

TÓPICOS EN SERIES DE TIEMPO

Autor: Grisel M. Britos

Directora: Dra. Silvia María Ojeda

Córdoba, Diciembre de 2012

Agradecimientos

A mi familia por la paciencia, la comprensión y tanto que me han dado en todos estos años de la carrera.

A Martín Ocampo por las sonrisas, la compañía y el amor que me dió y sigue dando.

A mi directora, por la confianza, la dedicación y sobre todo por las palabras de apoyo y aliento.

A los compañeros y amigos de la Facultad: gracias por hacer más llevaderas las largas horas de estudio.

A los amigos de la vida, por alegrarla.

A aquellos profesores que en la Facultad me enseñaron con paciencia y entrega.

De nuevo, GRACIAS.

Resumen

El objetivo de este trabajo es iniciar un estudio sobre series de tiempo basándose en el libro de Leiva R. [1]. En el primer capítulo se introducirán las principales definiciones y resultados teóricos. En los capítulos II y III se estudiarán y analizarán características de las diferentes representaciones de series estacionarias y no estacionarias que luego nos permitirán identificar algún modelo que pudiera haber generado una dada serie de tiempo real. En el capítulo IV se verán algunos métodos para predecir como continuará el comportamiento de la serie de tiempo que se estudia, mientras que en el capítulo V se presentarán distintos criterios útiles para determinar si el modelo elegido para la serie es adecuado o se debe proponer un nuevo modelo. Al final de cada capítulo se resuelven algunos ejercicios propuestos en la obra de Leiva [1]. Por último, se tomará una serie de tiempo real y se tratará de modelar su comportamiento atendiendo a todo lo estudiado en este trabajo.

Clasificación (Math. Subject Classification)

62M10, 60G10.

Palabras Claves

- Serie de Tiempo
- Estacionaridad
- Modelos ARIMA

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
1. Introducción	1
1.1. Definiciones Básicas	1
1.2. Estimación de las características de una serie de tiempo estacionaria	3
1.2.1. Estimación de la media μ	3
1.2.2. Estimación de las autocovarianzas	3
1.2.3. Estimación de las autocorrelaciones	4
1.2.4. Estimación de las autocorrelaciones parciales	4
1.3. Ejercicios del Capítulo I	4
2. Modelos para series de tiempo estacionarias	14
2.1. Representaciones de una serie de tiempo	14
2.1.1. Representación como un proceso de promedios móviles de orden infinito	14
2.1.2. Representación como un proceso autorregresivo de orden infinito	15
2.2. Modelos autoregresivos de orden finito	16
2.2.1. Modelo autoregresivo de orden 1	16
2.2.2. Modelo autoregresivo de orden p	17
2.3. Modelos de promedios móviles de orden finito	18
2.3.1. El modelo de medias móviles de orden 1	19
2.4. Modelos Autorregresivos de Promedios Móviles	19
2.4.1. Modelo ARMA(1,1).	20
2.4.2. Modelo ARMA(p,q)	22
2.5. Ejercicios del Capítulo II	23
3. Modelos para series de tiempo no estacionarias	37
3.1. Enfoque clásico	37
3.1.1. Estimación de m_t por el método de cuadrados mínimos	38
3.1.2. Estimación de la tendencia mediante suavizamiento por promedios	39
3.1.3. Estimación de la tendencia y la estacionalidad cuando la tendencia es constante durante cada período de la componente estacional	39
3.1.4. Estimación de la tendencia y la estacionalidad: Caso General	41
3.2. Modelos ARIMA y SARIMA	42
3.2.1. Modelos ARIMA	43
3.2.2. Procesos SARIMA (ARIMA estacionales)	43
3.3. Transformaciones	44
3.4. Ejercicios del Capítulo III	45

4. Predicción	53
4.1. Predictor Lineal con Error Cuadrático Medio Mínimo	53
4.2. Predicción de un ARMA conocido todo su pasado	54
4.3. Predicción de un ARIMA conocido todo su pasado	56
4.4. Ejercicios del Capítulo IV	58
5. Estimación e identificación de los modelos de series de tiempos	67
5.1. Identificación de procesos. Determinación del orden y verificación de diagnóstico . . .	67
5.1.1. Criterios de Akaike: FPE, AIC, BIC	67
5.2. Reglas prácticas para la identificación de procesos	68
6. Aplicación	70
Bibliografía	79

Capítulo 1

Introducción

Muchas veces en la vida real se cuenta con observaciones ordenadas de hechos que acontecen a intervalos equiespaciados en el tiempo y que se encuentran relacionados con diferentes actividades propias del quehacer humano. Por ello, el estudio de las series de tiempo es una herramienta importante para el análisis de datos que no son independientes entre sí; por ejemplo, tasas de mortalidad y nacimiento, índices de precio al consumidor, producción anual de soja, caudales de ríos, etc. El análisis de series temporales se aborda usualmente desde la perspectiva que proporcionan la Probabilidad y la Estadística y permite comprender y describir los procesos generadores de los datos observados, como así también realizar predicciones de valores futuros de la serie. Este trabajo apunta a realizar un primer acercamiento al estudio de las series de tiempo a partir de la teoría expuesta por Leiva [1] y Brockwell-Davis [2]; luego, en trabajos futuros, se espera focalizar aspectos vinculados con la generalización a dos dimensiones de esta teoría, la cual a su vez es requerida en tópicos de análisis y procesamiento de imágenes digitales. El interés del trabajo se centró en la comprensión de las principales definiciones y resultados teóricos propuestos en la bibliografía citada, poniendo especial atención a la resolución de los ejercicios que se encuentran al final de cada sección del libro de Leiva [1]. El trabajo implicó además una aproximación inicial al conocimiento y utilización del software estadístico y de libre acceso, R, para modelar una serie de tiempo real.

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1.1. *Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad y sea T un conjunto no vacío de índices. Se llama serie de tiempo (o proceso estocástico) a valores reales a una función $X : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada t fijo, $X : t \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria X_t , que será denotada como $\{X_t : t \in T\}$.*

Debido a la dependencia que hay entre las variables aleatorias X_t , $t \in T$ se hace necesario realizar algunas suposiciones sobre la forma en que se han generado los datos aleatorios, lo que motiva las siguientes definiciones:

Definición 1.1.2. *Una serie de tiempo $\{X_t : t \in T\}$, es estrictamente estacionaria si $F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}} = F_{X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}}$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$ y para todo $t_1, t_2, \dots, t_n, t_1+k, t_2+k, \dots, t_n+k$ en el conjunto de índices T , donde $F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}$ denota la función de distribución conjunta de las variables $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$.*

Esta definición nos dice que la distribución conjunta de dos o más variables que componen la serie depende solo de la distancia entre los elementos del subconjunto de T ; sin embargo, debido a la dificultad de verificar esta condición, la definición anterior se relaja del siguiente modo:

Definición 1.1.3. *Se dice que una serie de tiempo $\{X_t : t \in T\}$ es estacionaria si se verifica que :*

- a) $E[X_t] = \mu < \infty$ para todo $t \in T$

$$b) \text{ cov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)] = \gamma_k < \infty \text{ para todo } t, t+k \in T$$

Puede verificarse que si una serie de tiempo es estacionaria entonces es también estrictamente estacionaria, pero no viceversa (ver ejercicio 1.3.1).

Enunciaremos las definiciones que nos acompañaran de ahora en adelante:

Definición 1.1.4. : Dada una serie de tiempo estacionaria $\{X_t : t \in T\}$ se llama función de autocovarianza teórica a la función $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada entero k le asigna el valor

$$\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)]$$

Definición 1.1.5. : Dada una serie de tiempo estacionaria $\{X_t : t \in T\}$ se llama función de autocorrelación teórica a la función $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada entero k le asigna el valor

$$\rho_k = \text{corr}(X_t, X_{t+k}) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+k})}{\sqrt{\text{var}(X_t)\text{var}(X_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Esta última tiene la ventaja de no estar influenciada por las unidades de medida que se usan para obtener los valores de la serie de tiempo. Algunas de las propiedades de las funciones de autocovarianza y de autocorrelación se muestran a continuación:

$$a) |\gamma_k| \leq \gamma_0 = \text{var}(X_t) \text{ y } |\rho_k| \leq \rho_0 = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \gamma_k = \gamma_{-k} \text{ y } \rho_k = \rho_{-k}$$

c) Las funciones de autocovarianza y autocorrelación son semidefinidas positivas, i.e. para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ se verifica que:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \gamma_{|t_i - t_j|} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \rho_{|t_i - t_j|} \geq 0$$

Ejemplo 1.1.1. : Dada una serie de tiempo $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ se dice que la serie es un proceso de ruido blanco si las variables aleatorias A_t son no correlacionadas entre si, con media $\mu_t = E[A_t]$ y varianza $\sigma_A^2 = \text{var}(A_t)$ para todo $t \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 1.1.2. : Sea $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ un proceso de ruido blanco. Se dice que la serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso autorregresivo de orden 1 (o $AR(1)$) si se puede representar de la siguiente forma:

$$X_t = \phi X_{t-1} + A_t \text{ para todo } t \in \mathbb{Z}$$

siendo ϕ un número real fijo.

La serie del ejemplo 1.1.2 deja en evidencia una dependencia lineal entre X_t y X_{t+k} . Es decir que los valores obtenidos por la variable X en el pasado influyen en el valor de X en el tiempo presente. Esta influencia se observa de forma directa entre X_{t+1} y X_{t+2} pues están relacionadas de la forma $X_{t+2} = \phi X_{t+1} + A_{t+2}$ y como a su vez $X_{t+1} = \phi X_t + A_{t+1}$ se ve que X_t influye de forma indirecta sobre X_{t+2} . Considerando la situación general de una serie de tiempo $\{X_t : t \in T\}$ nos gustaría saber cual es la dependencia lineal directa entre dos variables X_t y X_{t+k} . Para ello se define el coeficiente de autocorrelación parcial de orden k como una medida de la relación lineal entre observaciones separadas k períodos con independencia de los valores intermedios.

Definición 1.1.6. Se define el coeficiente de correlación parcial π_k como

$$\pi_k = \text{corr}(X_t, X_{t+k}/X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1})$$

y que es igual a

$$\pi_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Dicha fórmula se obtiene de realizar una regresión lineal de X_{t+k} respecto de $X_{t+k-1}, X_{t+k-2}, \dots, X_t$, o sea:

$$X_{t+k} = \phi_{k0} + \phi_{k1}X_{t+k-1} + \phi_{k2}X_{t+k-2} + \dots + \phi_{kk}X_t + E_{t+k}$$

donde $\{E_t\}$ es un proceso de ruido blanco y se supone que las variables E_{t+k} no están correlacionadas con $X_t, X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1}$ para todo t . Luego, resulta que el coeficiente ϕ_{kk} de X_t es el coeficiente de correlación parcial teórico π_k entre X_{t+k} y X_t .

Definición 1.1.7. Se denomina función de autocorrelación parcial teórica de la serie de tiempo estacionaria $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ a la función $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada entero k le asigna el coeficiente de correlación parcial teórico π_k entre X_{t+k} y X_t .

1.2. Estimación de las características de una serie de tiempo estacionaria

Los elementos que caracterizan a una serie de tiempo estacionaria son su media μ , su varianza σ^2 , sus autocorrelaciones ρ_k y sus autocorrelaciones parciales π_k . Es necesario poder realizar estimaciones de estos elementos ya que en muchos casos no se puede contar con más de una realización de la serie de tiempo.

1.2.1. Estimación de la media μ

Dada una serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, si se conocen solo n valores de una realización x_1, \dots, x_n , el estimador natural de la media común es la media muestral

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$$

ya que éste es un estimador insesgado para μ y si además se cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ entonces \bar{X}_n es un estimador consistente en cuadrados medios para μ (ver Leiva [1])

1.2.2. Estimación de las autocovarianzas

Dadas n observaciones x_1, \dots, x_n de la serie de tiempo estacionaria, se puede considerar para un k fijo ($0 \leq k \leq n-1$) los siguientes $n-k$ pares: $(x_1, x_{1+k}), (x_2, x_{2+k}), \dots, (x_{n-k}, x_n)$ y mirando a la

primera entrada de cada par como una observación de una variable y a la segunda como la observación de otra variable, se puede calcular una estimación de γ_k mediante la fórmula:

$$\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x}_{(1)})(x_{t+k} - \bar{x}_{(2)})$$

donde

$$\bar{x}_{(1)} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} x_t \quad y \quad \bar{x}_{(2)} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=k+1}^n x_t.$$

Como en general $\bar{x}_{(1)} \cong \bar{x}_{(2)}$ se reemplazan ambas por $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$ y se obtiene el siguiente estimador para γ_k :

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+k} - \bar{X}_n)$$

Definición 1.2.1. La función $\hat{\gamma} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $k \in \mathbb{Z}$ le asigna el valor $\hat{\gamma}_k$ recibe el nombre de función de autocovarianza muestral.

1.2.3. Estimación de las autocorrelaciones

Un estimador natural de ρ_k es

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+k} - \bar{X}_n)}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)^2} \quad \text{para } k = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1) \quad (1.2.1)$$

Definición 1.2.2. La función $\hat{\rho} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $k \in \mathbb{Z}$ le asigna el valor $\hat{\rho}_k$ recibe el nombre de función de autocorrelación muestral, y su gráfico a partir de la muestra x_1, \dots, x_n es llamado correlograma muestral.

1.2.4. Estimación de las autocorrelaciones parciales

Los estimadores naturales de $\pi_k = \phi_{kk}$ se obtienen reemplazando en la fórmula que expresa π_k como cociente de determinantes, a los ρ_j por sus estimadores $\hat{\rho}_j$. Para valores muy grandes de k es conveniente usar un método recursivo para su cálculo, comenzando por $\hat{\pi}_1 = \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$ y luego

$$\hat{\pi}_{k+1} = \hat{\phi}_{k+1, k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k,j} \hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k,j} \hat{\rho}_j} \quad (1.2.2)$$

donde,

$$\hat{\phi}_{k,j} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{k-1, k-j} \hat{\pi}_k \quad j = 1, \dots, k \quad (1.2.3)$$

1.3. Ejercicios del Capítulo I

Ejercicio 1.3.1. Sean $\{X_t : t \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ variables aleatorias independientes que cumplen

$$\begin{cases} P(X_t = 1) = P(X_t = -1) = 1/2, & \text{si } t \text{ es par;} \\ P(X_t = 3) = P(X_t = -3) = 1/18, & \text{si } t \text{ es impar} \end{cases}$$

(a) ¿Es $\{X_t\}$ un proceso estrictamente estacionario?

(b) ¿Es estacionario en sentido amplio?

Solución. (a) Sean $n = 1 = k$. Si t es par

$$F_{X_t}(-1) = P(X_t \leq -1) = P(X_t = -1) = 1/2$$

pero

$$F_{X_{t+1}}(-1) = P(X_{t+1} \leq -1) = P(X_{t+1} = -3) = 1/18$$

por lo que $F_{X_t} \neq F_{X_{t+1}}$ y resulta que $\{X_t\}$ no es estrictamente estacionario.

(b) Si t es par,

$$E[X_t] = (-1) \cdot P(X_t = -1) + 1 \cdot P(X_t = 1) = -1/2 + 1/2 = 0$$

y si t es impar se puede ver del mismo modo que $E[X_t] = 0$.

Además, si t es par

$$Var[X_t] = (-1)^2 \cdot P(X_t = -1) + 1^2 \cdot P(X_t = 1) = 1/2 + 1/2 = 1$$

(igual se ve para t impar) y si $h \neq 0$, $cov(X_t, X_{t+h}) = 0$ pues X_t, X_{t+h} son independientes.

Por lo tanto $\{X_t\}$ es estacionario en sentido amplio.

Ejercicio 1.3.2. Considere la serie $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definida por $X_t = \theta A_{t-1} + A_t$, donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 .

(a) ¿Qué tipo de proceso es $\{X_t\}$?

(b) ¿Cuál es el valor de $\gamma_k = cov(X_t, X_{t+k})$?

(c) ¿Cuál es el valor de $\rho_k = corr(X_t, X_{t+k})$?

(d) Si $\theta = 0,7$ y si $\sigma_A^2 = 4$

i) ¿Cuál es el valor de γ_k ?

ii) Grafique la función de autocovarianza teórica para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(e) Si $\theta = -0,9$ y si $\sigma_A^2 = 4$

i) ¿Cuál es el valor de ρ_k ?

ii) Grafique la función de autocorrelación teórica para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Solución. (a) Es un proceso de medias móviles de orden 1 ó MA(1).

(b)

$$\begin{aligned} \gamma_k &= cov(X_t, X_{t+k}) = E[X_t X_{t+k}] = E[(\theta A_{t-1} + A_t)(\theta A_{t+k-1} + A_{t+k})] \\ &= \theta^2 E[A_{t-1} A_{t+k-1}] + \theta(E[A_{t-1} A_{t+k}] + E[A_t A_{t+k-1}]) + E[A_t A_{t+k}] \\ &= \theta^2 \delta_k + \theta \delta_{k+1} + \theta \delta_{k-1} + \delta_k \end{aligned}$$

donde δ_k es la autocovarianza de $\{A_t\}$, o sea

$$\delta_k = \begin{cases} \sigma_A^2, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

entonces

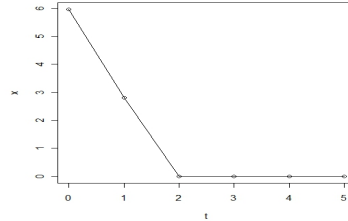
$$\gamma_k = \begin{cases} (\theta^2 + 1)\sigma_A^2, & \text{si } k = 0; \\ \theta\sigma_A^2, & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$

(c)

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ \theta/(\theta^2 + 1), & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$

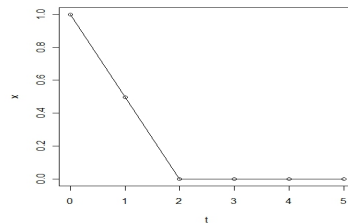
(d)

$$\gamma_k = \begin{cases} 5,96, & \text{si } k = 0; \\ 2,8, & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$



(e)

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0,497, & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$



Ejercicio 1.3.3. Considere la serie $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definida por $X_t = \phi X_{t-1} + A_t$, donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 .

(a) ¿Qué tipo de proceso es $\{X_t\}$?

(b) ¿Cuál es el valor de $\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k})$?

(c) ¿Cuál es el valor de $\rho_k = \text{corr}(X_t, X_{t+k})$?

(d) Si $\phi = 0,7$ y si $\sigma_A^2 = 4$

i) ¿Cuál es el valor de γ_k ?

ii) Grafique la función de autocovarianza teórica para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(e) Si $\phi = -0,9$ y si $\sigma_A^2 = 4$

i) ¿Cuál es el valor de ρ_k ?

ii) Grafique la función de autocorrelación teórica para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Solución. (a) Es un proceso autorregresivo de orden 1 ó AR(1).

(b)

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + A_t = \phi(\phi X_{t-2} + A_{t-1}) + A_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi X_{t-1} + A_t = \dots \\ &= \phi^k X_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \phi^i A_{t-i} \end{aligned}$$

Si $|\phi| < 1$ entonces $E[(X_t - \sum_{i=0}^{k-1} \phi^i A_{t-i})^2] = E[X_{t-k}]^2 \leq M\phi^k \rightarrow 0$ si $k \rightarrow \infty$.
Luego,

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i A_{t-i}$$

y

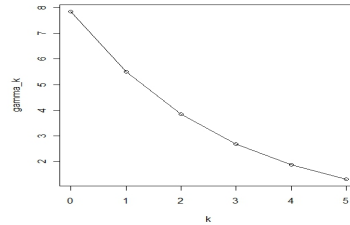
$$E[X_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i E[A_{t-i}] = 0$$

Entonces,

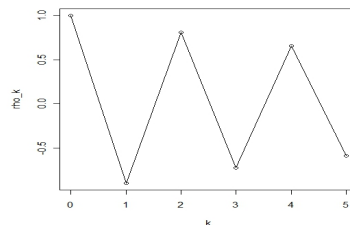
$$\begin{aligned} \gamma_k = cov(X_t, X_{t+k}) &= E[X_t X_{t+k}] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i A_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j A_{t+k-j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{i+j} E[A_{t-i} A_{t+k-j}] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i+k} E[A_{t-i}^2] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i+k} \sigma_A^2 \\ &= \phi^k \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} = \frac{\phi^k \sigma_A^2}{1 - \phi^2} \end{aligned}$$

(c) Como $\rho_0 = \frac{\sigma_A^2}{1 - \phi^2}$ entonces $\rho_k = \phi^k$.

