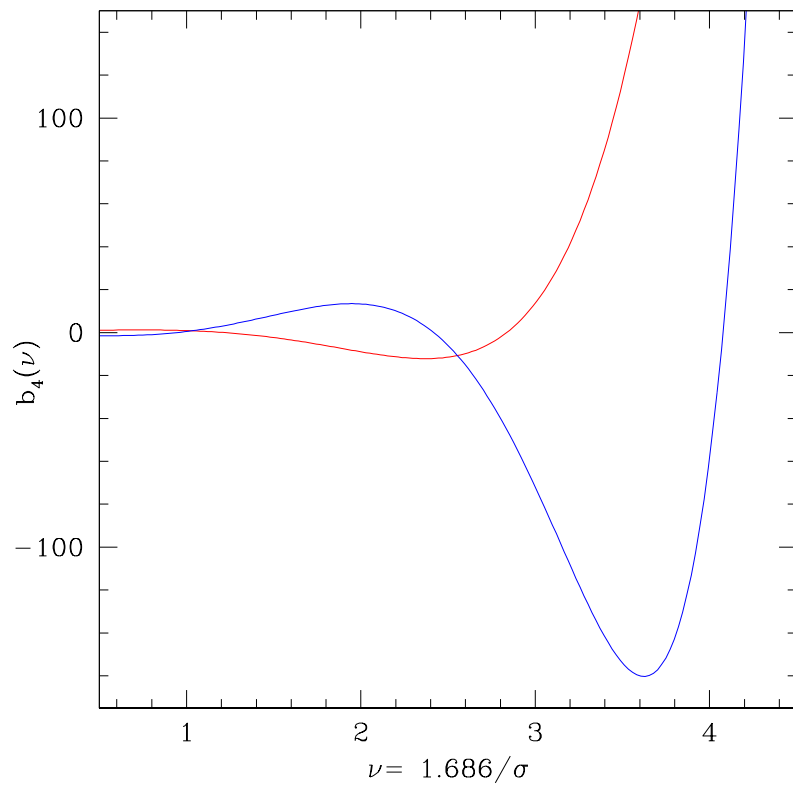


Figura 7.4: Idem a la figura 7.1 para el coeficiente de sesgo de cuarto orden.



**Parte IV**

**Resultados**

# Capítulo 8

## Medición de $S_J(R)$ en simulaciones numéricas: comparación con los modelos analíticos.

Hemos obtenido los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso elipsoidal y corroboramos que se reducen a los obtenidos en el modelo de colapso esférico cuando los parámetros de la dinámica elipsoidal  $(a, \alpha, \beta)$  toman los valores correspondientes a la simetría esférica.

En este capítulo relacionaremos la distribución de galaxias y de masa en las simulaciones a partir de los coeficientes que obtuvimos en el capítulo anterior. Las simulaciones numéricas nos permiten caracterizar la distribución de masa a partir de las amplitudes de correlación jerárquicas  $S_J$ , ya que pueden ser medidos directamente en la simulación a través del método de conteo en celdas. Lo mismo podemos decir para las amplitudes  $S_{J,g}$  de la distribución de galaxias (halos) ya que, a partir de algún algoritmo de identificación, podemos determinar la distribución de halos en la simulación numérica. En los trabajos de MJW y *Casas-Miranda et. al. (2002)* se compararon las amplitudes  $S_J$  y  $S_{J,g}$  a través de los coeficientes de sesgo en el modelo de colapso esférico y los obtenidos por *Scoccimarro et. al (2001)*, respectivamente.

En las siguientes secciones desarrollaremos la metodología seguida para medir las amplitudes  $S_J$  y  $S_{J,g}$ , y finalmente los compararemos a través de los coeficientes  $b_k^e$ .

### 8.1. Medición de $S_J(R)$ en la distribución de materia: simulaciones numéricas.

Hemos utilizado las simulaciones GIF (*Kauffman et. al. 1998*), particularmente los modelos  $\Lambda$ CDM y  $\tau$ CDM, ambos con alta densidad y realizamos un conjunto de dos simulaciones, S01 y S02, en el modelo  $\Lambda$ CDM con densidad más baja (volumen

Tabla 8.1: Parámetros característicos de las simulaciones utilizadas, donde  $N_{obj}$  es el número de partículas,  $L_{box}$  es el lado del volumen cúbico en donde evoluciona la simulación y  $m_p$  es la masa por partícula en unidades de masa solar.

Simulación	$\Omega_m$	$\Omega_\Lambda$	$h$	$\sigma_8$	$N_{obj}$	$L_{box}$	$m_p$
GIF- $\tau$ CDM	1,0	0,0	0,5	0,6	$256^3$	$85,5 h^{-1} Mpc$	$1,03 \times 10^{10}$
GIF- $\Lambda$ CDM	0,3	0,7	0,7	0,9	$256^3$	$141,3 h^{-1} Mpc$	$1,39 \times 10^{10}$
S01 $_{\Lambda}$ CDM	0,3	0,7	0,7	0,9	$128^3$	$180 h^{-1} Mpc$	$6,74 \times 10^{11}$
S02 $_{\Lambda}$ CDM	0,3	0,7	0,65	0,9	$128^3$	$300 h^{-1} Mpc$	$3,91 \times 10^{12}$

más grande y menor número de partículas); de esta forma podremos contrastar los resultados en simulaciones de alta y baja densidad. Los parámetros de las simulaciones mencionadas anteriormente se describen en la Tabla 8.1.

Se midieron las amplitudes de correlación jerárquicas  $S_J(R)$  en todas las simulaciones, a través del método de conteo en celdas descrito en la Sección 6.1, siguiendo estos pasos:

- Dividimos el volumen  $L_{box}^3$  de la simulación en  $M^3$  celdas tal que cada celda tiene lado  $R$  dado por:

$$R = \frac{L_{box}}{M}$$

y contamos el número  $N_i$  de partículas en la  $i$ -ésima celda, con  $i = 1, 2, \dots, M^3$ .

- A partir de  $M$  y  $N_i$ , calculamos los momentos no-correctados  $m_J$  de orden  $J = 2, 3, 4$  de la ecuación:

$$m_J = \frac{1}{M^3} \sum_{i=1}^{M^3} (N_i - \bar{N})^J$$

donde  $\bar{N} = \frac{N_{obj}}{M^3}$  es el número medio de partículas por celda. Con los valores obtenidos para  $m_J$  calculamos los momentos corregido  $k_J$  para los mismos valores de  $J$ :

$$\begin{aligned} k_2 &= m_2 - \bar{N} \\ k_3 &= m_3 - 3m_2 + 2\bar{N} \\ k_4 &= m_4 - 3m_2^2 - 6m_3 + 11m_2 - 6\bar{N} \end{aligned}$$

- Obtuvimos las funciones de correlación media de orden  $J$ :  $\bar{\xi}_J$  a partir de su relación generalizada con los momentos corregidos (ecuación 6.6 y 6.7):

$$\bar{\xi}_J = \frac{k_J}{N^J} \quad \text{para} \quad J = 2, 3, 4$$

y calculamos las amplitudes de correlación jerárquicas  $S_J$  como

$$S_J = \frac{\bar{\xi}_J}{\bar{\xi}_2^{J-1}}$$

- Repetimos éste proceso para distintos valores de  $R$ , obteniendo así las amplitudes  $S_J$  como función de la escala. Nótese que la escala más grande en donde podemos calcular  $S_J$  es en  $R = L_{box}/2$ , en cambio, podemos calcularla en escalas tan chicas como se quiera pero con la advertencia de que las relaciones usadas en los pasos anteriores para obtener  $S_J$  a partir de  $m_J$  son ciertos para la evolución lineal del campo de fluctuaciones, situación que no se da en escalas muy chicas.

En la figura 8.1 se muestran los resultados del procedimiento anterior aplicado a los dos modelos de las simulaciones GIF: modelo  $\Lambda$ CDM (azul) y modelo  $\tau$ CDM (rojo); los puntos con contornos llenos corresponden a los valores obtenidos para  $S_3$ , y los puntos con contornos vacíos a los obtenidos para  $S_4$ .

Puede verse que para escalas chicas, valores de  $R \sim 2h^{-1}Mpc$ , ambos modelos son indistinguibles, pero a escalas más grandes, a pesar de la fluctuación de los puntos medidos, se observa una tendencia de que los valores obtenidos para  $S_3$  y  $S_4$  en el modelo  $\tau$ CDM son menores a los obtenidos en el modelo  $\Lambda$ CDM en la misma escala. Usaremos las simulaciones en el modelo  $\Lambda$ CDM para contrastar los coeficientes de sesgo con las amplitudes  $S_{J,g}$  para los halos ya que, por la metodología usada, el número de escalas en donde podemos calcular las amplitudes  $S_J$  es mayor.

En la figura 8.2 mostramos los resultados para las amplitudes  $S_3(R)$  y  $S_4(R)$  medidas en las simulaciones GIF- $\Lambda$ CDM (puntos negros), S01 (puntos rojos) y S02 (puntos azules); los puntos con contornos llenos corresponden a los valores obtenidos para  $S_3$ , y los puntos con contornos vacíos a los obtenidos para  $S_4$ . Podemos ver en ésta figura que los resultados de la medición en los tres modelos es muy similar por lo que no hay una dependencia notable con la densidad de partículas de la simulación en las escalas mostradas en el gráfico.