(d) $\gamma_k = 7,843(0,7)^k$



(e) $\rho_k = (-0,9)^k$



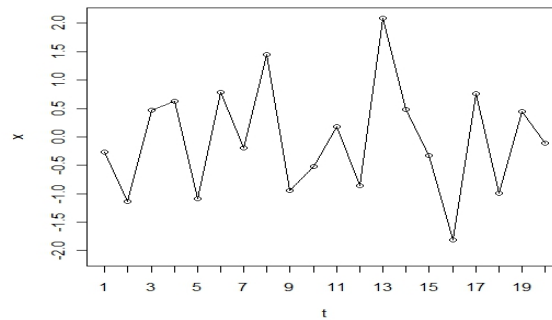
Ejercicio 1.3.4. Los siguientes números corresponden a 20 observaciones sucesivas de un proceso estocástico estacionario $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$.

-0.27	-1.14	0.47	0.63	-1.09	0.78	-0.19	1.45	-0.94	-0.52
0.18	-0.86	2.09	0.48	-0.33	-1.81	0.76	-0.99	0.45	-0.11

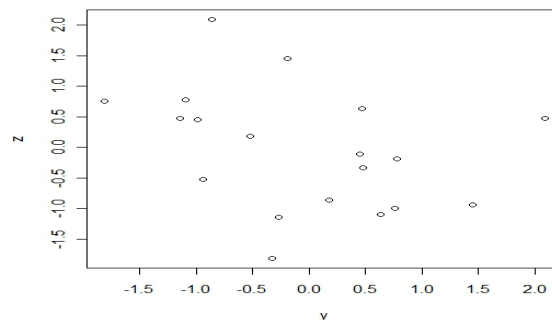
a) Grafique las observaciones en función del tiempo.

- b) Observando el gráfico de la parte (a), trate de adivinar el signo y el valor absoluto (aproximado) del coeficiente de autocorrelación de orden 1 del proceso estocástico que generó estos datos.
- c) Grafique x_t versus x_{t+1} y observando esta nube de puntos trate nuevamente de adivinar el valor de la autocorrelación de orden 1.
- d) Calcule usando los datos el valor estimado $\hat{\rho}_1$.
- e) Grafique x_t versus x_{t+2} y observando esta nube de puntos trate nuevamente de adivinar el valor de la autocorrelación de orden 2.
- f) Calcule usando los datos el valor estimado $\hat{\rho}_2$.
- g) Calcule con los datos los valores de y_t y z_t siendo $y_t = x_t - \hat{\rho}_1 x_{t+1}$, $z_t = x_{t+2} - \hat{\rho}_1 x_{t+1}$ y grafique y_t versus z_t .
- h) Teniendo en cuenta el gráfico de la parte (g) adivine el valor de la autocorrelación parcial de orden 2 (π_2) del proceso estocástico que generó los datos.
- i) Calcule con los datos una estimación de π_2 .

Solución. a) Serie de tiempo $\{X_t\}$



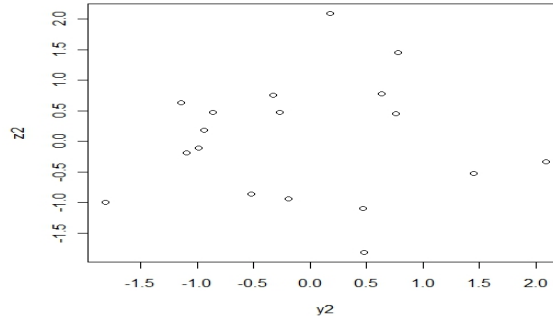
- b) No se puede decir nada sobre el coeficiente de autocorrelación de orden 1 sólo mirando el gráfico de la parte (a). Necesitaríamos observar como se comportan las estimaciones de la función de autocorrelación.
- c) x_t versus x_{t+1}



Se puede observar una tendencia lineal con pendiente negativa por lo que $\rho_1 < 0$

d) De acuerdo a (1.2.1), $\hat{\rho}_1 = -0,343$

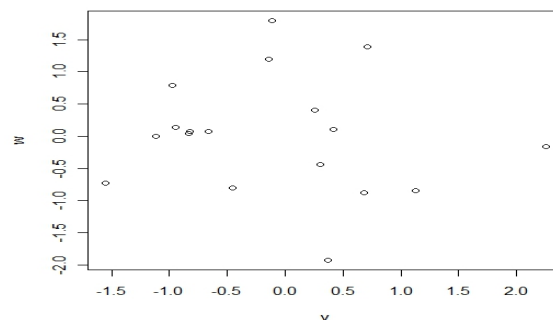
e) x_t versus x_{t+2}



No se puede apreciar ninguna tendencia por lo que $\rho_2 = 0$.

f) De acuerdo a (1.2.1), $\hat{\rho}_2 = 0,03258$

g) $v_t = x_t - \hat{\rho}_1 x_{t+1}$ versus $w_t = x_{t+2} - \hat{\rho}_1 x_{t+1}$



h) Parece que no existe una tendencia lineal entre los puntos graficados por lo que π_2 debe ser aproximadamente 0.

i) De acuerdo a (1.2.2) y (1.2.3), $\pi_2 = -0,0964$.

Ejercicio 1.3.5. Considere la serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definida por $X_t = 0,9A_{t-1} + A_t$, donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza $\sigma_A^2 = 4$.

a) ¿Qué tipo de proceso es $\{X_t\}$?

b) ¿Cuál es la forma general (con el mismo orden) del tipo de proceso que identificó en la parte (a)?

c) ¿Cuál es el valor de su media? ¿Por qué?

d) ¿Cuál es el valor de γ_k ?

e) ¿Cuál es el valor de ρ_k ?

f) Dados 50 datos x_1, \dots, x_{50} generados por este proceso de ecuación $X_t = 0,9A_{t-1} + A_t$, si se grafican los pares de puntos (x_{t-1}, x_t) , $t = 2, \dots, 50$, ¿Cuál es la ecuación de la recta teórica alrededor de la cual esta nube de puntos graficados tiende a concentrarse?

- g) Si se grafican los puntos (x_{t-2}, x_t) , $t = 3, \dots, 50$, ¿Cuál es la tendencia de esta nube de puntos?
 h) Si se grafican los puntos (y_t, z_t) donde $y_t = x_t - \frac{0,9}{1+0,9^2}x_{t+1}$ y $z_t = x_{t+2} - \frac{0,9}{1+0,9^2}x_{t+1}$ para $t = 1, \dots, 48$, ¿Cuál es la tendencia de esta nube de puntos?

Solución. a) $\{X_t\}$ es un proceso de medias móviles de orden 1 (MA(1))

b) La forma general es $X_t = \theta A_{t-1} + A_t$.

c) $E[X_t] = 0,9E[A_{t-1}] + E[A_t] = 0,9 * 0 + 0 = 0$.

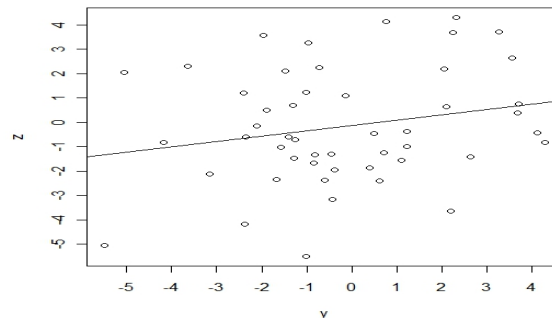
d) Por lo visto en el ejercicio 1.3.2,

$$\gamma_k = \begin{cases} (0,9^2 + 1)4, & \text{si } k = 0; \\ 0,9 * 4, & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 7,24, & \text{si } k = 0; \\ 3,6, & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$

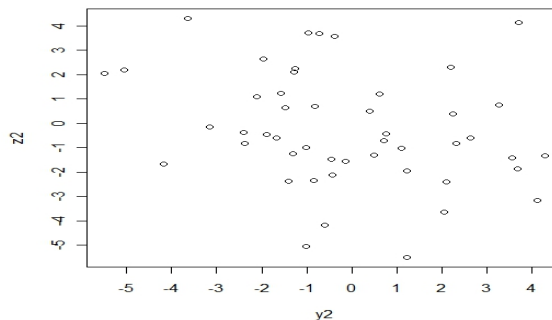
e)

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0,9/(1 + 0,9^2), & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0; \\ 0,497, & \text{si } |k| = 1; \\ 0, & \text{si } |k| > 1 \end{cases}$$

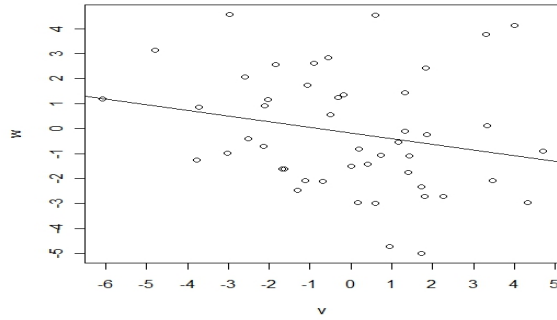
f) La ecuación de la recta es $z = 0,49y + 0,26$.



- g) La nube de puntos no parece concentrarse alrededor de ninguna recta y esto es coherente con el hecho de que $\rho_2 = 0$ en un proceso MA(1).



- h) Los puntos siguen teniendo una tendencia lineal pero menos marcada que en los puntos anteriores y obedece a la ecuación $w = -0,4v + 0,35$.

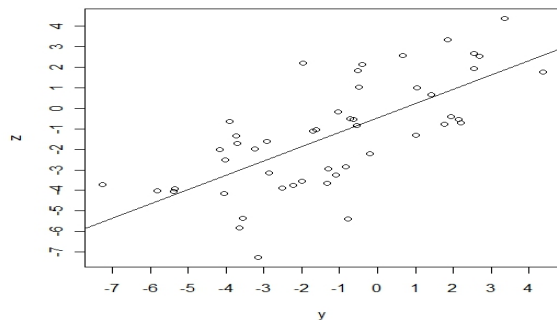


Ejercicio 1.3.6. Considere la serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ definida por $X_t = 0,9X_{t-1} + A_t$, donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza $\sigma_A^2 = 4$.

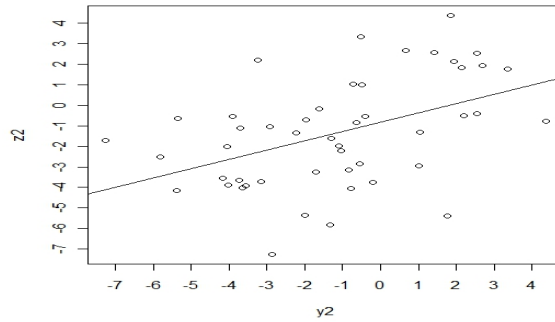
- ¿Qué tipo de proceso es $\{X_t\}$?
- ¿Cuál es la forma general (con el mismo orden) del tipo de proceso que identificó en la parte (a)?
- ¿Cuál es el valor de su media? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el valor de γ_k ?
- ¿Cuál es el valor de ρ_k ?
- Dados 50 datos x_1, \dots, x_{50} generados por este proceso de ecuación $X_t = 0,9X_{t-1} + A_t$, si se grafican los pares de puntos (x_{t-1}, x_t) , $t = 2, \dots, 50$, ¿Cuál es la ecuación de la recta teórica alrededor de la cual esta nube de puntos graficados tiende a concentrarse?
- Si se grafican los puntos (x_{t-2}, x_t) , $t = 3, \dots, 50$, ¿Cuál es la tendencia de esta nube de puntos?
- Si se grafican los puntos (y_t, z_t) donde $y_t = x_t - 0,9x_{t+1}$ y $z_t = x_{t+2} - 0,9x_{t+1}$ para $t = 1, \dots, 48$, ¿Cuál es la tendencia de esta nube de puntos?

Solución. a) $\{X_t\}$ es un proceso autorregresivo de orden 1 (AR(1)).

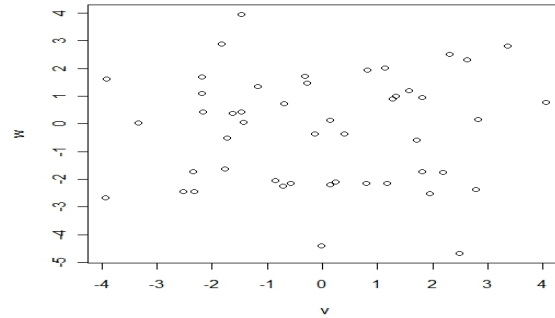
- La forma general es $X_t = \phi X_{t-1} + A_t$.
- De acuerdo con las cuentas hechas en el ejercicio 1.3.3, el proceso AR(1) se puede escribir como un proceso de medias móviles de orden infinito y entonces $E[X_t] = 0$.
- Por el ejercicio 1.3.3, $\gamma_k = 4 \frac{0,9^k}{1-0,9^k} = 21,05(0,9)^k$.
- $\rho_k = 0,9^k$
- La ecuación de la recta es $z = 0,8y + 0,16$.



g) La ecuación de la recta es $z_2 = 0,5y_2 + 0,3$.



h) Los puntos no parecen mostrar ninguna tendencia lineal lo cual concuerda con el hecho de que $\pi_2 = 0$ en un proceso AR(1).



Ejercicio 1.3.7. En cada uno de los siguientes casos grafique los valores dados en la tabla y especifique los modelos de serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ a los que podría pertenecer los pares de funciones de autocorrelación teórica y de autocorrelación parcial teórica graficadas. Establezca la relación que define en forma general a X_t en el modelo identificado y, cuando sea posible, determine el signo de cada uno de los coeficientes involucrados.

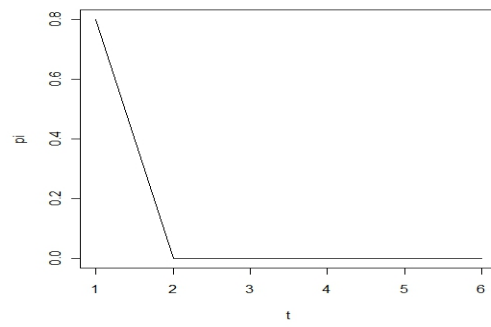
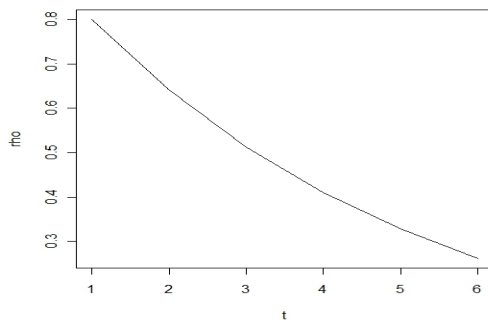
a)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.800	0.640	0.512	0.410	0.328	0.262
π_k	0.800	0	0	0	0	0

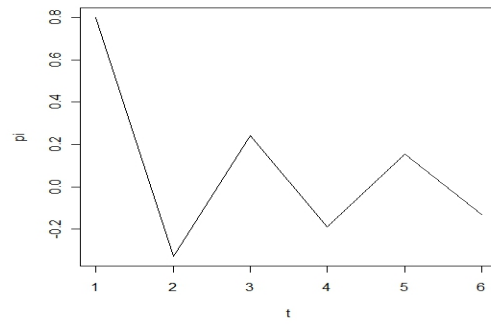
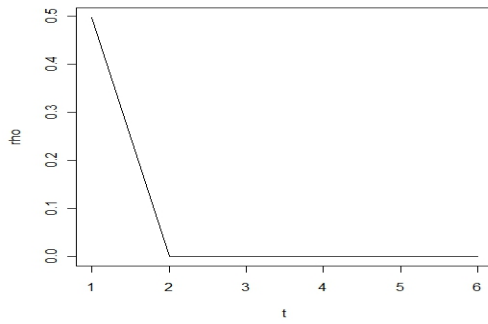
b)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.497	0	0	0	0	0
π_k	0.497	-0.328	0.243	-0.191	0.156	-0.131

Solución. a) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo AR(1) de la forma $X_t = \phi X_{t-1} + A_t$ ya que en esos modelos la autocorrelación teórica es $\rho_k = \phi^k$ y la autocorrelación parcial teórica es $\pi_k = 0$ si $k \neq 1$ y $\pi_1 = \phi$. En este caso debe ser $\phi > 0$.



b) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo MA(1) de la forma $X_t = \theta A_{t-1} + A_t$ ya que en esos modelos la autocorrelación teórica es $\rho_k = 0$ si $|k| > 1$ y $\rho_k = \frac{\theta}{1+\theta^2}$ si $|k| = 1$. En este caso debe ser $\theta > 0$.



Capítulo 2

Modelos para series de tiempo estacionarias

En esta sección se presentarán los principales modelos que pueden regir el comportamiento de una serie de tiempo estacionaria junto con las características que permiten distinguir a cuál de esos modelos corresponde una serie de datos observados.

2.1. Representaciones de una serie de tiempo

2.1.1. Representación como un proceso de promedios móviles de orden infinito

Un resultado importante referido a los procesos estacionarios es el probado por Wold en 1938; este dice que todo proceso estacionario $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ que sea no determinístico puro puede expresarse como un promedio móvil de orden infinito, es decir

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A_{t-i}$$

con $\alpha_0 = 1$, $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ proceso de ruido blanco con media 0 y varianza σ_A^2 y tal que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$.

Definición 2.1.1. Se llama operador de cambio hacia atrás y se denota por B al operador definido por $BX_t = X_{t-1}$.

Notación. Por simplicidad de usará la notación $\dot{X}_t = X_t - \mu$.

Proposición 1. Si $\{X_t\}$ un proceso de medias móviles de orden infinito $X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A_{t-i}$ con $\alpha_0 = 1$, $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ proceso de ruido blanco con media 0 y varianza σ_A^2 y tal que $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$ entonces $\{X_t\}$ es un proceso estacionario.

Demostración. Haciendo uso del operador de cambio hacia atrás, se puede escribir a X_t como

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i A_t = \mu + \alpha(B)A_t$$

donde $\alpha(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i$ y $\alpha_0 = 1$, o sea $\dot{X}_t = \alpha(B)A_t$.

Es claro que

$$E[X_t] = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i E[A_{t-i}] = \mu + 0 = \mu,$$

$$\text{Var}(X_t) = E[X_t^2] - \mu^2$$

y

$$\begin{aligned} E[X_t^2] &= E\left[\left(\mu + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A_{t-i}\right)\left(\mu + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A_{t-j}\right)\right] \\ &= 2\mu \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i E[A_{t-i}] + \mu^2 + \sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_i \alpha_j E[A_{t-j} A_{t-i}] = \mu^2 + \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \quad (2.1.1)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{cov}(\dot{X}_t, \dot{X}_{t+k}) \quad (2.1.2) \\ &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A_{t-j}\right)\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \alpha_j E[A_{t-i} A_{t+k-j}] \\ &= \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \alpha_{i+k} < \infty \end{aligned}$$

Como

$$|\gamma_k| \leq \gamma_0 = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty,$$

se cumplen las condiciones de la definición 1.1.3 por lo que resulta que $\{X_t\}$ es un proceso estacionario.

2.1.2. Representación como un proceso autorregresivo de orden infinito

Definición 2.1.2. Se dice que una serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es invertible o equivalentemente es un proceso autorregresivo de orden infinito, si $\dot{X}_t = X_t - \mu$ se puede expresar como

$$\dot{X}_t = A_t + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \dot{X}_{t-i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i| < \infty.$$

O sea,

$$\beta(B)\dot{X}_t = A_t \quad \text{donde} \quad \beta(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i B^i.$$

Proposición 2. Sea $\{X_t\}$ un proceso invertible como en la definición 2.1.2. Si las raíces de $\beta(B) = 0$ son de módulo mayor que uno entonces la serie resulta ser un proceso estacionario.

Demostración. Como $\beta(x) \neq 0$ cuando $|x| \leq 1$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{\beta(x)}$ tiene una expansión en series de potencia

$$\frac{1}{\beta(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j = \alpha(x), \quad |x| < 1 + \varepsilon.$$

Si $(1 + \frac{\varepsilon}{2}) < |x| < (1 + \varepsilon)$, como $|\alpha_j||x|^j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ resulta que $\alpha_j(1 + \varepsilon/2)^j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$ y por lo tanto, existe $K \in (0, \infty)$ tal que $|\alpha_j| < K(1 + \varepsilon/2)^{-j} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots$ En particular, $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$ y $\alpha(x)\beta(x) \equiv 1$ para todo $|x| \leq 1$. Mas aún, $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty$. Luego, resulta que $\{X_t\}$ posee una expresión como un proceso de medias móviles de orden infinito y por la proposición 1, $\{X_t\}$ es estacionario.

Análogamente, un proceso estacionario $\dot{X}_t = \alpha(B)A_t$ será invertible si las raíces de $\alpha(B) = 0$ son de módulo mayor que 1 pues entonces $\frac{1}{\alpha(B)} = \beta(B)$ con $\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i| < \infty$.

2.2. Modelos autoregresivos de orden finito

Definición 2.2.1. Se dice que una serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso autorregresivo de orden p (se denota $AR(p)$), con $p \in \mathbb{N}$ fijo, si $\dot{X}_t = X_t - \mu$ se puede expresar como

$$\dot{X}_t = A_t + \sum_{i=1}^p \phi_i \dot{X}_{t-i} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con media 0 y varianza σ_A^2 .

Al ser un caso particular de un proceso autorregresivo de orden infinito, el proceso será estacionario si las raíces de $\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$ son de módulo mayor que 1.

La siguiente definición se usará en la demostración de algunos resultados que se presentarán a continuación pero cuyas pruebas no se incluirán en este trabajo.

Definición 2.2.2. Se llama ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes de orden k , a una ecuación de la forma

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_k y_{t-k} = a_t \quad \text{para } t \in T,$$

donde $a_t : t \in T$ es una función real de t que no depende de y , tal que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ son constantes con $\alpha_k \neq 0$ y donde T es un intervalo de números enteros (o sea $T \subset \mathbb{Z}$) que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es de la forma $[z, \infty)$ o $[z, z+h]$ o $(-\infty, \infty)$.

2.2.1. Modelo autoregresivo de orden 1

Un proceso autorregresivo de orden 1 se expresa de la forma

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + A_t$$

o bien

$$\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + A_t \quad \text{con } \dot{X}_t = X_t - \mu.$$

Entonces

$$E[X_t] = \mu,$$

$$\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{cov}(\dot{X}_t, \dot{X}_{t+k}) = \sigma_A^2 \frac{\phi_1^k}{1 - \phi_1^2} \quad \text{si } |\phi_1| < 1$$

y

$$\pi_k = \begin{cases} \phi_1, & \text{si } k = 1; \\ 0, & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

(ver ejercicio 1.3.3).

Además, este proceso será estacionario si la raíz de $\Phi(B) = 1 - \phi_1(B) = 0$ es de módulo mayor que 1, o equivalentemente $|\phi_1| < 1$.

Los cálculos de arriba se pueden realizar usando ecuaciones en diferencias: la solución de la ecuación en diferencias de primer orden $X_t - \phi X_{t-1} = A_t$ es la suma de una solución particular y de una solución complementaria que es solución de la ecuación $X_t - \phi X_{t-1} = 0$. Una solución particular es

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i}$$

y una solución complementaria es de la forma $c\phi_1^t$. Por lo que la solución general es

$$X_t = c\phi_1^t + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i}.$$

Para calcular las autocorrelaciones de $X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + A_t$ se multiplica a ambos miembros de la ecuación por $(X_{t-k} - \mu)$ y se obtiene $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$. Por lo tanto, la función de autocorrelación saldrá de resolver la ecuación $\rho_k - \phi_1 \rho_{k-1} = 0$. Esta tiene solución general de la forma $\rho_k = ab^k$ donde b es solución de $b - \phi_1 = 0$, o sea $b = \phi_1$ y como $1 = \rho_0 = a\phi_1^0 = a$ entonces $\rho_k = \phi_1^k$.

2.2.2. Modelo autoregresivo de orden p

La definición de que un proceso $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ sea autorregresivo de orden p es equivalente a que sea solución de la ecuación

$$\dot{X}_t - \phi_1 \dot{X}_{t-1} - \phi_2 \dot{X}_{t-2} - \dots - \phi_p \dot{X}_{t-p} = A_t$$

donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco.

La solución general será suma de una solución particular X_t^* y de una solución complementaria X_t^{**} . Si z_1, \dots, z_p son las raíces de $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$ entonces la solución particular es

$$X_t^* = \frac{1}{\phi(B)} A_t = \left(\prod_{i=1}^p \frac{1}{(1 - z_i B)} \right) A_t = \left(\sum_{i=1}^p \frac{k_i}{(1 - z_i B)} \right) A_t$$

donde las constantes k_i se eligen de tal forma que se verifique la igualdad, y si además $|z_i| > 1$ para $i = 1, \dots, p$ resulta

$$X_t^* = \left(\sum_{i=1}^p (k_i \sum_{j=0}^{\infty} z_i^j B^j) \right) A_t = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^p k_i z_i^j \right) A_{t-j}$$

verificándose que X_t^* es estacionaria. La solución complementaria será una suma de p términos que dependerán del tipo de raíces z_1, \dots, z_p que tenga su polinomio característico

$$z^p - \phi_1 z^{p-1} - \phi_2 z^{p-2} - \dots - \phi_{p-1} z - \phi_p.$$

1. Por cada raíz real y distinta z_j hay un término de la forma $c_j z_j^t$.
2. Por cada raíz real z_i repetida m_i veces hay un término de la forma $(c_{i1} + c_{i2}t + \dots + c_{im_i} t^{m_i-1}) z_i^t$.
3. Por cada par de raíces complejas conjugadas hay un término de la forma $R^t (c_1 \cos(t\lambda) + c_2 \sin(t\lambda))$.
4. Por cada par de raíces complejas conjugadas repetidas h veces hay un término de la forma $R^t [(c_{11} \cos(t\lambda) + c_{12} \sin(t\lambda)) + t(c_{21} \cos(t\lambda) + c_{22} \sin(t\lambda)) + \dots + t^{h-1} (c_{h1} \cos(t\lambda) + c_{h2} \sin(t\lambda))]$.

(ver Leiva [1]).

Para calcular la función de autocorrelación de $(X_t - \mu) = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + A_t$ se multiplica a ambos miembros por $X_{t-k} - \mu$ y se divide todo por γ_0 , obteniéndose

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}$$

Particularizando esta última ecuación para $k = 1, \dots, p$ se obtiene el conocido sistema de ecuaciones de Yule-Walker:

$$\bar{\rho} = R \cdot \bar{\phi}$$

donde

$$\bar{\phi}^t = [\phi_1 \dots \phi_p], \quad \bar{\rho}^t = [\rho_1 \dots \rho_p] \text{ y}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La solución será una mezcla de exponenciales, debido a los términos con raíces reales, y sinusoidales, debidas a las raíces complejas conjugadas.

La función de autocorrelación parcial se anula a partir del lag $p+1$ pues el determinante del numerador en la definición 1.1.6 se hace cero por ser la última columna combinación lineal de las p primeras.

2.3. Modelos de promedios móviles de orden finito

Definición 2.3.1. Se dice que $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de medias móviles de orden q y se denota por $MA(q)$, si $\dot{X}_t = X_t - \mu$ se puede expresar como

$$\dot{X}_t = A_t + \sum_{i=1}^q \theta_i A_{t-i} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con media 0 y varianza σ_A^2 .

Un proceso $MA(q)$ con q fijo siempre es estacionario pues $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 = 1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 < \infty$

Como $\dot{X}_t = \theta(B)A_t$ donde $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$, la condición suficiente para que el proceso sea invertible es que las raíces de $\theta(B) = 0$ sean de modulo mayor que 1 (la demostración es similar a la de la proposición 2).

Además, como de vio en la demostración de la proposición 1 (ver ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2)) pero con $\alpha_i = \theta_i$ para $i = 1, \dots, q$ y $\alpha_i = 0$ si $i > q$ resulta que

$$E[X_t] = \mu,$$

$$Var(X_t) = \sigma_A^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2),$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_A^2(\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q), & \text{si } k \leq q; \\ 0, & \text{si } k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & \text{si } k \leq q; \\ 0, & \text{si } k > q \end{cases}$$

Como se ve, la autocovarianza se anula para $k > q$ y es una propiedad que caracteriza a los procesos $MA(q)$ (ver Brockwell [2]).

2.3.1. El modelo de medias móviles de orden 1

Un proceso de medias móviles de orden 1 se expresa como $X_t - \mu = A_t + \theta_1 A_{t-1}$ donde $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 .

Como ya se vió en el ejercicio 1.3.2, este proceso es estacionario con

$$E[X_t] = \mu,$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_A^2(1 + \theta_1^2), & \text{si } k = 0; \\ \sigma_A^2\theta_1, & \text{si } k = 1; \\ 0, & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & \text{si } k = 1; \\ 0, & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

En la función de autocorrelación parcial π_k (definición 1.1.6), el determinante del numerador es $(-1)^{k+1}(\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2})^k$ pues

$$\begin{aligned} \text{num}(\pi_k) &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\ \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & 1 & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & 1 & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2} \left(\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}\right)^{k-1} = (-1)^{k+1} \left(\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}\right)^k \end{aligned}$$

mientras que el determinante del denominador es $\Delta_k = \frac{1+\theta_1^2+\dots+\theta_1^{2k}}{(1+\theta_1^2)^k}$ que se prueba fácilmente usando el hecho de que $\Delta_k = \Delta_{k-1} - (\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2})^2 \Delta_{k-2}$ e inducción en k .

Por lo tanto,

$$\pi_k = \frac{(-1)^{k+1} \theta_1^k}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_1^{2k}} = \frac{-(-\theta_1)^k}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_1^{2k}} = \frac{-(-\theta_1)^k (1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^{2(k+1)}} \text{ si } k \geq 1.$$

Para que este proceso sea invertible, la raíz de $\theta(B) = 1 + \theta_1 B = 0$ debe ser de modulo mayor que 1, o equivalentemente $|\theta_1| < 1$.

2.4. Modelos Autorregresivos de Promedios Móviles

Definición 2.4.1. Se dice que la serie de tiempo $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso autorregresivo de medias móviles de órdenes p y q respectivamente y se lo denota por $ARMA(p, q)$, si se verifica que $\dot{X}_t = X_t - \mu$ se puede expresar como

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \dot{X}_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) A_t,$$

donde $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ son constantes con $\phi_p \neq 0 \neq \theta_q$ y $\{A_t : t \in \mathbb{Z}\}$ un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 .

Una condición suficiente para que el proceso sea estacionario es que las raíces de $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$ sean de módulo mayor que 1 (ver proposición 2).

Mientras que una condición suficiente para que el proceso sea invertible es que las raíces de $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q = 0$ sean de módulo mayor que 1 (la demostración es similar a la de la proposición 2).

2.4.1. Modelo ARMA(1,1).

Un proceso ARMA(1,1) puede expresarse como $\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + A_t + \theta A_{t-1}$ o bien como $\Phi(B)\dot{X}_t = \theta(B)A_t$ donde $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B$ y $\theta(B) = 1 + \theta_1 B$.

Como se vió en la proposición 2, este proceso es estacionario si la raíz de $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B = 0$ es de módulo mayor que 1, o equivalentemente $|\phi_1| < 1$.

En este caso se puede escribir

$$\dot{X}_t = \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} A_t = (1 + \theta_1 B) \frac{1}{(1 - \phi_1 B)} A_t = (1 + \theta_1 B) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i B^i \right) A_t = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_1^i + \theta_1 \phi_1^{i-1}) \right) A_t$$

que es su expresión como media móvil de orden infinito.

Similarmente, el proceso será invertible si la raíz de $\theta(B) = 1 + \theta_1 B = 0$ es de módulo mayor que 1, es decir si $|\theta_1| < 1$.

En este caso

$$A_t = \frac{\Phi(B)}{\theta(B)} \dot{X}_t = (1 - \phi_1 B) \frac{1}{(1 + \theta_1 B)} \dot{X}_t = (1 - \phi_1 B) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-\theta_1)^i B^i \right) \dot{X}_t = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\theta_1^{i-1} (\phi_1 + \theta_1) (-1)^i) \right) \dot{X}_t$$

que es su expresión como un proceso autorregresivo de orden infinito.

Para calcular la función de autocovarianza se puede usar su expresión como media móvil de orden infinito; entonces por (2.1.2) para $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sigma_A^2 \left(\alpha_k + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \alpha_{i+k} \right) \\ &= \sigma_A^2 \left(\phi_1^{k-1} (\phi_1 + \theta_1) + (\phi_1 + \theta_1)^2 \phi_1^{k-2} \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_1^2)^i \right) \\ &= \sigma_A^2 \left(\phi_1^{k-1} (\phi_1 + \theta_1) + (\phi_1 + \theta_1)^2 \phi_1^{k-2} \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_1^2} \right) \\ &= \sigma_A^2 \frac{(\phi_1 + \theta_1) \phi_1^{k-1} (1 + \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \end{aligned}$$

y si $k = 0$

$$\gamma_0 = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 = \sigma_A^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\phi_1 + \theta_1)^2 \phi_1^{2(i-1)} \right) = \sigma_A^2 \left(1 + \frac{(\phi_1 + \theta_1)^2}{1 - \phi_1^2} \right) = \sigma_A^2 \left(\frac{1 + 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \right)$$

Por lo tanto,

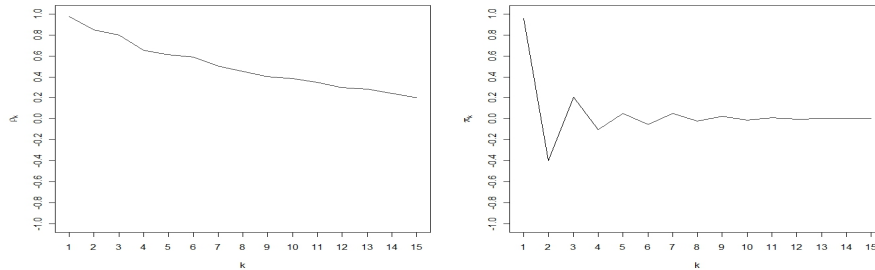
$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_A^2 \left(\frac{1 + 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2} \right), & \text{si } k = 0; \\ \sigma_A^2 \frac{(\phi_1 + \theta_1) \phi_1^{k-1} (1 + \phi_1 \theta_1)}{1 - \phi_1^2}, & \text{si } k \geq 1; \end{cases}$$

y

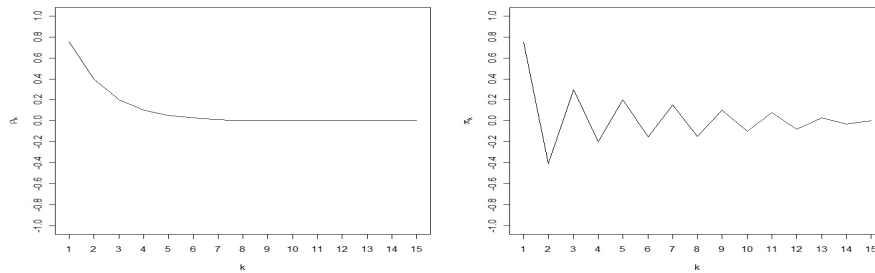
$$\rho_k = \frac{(\phi_1 + \theta_1)\phi_1^{k-1}(1 + \phi_1\theta_1)}{1 + 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} \text{ si } k \geq 1$$

Los valores de $|\pi_k|$ decrecerán de forma exponencial dependiendo del signo y magnitud de ϕ_1 y θ_1 . Los siguientes gráficos representan las posibles funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de un proceso ARMA(1,1).

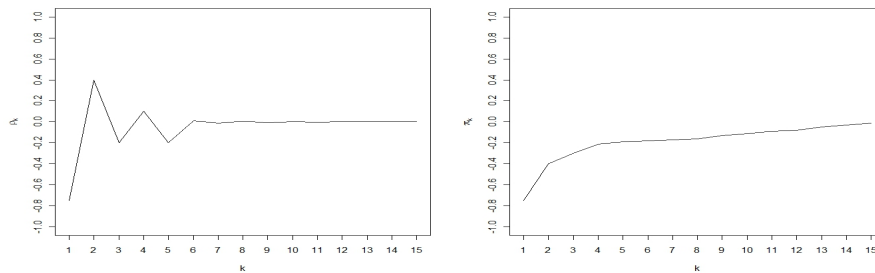
$$\phi_1 > \theta_1 > 0$$



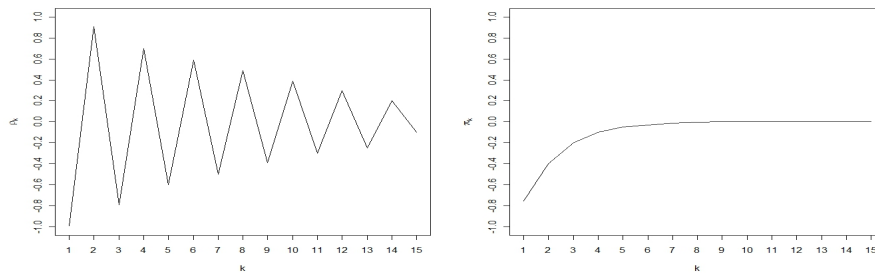
$$\theta_1 > \phi_1 > 0$$



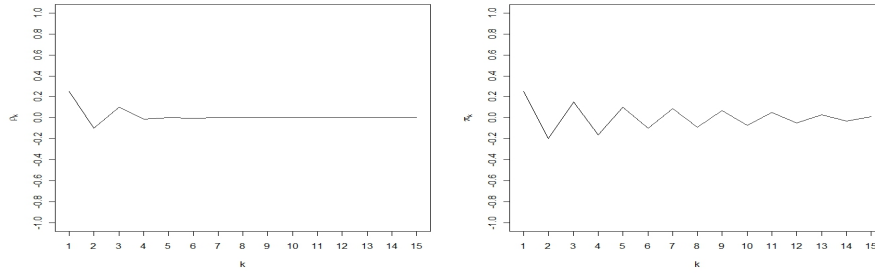
$$\theta_1 < \phi_1 < 0$$



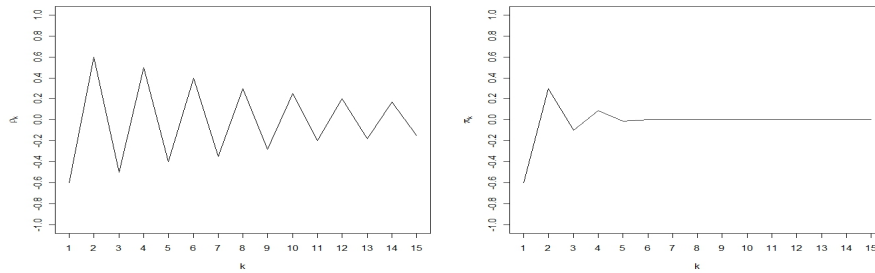
$$\phi_1 < \theta_1 < 0$$



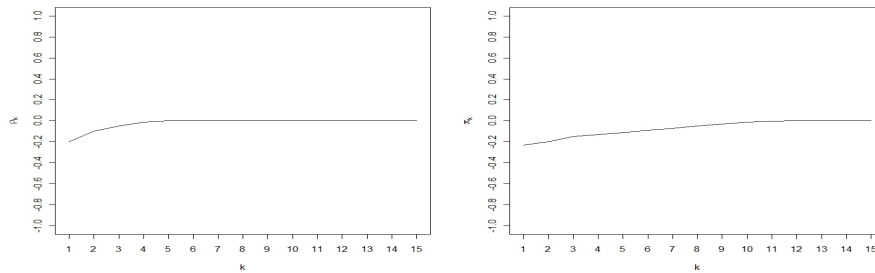
$$\phi_1 < 0 < \theta_1 \text{ y } \phi_1 + \theta_1 > 0$$



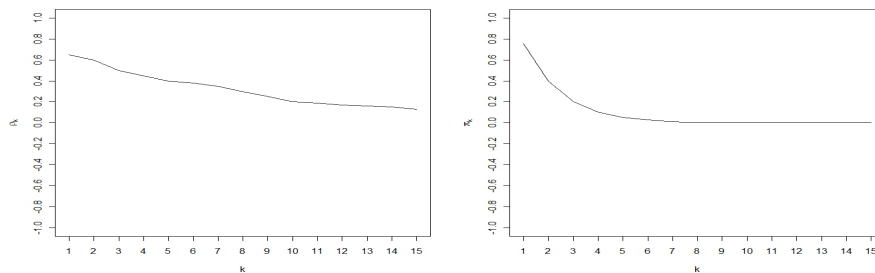
$$\phi_1 < 0 < \theta_1 \text{ y } \phi_1 + \theta_1 < 0$$



$$\theta_1 < 0 < \phi_1 \text{ y } \phi_1 + \theta_1 < 0$$



$$\theta_1 < 0 < \phi_1 \text{ y } \phi_1 + \theta_1 > 0$$



2.4.2. Modelo ARMA(p,q)

Como se dijo al comienzo de la sección 2.4, si el módulo de las raíces de $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 0$ son mayores que 1 entonces el proceso será estacionario y se podrá expresar como un proceso de medias móviles de orden infinito $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A_{t-i}$ con $\alpha_0 = 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. Con esta representación se puede calcular la función de autocovarianza ya que en un proceso MA(∞)

$$\gamma_k = \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+k} \text{ para } k \geq 0.$$

Lo único que hace falta es saber el valor de los α_i . Para ello se puede recurrir al hecho de que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i = \frac{\theta(x)}{\Phi(x)},$$

es decir que $(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots)(1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p) = (1 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_q x^q)$ e igualando los coeficientes de las sucesivas potencias de x se calculan los α_i .