Debido a que los valores de  $S_3$  y  $S_4$  obtenidos en las simulaciones  $\Lambda$ CDM, S01 y S02, con distintas densidades, son muy similares, contrastaremos los coeficientes de sesgo con los valores de las amplitudes medidos en la simulación GIF- $\Lambda$ CDM.

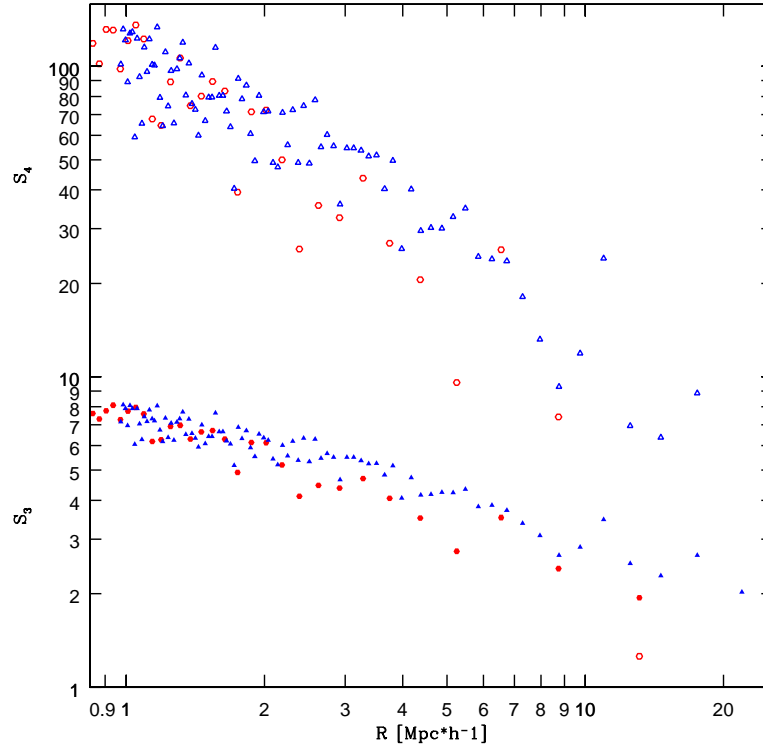


Figura 8.1: Las amplitudes de correlación  $S_3$  y  $S_4$  calculadas en las simulaciones GIF para los dos modelos:  $\Lambda$ CDM (azul) y  $\tau$ CDM (rojo). Los contornos llenos muestran los puntos obtenidos para  $S_3$ , y los contornos vacíos los obtenidos para  $S_4$  en distintos valores de  $R$ .

## 8.2. Comparación entre las amplitudes de correlación medidas para la distribución de halos y los modelos analíticos

Para determinar halos en las simulaciones hemos usado el algoritmo *FOF* -Friends Of Friends- (*Davis et. al. 1985*) que se basa en la idea de “filtración” de zonas de alta densidad. Se elige una partícula de la simulación, que no haya sido asignada previamente a un halo, y se buscan las partículas que están a una distancia menor a  $d_m$  tal que:

$$d_m = l \frac{\bar{d}}{2}$$

donde  $\bar{d}$  es la separación media de las partículas y  $l$  es el *parámetro de nexo*. Las partículas que satisfacen la condición  $d < d_m$  son asignadas al halo e identificamos

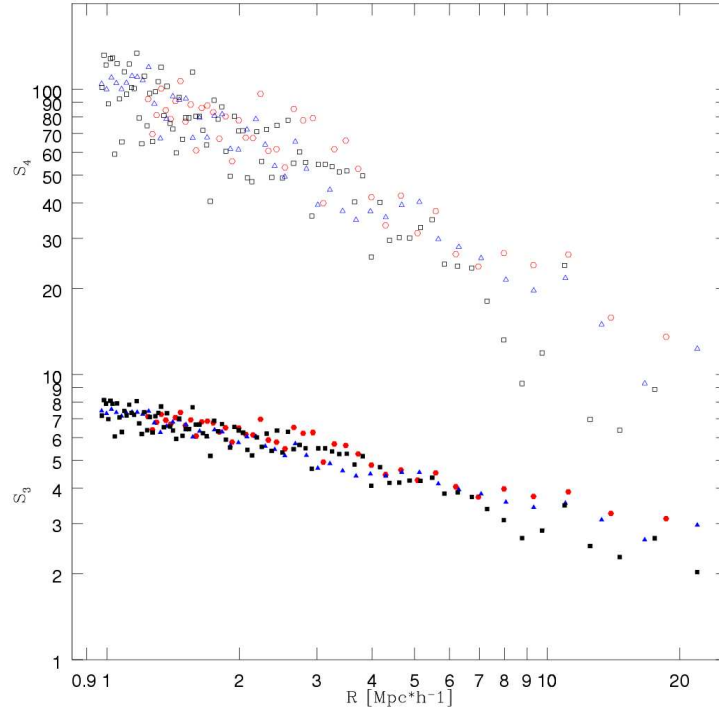


Figura 8.2: Las amplitudes de correlación  $S_3$  y  $S_4$  calculadas en las simulaciones S01 (rojo), S02 (azul) y  $\Lambda$ CDM (negro). Los contornos llenos muestran los puntos obtenidos para  $S_3$ , y los vacíos los obtenidos para  $S_4$  en distintos valores de  $R$ .

así un halo con un grupo de partículas; el procedimiento se repite para cada una de las partículas y se determina la coordenada del halo como la del centro de masa del mismo y la masa se obtiene a través del número de partículas en el halo. El problema de este algoritmo es que puede identificar como un único halo a dos grupos de partículas unidos por un filamento.

La determinación de los halos a través del algoritmo FOF es muy sensible al parámetro  $l$  (*Eke et. al 1996*), usualmente se usa el valor  $l = 0,2$ . Debido a que el algoritmo puede identificar a una única partícula como una halo, definimos un grupo de partículas como un halo si el número de partículas contenidas en él es mayor a una cota inferior  $N_p$ . Una vez realizada la identificación de los halos, repetimos el procedimiento descrito en la sección anterior para determinar las amplitudes de correlación jerárquicas de los halos,  $S_{J,g}$ .

En la figura 8.3 se muestran las amplitudes de correlación jerárquicas  $S_{3,g}$  (rojo) y  $S_{4,g}$  (azul) medidas en la distribución de halos obtenidas a partir del algoritmo *FOF* aplicado a la simulación GIF- $\Lambda$ CDM con el parámetro de nexa  $l = 2$  y una cota inferior al número de partículas por halos  $N_p = 10$ .

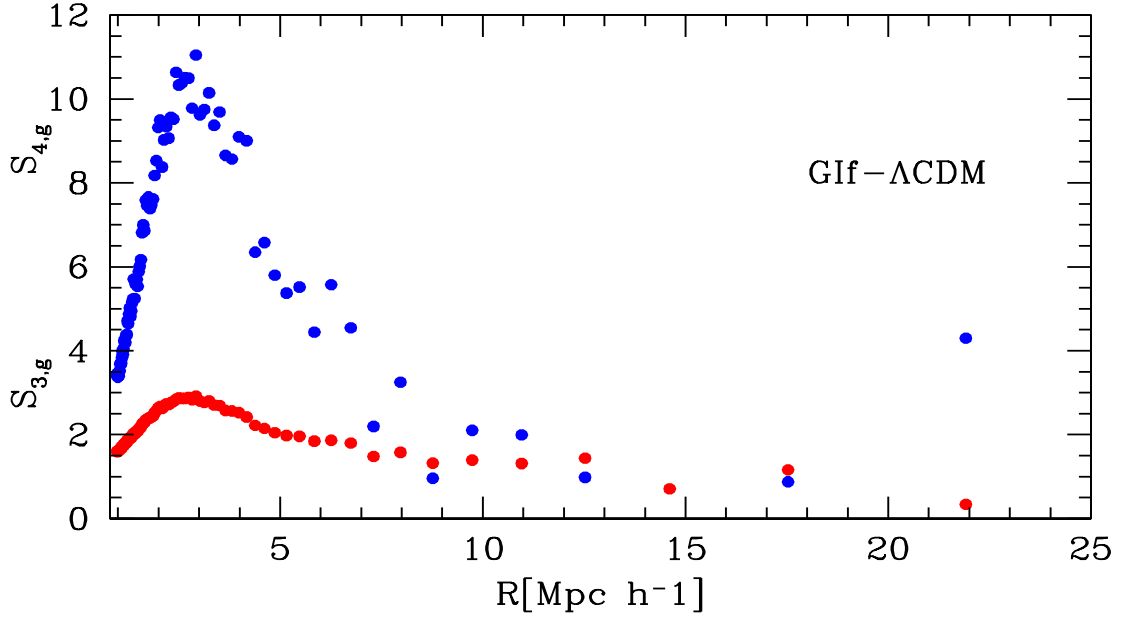


Figura 8.3: Amplitudes de correlación jerárquicas de orden 2 y 4 para los halos identificados en la simulación GIF- $\Lambda$ CDM con una cota inferior  $N_p = 10$ .