Las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de los procesos ARMA combinan propiedades de los procesos AR y MA: en la función de autocorrelación ciertos primeros valores dependen del orden de la parte MA y después hay un decrecimiento dictado por la parte AR. En la función de autocorrelación parcial los valores iniciales dependen del orden de la parte AR y sigue un decrecimiento debido a la parte MA. Esta estructura compleja hace difícil poder identificar este modelo en la práctica (ver Peña [3]).

El siguiente cuadro resume las características de las funciones de autocorrelación de un ARMA:

Tabla 1

	Autocorrelación	Autocorrelación Parcial
$AR(p)$	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y sinoides.	p primeros coeficientes no nulos y el resto cero.
$MA(q)$	q primeros coeficientes no nulos y el resto cero.	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y sinoides.
$ARMA(p, q)$	Decrecimiento hacia cero.	Decrecimiento hacia cero.

2.5. Ejercicios del Capítulo II

Ejercicio 2.5.1. Encontrar la función de autocorrelación, la función de autocorrelación parcial y graficar ambas para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

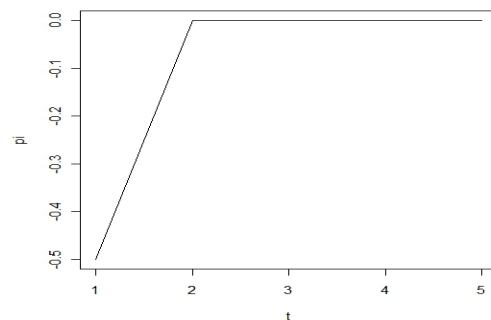
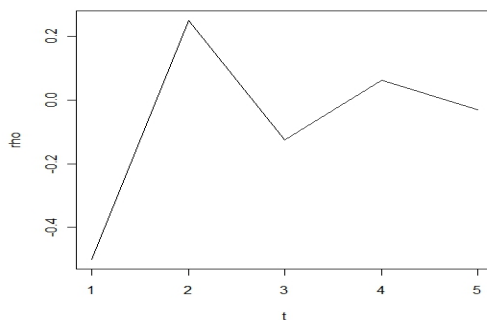
a) $X_t = -0,5X_{t-1} + A_t$

b) $X_t = -0,2X_{t-1} + 0,5X_{t-2} + A_t$

c) $X_t = -0,7X_{t-1} + 0,1X_{t-2} + A_t$

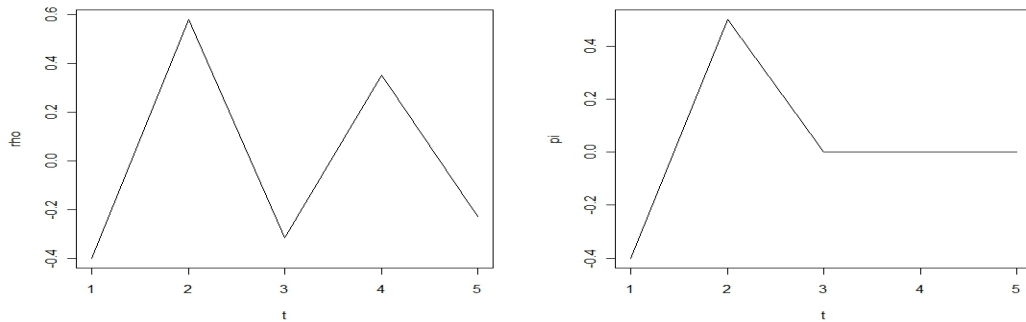
Solución. a) Como $|\phi_1| = 0,5 < 1$ entonces $\rho_k = (-0,5)^k$ y

$$\pi_k = \begin{cases} -0,5, & \text{si } k = 1; \\ 0, & \text{si } k > 1; \end{cases}$$



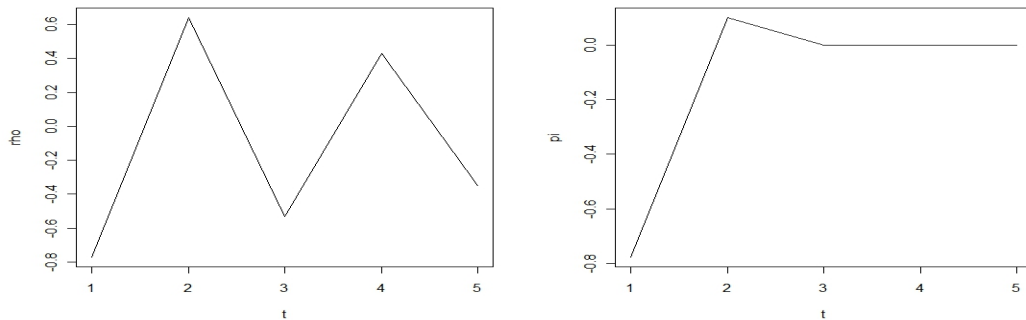
- b) La ecuación cuadrática correspondiente es $z^2 + 0,2z - 0,5$ que tiene como raíces a $z_1 = 0,614$ y $z_2 = -0,814$ entonces $\rho_k = c_1(0,614)^k + c_2(-0,814)^k$ que con las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\rho_1 + 0,2 - 0,5\rho_{-1} = 0$ resulta que $\rho_k = 0,289(0,614)^k + 0,71(-0,814)^k$ y

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & \text{si } k = 1; \\ \phi_2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2; \end{cases} = \begin{cases} -0,4, & \text{si } k = 1; \\ 0,5, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2; \end{cases}$$



- c) La ecuación cuadrática correspondiente es $z^2 + 0,7z - 0,1$ que tiene como raíces a $z_1 = 0,121$ y $z_2 = -0,821$ entonces $\rho_k = c_1(0,121)^k + c_2(-0,821)^k$ que con las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\rho_1 + 0,7 - 0,1\rho_{-1} = 0$ resulta que $\rho_k = 0,047(0,121)^k + 0,953(-0,821)^k$ y

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & \text{si } k = 1; \\ \phi_2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2; \end{cases} = \begin{cases} -0,777, & \text{si } k = 1; \\ 0,1, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2; \end{cases}$$



Ejercicio 2.5.2. En cada uno de los siguientes casos grafique los valores dados en la tabla y especifique los modelos de serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ a los que podría pertenecer los pares de funciones de autocorrelación teórica y de autocorrelación parcial teórica graficadas. Establezca la relación que define en forma general a X_t en el modelo identificado y, cuando sea posible, determine el signo de cada uno de los coeficientes involucrados.

k	1	2	3	4	5	6
a) ρ_k	-0.833	0.817	-0.742	0.698	-0.645	0.602
π_k	-0.833	0.4	0	0	0	0

k	1	2	3	4	5	6
b) ρ_k	0.714	0.657	0.543	0.469	0.397	0.339
π_k	0.714	0.300	0	0	0	0

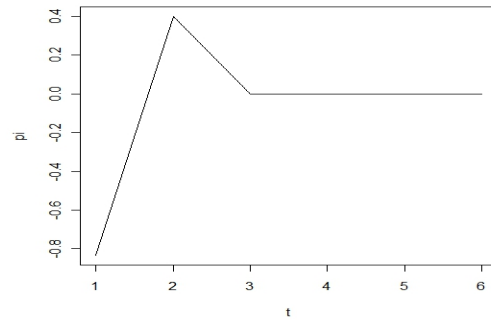
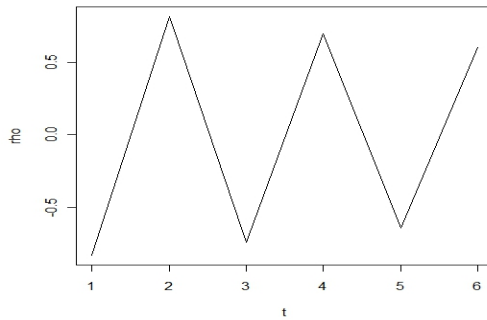
k	1	2	3	4	5	6
c) ρ_k	0.789	0.284	-0.284	-0.682	-0.767	-0.537
π_k	0.789	-0.9	0	0	0	0

k	1	2	3	4	5	6
d) ρ_k	-0.929	0.807	-0.678	0.558	-0.455	0.368
π_k	-0.929	-0.4	0	0	0	0

Solución. a) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo AR(2) de la forma $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + A_t$ ya que en esos modelos la autocorrelación parcial es

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & \text{si } k = 1; \\ \phi_2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

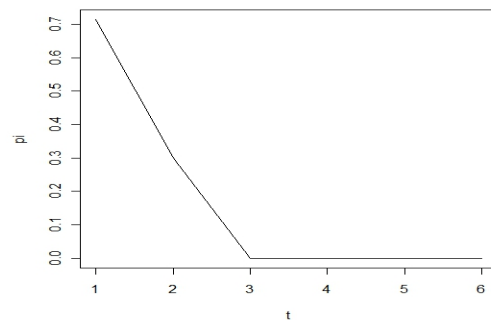
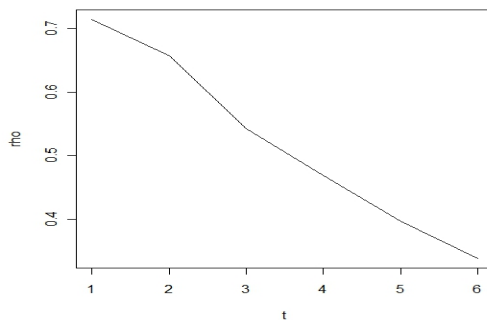
Luego $\phi_2 = 0,4$ y $\phi_1 = -0,5$



b) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo AR(2) de la forma $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + A_t$ ya que en esos modelos la autocorrelación parcial es

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & \text{si } k = 1; \\ \phi_2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

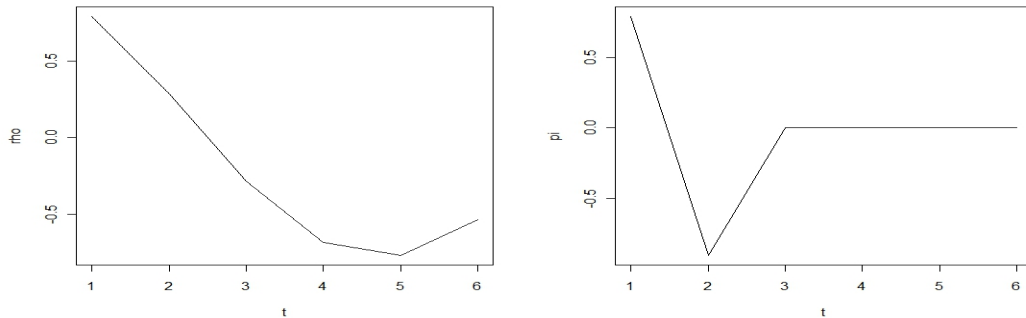
Luego $\phi_2 = 0,3$ y $\phi_1 = 0,43$



c) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo AR(2) de la forma $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + A_t$ ya que en esos modelos la autocorrelación parcial es

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & \text{si } k = 1; \\ \phi_2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

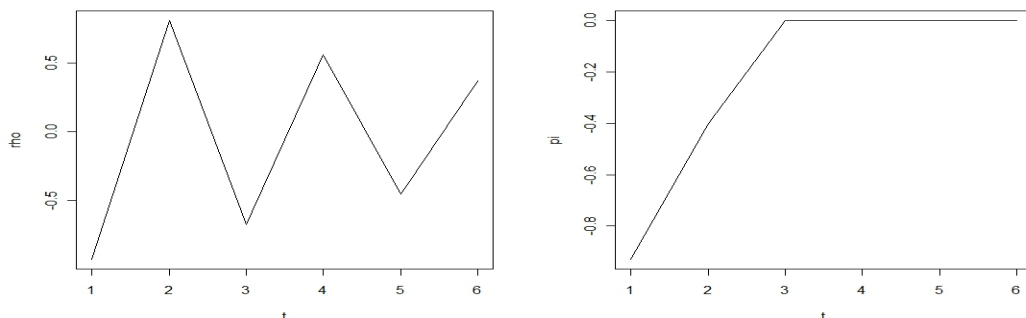
Luego $\phi_2 = -0,9$ y $\phi_1 = 1,5$



d) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo AR(2) de la forma $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + A_t$ ya que en esos modelos la autocorrelación parcial es

$$\pi_k = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, & \text{si } k = 1; \\ \phi_2, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

Luego $\phi_2 = -0,4$ y $\phi_1 = -1,3$



Ejercicio 2.5.3. En cada uno de los siguientes casos grafique los valores dados en la tabla y especifique los modelos de serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ a los que podría pertenecer los pares de funciones de autocorrelación teórica y de autocorrelación parcial teórica graficadas. Establezca la relación que define en forma general a X_t en el modelo identificado y, cuando sea posible, determine el signo de cada uno de los coeficientes involucrados.

k	1	2	3	4	5	6
a) ρ_k	-0.702	0.222	0	0	0	0
π_k	-0.702	-0.534	-0.376	-0.180	0.027	0.169

b)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.489	0.402	0	0	0	0
π_k	0.489	0.215	-0.357	0.052	0.202	-0.133

c)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.682	0.187	0	0	0	0
π_k	0.682	-0.519	0.409	-0.315	0.220	-0.124

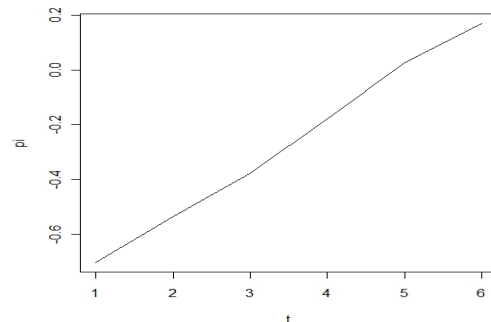
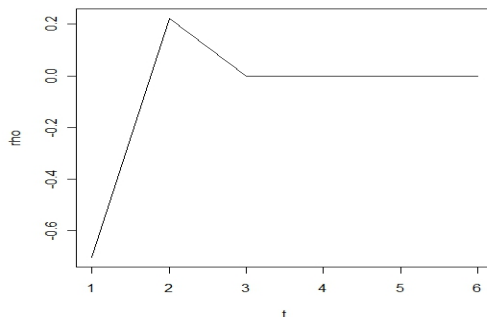
d)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	-0.654	0.156	0	0	0	0
π_k	-0.654	-0.476	-0.364	-0.284	-0.224	-0.175

Solución. a) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo MA(2) de la forma $X_t = \theta_1 A_{t-1} + \theta_2 A_{t-2} + A_t$ ya que estos modelos se caracterizan por tener una función de autocorrelación que se anula para los $k > 2$ y es

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 1; \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

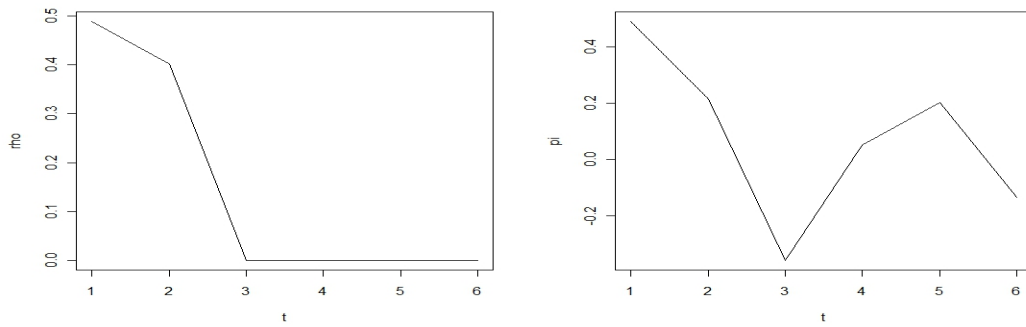
Luego $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 > 0$



b) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo MA(2) de la forma $X_t = \theta_1 A_{t-1} + \theta_2 A_{t-2} + A_t$ ya que estos modelos se caracterizan por tener una función de autocorrelación que se anula para los $k > 2$ y es

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 1; \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

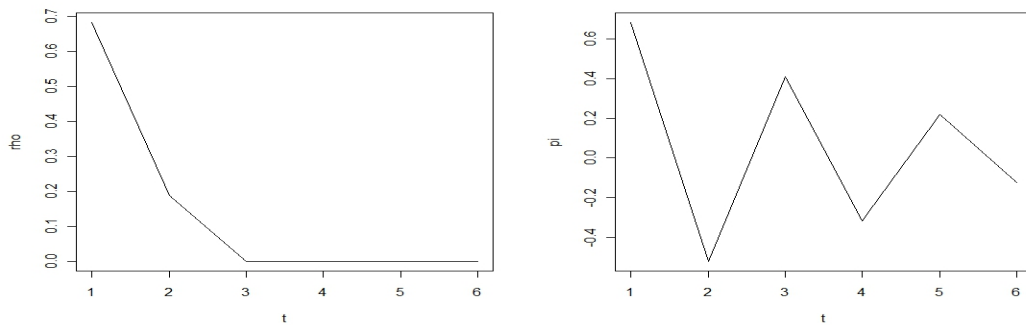
Luego $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$



- c) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo MA(2) de la forma $X_t = \theta_1 A_{t-1} + \theta_2 A_{t-2} + A_t$ ya que estos modelos se caracterizan por tener una función de autocorrelación que se anula para los $k > 2$ y es

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 1; \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

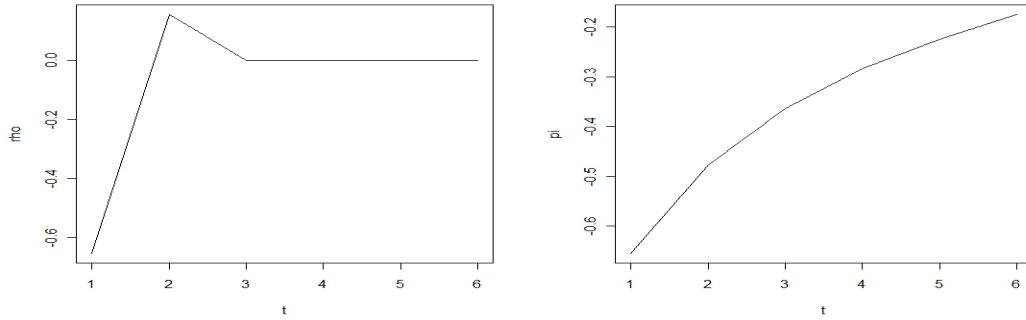
Luego $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$



- d) De acuerdo a los gráficos se puede decir que los valores corresponden a un modelo MA(2) de la forma $X_t = \theta_1 A_{t-1} + \theta_2 A_{t-2} + A_t$ ya que estos modelos se caracterizan por tener una función de autocorrelación que se anula para los $k > 2$ y es

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 1; \\ \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & \text{si } k = 2; \\ 0, & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

Luego $\theta_1 < 0$ y $\theta_2 > 0$



Ejercicio 2.5.4. Considere la serie de tiempo $\{X_t\}$ definida por $X_t - \mu = \theta A_{t-1} + A_t$, donde $0 < |\theta| \leq 1$ y donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 . Defina el proceso $\{Y_t\}$ como la primera diferencia del proceso X_t , es decir $Y_t = X_t - X_{t-1}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$.

- ¿Qué tipo de proceso es $\{Y_t\}$?
- ¿Cuál es el valor $\tau_k = \text{cov}(Y_t, Y_{t+k})$ en función de la función de autocovarianza γ del proceso X_t ?
- ¿Cuál es el valor $\rho_k^* = \text{corr}(Y_t, Y_{t+k})$ en función de la función de autocorrelación ρ del proceso X_t ?
- ¿Es Y_t un proceso invertible?

Solución. a)

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = \theta A_{t-1} + A_t - (\theta A_{t-2} + A_{t-1}) = A_t + (\theta - 1)A_{t-1} - \theta A_{t-2}$$

Por lo tanto, $\{Y_t\}$ es un proceso de medias móviles de orden 2 (MA(2)).

b)

$$\begin{aligned} \tau_k &= \text{cov}(Y_t, Y_{t-k}) = E[Y_t Y_{t-k}] \\ &= E[(X_t - X_{t-1})(X_{t-k} - X_{t-k-1})] \\ &= E[X_t X_{t-k}] - E[X_t X_{t-k-1}] - E[X_{t-1} X_{t-k}] + E[X_{t-1} X_{t-k-1}] \\ &= \gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1} + \gamma_k \\ &= 2\gamma_k - \gamma_{k+1} - \gamma_{k-1} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 2\gamma_0 - \gamma_{-1} - \gamma_1 = 2(\gamma_0 - \gamma_1) \\ \rho_k^* &= \frac{2\gamma_k - \gamma_{k-1} - \gamma_{k+1}}{2(\gamma_0 - \gamma_1)} = \frac{2\rho_k - \rho_{k-1} - \rho_{k+1}}{2(\rho_0 - \rho_1)} \end{aligned}$$

d) Otra forma de expresar a $\{Y_t\}$ es $Y_t = (1 + (\theta - 1)B - \theta B^2)A_t = \theta(B)A_t$.

Como

$$\theta(B) = (1 + (\theta - 1)B - \theta B^2) = 0$$

tiene como raíces a $b_1 = -1$ y $b_2 = 1/\theta$ pero $|b_1| \not\geq 1$ entonces $\{Y_t\}$ no es invertible.

Ejercicio 2.5.5. Sea $\{A_t\}$ un proceso de ruido blanco con media cero y varianza σ_A^2 y considere las siguientes ecuaciones en diferencias

- a) $X_t - 1/2X_{t-1} = A_t - 1/3A_{t-1}$.
 b) $X_t - 1/3X_{t-1} = A_t - 0,7A_{t-1} + 0,1A_{t-2}$.

Para cada una de estas ecuaciones considere el proceso $\{X_t\}$ que es su solución.

- i. Halle en cada caso la función de autocovarianza del proceso $\{X_t\}$.
 ii. Halle en cada caso la función de autocorrelación del proceso $\{X_t\}$.
 iii. Calcule a función de autocorrelación parcial π_k para $k = 1, 2$.

Solución. a) i.

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_A^2 \frac{1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}, & \text{si } k = 0; \\ \sigma_A^2 \frac{(\phi_1+\theta_1)\phi_1^{k-1}(1+\phi_1\theta_1)}{1-\phi_1^2}, & \text{si } k \geq 1; \end{cases} = \begin{cases} 1,04 \cdot \sigma_A^2, & \text{si } k = 0; \\ \frac{0,185}{2^{k-1}} \sigma_A^2, & \text{si } k \geq 1; \end{cases}$$

ii.

$$\rho_k = \frac{5}{7 * 2^{k+1}}$$

iii.

$$\pi_1 = \rho_1 = 5/28 = 0,178$$

$$\pi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5/28 \\ 5/28 & 5/56 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5/28 \\ 5/28 & 1 \end{vmatrix}} = 45/759 \cong 0,059$$

- b) i. Como la raíz de la ecuación característica $x - 1/3 = 0$ es $x = 1/3$ entonces $\gamma_k = c(\frac{1}{3})^k$ donde c es tal que $\gamma_k - 1/3\gamma_{k-1} = \sigma_A^2 \sum_{j=k}^2 \theta_j \alpha_{j-k}$ y $\alpha_k = (1/3)^k$
 Entonces para $k = 0, 1$ tendremos el sistema de ecuaciones $\gamma_0 - 1/3\gamma_{-1} = \sigma_A^2 2,333$ y $\gamma_1 - 1/3\gamma_0 = -2\sigma_A^2$ de donde sale que $\gamma_1 = -1,375\sigma_A^2$ y $\gamma_0 = 1,875\sigma_A^2 = c$
 Por lo tanto,

$$\gamma_k = 1,875\sigma_A^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

ii. $\rho_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

iii.

$$\pi_1 = \rho_1 = 1/3.$$

$$\pi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

Ejercicio 2.5.6. En cada uno de los siguientes casos grafique los valores dados en la tabla y especifique los modelos de serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ a los que podría pertenecer los pares de funciones de autocorrelación teórica y de autocorrelación parcial teórica graficadas. Establezca la relación que define en forma general a X_t en el modelo identificado y, cuando sea posible, determine el signo de cada uno de los coeficientes involucrados.

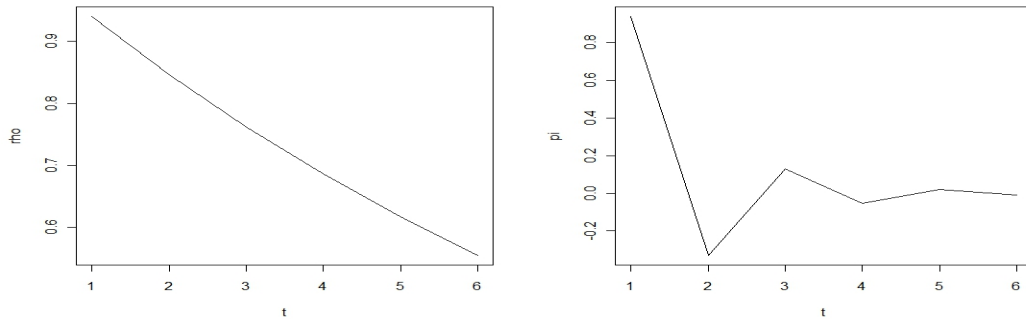
k	1	2	3	4	5	6
a) ρ_k	0.940	0.846	0.762	0.686	0.617	0.555
π_k	0.940	-0.329	0.129	-0.051	0.021	-0.008

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.699	0.280	0.112	0.045	0.018	0.007
π_k	0.699	-0.408	0.286	0.218	0.175	-0.145

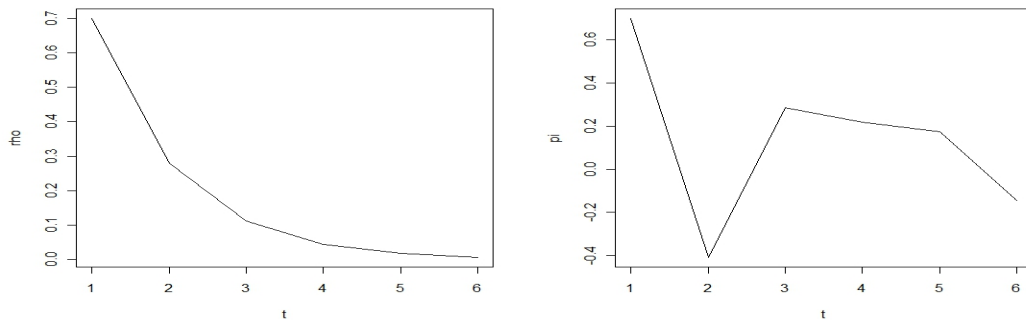
k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	-0.699	0.280	-0.112	0.045	-0.018	0.007
π_k	-0.699	-0.408	-0.286	-0.218	-0.175	-0.145

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	-0.940	0.846	-0.762	0.686	-0.617	0.555
π_k	-0.940	-0.329	-0.129	-0.051	-0.021	-0.008

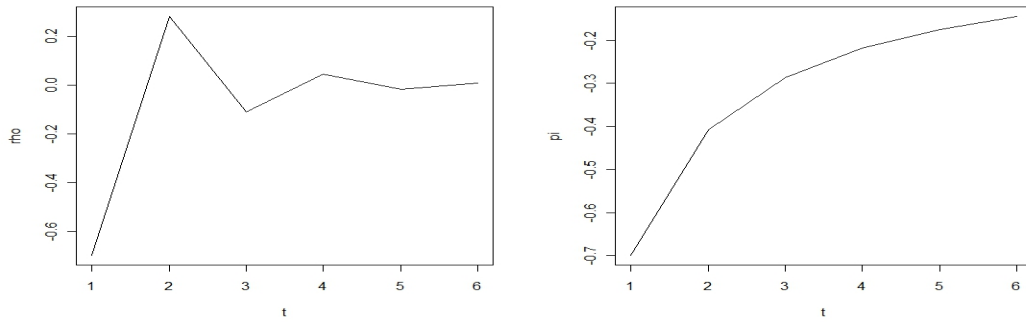
Solución. a) Los gráficos podrían corresponder a un proceso ARMA(1,1) de expresión $X_t = \phi_1 X_{t-1} + A_t + \theta A_{t-1}$ en donde $\phi_1 > 0$.



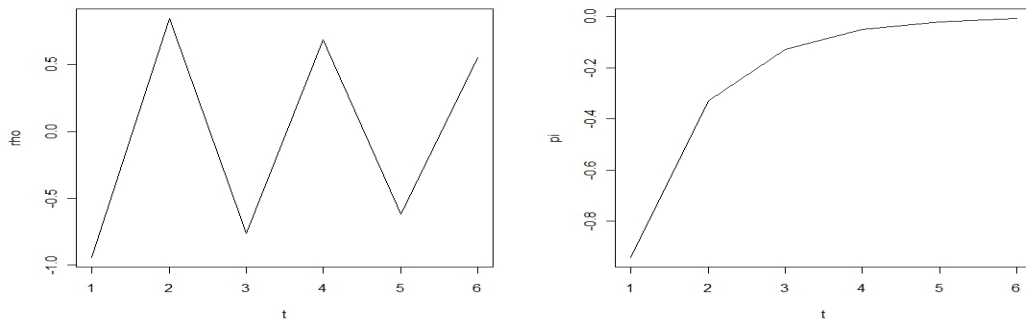
b) Los gráficos podrían corresponder a un proceso ARMA(1,1) de expresión $X_t = \phi_1 X_{t-1} + A_t + \theta A_{t-1}$ en donde $\phi_1 > 0$.



c) Los gráficos podrían corresponder a un proceso ARMA(1,1) de expresión $X_t = \phi_1 X_{t-1} + A_t + \theta A_{t-1}$ en donde $\phi_1 < 0$.



d) Los gráficos podrían corresponder a un proceso ARMA(1,1) de expresión $X_t = \phi_1 X_{t-1} + A_t + \theta A_{t-1}$ en donde $\phi_1 < 0$.



Ejercicio 2.5.7. Sea $\{X_t\}$ un proceso ARMA(1,1) de ecuación

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = A_t + \theta_1 A_{t-1}$$

donde $\{X_t\}$ es un proceso de ruido blanco.

a) Defina el proceso $\{B_t\}$ mediante la igualdad

$$B_t = A_t + \theta_1 A_{t-1} \tag{2.5.1}$$

exprese (2.5.1) como

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = B_t. \tag{2.5.2}$$

Suponiendo que $|\phi_1| < 1$ y usando argumentos similares a los empleados en el caso AR(1), demuestre que $\{X_t\}$ puede expresarse como

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B_{t-j} \tag{2.5.3}$$

b) Usando (2.5.1) y (2.5.3) compruebe que X_t puede expresarse como

$$X_t = A_t + (\phi_1 + \theta_1) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{j-1} A_{t-j}.$$

c) Suponiendo que $|\theta_1| < 1$ y usando (2.5.1) muestre que A_t puede expresarse como

$$A_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta_1)^j B_{t-j} \tag{2.5.4}$$

d) Suponiendo que $|\theta_1| < 1$ y usando (2.5.2) y (2.5.4) muestre que A_t puede expresarse como

$$A_t = X_t - (\phi_1 + \theta_1) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta_1)^{j-1} X_{t-j}.$$

e) Considerese ahora el proceso $AR(1)$ estacionario (causal) $\{Z_t\}$ solución de la ecuación

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + A_t.$$

Demuestre (usando (2.5.1) y (2.5.3)) que X_t puede expresarse como

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} \quad (2.5.5)$$

f) Usando (2.5.5) calcule la función de autocovarianza τ del proceso $\{X_t\}$ en términos de la función de autocovarianza del proceso $\{Z_t\}$.

g) Usando el resultado de la parte (f) calcule la función de autocovarianza γ y de autocorrelación ρ del proceso $\{X_t\}$.

Solución. a)

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + B_t = \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + B_{t-1}) + B_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 B_{t-1} + B_t = \dots \\ &= \phi_1^j X_{t-j} + \sum_{i=0}^{j-1} \phi_1^i B_{t-i} \end{aligned}$$

entonces

$$X_t - \sum_{i=0}^{j-1} \phi_1^i B_{t-i} = \phi_1^j X_{t-j}$$

y

$$E[X_t - \sum_{i=0}^{j-1} \phi_1^i B_{t-i}] = \phi_1^j E[X_{t-j}] = \phi_1^j E[X_t] \rightarrow 0 \text{ si } j \rightarrow \infty$$

pues $|\phi_1| < 1$. Por lo tanto,

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i B_{t-i}.$$

b)

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i B_{t-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i (A_{t-i} + \theta_1 A_{t-i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^{i-1} \theta_1 A_{t-i} \\ &= A_t + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^{i-1} (\theta_1 + \phi_1) A_{t-i} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A_t &= B_t - \theta_1 A_{t-1} = B_t - \theta_1(B_{t-1} - \theta_1 A_{t-2}) = \dots \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} (-\theta_1)^i A_{t-i} + (-\theta_1)^j A_{t-j} \end{aligned}$$

Luego,

$$E[A_t - \sum_{i=0}^{j-1} (-\theta_1)^i A_{t-i}] = (-\theta_1)^j E[A_{t-j}] = (-\theta_1)^j E[X_t] \rightarrow 0 \text{ si } j \rightarrow \infty$$

pues $|\theta_1| < 1$. Por lo tanto,

$$A_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta_1)^j B_{t-j}.$$

d)

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta_1)^j B_{t-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta_1)^j (X_{t-i} - \phi_1 X_{t-i-1}) \\ &= X_t + \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta_1)^{j-1} (-\theta_1 - \phi_1) X_{t-j} \\ &= X_t - (\phi_1 + \theta_1) \sum_{j=1}^{\infty} (-\theta_1)^{j-1} X_{t-j} \end{aligned}$$

e) Como Z_t es solución de $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + A_t$ entonces $Z_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i}$. Y además,

$$\begin{aligned} Z_t + \theta_1 Z_{t-1} &= A_t + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^i A_{t-i} + \theta_1 \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^{i-1} A_{t-i} \\ &= A_t + (\phi_1 + \theta_1) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_1^{i-1} A_{t-i} \\ &= X_t \end{aligned}$$

f) Como $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + A_t$ es un AR(1), entonces la autocorrelación es $\tau_k = \sigma_A^2 \frac{\phi_1^k}{1 - \phi_1^2}$ si $|\phi_1| < 1$.

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E[(Z_t + \theta_1 Z_{t-1})(Z_{t-k} + \theta_1 Z_{t-k-1})] \\ &= E[Z_t Z_{t-k}] + \theta_1 (E[Z_t Z_{t-k-1}] + E[Z_{t-1} Z_{t-k}]) + \theta_1^2 E[Z_{t-1} Z_{t-k-1}] \\ &= \tau_k + \theta_1 (\tau_{k+1} + \tau_{k-1}) + \theta_1^2 \tau_k \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \sigma_A^2 \frac{\phi_1^k}{1 - \phi_1^2} + \theta_1 (\sigma_A^2 \frac{\phi_1^{k+1}}{1 - \phi_1^2} + \sigma_A^2 \frac{\phi_1^{k-1}}{1 - \phi_1^2}) + \theta_1^2 \sigma_A^2 \frac{\phi_1^k}{1 - \phi_1^2} \\ &= \sigma_A^2 \frac{\phi_1^{k-1}}{1 - \phi_1^2} (\phi_1 + \theta_1 (\phi_1^2 + 1) + \theta_1^2 \phi_1) \end{aligned}$$

Y

$$\rho_k = \phi_1^k$$

Este ejercicio nos muestra una forma simple de calcular la función de autocovarianza de un proceso ARMA(1,1) a partir de conocer la expresión de la función de autocovarianza de un proceso AR(1).

Ejercicio 2.5.8. Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario con función de autocovarianza γ . Defina la función G mediante la igualdad

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k \quad (2.5.6)$$

suponiendo que la serie converge para todo z en un anillo de la forma $\{z : 1/r < |z| < r\}$ para algún $r > 1$. La función G definida por (2.5.6) se la llama función generadora de autocovarianzas.

- a) ¿Cuál es la función generadora de autocovarianzas correspondiente a un proceso de ruido blanco?
b) Sea $\{X_t\}$ el proceso de ecuación

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j A_{t-j} \quad (2.5.7)$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco. Suponiendo que existe $r > 1$ donde

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j| x^j$$

converge para todo $x \in \{z : 1/r < |z| < r\}$, demuestre que la función G puede expresarse como

$$G(z) = \sigma_A^2 \alpha(z) \alpha(z^{-1}) \quad (2.5.8)$$

donde

$$\alpha(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k x^k. \quad (2.5.9)$$

- c) Considere ahora el caso en que $\{X_t\}$ es un proceso ARMA(p, q) de ecuación

$$\Phi(B)X_t = \theta(B)A_t \quad (2.5.10)$$

donde $\Phi(z)$ es distinto de 0 para $|z| = 1$. Expresando apropiadamente (2.5.10) y usando (2.5.7), (2.5.8) y (2.5.9), probar que la función generadora de autocovarianzas de este proceso esta dada por

$$G(z) = \sigma_A^2 \frac{\theta(z)\theta(z^{-1})}{\Phi(z)\Phi(z^{-1})} \text{ para } 1/r < |z| < r. \quad (2.5.11)$$

- d) Use (2.5.6) y (2.5.11) para hallar la expresión de la función de autocovarianza de un proceso MA(2).

Solución. a) Como

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_A^2, & \text{si } k = 0; \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

entonces

$$G(z) = \gamma_0 z^0 = \sigma_A^2$$

b)

$$\begin{aligned}
\sigma_A^2 \alpha(z) \alpha(z^{-1}) &= \sigma_A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^k \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i z^{-i} \\
&= \sigma_A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+i} z^i \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_i z^i \\
&= G(z)
\end{aligned}$$

c) Si las raíces de $\Phi(B)$ son de módulo mayor que 1, entonces $X_t = \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} A_t = \alpha(B)$. Luego,

$$G(z) = \sigma_A^2 \alpha(z) \alpha(z^{-1}) = \sigma_A^2 \frac{\theta(z) \theta(z^{-1})}{\Phi(z) \Phi(z^{-1})}$$

d)

$$\begin{aligned}
G(z) &= \sigma_A^2 \theta(z) \theta(z^{-1}) \\
&= \sigma_A^2 (1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2)(1 + \theta_1 z^{-1} + \theta_2 z^{-2}) \\
&= \sigma_A^2 [(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) + \theta_2 z^{-2} + (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) z^{-1} + (\theta_1 + \theta_1 \theta_2) z + \theta_2 z^2] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k
\end{aligned}$$

Entonces, igualando los coeficientes de cada potencia se obtiene que:

1. si $|k| > 2$, $\gamma_k = 0$
2. $\gamma_{-2} = \theta_2$
3. $\gamma_{-1} = \theta_1 + \theta_1 \theta_2$
4. $\gamma_0 = 1 + \theta_1^2 + \theta_2^2$
5. $\gamma_1 = \theta_1 + \theta_1 \theta_2$
6. $\gamma_2 = \theta_2$

Capítulo 3

Modelos para series de tiempo no estacionarias

No todas las series de tiempo pueden ser modeladas mediante procesos ARMA, sin embargo, en la práctica la mayoría de las series reales no estacionarias pueden ser transformadas en series que responden al patrón de algún proceso ARMA(p,q). En este capítulo abordaremos el estudio de métodos que producen transformaciones sobre una serie de tiempo para convertirla en otra susceptible de ser modelada mediante un proceso ARMA.

3.1. Enfoque clásico

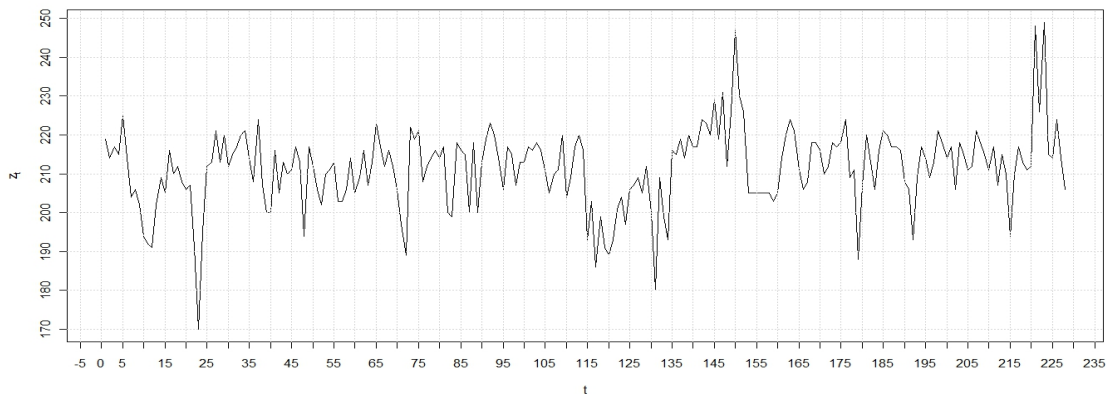
Una serie de tiempo $\{Z_t\}$ puede ser expresada como

$$Z_t = m_t + s_t + X_t \quad (3.1.1)$$

donde

- * m_t es una función determinística de variación suave conocida como la tendencia.
- * s_t es una función determinística con período conocido denominada estacionalidad. Se la entiende como una pauta regular de comportamiento periódico de la serie.
- * X_t es la componente aleatoria denominada ruido aleatorio o componente estacionaria.