Podemos relacionar las amplitudes de correlación jerárquicas de la distribución de materia y de halos,  $S_J$  y  $S_{J,g}$ , usando los coeficientes de sesgo de alto orden  $b_k^e$  que determinamos en éste trabajo, a través de las ecuaciones (6.12):

$$S_{3,g} = \frac{1}{b_1^e} \left( S_3 + 3 \frac{b_2^e}{b_1^e} \right) \quad (8.1)$$

$$S_{4,g} = \frac{1}{(b_1^e)^2} \left[ S_4 + 12 S_3 \frac{b_2^e}{b_1^e} + 4 \frac{b_3^e}{b_1^e} + 12 \left( \frac{b_2^e}{b_1^e} \right)^2 \right] \quad (8.2)$$

Nótese que los coeficientes de sesgo usados en estas ecuaciones para determinar  $S_{J,g}$  a partir de  $b_k^e$  y  $S_J$  no son los coeficientes  $b_k^e(\sigma^2)$  obtenidos en el capítulo anterior, como función de la variancia; sino que son coeficientes de sesgo *efectivos* que calculamos a través de un promedio de los coeficientes  $b_k^e(\sigma^2)$ , pesado por el número halos de masa  $M$  en la simulación que estamos considerando:

$$b_{k,eff}^e = \frac{\int_{M_{lim}}^{\infty} b_k^e(M) n(M) dM}{\int_{M_{lim}}^{\infty} n(M) dM}$$

donde  $M_{lim}$  es el límite de masa inferior en la simulación y  $n(M)$  es la densidad espacial de halos en el intervalo de masa entre  $M$  y  $M + dM$  (Mo & White 1996; Governato et. al 1996); para calcular los coeficientes  $b_{k,eff}^e$  que usaremos en las ecuaciones (8.1)

y (8.2) adoptamos la forma analítica de la función de masa de Press-Schechter para  $n(M)$ , y el límite inferior para la masa  $M_{\text{lim}} = N_p m_p$  con  $N_p = 10$ .

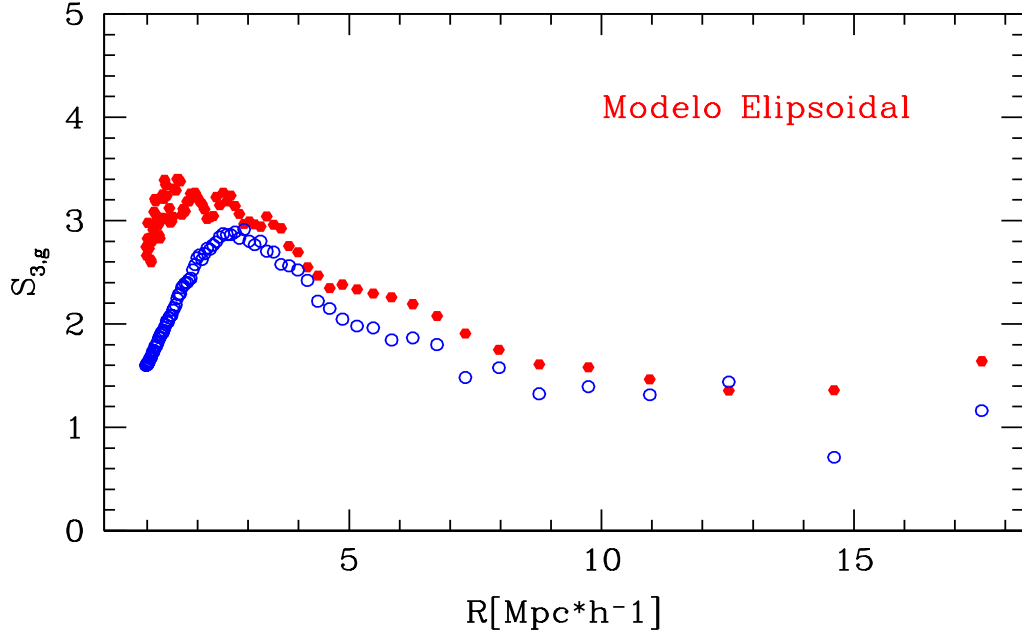


Figura 8.4: Amplitud de correlación jerárquica de tercer orden de la distribución de halos. En círculos azules vacíos se muestra la amplitud  $S_{3,g}$  obtenida para los halos identificados en la simulación GIF- $\Lambda$ CDM, y los puntos rojos muestran la amplitud  $S_{3,g}$  calculada a partir de la ecuación (8.1) usando los coeficientes  $b_k^e$  del colapso elipsoidal.

En las figuras (8.4)-(8.5) se muestran las amplitudes de correlación jerárquicas de tercer y cuarto orden respectivamente; los círculos azules vacíos son la amplitud de correlación jerárquica medida en la distribución de halos identificados en la simulación GIF- $\Lambda$ CDM, y los círculos llenos rojos son la amplitud de correlación de los halos calculada a partir de las ecuaciones (8.1) y (8.2) usando los coeficientes de sesgo del modelo de colapso elipsoidal. La amplitud  $S_{3,g}$  calculada muestra un acuerdo con la medición en la simulación a partir de la escala  $R \simeq 10h^{-1}Mpc$ , y la amplitud  $S_{4,g}$  calculada muestra un acuerdo a partir de la escala  $R \simeq 12h^{-1}Mpc$ . En escalas grandes se logra un buen acuerdo entre las las amplitudes medidas y calculadas, sin embargo, en escalas chicas, las amplitudes calculadas crecen notablemente; esto se debe principalmente a efectos no lineales en pequeña escala.

Para comparar los resultados obtenidos anteriormente, en las figuras (8.6) y (8.7) mostramos las amplitudes  $S_{3,g}$  y  $S_{4,g}$ , respectivamente, calculadas a partir de las ecuaciones (8.1) y (8.2), pero usando los coeficientes de sesgo  $b_k$  del modelo de colapso esférico. Debe notarse que las amplitudes medidas (miembro izquierdo en las ecuaciones 8.1 y 8.2) son las mismas en ambos modelos, así como también las amplitudes de



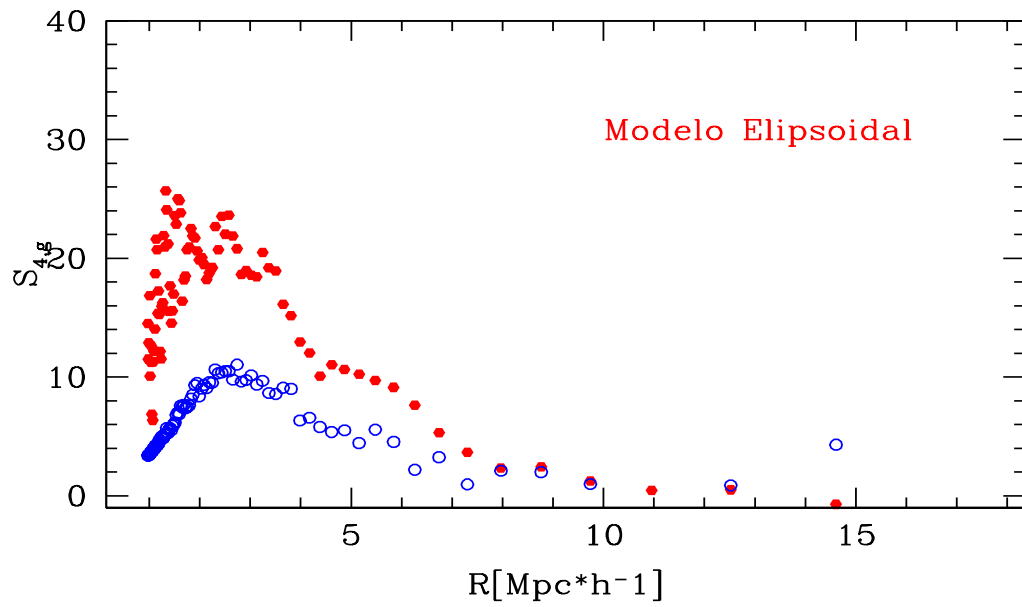


Figura 8.5: Idem figura 8.4, para la amplitud de correlación jerárquica de cuarto orden de la distribución de halos medida (círculos azules vacíos) y calculada (círculos rojos llenos).

correlación  $S_J$  de la distribución de materia ya que ambas se obtienen a partir de la simulación numérica, lo que difiere en los resultados son sólo los coeficientes utilizados.

Comparando los resultados en los dos modelos de colapso, vemos que el el modelo elipsoidal logra un mejor acuerdo entre las amplitudes  $S_{3,g}$  y  $S_{4,g}$  medidas y calculadas.