Ejemplo 3.1.1. *Un ejemplo de una serie de tiempo real es el índice diferencial normalizado de vegetación (también llamado NDVI) de la Región Amazónica cuyo gráfico se observa abajo:*



A continuación se mostrarán algunos métodos llamados “clásicos” para estimar y luego extraer las componentes determinísticas m_t y s_t esperando que la componente aleatoria residual X_t pueda ser modelada por un proceso ARMA (ver Leiva [1]).

3.1.1. Estimación de m_t por el método de cuadrados mínimos

Asumamos que en la ecuación (3.1.1) la componente de estacionalidad s_t no está presente; entonces (3.1.1) queda:

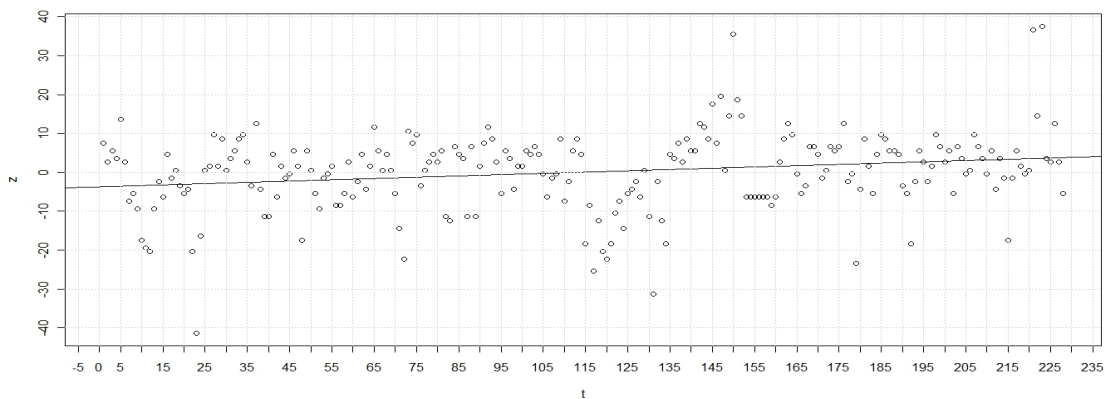
$$Z_t = m_t + X_t \quad \text{con} \quad E[X_t] = 0.$$

Se trata primero de estimar la tendencia suponiendo que m_t es un polinomio en t con grado fijo de la forma $m_t = a_0 + a_1t + \dots + a_k t^k$. Luego se aplica el método de mínimos cuadrados para aproximar a_0, \dots, a_k , o sea, elegirlos tal que minimizen $\sum_{t=1}^n (Z_t - m_t)^2$.

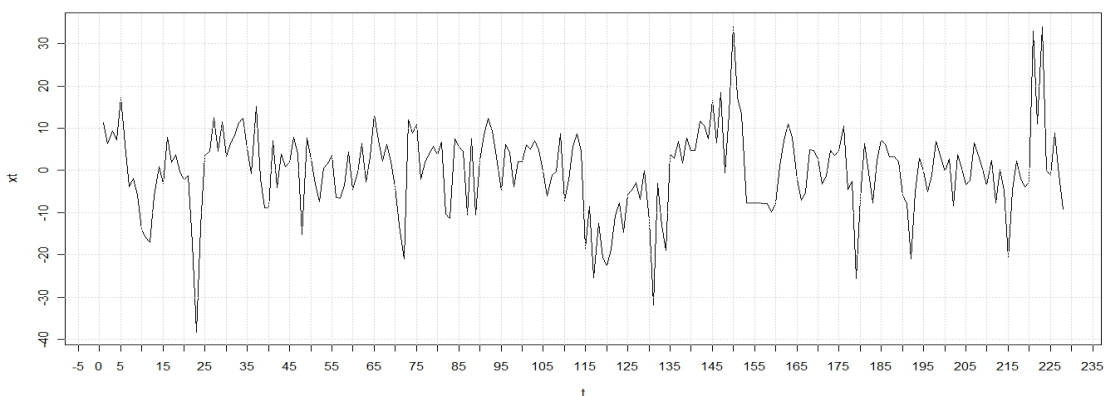
Se tendrá entonces $\hat{m}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \dots + \hat{a}_k t^k$ donde $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$ son las estimaciones obtenidas por el método de mínimos cuadrados (ver Leiva [1]).

Por último, a los valores residuales $\hat{x}_t = z_t - \hat{m}_t$ se los estima apropiadamente y con dicha estimación se puede mejorar la de m_t .

Ejemplo 3.1.2. Se aplicó a la serie del ejemplo 3.1.1 el método de mínimos cuadrados suponiendo que m_t es un polinomio de grado 1 de la forma $m_t = a_0 + a_1 t$. De ésta estimación de la tendencia resultó que $a_0 = -3,809$ y $a_1 = 0,033$ y su gráfico se muestra a continuación:



Luego se estimó el residuo resultando una serie como se observa en el siguiente gráfico:



3.1.2. Estimación de la tendencia mediante suavizamiento por promedios

En este caso también se supone que la componente de estacionalidad s_t en el ejemplo 3.1.1 no está presente y que m_t es aproximadamente lineal en intervalos de tiempo de longitud $L = 2h + 1$ con h real y fijo.

Una estimación de m_t es

$$\hat{m}_t = P_t = \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h Z_{t+i} \text{ para } t \in [h+1, n-h]$$

ya que

$$P_t = \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h (m_{t+i} + X_{t+i}) = \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h m_{t+i} + \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h X_{t+i} \cong m_t + 0 = m_t$$

pues como $m_t \cong At + b$ y $E[X_t] = 0$, entonces

$$\frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h m_{t+i} \cong \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h A(t+i) + b = (At + b) + \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h i \cong m_t.$$

Para los valores extremos de m_t se pueden usar los promedios ponderados unilaterales con $\alpha \in (0, 1)$:

$$\hat{m}_t = \sum_{j=0}^{n-t} \alpha(1-\alpha)^j Z_{t+j} \text{ si } t = 1, \dots, h \text{ y } \hat{m}_t = \sum_{j=0}^{t-1} \alpha(1-\alpha)^j Z_{t-j} \text{ si } t = n-h+1, \dots, n$$

Esta ponderación se realiza asumiendo que los valores extremos de la serie tendrán una menor influencia en su comportamiento. Estas últimas estimaciones no son altamente sensibles a los valores de α . Empíricamente se ha encontrado que con $\alpha \in (0, 1; 0, 3)$ las estimaciones son razonables [2].

3.1.3. Estimación de la tendencia y la estacionalidad cuando la tendencia es constante durante cada período de la componente estacional

Consideremos que Z_t se puede descomponer como $Z_t = m_t + s_t + X_t$ (notar que ahora están presente tanto la tendencia como la componente estacional) donde $E[X_t] = 0$ y $s_t = s_{t+d} \forall t \in \mathbb{Z}$ con $\sum_{j=1}^d s_j = 0$; siendo d un número natural fijo que responde al tiempo en que la serie vuelve a repetir su comportamiento, o sea, el período de la serie. La condición $\sum_{j=1}^d s_j = 0$ no es restrictiva pues si $\sum_{j=1}^d s_j = s \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d s_j &= s + \sum_{j=1}^d (s_j - s) \\ &= s + \sum_{j=1}^d \left(s_j - \frac{s}{d}\right) \\ &= s + \sum_{j=1}^d s_j^* \end{aligned}$$

con $s_j^* = s_j - \frac{s}{d}$. Luego, $Z_t = m_t + \frac{s}{d} + s_t^* + X_t = m_t^* + s_t^* + X_t$ con $\sum_{j=1}^d s_j^* = 0$.

Para eliminar la tendencia y la estacionalidad simultáneamente, supondremos que los cambios en la tendencia son pequeños durante cada uno de los períodos de longitud d de la estacionalidad.

Suponiendo que en el k -ésimo período de longitud d se verifica que $\sum_{j=1}^d s_{j+(k-1)d} = 0$ y que además $m_{(k-1)d+1} \cong m_{(k-1)d+2} \cong \dots \cong m_{(k-1)d+d-1} \cong \bar{m}_k$ (debido a que la tendencia es muy pequeña en cada uno de los períodos), entonces un estimador de m_t con $t \in [(k-1)d+1, kd]$ es $\hat{m}_t = P_k$ pues

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d Z_{(k-1)d+j} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d m_{(k-1)d+j} + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d s_{(k-1)d+j} + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d x_{(k-1)d+j} \\ &\cong \bar{m}_k + 0 + 0 \\ &= \bar{m}_k \end{aligned}$$

donde r es el número de períodos de longitud d .

Ahora, una buena estimación para s_j es

$$\hat{s}_j = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (Z_{kd+j} - \hat{m}_{kd+j}) \text{ para } j = 1, \dots, d$$

pues

$$\begin{aligned} \hat{s}_j &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (Z_{kd+j} - \hat{m}_{kd+j}) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (Z_{kd+j} - P_{k+1}) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (m_{kd+j} + s_{kd+j} + X_{kd+j} - \bar{m}_{k+1}) \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (m_{kd+j} - \bar{m}_{k+1}) + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} X_{kd+j} + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} s_{kd+j} \\ &\cong 0 + 0 + \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} s_{kd+j} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} s_j \\ &= s_j \end{aligned}$$

ya que $m_{kd+j} \cong \bar{m}_{k+1}$, $E[X_t] = 0$ y $s_j = s_{j+d} = \dots = s_{j+(r-1)d}$. O sea, la estimación de s_t está dada por

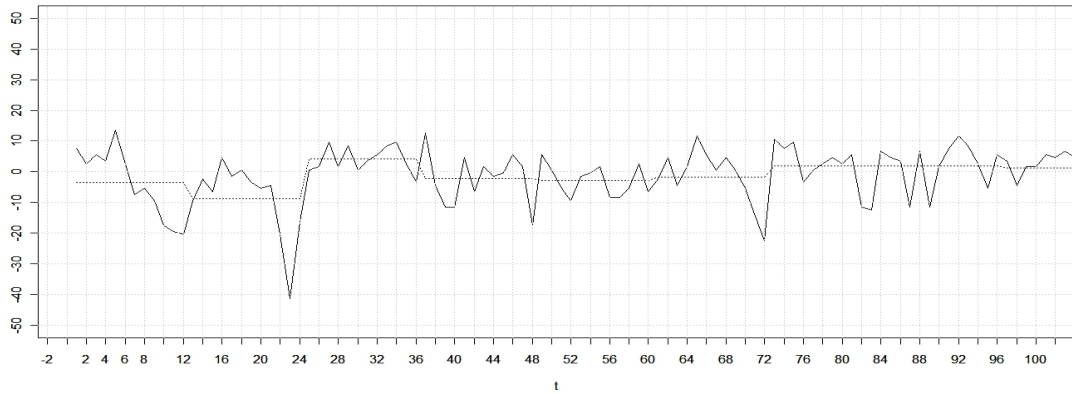
$$\hat{s}_t = \hat{s}_j \text{ para } t = kd + j \quad \forall k = 0, 1, \dots, r-1.$$

Finalmente, la estimación de la componente estacionaria viene dada por:

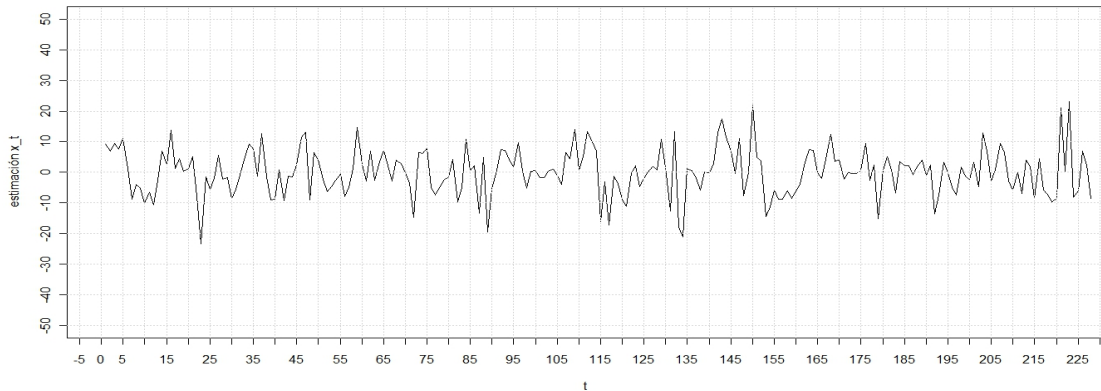
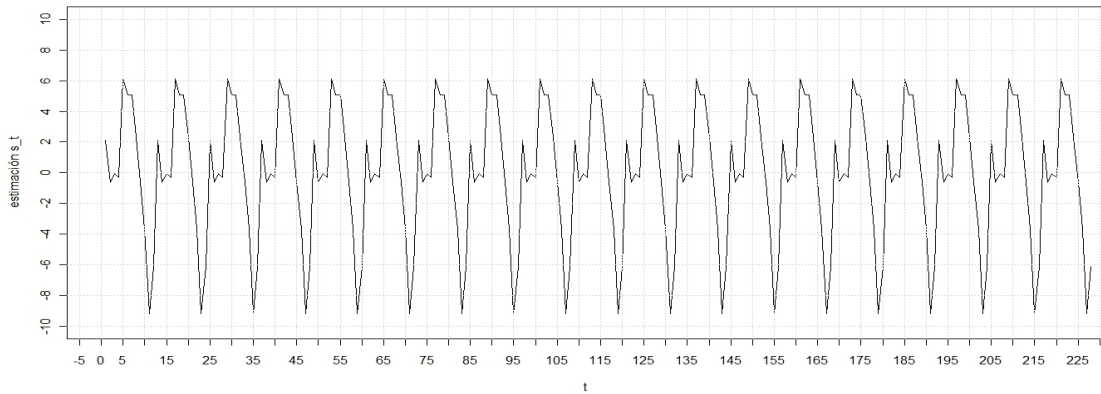
$$\hat{X}_t = Z_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t = Z_t - P_k - \hat{s}_j \text{ si } t = kd + j,$$

para $k = 0, \dots, r-1$ y $j = 1, \dots, d$.

Ejemplo 3.1.3. Se aplicó a los primeros 100 valores de la serie del ejemplo 3.1.1 el método estudiado en esta sección. Suponiendo que el período es $d = 12$, el gráfico de la serie junto con la tendencia resulta ser:



Luego se estimaron la componente estacional junto con el residuo lo que resultó en:



3.1.4. Estimación de la tendencia y la estacionalidad: Caso General

Este método es más general que el anterior ya que no se supone que la tendencia sea aproximadamente constante en cada período.

Primero se hace una estimación inicial de la tendencia mediante un suavizamiento con un promedio, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

Si $d = 2h + 1$ entonces

$$P_t = \frac{1}{2h + 1} \sum_{i=-h}^h Z_{t+i} \text{ para } h + 1 \leq t \leq n - h$$

y si $d = 2h$ entonces

$$P_t = \frac{1}{2h} \left[\frac{1}{2} Z_{t-h} + \left(\sum_{i=-h+1}^{h-1} Z_{t+i} \right) + \frac{1}{2} Z_{t+h} \right] \text{ para } h+1 \leq t \leq n-h$$

La influencia de las componentes estacionales en cada promedio es igual a cero pues la longitud de los intervalos de tiempo donde se analizan los promedios es igual a la longitud del período de la componente estacional; mientras que por ser $E[X_t] = 0$, el promedio de las componentes estacionarias es aproximadamente igual a cero. Luego, P_t es una buena estimación de m_t para $t = h+1, \dots, n-h$. Partiendo de esta estimación inicial de m_t , se consideran las desviaciones $\delta_t = z_t - P_t$ para $h+1 \leq t \leq n-h$ y se calculan promedios de estas desviaciones $q_j : j = 1, \dots, d$. Así para el caso en que $n = rd$, si $d = 2h+1$,

$$q_j = \begin{cases} \frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} \delta_{j+kd}, & \text{si } j = 1, \dots, h; \\ \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \delta_{j+kd}, & \text{si } j = h+1; \\ \frac{1}{r-1} \sum_{k=0}^{r-2} \delta_{j+kd}, & \text{si } j = h+2, \dots, d \end{cases}$$

y si $d = 2h$,

$$q_j = \begin{cases} \frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^{r-1} \delta_{j+kd}, & \text{si } j = 1, \dots, h; \\ \frac{1}{r-1} \sum_{k=0}^{r-2} \delta_{j+kd}, & \text{si } j = h+1, \dots, d \end{cases}$$

Notemos que en cada promedio sólo están involucradas las desviaciones referidas a una misma componente estacional. Las componentes estacionales s_j se estiman mediante

$$\hat{s}_j = q_j - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d q_i.$$

Se reestima la tendencia mediante un suavizado con promedios de los datos desestacionalizados z_t o por ajuste mediante cuadrados mínimos. Finalmente, se calculan las estimaciones de la componente estacionaria X_t mediante $\hat{X}_t = Z_t - \hat{m}_t - \hat{s}_t$.

3.2. Modelos ARIMA y SARIMA

El método que se verá en esta sección se basa en la utilización de diferencias de los datos originales para la eliminación de la tendencia y la estacionalidad y poder luego modelar la componente estacionaria resultante.

Definición 3.2.1. Sea $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ una serie de tiempo, se define el operador diferencia Δ por $\Delta Z_t = (1 - B)Z_t = Z_t - Z_{t-1}$

Se puede notar que si aplicamos este operador k veces a un polinomio de grado k se obtiene una constante (ver ejercicio 3.4.6).

Definición 3.2.2. Sea $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ una serie de tiempo y sea $d \in \mathbb{N}$, se define el operador diferencia de tamaño d , Δ_d por $\Delta_d Z_t = (1 - B^d)Z_t = Z_t - Z_{t-d}$

Se puede verificar que si se aplica este operador a un proceso $Z_t = m_t + s_t + X_t$ donde s_t es la componente estacional de período d se tendrá $\Delta_d Z_t = m_t^* + X_t^*$ donde $m_t^* = m_t - m_{t-d}$ y $X_t^* = X_t - X_{t-d}$.

3.2.1. Modelos ARIMA

Los procesos ARIMA generalizan a los procesos ARMA. Estos procesos ARIMA sirven para modelar series de tiempo que luego de diferenciarlas un número finito de veces, se reducen a un proceso ARMA.

Definición 3.2.3. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se dice que $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso Autorregresivo Integrado de Promedios Móviles de órdenes p, k, q y se lo indica por $ARIMA(p, k, q)$, si la serie de tiempo $\{X_t\}$ que se obtiene de diferenciar k veces a $\{Z_t\}$, es decir $X_t = \Delta^k Z_t$, es un proceso $ARMA(p, q)$. Equivalentemente, se puede decir que $\{Z_t\}$ es un proceso $ARIMA(p, k, q)$ si satisface la ecuación en diferencias

$$\Phi(B)(1 - B)^k Z_t = \theta(B)A_t$$

con $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ y $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco y donde se supone que los polinomios $\Phi(x)$ y $\theta(x)$ no tiene raíces comunes y que $\Phi(x) \neq 0$ si $x = 1$.

En especial, es interesante que la serie $\{X_t\}$ que resulta de la definición 3.2.3 defina un proceso estacionario e invertible, por lo que se requerirá que las raíces de $\Phi(x)$ y $\theta(x)$ sean todas de módulo mayor que 1.

Notemos que el proceso $ARIMA(p, k, q)$ se reduce a un:

- a) Proceso $ARMA(p, q)$ cuando $k = 0$
- b) Proceso $MA(q)$ cuando $p = 0 = k$
- c) Proceso $AR(p)$ cuando $q = 0 = k$
- d) Proceso $ARI(p, k)$ cuando $q = 0$
- e) Proceso $IMA(k, q)$ cuando $p = 0$

Estos procesos ARIMA se caracterizan por tener una función de autocorrelación teórica con decaimiento positivo muy lento. Sin embargo, esta condición es suficiente pero no necesaria ya que por ejemplo los procesos ARMA con una raíz del polinomio de su parte autorregresiva cercana a 1 también presentan un comportamiento similar.

Un problema que tienen estos procesos $ARIMA(p, k, q)$ es que modelan solamente la no estacionariedad que tienen una raíz igual a 1 en su parte autorregresiva, es decir, $\psi(B)Z_t = \theta(B)A_t$ donde $\psi(B) = \phi(B)(1 - B)^k$ con $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ tal que $\Phi(x) \neq 0$ si $-1 < x \leq 1$.

3.2.2. Procesos SARIMA (ARIMA estacionales)

En los modelos ARIMA se incorporaba en la descomposición clásica (3.1.1) la función periódica s_t con el fin de modelar la presencia de estaciones en una serie de tiempo. Esta componente estacional es rígida en el sentido que su contribución se repite en cada uno de los ciclos. Los modelos SARIMA permiten cierta aleatoriedad en el comportamiento estacional de un ciclo al siguiente, lo que parece más razonable en la práctica.

Definición 3.2.4. Si $k, h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se dice que $\{Z_t : t \in \mathbb{Z}\}$ es un proceso $ARIMA$ Estacional de período d y órdenes (p, k, q) y $(r, h, s)_d$ y se lo denota por $SARIMA(p, k, q), (r, h, s)_d$ si la serie diferenciada $X_t = \Delta^k \Delta_d^h Z_t = (1 - B)^k (1 - B^d)^h Z_t$, satisface la ecuación

$$\Phi(B)\psi(B^d)X_t = \theta(B)\eta(B^d)A_t$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco y donde $\Phi(x) = 1 - \phi_1 x - \dots - \phi_p x^p$, $\psi(x) = 1 - \psi_1 x - \dots - \psi_r x^r$, $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \dots + \theta_q x^q$ y $\eta(x) = 1 + \eta_1 x + \dots + \eta_s x^s$.

Para identificar estos procesos primero se determinarán los valores k y h tal que los datos diferenciados $X_t = (1 - B)^k(1 - B^d)^h Z_t$ sean aparentemente estacionarios. Después, se seleccionarán r y s tales que los valores de autocorrelación $\hat{\rho}_{id}$ con $i \in \mathbb{N}$ de la serie $\{X_t\}$ pueda ser modelado por un proceso ARMA(r,s). Por último, se elegirán p y q tal que los valores $\hat{\rho}_j$ con $i = 1, \dots, d - (q + 1)$ sean compatibles con las de un proceso ARMA(p,q).

3.3. Transformaciones

Con frecuencia se verifica que

$$\text{var}(Z_t) = f(\mu_t)$$

donde f es una función no negativa. A veces, este problema se puede resolver aplicando una transformación T a la serie $\{Z_t\}$ para obtener una serie $\{Y_t\}$ donde $Y_t = T(Z_t)$ que va a tener varianza constante a lo largo del tiempo.

Una forma de encontrar T es usar el desarrollo de Taylor de orden 1 alrededor de μ_t como sigue:

$$T(Z_t) \cong T(\mu_t) + T'(\mu_t)(Z_t - \mu_t).$$

Como supongo que $T(\mu_t)$ es no aleatoria, resulta que

$$\text{var}(T(Z_t)) \cong T'(\mu_t)^2 f(\mu_t).$$

Y como quiero $\text{var}(T(\mu_t)) = k$ constante entonces

$$T'(\mu_t) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{f(\mu_t)}}$$

o sea,

$$T(\mu_t) = \int \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{f(\mu_t)}} d\mu_t \tag{3.3.1}$$

Box y Cox en 1964 introdujeron para estabilizar la varianza de una serie de tiempo $\{Z_t\}$ a la familia

$$T(Z_t) = \frac{Z_t^\lambda - 1}{\lambda}$$

donde λ es llamado el parámetro de la transformación. Notar que para $\lambda = 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{Z_t^\lambda - 1}{\lambda} = \log(Z_t)$$

Ejemplo 3.3.1. Si $\sqrt{\text{var}(Z_t)} = m\mu_t$, o sea, la desviación estándar de Z_t varía proporcionalmente al nivel μ_t , entonces $f(\mu_t) = m^2\mu_t^2$ y

$$T(\mu_t) = \int \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m^2\mu_t^2}} d\mu_t = \sqrt{k} \int \frac{1}{m\mu_t} d\mu_t = \frac{\sqrt{k}}{m} \log(\mu_t) \tag{3.3.2}$$

Por lo que la transformación que estabiliza la varianza en este caso es la transformación logarítmica.

3.4. Ejercicios del Capítulo III

Ejercicio 3.4.1. Considere el siguiente conjunto de datos que corresponden al consumo bimestral de gas natural de una familia durante el período de enero de 1983 a diciembre de 1991.

AÑO	BIMESTRES					
	1	2	3	4	5	6
1983	96	200	332	162	118	65
1984	90	223	333	232	86	68
1985	68	240	367	238	135	106
1986	111	223	460	321	128	124
1987	103	309	486	379	136	101
1988	133	341	595	342	132	77
1989	139	246	378	378	252	165
1990	114	135	258	394	272	167
1991	126	127	241	454	251	153

- Grafique los datos en función de t .
- Calcule y grafique las funciones muestrales de autocorrelación y autocorrelación parcial de estos datos.
- Suponga que los datos han sido generados por un proceso que responde a la forma

$$Z_t = m_t + s_t + X_t,$$

donde m_t es la tendencia, s_t es la estacionalidad con período d y donde $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con media 0. Basándose en las partes (a) y (b), determine el valor del período d .

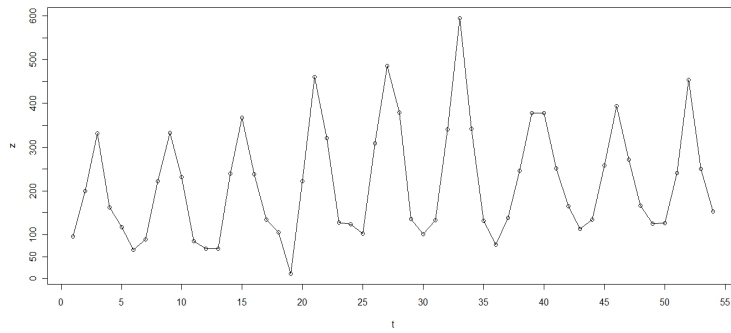
- Suponga que la tendencia es constante dentro cada período y calcule y grafique las estimaciones m_t , s_t y x_t para $t = 1, \dots, 54$.
- Utilice las estimaciones de s_t halladas en la parte (d) para calcular los datos desestacionalizados, es decir calcule $y_t = z_t - \hat{s}_t$ para $t = 1, \dots, 54$. Con estos valores, que responden aproximadamente a la forma

$$y_t = z_t - \hat{s}_t \cong m_t + X_t,$$

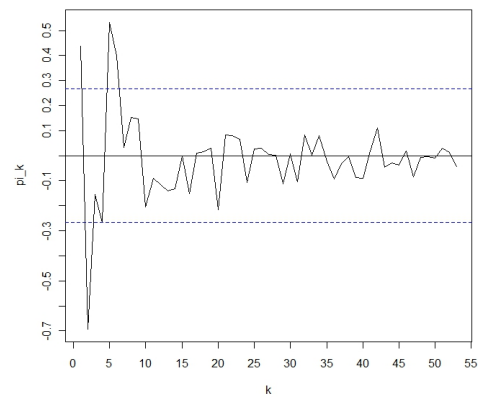
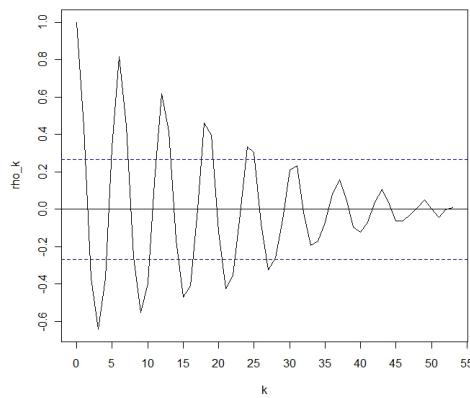
calcule otra estimación de la tendencia ajustándoles por mínimos cuadrados una recta de ecuación $r(t) = a_0 + a_1 t$. Dibuje en un mismo gráfico la recta obtenida, la estacionalidad estimada y los residuos $\hat{y}_t = z_t - \hat{s}_t - m_t$.

- Calcule y grafique las funciones muestrales de autocorrelación y autocorrelación parcial de los residuos obtenidos en la parte (e).
- Determine un modelo apropiado para X_t en base a lo observado en la parte (f) y estime sus coeficientes.

Solución. a) La serie de tiempo es

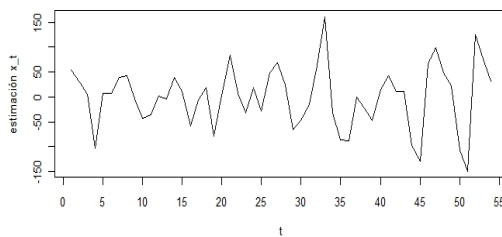
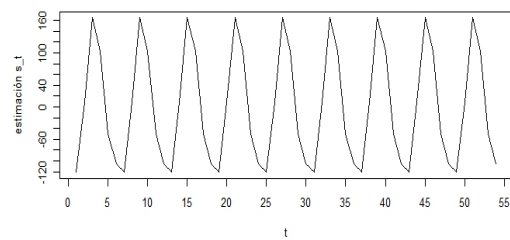
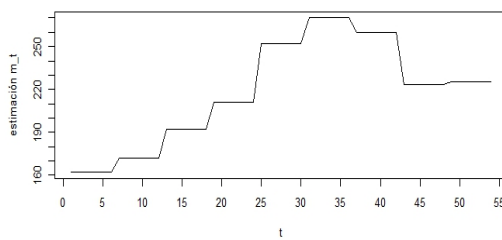


b) Las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial son respectivamente:

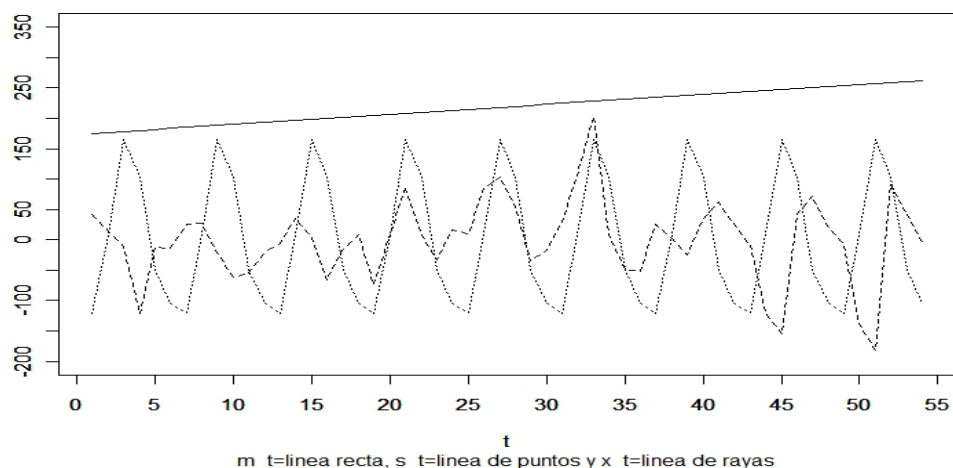


c) De acuerdo a los gráficos de las partes (a) y (b) se puede decir que el período es $d=6$.

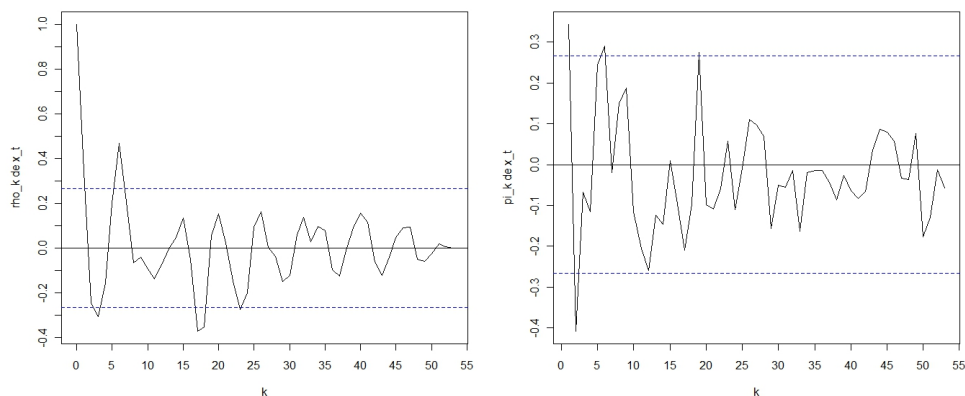
d) Las estimaciones de m_t , s_t y x_t son respectivamente:



e) Con la nueva estimación de $m_t = r(t) = 173,4 + 1,65t$, los gráficos de la tendencia, la estacionalidad y el residuo queda:



f) Las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial son respectivamente:



g) De acuerdo a lo observado en la parte (f) y atendiendo al criterio de parsimonia podemos decir que el residuo x_t puede ser modelado por un proceso AR(2) y usando la función de autocorrelación parcial teórica de estos procesos podemos estimar los coeficientes como $\phi_1 = 0,485$ y $\phi_2 = -0,409$.

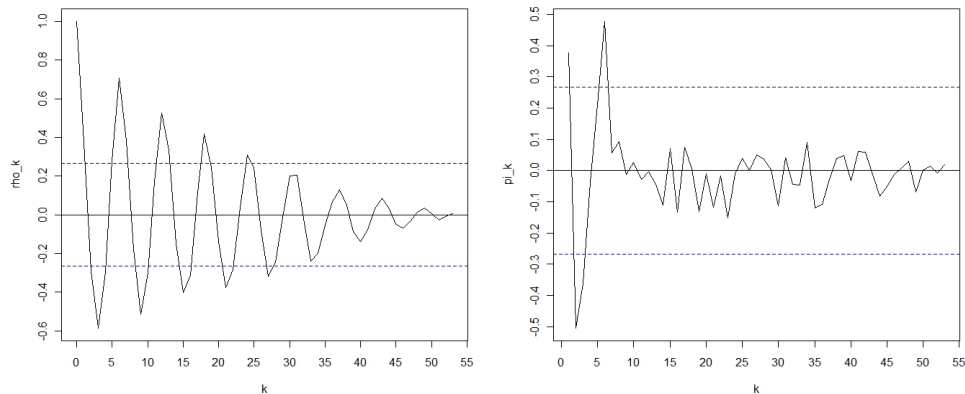
Ejercicio 3.4.2. Considere el conjunto de datos z_t con $t = 1, \dots, 54$ del ejercicio 3.4.1. que corresponden al consumo bimestral de gas natural de una familia durante el período de enero de 1983 a diciembre de 1991.

- Para corregir la no estacionariedad que se observa en la varianza use la transformación logarítmica. Es decir calcule $y_t = \log(z_t)$ para $t = 1, \dots, 54$.
- Calcule y grafique las funciones muestrales de autocorrelación y autocorrelación parcial.
- En base a lo observado en la parte (b), diferencie a los datos transformados con un retardo (lag) apropiado y luego résteles la media de los datos diferenciados.
- Grafique los datos finales obtenidos en la parte (c) y calcule y grafique las funciones muestrales de autocorrelación y autocorrelación parcial.
- Basándose en lo observado en la parte (d), determine posibles modelos para los datos graficados en (d) y sus correspondientes modelos para los datos originales.

Solución. a) Los siguientes son los valores de z_t del ejercicio anterior a los cuales le aplicamos logaritmo.

	BIMESTRES					
AÑO	1	2	3	4	5	6
1983	4.564	5.298	5.805	5.087	4.770	4.174
1984	4.499	5.407	5.808	5.446	4.454	4.219
1985	4.219	5.480	5.905	5.472	4.905	4.663
1986	2.397	5.407	6.131	5.771	4.852	4.820
1987	4.634	5.733	6.186	5.937	4.912	4.615
1988	4.890	5.831	6.388	5.834	4.882	4.343
1989	4.934	5.505	5.934	5.934	5.529	5.105
1990	4.736	4.905	5.552	5.976	5.605	5.117
1991	4.836	4.844	5.484	6.118	5.525	5.030

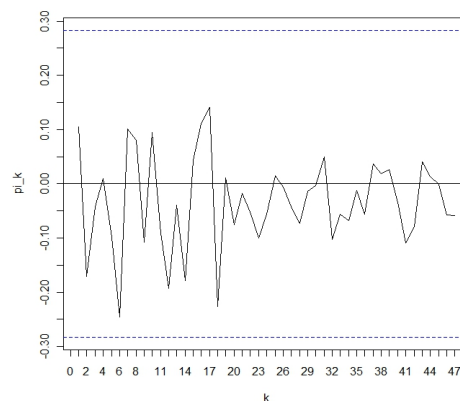
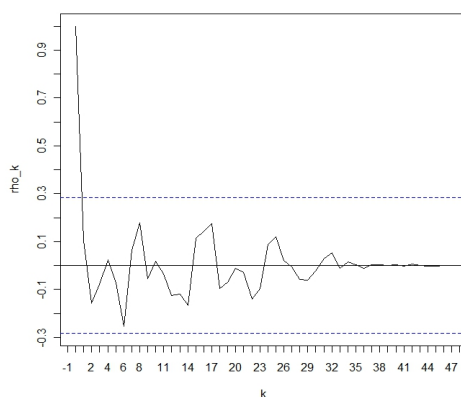
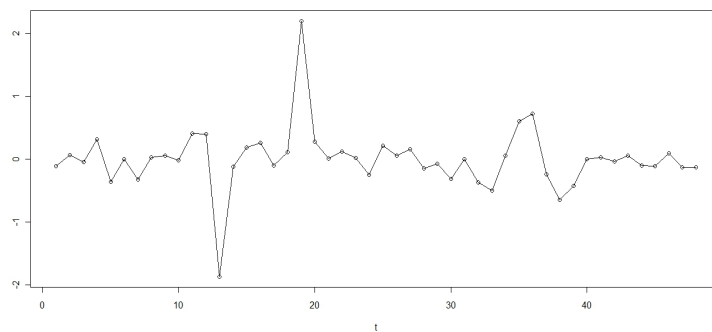
b) Las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial resultan ser:



c) Con un $lag = 6$ la media de los valores diferenciados resulta ser 0.044558. Por lo que los valores de los datos diferenciados menos su media son:

	BIMESTRES					
AÑO	1	2	3	4	5	6
1983						
1984	-0.109	0.064	-0.042	0.315	-0.361	0.001
1985	-0.325	0.029	0.053	-0.019	0.406	0.399
1986	-1.866	-0.118	0.181	0.255	-0.098	0.112
1987	2.192	0.282	0.011	0.126	0.0161	-0.250
1988	0.211	0.054	0.158	-0.147	-0.075	-0.316
1989	-0.001	-0.371	-0.499	0.056	0.602	0.718
1990	-0.243	-0.645	-0.426	-0.003	0.032	-0.033
1991	0.056	-0.106	-0.113	0.097	-0.125	-0.132

d) Los datos y sus funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial resultan ser ahora:



e) Como las autocorrelaciones de los datos diferenciados se comportan como ruido blanco, entonces el modelo correspondiente a los datos de consumo es $((1 - B^6)\log(Z_t) - 0,045) = A_t$ con $\{A_t\}$ ruido blanco.