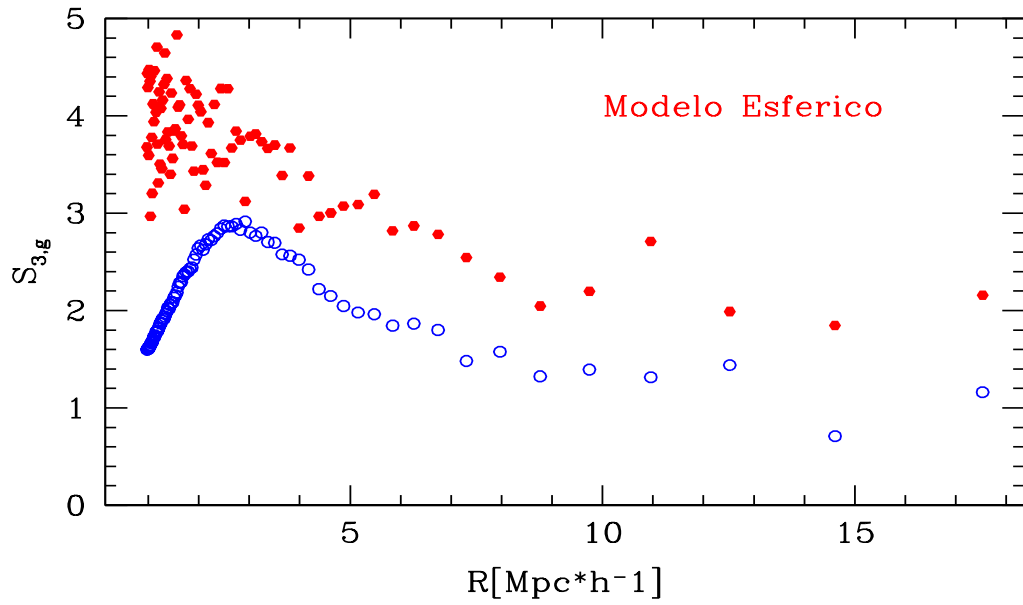


Figura 8.6: El modelo de colapso esférico: La amplitud de correlación jerárquica de tercer orden de la distribución de halos. En círculos azules vacíos se muestra la amplitud  $S_{3,g}$  obtenida para los halos identificados en la simulación GIF- $\Lambda$ CDM, y los puntos rojos muestran la amplitud  $S_{3,g}$  calculada a partir de la ecuación (8,1) usando los coeficientes  $b_k^e$  del colapso esférico.

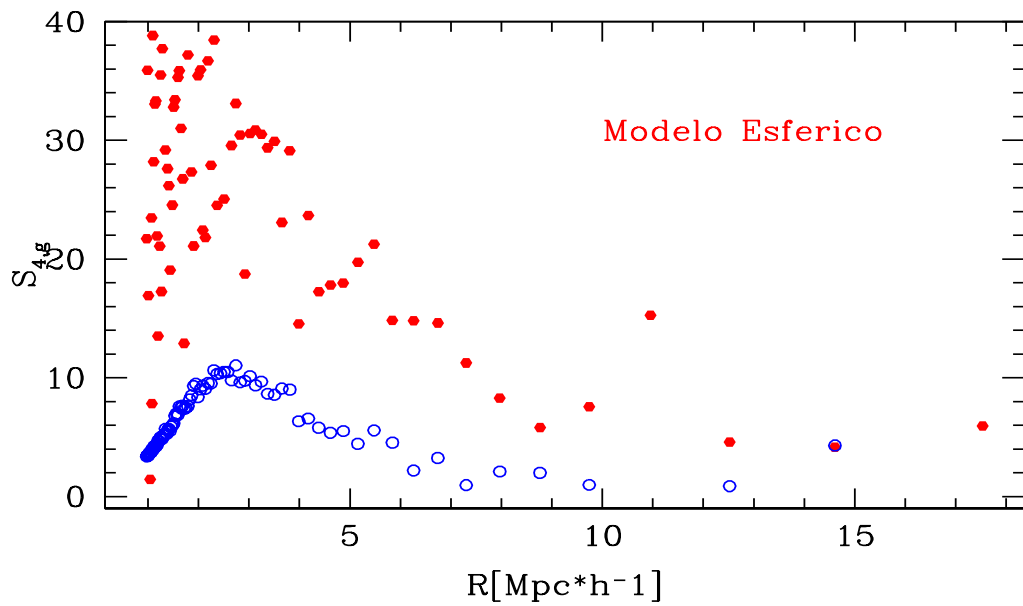


Figura 8.7: Idem figura 8,6, para la amplitud de correlación jerárquica de cuarto orden de la distribución de halos medida (círculos azules vacíos) y calculada (círculos rojos llenos).

# Capítulo 9

## Conclusiones

En este trabajo hemos analizado diversos modelos analíticos para la formación de las estructuras en el universo. Se han revisado modelos para determinar la función de masa de las estructuras bajo la hipótesis de simetría esférica para el colapso de las estructuras: formalismos de Press-Schechter y Press-Schechter extendido, y también bajo la hipótesis de simetría elipsoidal: modelo de *Sheth, Mo & Tormen (2001)* y la extensión dada por *Sheth & Tormen (2001)*, que muestran mejor acuerdo con las mediciones de la función de masa en las simulaciones; también hemos considerado las funciones de masa condicional derivadas a partir de los formalismos mencionados anteriormente. En los Capítulos 6 y 7 desarrollamos el método de *Mo, Jing & White (1997)* para la obtención de los coeficientes de sesgo de alto orden en el modelo de colapso esférico y, a partir de la extensión de *Sheth & Tormen (2001)*, implementamos un método similar para determinar los coeficientes de alto orden en el modelo de colapso elipsoidal y comparamos ambos resultados. En el Capítulo 8 implementamos éste modelo analítico en las simulaciones numéricas.

Encontramos que, cuando valuamos los parámetros del modelo de colapso elipsoidal tal que se recupere la simetría esférica, se obtiene que los coeficientes de sesgo  $b_k^e$  en el modelo de colapso elipsoidal se reducen a los obtenidos por *Mo, Jing & White (1997)* para el caso de colapso esférico. Asimismo, implementamos éstos modelos en las simulaciones numéricas para calcular la amplitud de correlación jerárquica  $S_{J,g}$  a través de los coeficientes de sesgo, encontrando un buen acuerdo en algunas escalas intermedias y grandes pero, en escalas chicas, los efectos no-lineales se hacen importantes dando como resultado que el  $S_{J,g}$  calculado se aparte del medido.

Si bien las simulaciones numéricas tienen la posibilidad de considerar los efectos no lineales, notamos que sin embargo, el desarrollar modelos analíticos permite estudiar la formación de las estructuras en cualquier escala a diferencia de las simulaciones que están fuertemente limitadas en resolución espacial y de masa. Los modelos analíticos permiten analizar la formación de estructuras y los complejos procesos involucrados en la segregación de masa y estructuras, aquellos que dan lugar a la transferencia de momento angular, coherencia del campo de velocidades y correlación entre propiedades

de halos y sus componentes, entre otros efectos de relevancia para la comprensión de la formación y evolución de estructuras en el universo.

# Apéndice A

## Evolución de los semiejes en una perturbación elipsoidal con un campo de marea externo

Para obtener las ecuaciones de movimiento para el campo de marea en la aproximación de un elipsoide homogéneo, necesitamos la aceleración peculiar  $\mathbf{g}_P$ , y el potencial gravitacional peculiar  $\Phi_P$  en la región de la sección local del máximo en densidad (“*peak patch*”);  $\Phi_P$  satisface la ecuación de Poisson, con lo que:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_P &\equiv -\nabla_X \Phi_P \\ \nabla_X^2 \Phi_P &= 4\pi G(\rho_m - \bar{\rho}_m) \equiv 4\pi G\bar{\rho}_m \delta_m\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

donde el subíndice  $X$  corresponde a operadores que actúan en el espacio de coordenadas físicas Eulerianas  $\mathbf{X}$ , y el subíndice  $m$  se refiere a materia oscura fría y gas.

Antes de resolver (A.1) consideremos las siguientes aproximaciones que serán útiles a la hora de plantear las condiciones de contorno. Si hacemos una expansión en serie de Taylor hasta el segundo orden del potencial  $\Phi_P$  en la vecindad del máximo local se obtiene:

$$\Phi_P(\mathbf{X}) \simeq \Phi_P(\mathbf{X}_{pk}) - \sum_{i=1}^3 (g_{P,i})_{pk} (X_i - X_{pk,i}) + \sum_{i,j=1}^3 (T_{ij})_{pk} \frac{1}{2} (X_i - X_{pk,i})(X_j - X_{pk,j}) \quad (\text{A.2})$$

donde  $\mathbf{X}_{pk}$  son las coordenadas del máximo,  $(g_{P,i})_{pk} = -(\nabla_{x_i} \Phi_P)_{pk}$  es la contribución a la aceleración gravitacional peculiar y describe el movimiento de la región como un todo alrededor del máximo. El campo de marea peculiar  $T_{ij}$  se define como:

$$T_{ij} \equiv \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} \Phi_P$$

y su parte con traza nula se define como:

$$T'_{ij} \equiv \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} \Phi_P - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla_X^2 \Phi_P$$

donde los campos de marea externos e internos están incluídos en  $T_{ij}$ , y  $\delta_{ij}$  es la función *delta de Kronecker*. De ahora en adelante se desprecia el término constante en (A.2), ya que no afecta el movimiento, y el gradiente lineal  $(g_{P,i})_{pk}$  porque corresponde sólo al movimiento del centro de masa.

Para determinar la ecuación de movimiento a partir del potencial, teniendo en cuenta la expansión de Hubble, necesitamos agregar a la expresión de  $\Phi_P$  un término que tenga en cuenta la energía de vacío y la densidad de fondo de materia oscura fría y gas, y obtener el potencial gravitacional local total,  $\Phi_T$ :

$$\begin{aligned} \Phi_T &\equiv \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho}_m \frac{X^2}{2} + \frac{4}{3} \pi G (\bar{\rho}_\Lambda + 3\bar{p}_\Lambda) \frac{X^2}{2} + \Phi_P \\ &= \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho}_m \frac{X^2}{2} - \frac{8}{3} \pi G \bar{\rho}_\Lambda \frac{X^2}{2} + \Phi_P \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

En un elipsoide homogéneo con sobredensidad  $\delta\rho_m$ , en un campo de marea externo  $T_{E,ij}$  conocido, tiene un potencial gravitacional dado por:

$$\Phi_P(\mathbf{X}) = 4\pi G \bar{\rho}_m \delta\rho_m \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \Delta X_i \frac{1}{2} \beta_{ij} \Delta X_j + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{2} \Delta X_i T_{E,ij} \Delta X_j \quad (\text{A.4})$$

donde  $\Delta X_n = (X_n - X_{pk,n})$  y  $4\pi G \delta\rho_m \frac{1}{2} \beta_{ij}$  corresponde al campo de marea interno. Usando el sistema de coordenadas correspondiente al sistema de ejes principales del elipsoide tendremos que  $\Delta X_n \equiv a_n \Delta r_n$  donde los  $a_n$  son los factores de escala en cada una de las tres direcciones principales. En este sistema la matriz  $\beta_{ij}$  es diagonal con autovalores  $b_j$  dados por la ecuación (3.20) que satisfacen:

$$b_j = \frac{2}{3} a_i(t) a_j(t) a_k(t) R_D(a_i^2, a_j^2, a_k^2), \quad i \neq j \neq k$$

y  $R_D$  es la función elíptica de Carlson dada por:

$$R_D(x, y, z) = \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{(\tau+x)^{1/2} (\tau+y)^{1/2} (\tau+z)^{3/2}}$$

*Press & Teukolsky (1990)* dan una rutina eficiente para calcular esta función elíptica. Los autovalores  $b_j$  también pueden expresarse en función de las integrales elípticas  $E(\theta, k)$  y  $F(\theta, k)$  (*Tabla 2.1 de Binney & Tremaine 1987*).

El tensor de marea peculiar asociado a la ecuación (A.4) es:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{I,ij} + T_{E,ij} \\ &= \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho}_m \delta\rho_m \delta_{ij} + 4\pi G \bar{\rho}_m \delta\rho_m \frac{1}{2} \beta'_{ij} + T_{E,ij} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde  $\beta'_{ij}$  es la parte con traza nula de  $\beta_{ij}$ , con autovalores  $b'_j \equiv b_j - 2/3$ ; para valores pequeños de  $a_i - \bar{a}$ , la matriz con traza nula  $\beta'_{ij}$  debe coincidir con el campo de mareas lineal,  $T_{l,ij}$ , dado en (3.14).

$$b'_j \equiv \frac{2}{3}[a_i(t)a_j(t)a_k(t)R_D(a_i^2, a_j^2, a_k^2) - 1] \quad (\text{A.6})$$

En el sistema de ejes principales se tiene que  $a_i(t) = \bar{a}(t)[1 - \lambda_{vi}(t)]$  hasta el orden lineal (ecuación 3.18); si expandimos la ecuación (A.6) hasta el orden lineal, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{b'_j}{2} &\equiv \frac{1}{3}(b_j - 1) = \frac{2}{5} \left( \lambda_{vj} - \frac{\delta_{pk}}{3} \right) + \mathcal{H}(\lambda_{vj}^2) \\ &= \frac{2}{5}\lambda'_{vj} + \mathcal{H}(\lambda_{vj}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La contribución de  $\delta\rho_m b'_j$  en la ecuación (A.5) es de segundo orden y no contribuye al campo de marea lineal con traza nula,  $T'_{l,ij}$ , lo que equivale a que el campo de marea lineal debe estar constituido enteramente por el campo de marea externo lineal (ecuación 3.14):

$$T'_{E,l,ij} = T'_{l,l,ij} = -4\pi G \bar{\rho}_m e'_{pk,ij}$$

Entonces el campo de marea exterior, creado por la distribución de materia externa al elipsoide, está completamente determinado por el tensor de deformación del elipsoide promediado en el volumen. Esto se puede justificar si pensamos que el campo de desplazamiento de los elementos de masa dentro del elipsoide responden a concentraciones de materia internas, y cuando se promedia en el volumen, el campo de marea se cancela; en cambio, las concentraciones de materia exterior no se cancelan. O sea, como el campo de marea externo, inicialmente, debe coincidir con el campo de desplazamiento dentro del elipsoide, esto nos fija la forma del campo de marea externo; la evolución de dicho campo en el régimen no lineal requiere de otro conjunto de ecuaciones con la forma correcta.

Un aproximación simple para el campo de marea externo con traza nula,  $T'_{E,ij}$ , es extender la evolución lineal como si en el régimen no lineal tuviese la misma forma:

$$\text{Aproximación lineal para el campo externo} \rightarrow T'_{E,ij}(t) = \frac{D(t)}{D(t_0)} T'_{E,ij}(t_0) \quad (\text{A.8})$$

Una vez que el elipsoide llega a detenerse y comienza su colapso (“*turn around*”), los campos de marea internos superarán a los campos de marea externos; un modelo simple para el campo de marea externo en estas circunstancias es<sup>1</sup>:

$$\text{Aproximación no-lineal para el campo externo} \rightarrow T'_{E,ij}(t) = 4\pi G \bar{\rho}_m \left[ \frac{5}{4} \beta'_{ij}(t) \right] \quad (\text{A.9})$$

<sup>1</sup>Usando la expresión (A.7), esta aproximación se reduce al campo de marea lineal (A.8)

en la ecuación (A.5) vemos que una vez que  $\delta\rho_m$  crece, este término es dominado por la dinámica interna. En ambas aproximaciones, el sistema de ejes principales coincide con los ejes de simetría del elipsoide.

Conociendo los campos de marea, podemos determinar una ecuación dinámica para el elipsoide a partir de (A.3):

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}_m X_i + \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho}_\Lambda X_i - \nabla_{X_i}\Phi_P$$

debido a que el sistema de coordenadas coincide con los ejes de simetría del elipsoide, se tiene que  $X_i(r_i, t) = a_i(t)r_i$ , con lo que se puede reescribir la ecuación anterior como<sup>2</sup>:

$$\frac{d^2 a_i}{dt^2} = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho}_\Lambda a_i - 4\pi G\bar{\rho}_m a_i \left[ \frac{1}{3} + \frac{\delta_m}{3} + \frac{b'_i(t)}{2}\delta_m + \lambda'_{E,i}(t) \right] \quad (\text{A.10})$$

donde  $\lambda'_{E,i}(t)$  corresponde al campo de marea externo tal que, para la aproximación lineal:  $\lambda'_{E,i}(t) \equiv \lambda'_{vi}(t)$ , y para la aproximación no lineal:  $\lambda'_{E,i}(t) = (5/4)b'_i(t)$ ; y  $\delta_m = \frac{\bar{a}^3}{a_1 a_2 a_3} - 1$ . Las condiciones iniciales para resolver (A.10) se obtienen a partir de la aproximación de Zeldovich, y están planteadas en la Subsección 3.2.3. Para caracterizar la evolución de los  $\lambda'_{vi}$  necesitamos  $\delta_{pk}$ ,  $e_v$  y  $p_v$ .

A modo de completitud, se puede ver que la aproximación no lineal para los campos externos se reduce a la aproximación lineal si reescribimos la ecuación (A.10) en término de los factores no lineales  $\lambda_{NL,i}$  dados por:

$$\lambda_{NL,i} \equiv 1 - \frac{a_i}{\bar{a}}$$

obteniéndose:

$$\frac{d^2 \lambda_{NL,i}}{dt^2} + 2H \frac{d\lambda_{NL,i}}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}_m \left[ \left( \frac{1}{3}\delta_m + \lambda'_{E,i} \right) + \frac{b'_i(t)}{2}\delta_m \right] (1 - \lambda_{NL,i})$$

donde  $H$  es la constante de Hubble, y  $\delta_m = \prod_j (1 - \lambda_{NL,i})^{-1} - 1$ . Para los factores  $\lambda_{vi}(t)$  se encuentra que satisfacen la misma ecuación que el factor de crecimiento lineal (en un modelo de universo Einstein-de Sitter):

$$\frac{d^2 \lambda_{vi}}{dt^2} + 2H \frac{d\lambda_{vi}}{dt} = 4\pi G\bar{\rho}_m \lambda_{vi}$$

En el régimen lineal  $\lambda'_{E,i}(t)$  se reduce a  $\lambda'_{vi}(t)$  y si, en esta aproximación lineal, comparamos las dos ecuaciones anteriores, encontramos que  $\lambda_{NL,i}(t) = \lambda_{vi}(t)$

La ecuación (A.10) se reduce a la ecuación de Friedmann si se cumple que todos los  $\lambda_{vi} = 0$ . Debe tenerse en cuenta que en la forma en que se ha escrito la ecuación

---

<sup>2</sup>Nótese que la ecuación diferencial dada en (3.19) se corresponde con la que aquí se presenta, pero sin tener en cuenta la energía del vacío.



dinámica (A.10), se interpreta que el segundo término del factor entre corchetes corresponde a la contribución esférica de la sobredensidad, y el tercer y cuarto término dan la contribución de los campos de marea interno y externo respectivamente.

# Apéndice B

## La distribución de los parámetros $e$ y $p$ en un campo de fluctuaciones Gaussiano

Consideremos que tenemos un campo de fluctuaciones Gaussiano y aleatorio que ha sido suavizado con una función ventana de escala  $R$ , y sea  $\sigma(R)$  la desviación cuadrática media del campo suavizado. Cada punto del campo suavizado tiene asociado un potencial perturbativo y, conforme a la aproximación de Zeldovich, la segunda derivada de este potencial define el tensor de deformación (*FLS*). Si denotamos los autovalores del tensor deformación como  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  (en este orden), las diferentes posiciones en el campo suavizado tendrán diferentes autovalores  $\lambda_i$ . *Doroshkevich (1970)* encuentra que la probabilidad  $p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de obtener los autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ , en este orden, en un campo Gaussiano aleatorio con variancia  $\sigma^2 \equiv \sigma^2(R)$  es:

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{27\sqrt{5^5}}{8\pi\sigma^6}(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3) \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(15I_2 - 6I_1^2)\right] \quad (\text{B.1})$$

donde los factores  $I_1$  e  $I_2$  se definen como:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &\equiv \lambda_3\lambda_2 + \lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_1 \end{aligned}$$

En el régimen lineal, la perturbación  $\delta$  está relacionada con los autovalores a través de la ecuación de Poisson, y se define como la traza del tensor de deformación (*FLS*):  $I_1 \equiv \delta$ . Ahora los tres autovalores son  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1$  y  $\delta - \lambda_1 - \lambda_2$ ; si integramos la probabilidad  $p(\delta - \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1)$ , primero en la variable  $\lambda_2$  en el intervalo  $(\delta - \lambda_1)/2 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ , y luego en la variable  $\lambda_1$  en el intervalo  $\delta/3 \leq \lambda_1 \leq \infty$  (los intervalos de integración se

deben al orden establecido para los autovalores), se verifica que el resultado  $f(\delta)$ , es función de  $\delta$  y tiene una distribución Gaussiana con variancia  $\sigma^2$ :

$$\begin{aligned}
f(\delta) &= \int_{\delta/3}^{\infty} \int_{\frac{(\delta-\lambda_1)}{2}}^{\lambda_1} p(\delta - \lambda_2 - \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1) d\lambda_2 d\lambda_1 \\
&= \int_{\delta/3}^{\infty} \int_{\frac{(\delta-\lambda_1)}{2}}^{\lambda_1} \frac{27\sqrt{5^5}}{8\pi\sigma^6} (\lambda_1 - \lambda_2)(2\lambda_2 + \lambda_1 - \delta)(2\lambda_1 + \lambda_2 - \delta) \dots \\
&\quad \dots \exp \left[ \frac{1}{2\sigma^2} (15I'_2 - 6\delta^2) \right] d\lambda_2 d\lambda_1 \\
&= \frac{27\sqrt{5^5}}{16\pi\sigma^6} \int_{\delta/3}^{\infty} (\delta - \lambda_1)(2\lambda_1 - \delta)(7\lambda_1 - 3\delta) \exp \left[ -\frac{3}{8\sigma^2} (95\lambda_1^2 - 90\lambda_1\delta + 23\delta^2) \right] d\lambda_1
\end{aligned}$$

donde  $I'_2 = \delta(\lambda_2 + \lambda_1) - \lambda_2^2 - \lambda_1^2$ . Nótese que, como en la teoría lineal  $\sigma^2 \ll 1$  y  $|\delta| \ll 1$ , la escala de suavizado tiene asociada una masa  $M$  tal que  $M \propto R^3$  cuando la función de suavizado es un escalón en el espacio real.

Usualmente se caracteriza la región por su excentricidad  $e$  y el alargamiento hacia los polos  $p$  tal que:

$$e = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2\delta} \quad (\text{B.2})$$

$$p = \frac{\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3}{2\delta} \quad (\text{B.3})$$

a estos valores de  $e$  y  $p$  se los puede asociar con los que BM denotan como  $e_v$  y  $p_v$ . Debido al orden de los autovalores, se tiene que  $e \geq 0$  si  $\delta > 0$  y  $p$  satisface  $e \geq p \geq -e$ . Reemplazando las ecuaciones (B.2) y (B.3) en la fórmula (B.1) encontrada por Doroshkevich, tendremos la distribución de  $e$  y  $p$  para un dado  $\delta$ ; si denotamos como  $g(e, p|\delta)dedp$  la distribución de  $e$  y  $p$ , tendremos:

$$g(e, p|\delta)dedp = \frac{1125}{\sqrt{10\pi}} e(e^2 - p^2) \left( \frac{\delta}{\sigma} \right)^5 \exp \left[ -\frac{5}{2} \left( \frac{\delta}{\sigma} \right)^2 (3e^2 + p^2) \right] dedp \quad (\text{B.4})$$

donde el Jacobiano de la transformación de  $d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$  a  $dedpd\delta$  introduce un factor  $2/3$ . Para todo valor de  $e$  la distribución (B.4) tiene un máximo en  $p = 0$ ; cuando  $p = 0$ , el máximo ocurrirá en el valor de  $e = e_{mp}$  tal que la derivada de la distribución (respecto a  $e$ ) sea cero:

$$\left. \frac{dg(e, 0|\delta)}{de} \right|_{e_{mp}} = \frac{3375}{\sqrt{10\pi}} e^2 \left( \frac{\delta}{\sigma} \right)^5 \left( 1 - 5 \frac{\delta^2}{\sigma^2} e^2 \right) \exp \left[ -\frac{15}{2} \left( \frac{\delta}{\sigma} \right)^2 e^2 \right] \Big|_{e_{mp}} = 0$$

Si  $\delta > 0$  y  $e > 0$ , la única forma de que la derivada anterior sea cero es para:

$$e_{mp}(p = 0|\delta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sigma}{\delta} \quad (\text{B.5})$$

donde  $e_{mp}$  es el valor más probable de la distribución de valor del parámetro  $e$  (para  $p = 0$ ) en un campo de fluctuaciones  $\delta$  suavizado en escala  $R$  y con variancia  $\sigma^2 = \sigma^2(R)$ .

Se tiene así que (B.5) dá una relación monótona entre  $e_{mp}$  y  $\sigma/\delta$ , en la que  $e_{mp} \rightarrow 0$  cuando  $\delta/\sigma \rightarrow \infty$ . Esto nos dice que para una dada escala  $R$ , es más probable que las regiones muy densas sean más esféricas que las regiones menos densas; mientras que para un dado  $\delta$ , es más probable que las regiones grandes sean más esféricas que las regiones más pequeñas. En general, la forma más probable de una región elegida aleatoriamente en un campo Gaussiano es triaxial con  $p \approx 0$ ; y como estamos interesados en la formación de objetos a partir de un campo de fluctuaciones Gaussianas, debemos estudiar el colapso de elipsoides triaxiales con  $e \geq 0$ .

# Referencias

- [1] Abadi M., 1993; *Tesis de Doctorado*, Univesidad Nacional de Córdoba.
- [2] Abell G.O., 1958; ApJSS, **3**, 211.
- [3] Abell G.O., 1961; ApJ, **66**, 607.
- [4] Adler R.J., 1981; *The Geometry of Random Fields*, John Wiley & Sons.
- [5] Albrecht A., 2000; *Cosmic Inflation*; preprint, **astro-ph/0007247**<sup>1</sup>
- [6] Audit E., Teyssier R. & Alimi J.M., 1997; A&A, **325**, 439.
- [7] Bahcall N.A. & Soneira R.M., 1983; ApJ, **270**, 20.
- [8] Bardeen J.M., Bond J.R., Kaiser N. & Szalay A.S. 1986, ApJ, **304**, 15 -*BBKS*-.
- [9] Bartelmann M. & Narayan R., 1995; ApJ, **451**, 60.
- [10] Basilakos S. & Plionis M., 2001; ApJ, **550**, 522.
- [11] Baugh C.M., Gaztañaga E. & Efstathiou G. 1995; MNRAS, **274**, 1049.
- [12] Baugh C.M., Benson A.J., Coles S., Frenk C.S. & Lacey C.G., 1999; MNRAS, **305**, L21.
- [13] Berkes I., 1997; *From Quantum Fluctuations to Cosmological Structures*; eds. Valls-Gabaud D., Hendry M.A., Molaro P. & Chamcham K., BookCrafters; ASP Conf. Ser., **126**, 121.
- [14] Bernardeau F., 1992; ApJ, **392**, 1.
- [15] Bernardeau F., Colombi S., Gaztañaga E. & Scoccimarro R., 2002; Physics Report, **367**, 1.
- [16] Bernardeau F. & Kofman L., 1995; ApJ, **443**, 479.

---

<sup>1</sup>Las referencias bibliográficas con la denominación **astro-ph** corresponden a la base bibliográfica electrónica <http://xxx.lanl.gov>

- [17] Bertschinger E., 1985; ApJSS, **58**, 39.
- [18] Bertschinger E., 1998; ARA&A, **36**, 599.
- [19] Binney J. & Tremaine S., 1987; *Galactic Dynamics*, Princeton University Press.
- [20] Blanford R.D. & Narayan R., 1992; ARA&A, **30**, 311.
- [21] Bond J.R., Cole S., Efstathiou G. & Kaiser N., 1991; ApJ, **379**, 440 -*BCEK*-.
- [22] Bond J.R. & Myers S.T., 1996; ApJSS, **103**,1 -*BM*-.
- [23] Bouchet F.R., Strauss M.A., Davis M., Fisher K.B., Yahil A. & Huchra J.P., 1993; ApJ, **417**, 36.
- [24] Bower R., 1991; MNRAS, **248**, 332.
- [25] Carroll S.M., Press W.H. & Turner E.L., 1992; ARA&A, **30**, 499.
- [26] Casas-Miranda R., Mo H.J., Boerner G., 2002; preprint, **astro-ph/0203280**.
- [27] Catelan P., Lucchin F., Matarrese S. & Porciani C., 1998; MNRAS, **297**, 692.
- [28] Chandrasekhar S. 1943; Rev. Mod. Phys., **15**, 1. (Recopilado en Chandrasekhar 1954)
- [29] Chandrasekhar S., 1954; *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, ed. Wax N.; Dover Publications, pp 3.
- [30] Chandrasekhar S., 1969; *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, Yale University Press.
- [31] Chiueh T. & Lee J., 2001; ApJ, **555**, 83.
- [32] Cole S. 1989; *Tesis de Doctorado*, Universidad de Cambridge.
- [33] Collins C.A., Nichol R.C. & Lumsden S.L., 1992; MNRAS, **254**, 295.
- [34] Colombi S., Bouchet F.R. & Schaeffer R., 1994; A&A, **281**, 301
- [35] da Costa L.N., Pellegrini P.S., Davis M., Meiksin A., Sargent W.L.W. & Tonry J.L., 1991, ApJSS, **75**, 935.
- [36] de Bernardis P., Ade P.A.R., Bock J.J., Bond J.R., Borrill J., Boscaleri A., Coble K., Crill B.P., De Gasperis G., Farese P.C., Ferreira P.G., Ganga K., Giacometti M., Hivon E., Hristov V.V., Iacoangeli A., Jaffe A.H., Lange A.E., Martinis L., Masi S., Mason P.V., Mauskopf P.D., Melchiorri A., Miglio L., Montroy T., Netterfield C.B., Pascale E., Piacentini F., Pogosyan D., Prunet S., Rao S., Romeo G., Ruhl J.E., Scaramuzzi F., Sforna D. & Vittorio N., 2000; Nature, **404**, 955.

- [37] de Blok W.J.G., Bosma A., McGaugh S., 2002; *preprint*, **astro-ph/0212102**.
- [38] Dekel A. & Silk J., 1986; *ApJ*, **303**, 39.
- [39] Dekel A. & Rees M.J., 1987; *Nature*, **326**, 455.
- [40] Davis M. & Peebles P.J.E., 1983; *ApJ*, **267**, 465.
- [41] Davis M., Efstathiou G., Frenk C. & White S.D.M., 1985; *ApJ*, **292**, 371.
- [42] Dekel A., 1997; *Cosmological Implications of Large-Scale Flows*; preprint **astro-ph/9705033**.
- [43] Del Popolo A., 2002; *A&A*, **387**, 759.
- [44] Doroshkevich A.G., 1970; *Astrofizika*, **3**, 175.
- [45] Efstathiou G., Davis M., Frenk C.S. & White S.D.M., 1985; *ApJSS*, **57**, 241.
- [46] Efstathiou G., Frenk C.S., White S.D.M. & Davis M., 1988; *MNRAS*, **235**, 715.
- [47] Efstathiou G., Ellis R.S. & Peterson B.A., 1988a; *MNRAS*, **232**, 431.
- [48] Efstathiou G., Bond J.R. & White S.D.M., 1992; *MNRAS*, **258**, 1.
- [49] Einasto J., Kraasik X & Saar E., 1974; *Nature*, **250**, 309.
- [50] Eke V.R., Cole S. & Frenk C.S., 1996; *MNRAS*, **282**, 263.
- [51] Faber S.M., 1987; *Dark Matter in the universe*; ed. Dordrecht E., Reider Publishing; IAU Symposium, **117**, 1.
- [52] Faber S.M. & Gallagher J.S. 1979; *ARA&A*, **17**, 135.
- [53] Feynman R., Leighton R.B. & Sands. M., 1998; *FISICA Volumen II: Electromagnetismo y Materia*, Addison Wesley Longman -*FLS*-.
- [54] Flores R., Primack J.P., Blumenthal G.R. & Faber S.M., 1993; *ApJ*, **412**, 443.
- [55] Frieman J.A. & Gaztañaga E., 1994; *ApJ*, **425**, 392.
- [56] Fry J.N. 1984a; *ApJ*, **277**, L5.
- [57] Fry J.N. 1984b; *ApJ*, **279**, 499.
- [58] Fry J.N. 1985; *ApJ*, **289**, 10.
- [59] Fry J.N., Melott A.L. & Shandarin S.F., 1993; *ApJ*, **412**, 504.
- [60] Fry J.N. & Gaztañaga E., 1993; *ApJ*, **413**, 447.

- 
- [61] Fry J.N. & Peebles P.J.E., 1978; ApJ, **221**, 19.
- [62] Gardiner G.W., 1997; *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer-Verlag.
- [63] Gaztañaga E., 1992; ApJ, **398**, L17.
- [64] Gaztañaga E., 1994; MNRAS, **268**, 913.
- [65] Gaztañaga E. & Yokoyama J., 1993; ApJ, **403**, 450.
- [66] Gaztañaga E. & Frieman J.A., 1994, ApJL, **437**, L13.
- [67] Goroff M.H., Grinstein B., Rey S.J. & Wise M.B., 1986, ApJ, **311**, 6.
- [68] Governato F., Babul A., Quinn T., Tozzi P., Baugh C.M., Katz N. & Lake G., 1999; MNRAS, **307**, 949.
- [69] Groth E.J. & Peebles P.J.E., 1977; ApJ, **217**, 385.
- [70] Guth, A. 1981; Phys. Rev. D, **23**, 347.
- [71] Gunn J.E. & Gott J.R., 1972; ApJ, **176**, 1.
- [72] Heath D.J., 1977; MNRAS, **179**, 351.
- [73] Heydon-Dumbleton N.H., Collins C.A. & MacGillivray H.T., 1989; MNRAS, **238**, 379.
- [74] Hockney R.W. & Eastwood J.W., 1988; *Computer Simulations Using Particles*, Adam Hilger.
- [75] Hoyle F., Szapudi I., Baugh C.M., 2000; MNRAS, **317**, L51.
- [76] Huchra J., Davis M., Latham D. & Tonry J., 1983; ApJSS, **52**, 89.
- [77] Icke V., 1973; A&A, **27**, 1.
- [78] Jedamzik K., 1995; ApJ, **448**, 1.
- [79] Jenkins A., Frenk C.S., Pearce F.R., Thomas P.A., Colberg J.M., White S.D.M., Couchman H.M.P., Peacock J.A., Efsthathiou G. & Nelson A.H., 1998; ApJ, **499**, 20.
- [80] Jenkins A., Frenk C.S., White S.D.M., Colberg J.M., Cole S., Evrard E., Couchman H.M.P. & Yoshida N., 2001; MNRAS, **321**, 372.
- [81] Jensen L.G. & Szalay A.S. 1986; ApJL, **305**, L5.
- [82] Jing Y.P., 1998; ApJL, **503**, L9.



- [83] Juskiwicz R, Bouchet F.R. & Colombi S., 1993; ApJ, **419**, L9.
- [84] Juskiwicz R, Weinberg D.H., Amsterdamski P., Chodorowski M., & Bouchet F.R., 1995, ApJ, **442**, 39.
- [85] Kaiser N. 1984; ApJ, **284**, L9.
- [86] Kauffman G., Colberg J.M., Diaferio A. & White S.D.M., 1999; MNRAS, **303**, 188.
- [87] Kendall M.G. & Stuart A., 1958; *The Advanced Theory of Statistics*, vol. 1, Griffin.
- [88] Lacey C. & Cole S., 1993; MNRAS, **262**, 627.
- [89] Lacey C. & Cole S., 1994; MNRAS, **271**, 676.
- [90] Lambas D.G., 1986; *Tesis de Doctorado*, Univesidad Nacional de Córdoba.
- [91] Lee J. & Shandarin, 1998; ApJ, **500**, 14.
- [92] Liddle A.R., 1999; *High Energy Physics and Cosmology*; ed. Maseiro A., Senjanovic G. & Smirnov A., World Scientific Publisher, pp. 260.
- [93] Liddle A.R. & Lyth D.H., 2000; *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press.
- [94] Lin C.C., Mestel L. & Shu F.H., 1965; ApJ, **142**, 1431.
- [95] Lin L., Chiueh T. & Lee J., 2002; ApJ, **574**, 527.
- [96] Lokas E.L., Juskiwicz R., Weinberg D.H. & Bouchet F.R., 1995; MNRAS, **274**, 730.
- [97] Loveday J., Peterson B.A., Maddox S.J. & Efstathiou G., 1996; ApJSS, **107**, 201.
- [98] Lucchin F., Matarrese S., Melott A.L. & Moscardini L., 1994; ApJ, **422**, 430.
- [99] Lynden-Bell D., 1964; ApJ, **139**, 1195.
- [100] Maddox S.J., Efstathiou G. Sutherland W.J. & Loveday L., 1990a, MNRAS, **242**, 43.
- [101] Maddox S.J., Sutherland W.J., Efstathiou G. & Loveday L., 1990b, MNRAS, **243**, 692.
- [102] Maddox S.J., Sutherland W.J., Efstathiou G. & Loveday L., 1990c, MNRAS, **246**, 433.

- [103] Meeron E., 1957; *J. Chem. Phys.*, **27**, 1238.
- [104] Meiksin A., Szapudi I. & Szalay A.S., 1992, *ApJ*, **394**, 87.
- [105] Merchán M., 1996; *Trabajo Final*, Univesidad Nacional de Córdoba.
- [106] Mo H.J. & White S.D.M., 1996; *MNRAS*, **282**, 347.
- [107] Mo H.J., Jing Y.P. & White S.D.M., 1997; *MNRAS*, **284**, 189.
- [108] Mollerach S. & Roulet E., 1996; *ApJ*, **458**, L9.
- [109] Mollerach S., 1998; *Phys. Rev. D*, **55**, 1303.
- [110] Monaco P., 1995; *ApJ*, **447**, 23.
- [111] Monaco P., 1997a; *MNRAS*, **287**, 753.
- [112] Monaco P., 1997b; *MNRAS*, **290**, 439.
- [113] Monaco P., 1998; *Tesis de Doctorado*, *Fund. Cos. Phys.*, **19**, 157.
- [114] Murthy K.P.N., 2001; *Monte Carlo: Basics*; preprint, **cond-mat/0104215**.
- [115] Nagashima M., 2001; *ApJ*, **562**, 7.
- [116] Narayan R. & Bartelman N., 1999; *Formation of Structure in the Universe*; eds. Dekel A. & Ostriker J.P., Cambridge University Press; pp. 360.
- [117] Ostriker J. P., Yahil A. & Peebles P.J.E., 1974; *ApJL*, **193**, L1.
- [118] Padmanabhan T., 1995; *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press.
- [119] Partridge R.B., 1995; *3K: The cosmic background*; Cambridge University Press.
- [120] Peebles P.J.E. & Partridge R.B., 1967; *ApJ*, **148**, 713.
- [121] Peebles P.J.E., 1980; *The Large-Scale Structure of the Universe*, Princeton University Press.
- [122] Peebles P.J.E., 1982; *ApJ*, **258**, 415.
- [123] Peebles P.J.E., 1993; *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press.
- [124] Peacock J.A. & Heavens A.F., 1985; *MNRAS*, **217**, 805.
- [125] Peacock J.A. & Heavens A.F., 1990; *MNRAS*, **243**, 133.
- [126] Peacock J.A. & Dodds S.J. 1994; *MNRAS*, **267**, 1020.

- [127] Peacock J.A., 1997; MNRAS, **284**, 885.
- [128] Peacock J.A., 1999; *Cosmological Physics*, Cambridge University Press.
- [129] Press W.H. & Schechter P., 1974; ApJ, **187**, 452 -PS-.
- [130] Press W.H. & Teukolsky S.A., 1990; Computers in Physics, **4**, 92.
- [131] Primack J.R., 1999; *Formation of Structure in the Universe*; eds. Dekel A. & Ostriker J.P., Cambridge University Press; pp. 3.
- [132] Ratcliffe A., Shanks T., Parker Q.A., Broadbent A., Watson F.G., Oates A.P., Collins A.A. & Fong R., 1998; MNRAS, **300**, 417.
- [133] Ratra B., Sugiyama N., Banday A.J. & Gorsji K.M., 1997; ApJ, **481**, 22.
- [134] Rees M.J., 1985; MNRAS, **213**, 75.
- [135] Reichl L.E., 1998; *A Modern Course in Statistical Physics 2<sup>th</sup> ed.*, Jhon Wiley & Sons.
- [136] Rice S.O., 1945; Bell Sys. Tech. J., **24**, 46. (Recopilado en Rice 1954)
- [137] Rice S.O., 1954; *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, ed. Wax N.; Dover Publications, pp 133.
- [138] Riley K.F., Hobson M.P. & Bence S.J., 1997; *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press.
- [139] Sánchez A.G., 2001; *Trabajo Especial*, Universidad Nacional de Córdoba.
- [140] Saunders W., Sutherland W.J., Maddox S.J., Keeble O., Oliver S.J., Rowna-Robinson M., McMahon R.G., Efsthathiou G., Tadros H., White S.D.M., Frenk C.S., Carramiñana A. & Hawkins M.R.S., 2000; MNRAS, **317**, 55.
- [141] Scoccimarro R., Sheth R.K., Hui L. & Jain B., 2001; ApJ, **546**, 20.
- [142] Sérsic J.L., 1980; *Extragalactic Astronomy*, Universidad Nacional de Córdoba.
- [143] Sellwood J.A., 1987; ARA&A, **25**, 151.
- [144] Sharp N.A., Bonometto S.A. & Lucchin F., 1984; A&A, **130**, 79.
- [145] Sheth R.K., 1998; MNRAS, **300**, 1057.
- [146] Sheth R.K. & Lemson G., 1999; MNRAS, **304**, 767.
- [147] Sheth R.K. & Tormen G., 1999; MNRAS, **308**, 119.
- [148] Sheth R.K. Mo H.J. & Tormen G., 2001; MNRAS, **323**, 1.

- [149] Sheth R.K. & Tormen G., 2001; MNRAS, **318**, 203.
- [150] Somerville R., 1997, *Tesis de Doctorado*, Universidad de California.
- [151] Stoughton C., Lupton R.H., Bernardi M., et. al. 2002; AJ, **123**, 485.
- [152] Szapudi I., Szalay A.S. & Boschan P., 1992; ApJ, **390**, 350.
- [153] Szapudi I., Dalton G., Efstathiou G.P., & Szalay A., 1995; ApJ, **444**, 520.
- [154] Szapudi I., Meiksin A. & Nichol R.C., 1996; ApJ, **473**, 15.
- [155] Szapudi I., Branchini E., Frenk C.S., Maddox S. & Saunders W., 2000; MNRAS, **318**, L45.
- [156] Szapudi I., Fieman J.A., Scoccimarro R., Szalay A.S., Connolly A.J., Dodelson S., Eisenstein D.J., Gunn J.E., Johnston D., Kent S., Loveday J., Meiksin A., Nichol R.C., Scranton R., Stebbins A., Vogeley M.S., Annis J., Bahcall N.A., Brinkman J., Csabai I., Doi M., Fukugita M., Ivezić Z., Kim R.S.J., Knapp G.R., Lamb D.Q., Lee B.C., Lupton R.H., McKay T.A., Munn J., Peoples J., Pier J., Rockosi C., Schlegel D., Stoughton C., Tucker D.L., Yanny B. & York D.G., 2002; ApJ, **570**, 75.
- [157] Trimble V., 1987; ARA&A, **25**, 425.
- [158] van Kampen N.G., 1973a; Physica, **74**, 215.
- [159] van Kampen N.G., 1973b; Physica, **74**, 239.
- [160] van Kampen N.G., 1992; *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier Science Publisher.
- [161] Weinberg S., 1972; *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Jhon Wiley & Sons.
- [162] White S.D.M., 1988; Boll. Ac. Nac. de Ciencias; tomo **58**, pp 209.
- [163] White S.D.M. & Silk J., 1979; ApJ, **231**, 1.
- [164] White S.D.M., Efstathiou G. & Frenk C.S., 1993; MNRAS, **262**, 1023.
- [165] White M., Scott D. & Silk J. 1994; ARA&A, **32**, 319.
- [166] Yepes G., 1997; *From Quantum Fluctuations to Cosmological Structures*; eds. Valls-Gabaud D., Hendry M.A., Molaro P. & Chamcham K., BookCrafters; ASP Conf. Ser., **126**, 279.
- [167] York D.G., Adelman J., Anderson J.E., et. al. 2000; AJ, **120**, 1579.
- [168] Zeldovich Ya.B., 1970; A&A, **5**, 84.

- [169] Zwicky F., 1933; *Helv. Phys. Acta* **6**, 110.
- [170] Zwicky F., Herzog E., Wild P., Karpowicz M. & Kowal C.T., 1961-1968; *Catalogue of Galaxies and Clusters of Galaxies*, Instituto Tecnológico de California.

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a todos aquellos que hicieron posible la realización de éste trabajo:

- A mi papá Ignacio, que a pesar de no estar, sigue marcándome el camino; y a mi mamá Blanca por haberme dado todo su apoyo cuando me decidí por esta carrera (a pesar de los frecuentes “ustedes están locos”) y por que aún lo hace.
- A Diego por su ayuda y dirección en el desarrollo de éste trabajo, su confianza y por abrirme las puertas a muchas posibilidades científicas. Muchas gracias también por tu sosten y preocupación personal cuando ocurriera el CG.
- Al Nelson y Manuel por la gran PACIENCIA que me tuvieron (y espero que aún la tengan), y por todo lo que me enseñaron.
- A María José y Cristina (las chicas de despacho de alumnos), quienes me ayudaron muchísimo, sobre todo con los papeles que necesitaba a última hora!!!!. Muchas gracias!
- A Alberto, que además de ser un excelente profesor, es un gran amigo que me ayudó a dar los primeros pasos.
- A TODOS los integrantes del IATE: Julián, Hernán, Mirta, Manuel, ArielZ, Nelson, Mardom, Dieguín, Cynthia ”Yagone”, Euge, Charly, CarlosV, Valeria, Vicky, Georgina, Pablo, MaryPi (muchas gracias por las correcciones ortográficas y bibliográficas!!!) y los que me estoy olvidando que me brindaron un excelente ambiente de trabajo, envidiable por muchos.
- Al  $\sum \tau$  físico-matemático: Silvia, Gabi, Micky, Lucas, Pedro y Reimundo por el aguante en los años más jodidos de la carrera.
- A mis mejores amigos, los cuatro Centauros: Ariel, Alvaro, Marcelo y Martín, mis cuatro hermanos de alma y de la vida.