Ejercicio 3.4.3. En cada uno de los siguientes casos los valores dados en la tabla son los primeros seis valores de las funciones teóricas de autocorrelación y autocorrelación parcial de la primera diferencia $X_t = Z_t - Z_{t-1}$ de un proceso $\{Z_t\}$. Especifique los modelos de serie de tiempo estacionaria $\{X_t\}$ a los que podrían pertenecer los pares de funciones teóricas de autocorrelación y autocorrelación parcial dadas y establezca luego la relación que define en forma general a $\{Z_t\}$ en el modelo que le corresponde de acuerdo al modelo especificado para X_t . Cuando sea posible determine el signo y/o valores de los coeficientes involucrados.

a)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0	0	0	0	0	0
π_k	0	0	0	0	0	0

b)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.213	-0.284	0	0	0	0
π_k	0.213	-0.3455	0.184	-0.187	0.141	-0.128

c)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.933	0.807	0.663	0.524	0.403	0.302
π_k	0.933	-0.500	0	0	0	0

d)

k	1	2	3	4	5	6
ρ_k	0.727	0.655	0.589	0.530	0.477	0.429
π_k	0.727	0.267	0.105	0.042	0.017	0.007

- Solución.** a) Dado que no hay correlación ni correlación parcial entre los datos, decidimos que $\{X_t\}$ es un proceso de ruido blanco. Por lo que $(1 - B)Z_t = A_t$.
- b) Dado que la correlación de $\{X_t\}$ se anula para $k > 2$ podemos decir que es un proceso MA(2) con $\theta_2 < 0$. Por lo que $(1 - B)Z_t = A_t + \theta_1 A_{t-1} + \theta_2 A_{t-2}$.
- c) Dado que la correlación parcial de $\{X_t\}$ se anula para $k > 2$ podemos decir que es un proceso AR(2) con $\phi_2 = -0,5 < 0$ y $\phi_1 = 1,4 > 0$ Por lo que $(1 - B)Z_t = A_t + \phi_1(1 - B)Z_{t-1} + \phi_2(1 - B)Z_{t-2}$, o sea $(1 - (1 + \phi_1)B + (\phi_1 - \phi_2)B^2 + \phi_2 B^3)Z_t = A_t$.
- d) Dado que ambas funciones de correlación y correlación parcial son positivas y decrecen a cero, diremos que se trata de un proceso ARMA(1,1), o sea $(1 - \phi_1 B)(1 - B)Z_t = (1 + \theta_1 B)A_t$.

Ejercicio 3.4.4. Sea $\{X_t\}$ un proceso ARIMA($p, 2, q$) que satisface la ecuación en diferencias

$$\Phi(B)(1 - B)^2 X_t = \theta(B)A_t, \quad (3.4.1)$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco. Demuestre que cualquiera sean las variables aleatorias V y W , el proceso $\{Y_t\}$ definido por $Y_t = V + tW + X_t$, también satisface la ecuación (3.4.1).

Solución.

$$\begin{aligned} \Phi(B)(1 - B)^2 Y_t &= \Phi(B)(1 - B)^2 (V + tW + X_t) \\ &= \Phi(B)(1 - B)^2 V + \Phi(B)(1 - B)^2 tW + \Phi(B)(1 - B)^2 X_t \\ &= \Phi(B)(V - 2V + V) + W\Phi(B)(t - 2(t - 1) + (t - 2)) + \Phi(B)A_t \\ &= \Phi(B)A_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{Y_t\}$ satisface la ecuación (3.4.1).

Ejercicio 3.4.5. Sean $\{Y_t\}$ y $\{Z_t\}$ dos procesos. Demuestre que

$$\Delta^k (aY_t + cZ_t) = a\Delta^k Y_t + c\Delta^k Z_t \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Solución. Por inducción,
Si $k = 1$,

$$\begin{aligned} \Delta(aY_t + cZ_t) &= aY_t + cZ_t - aY_{t-1} + cZ_{t-1} \\ &= a(Y_t - Y_{t-1}) + c(Z_t - Z_{t-1}) \\ &= a\Delta Y_t + c\Delta Z_t. \end{aligned}$$

Supongamos cierto para $k - 1$, veamos para k

$$\begin{aligned} \Delta^k (aY_t + cZ_t) &= \Delta^{k-1}(\Delta(aY_t + cZ_t)) \\ &= \Delta^{k-1}(a\Delta Y_t + c\Delta Z_t) \\ &= a\Delta^{k-1}(\Delta Y_t) + c\Delta^{k-1}(\Delta Z_t) \\ &= a\Delta^k Y_t + c\Delta^k Z_t. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.4.6. Si P_k es un polinomio en t de grado k dado por

$$P_k(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k \quad \text{con } a_k \neq 0, \quad (3.4.2)$$

demostrar que

- a) $\Delta^i P_k(t)$ es un polinomio de grado $\leq k - i$, es decir $\Delta^i P_k(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{k-i} t^{k-i}$, para todo $i = 0, 1, \dots, k$.
- b) $\Delta^k P_k(t) = k! a_k$.

Solución. a) Se puede probar fácilmente usando la fórmula del binomio sobre $(t - 1)^j$ que $\Delta t^j = t^j - (t - 1)^j$ es un polinomio de grado $j - 1$ con coeficiente principal j . Luego, usando la linealidad de Δ y lo anterior se puede ver que si $P_k(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ es un polinomio de grado k , entonces $\Delta P_k(t)$ es un polinomio de grado $k - 1$ con coeficiente principal $k a_k$. Por otro lado, se ve también usando la fórmula del binomio que si $i \leq j$, $\Delta^i t^j$ es un polinomio de grado $j - i$ con coeficiente principal $\frac{j!}{(j-i)!}$. Combinando estos resultados y usando la linealidad de Δ resulta que $\Delta^i P_k(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que $k - i$ con coeficiente principal $a_k \frac{k!}{(k-i)!}$.

b) De la parte (a) se deduce inmediatamente que $\Delta^k P_k(t) = a_k \frac{k!}{(k-k)!} = a_k k!$.

Ejercicio 3.4.7. Sea Δ_d el operador diferencia de tamaño d definido por $\Delta_d = 1 - B^d$.

- a) Demuestre que Δ_d es un operador lineal. Concretamente, siendo $\{Y_t\}$ y $\{Z_t\}$ dos procesos demuestre que $\Delta_d(aY_t + cZ_t) = a\Delta_d Y_t + c\Delta_d Z_t$.
- b) Demuestre que Δ_d^k es un operador lineal para todo $k \in \mathbb{N}$.
- c) Pruebe que $\Delta_d t^k$ es un polinomio de grado $k - 1$ con coeficiente principal igual a kd .
- d) Demuestre, usando el resultado de las partes (a) y (c) anteriores, que si $P_k(t)$ es un polinomio de grado k como el de la ecuación (3.4.2) entonces $\Delta_d^i P_k(t)$ es un polinomio de grado $\leq k - i$, es decir $\Delta_d^i P_k(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{k-i} t^{k-i}$, con coeficiente principal igual a $a_k d^i \frac{k!}{(k-i)!}$, para todo $i = 0, 1, \dots, k$. En particular, $\Delta_d^k P_k(t) = k! d^k a_k$.

Solución. a)

$$\begin{aligned} \Delta_d(aY_t + cZ_t) &= aY_t + cZ_t - aY_{t-d} + cZ_{t-d} \\ &= a(Y_t - Y_{t-d}) + c(Z_t - Z_{t-d}) \\ &= a\Delta_d Y_t + c\Delta_d Z_t. \end{aligned}$$

- b) Se prueba del mismo modo que se probó en el ejercicio 3.4.5 usando inducción en k y la parte (a) para el caso $k = 1$.
- c) $\Delta_d t^k = t^k - (t - d)^k = -\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (-d)^{k-i} t^i$ que es un polinomio de grado $k - 1$ con coeficiente principal $\frac{k!}{(k-1)!} d = kd$.
- d) Se puede ver usando la fórmula del binomio que si $i \leq k$, $\Delta_d^i t^k$ es un polinomio de grado $k - i$ con coeficiente principal $d^i \frac{k!}{(k-i)!}$. Si $P_k(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$, por la linealidad de Δ_d^i y lo anterior, $\Delta_d^i P_k(t)$ es un polinomio de grado $k - i$ con coeficiente principal $a_k d^i \frac{k!}{(k-i)!}$. En particular, $\Delta_d^k P_k(t) = a_k d^k k!$.

Ejercicio 3.4.8. Demuestre que si $\{X_t\}$ es un proceso estacionario con $E[X_t] = \mu$ y autocovarianza γ_k entonces

- a) $X_t^* = \Delta X_t$ tal que $t \in \mathbb{Z}$ es un proceso estacionario con media cero y autocovarianza $\text{cov}(X_t^*, X_{t+k}^*) = 2\gamma_k - \gamma_{k-1} - \gamma_{k+1}$.

b) $X_t^* = \Delta_d X_t$ tal que $t \in \mathbb{Z}$ es un proceso estacionario con media cero y autocovarianza $cov(X_t^*, X_{t+k}^*) = 2\gamma_k - \gamma_{|k-d|} - \gamma_{k+d}$.

Solución. a)

$$X_t^* = X_t - X_{t-1}$$

$$E[X_t^*] = E[X_t] - E[X_{t-1}] = \mu - \mu = 0$$

$$\begin{aligned} cov(X_t^*, X_{t+k}^*) &= E[X_t X_{t+k} - X_t X_{t+k-1} - X_{t-1} X_{t+k} + X_{t-1} X_{t-1+k}] \\ &= E[X_t X_{t+k}] - E[X_t X_{t+k-1}] - E[X_{t-1} X_{t+k}] + E[X_{t-1} X_{t-1+k}] \\ &= 2\gamma_k - \gamma_{k-1} - \gamma_{k+1} \end{aligned}$$

b)

$$X_t^* = X_t - X_{t-d}$$

$$E[X_t^*] = E[X_t] - E[X_{t-d}] = \mu - \mu = 0$$

$$\begin{aligned} cov(X_t^*, X_{t+k}^*) &= E[X_t X_{t+k} - X_t X_{t+k-d} - X_{t-d} X_{t+k} + X_{t-d} X_{t-d+k}] \\ &= E[X_t X_{t+k}] - E[X_t X_{t+k-d}] - E[X_{t-d} X_{t+k}] + E[X_{t-d} X_{t-d+k}] \\ &= 2\gamma_k - \gamma_{|k-d|} - \gamma_{k+d} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.4.9. Sean $\{V_t\}$ y $\{W_t\}$ dos procesos estacionarios con medias μ_V y μ_W y autocovarianzas τ_k y δ_k respectivamente. Si $Z_t = V_t + tW_t$ para todo $t \in \mathbb{Z}$ demostrar que

a) $\{Z_t\}$ no es estacionario pues no cumple ninguna de las dos propiedades de la definición de estacionariedad.

b) $Y_t = \Delta Z_t$ no es estacionario a menos que $W_t = W$ para todo t .

Solución. a) $E[Z_t] = E[V_t] + tE[W_t] = \mu_V + t\mu_W$ (depende de t).

$$cov(Z_t, Z_{t+k}) = \tau_k + (t+k)E[V_t W_{t+k}] + tE[W_t V_{t+k}] + (t^2 + tk)\delta_k - \mu_V^2 - (k+2t)\mu_V \mu_W - (t^2 + kt)\mu_W^2$$

que depende de t .

b) $E[Y_t] = E[Z_t] - E[Z_{t-1}] = \mu_W$

$$cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - Z_{t-1})(Z_{t+k} - Z_{t+k-1})] - \mu_W^2$$

que depende de t pues $cov(Z_t, Z_{t+k})$ depende de t .

Capítulo 4

Predicción

Uno de los motivos más importantes del estudio de las series de tiempo es el hecho de poder predecir los valores futuros, conocidos sus datos pasados. Esto es, se quiere predecir el valor X_{n+m} conocidos los valores X_1, X_2, \dots, X_n y a este valor predicho se lo designará por $X_{1,n}(m)$. El criterio que usaremos para comparar predictores del valor X_{n+m} es mediante la evaluación del Error Cuadrático Medio de cada predictor $X_{1,n}(m)$ dado por

$$ECM(X_{1,n}(m)) = E[(X_{n+m} - X_{1,n}(m))^2]$$

y eligiendo como el mejor a aquél que minimiza este valor. Si P está definida como la clase de todos los predictores de X_{n+m} donde se realiza la búsqueda y si además se agrega la condición de que estos predictores sean funciones de X_1, X_2, \dots, X_n , entonces el mejor predictor de X_{n+m} , que se denota $\hat{X}_{1,n}(m)$, es

$$\hat{X}_{1,n}(m) = E[X_{n+m}/X_t : 1 \leq t \leq n]. \quad (4.0.1)$$

Esto se puede entender como que el mejor estimador para el tiempo $n+m$ es el promedio de los X_{n+m} correspondientes a todas las posibles realizaciones de X_t cuyos valores hasta el tiempo n coinciden con las observaciones x_1, \dots, x_n . Sin embargo, este resultado no es útil ya que requiere conocer la estructura probabilística de $\{X_t\}$. Por ello se restringirá la clase P de predictores admitidos de X_{n+m} a los que son una combinación lineal de X_1, X_2, \dots, X_n y de esta familia el que tenga menor Error Cuadrático Medio se lo denominará mejor predictor lineal, que se denotará por $\tilde{X}_{1,n}(m)$. En general, este predictor no coincidirá con el dado en (4.0.1), pero igual hay casos donde se da la coincidencia como se verá en la sección (4.2).

4.1. Predictor Lineal con Error Cuadrático Medio Mínimo

Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario con función de autocovarianza γ y media cero. El mejor predictor lineal de X_{n+m} está dado por

$$\tilde{X}_{1,n}(m) = \phi_{n,1}^{(m)} X_n + \dots + \phi_{n,n}^{(m)} X_1 = \underline{X}'_n \underline{\phi}^{(m)},$$

con

$$\underline{X}'_n = (X_n, X_{n-1}, \dots, X_1), \quad \underline{\phi}^{(m)} = (\phi_{n,1}^{(m)}, \dots, \phi_{n,n}^{(m)})'$$

y donde $\phi_{n,1}^{(m)}, \dots, \phi_{n,n}^{(m)}$ se obtienen de resolver

$$\Gamma_n \underline{\phi}^{(m)} = \underline{\gamma}_{n,m} \quad (4.1.1)$$

donde

$$\underline{\gamma}_{n,m} = (\gamma_m, \gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{m+n-1})'$$

y

$$\mathbf{\Gamma}_n = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

Cuando Γ_n es singular, el sistema puede tener infinitas soluciones pero todas ellas dan lugar al mismo predictor $\tilde{X}_{1,n}(m)$. En el caso donde Γ_n es no singular, la solución del sistema es

$$\underline{\phi}^{(m)} = \Gamma_n^{-1} \underline{\gamma}_{n,m} \quad (4.1.2)$$

y en este caso

$$\begin{aligned} ECM(\tilde{X}_{1,n}(m)) &= E[(X_{n+m} - \tilde{X}_{1,n}(m))^2] \\ &= E[(X_{n+m} - \underline{X}'_n \underline{\phi}^{(m)})^2] \\ &= E[X'_{n+m} X_{n+m}] + \underline{\phi}^{(m)'} E[\underline{X}_n \underline{X}'_n] \underline{\phi}^{(m)} - 2E[X_{n+m} \underline{X}'_n] \underline{\phi}^{(m)} \\ &= \gamma_0 + \underline{\phi}^{(m)'} \Gamma_n \underline{\phi}^{(m)} - 2\underline{\gamma}'_{n,m} \Gamma_n^{-1} \underline{\gamma}_{n,m} \\ &= \gamma_0 - \underline{\gamma}'_{n,m} \Gamma_n^{-1} \underline{\gamma}_{n,m} \end{aligned}$$

Desde el punto de vista práctico es poco útil cuando se posee una gran cantidad de datos, por eso existen algunos algoritmos que permiten superar estos problemas. Uno de ellos es el algoritmo de Durbin-Levinson que establece un procedimiento recursivo para calcular el vector de coeficientes $\underline{\phi}$. Otro algoritmo se basa en la representación de $\tilde{X}_{1,n}(m)$ como combinación lineal de las innovaciones $X_{n-j+m} - \tilde{X}_{1,n-j}(m)$ para $j = m, \dots, n+m-1$, es decir mediante la determinación de los coeficientes $\theta_{n-1+m,j}$ con $j = m, \dots, n+m-1$ tales que se verifica

$$\tilde{X}_{1,n}(m) = \sum_{j=m}^{n+m-1} \theta_{n-1+m,j} (X_{n-j+m} - \tilde{X}_{1,n-j}(m))$$

y tiene como ventaja que sirve también para procesos no estacionarios cuya función de autocovarianza γ_{ij} no depende únicamente de la distancia $|i-j|$ entre los tiempos.

4.2. Predicción de un ARMA conocido todo su pasado

El mejor predictor lineal de X_{n+m} conocido los valores de $\{X_t\}$ con $-\infty < t \leq n$ se lo denota por $\tilde{X}_n(m)$. Los resultados teóricos que se obtengan de esta sección servirán para estimaciones que se hagan cuando se conocen solo los valores de X_1, X_2, \dots, X_n .

Consideremos una serie $\{X_t\}$ que corresponde a un proceso ARMA(p,q) estacionario e invertible dado por

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = A_t + \theta_1 A_{t-1} + \dots + \theta_q A_{t-q},$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco formado por variables aleatorias independientes entre sí. Como es un proceso estacionario (causal) se puede representar como un proceso MA(∞) de la forma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A_{t-j} \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (4.2.1)$$

con $\alpha_0 = 1$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty$. En particular,

$$X_{n+m} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A_{n+m-j} \quad (4.2.2)$$

Entonces,

$$\tilde{X}_n(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j A_{n-j} \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad (4.2.3)$$

pues $\tilde{X}_n(m)$ es función lineal de $\{X_t\}$ con $-\infty < t \leq n$ y que a la vez por (4.2.1) son funciones de $\{A_t\}$ con $t \leq n$.

Para calcular los β_i se usan (4.2.2) y (4.2.3) para llegar a la expresión

$$X_{n+m} - \tilde{X}_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A_{n+m-i} + \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_{m+j} - \beta_j) A_{n-j}$$

y como las variables del ruido blanco están no correlacionadas entre sí resulta que

$$E[(X_{n+m} - \tilde{X}_n(m))^2] = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^2 + \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_{m+j} - \beta_j)^2 \quad (4.2.4)$$

que será mínimo cuando la segunda sumatoria se anule, es decir cuando $\beta_j = \alpha_{m+j}$ para $j = 0, 1, \dots$. Por ello la fórmula (4.2.3) se reduce a

$$\tilde{X}_n(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-j} \quad (4.2.5)$$

y (4.2.4) queda

$$ECM(\tilde{X}_n(m)) = \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^2 \quad (4.2.6)$$

que claramente aumenta a medida que se desea predecir un X_{n+m} más alejado de X_n pero igualmente este crecimiento va a estar acotado por $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$.

Probemos que $\tilde{X}_n(m)$ dado por (4.2.5) coincide con el predictor óptimo $\hat{X}_n(m)$.

Dado que

$$E[A_{n+m-j}/X_t : -\infty < t \leq n] = \begin{cases} 0, & \text{si } j < m; \\ A_{n+m-j}, & \text{si } m \leq j \end{cases}$$

pues los valores de $X_t : -\infty < t \leq n$ dependen solo de $A_t : t \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(m) &= E[X_{n+m}/X_t : -\infty < t \leq n] = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j E[A_{n+m-j}/X_t : -\infty < t \leq n] \\ &= \sum_{j=m}^{\infty} \alpha_j A_{n+m-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{m+i} A_{n-i} \\ &= \tilde{X}_n(m) \end{aligned}$$

Si a $X_t : -\infty < t \leq n$ se le agrega con el devenir del tiempo la observación X_{n+1} se puede volver a calcular el predictor lineal de X_{n+m} . Por la fórmula (4.2.5) para $m = 1$, $\tilde{X}_n(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{1+j} A_{n-j}$ y por (4.2.2) para $m = 1$,

$$X_{n+1} = A_{n+1} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_{n+1-i} = A_{n+1} + \tilde{X}_n(1)$$

por lo que

$$X_{n+1} - \tilde{X}_n(1) = A_{n+1} \quad (4.2.7)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{n+1}(m-1) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{m-1+i} A_{n+1-i} \\ &= \alpha_{m-1} A_{n+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-j} \\ &= \alpha_{m-1} (X_{n+1} - \tilde{X}_n(1)) + \tilde{X}_n(m) \end{aligned}$$

que puede interpretarse como que el predictor $\tilde{X}_{n+1}(m-1)$ modifica al predictor $\tilde{X}_n(m)$ ya que incorpora información y este cambio tiene que ver con el error cometido al estimar X_{n+1} a partir de $X_t : t \leq n$.

4.3. Predicción de un ARIMA conocido todo su pasado

Sea $\{Z_t\}$ un proceso ARIMA(p,k,q) donde $\phi(B)(1-B)^k Z_t = \theta(B)A_t$. Supongamos que el proceso de ruido blanco $\{A_t\}$ está compuesto por variables aleatorias independientes entre sí y los polinomios $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \dots - \phi_p x^p$ y $\theta(x) = 1 + \theta_1 x + \dots + \theta_q x^q$ no tienen raíces comunes, siendo las raíces de $\theta(B)$ en módulo mayor que 1, y además $\phi(1) \neq 0$. Supongamos también que conocemos $Z_t : -\infty < t \leq n$ y trataremos de encontrar el predictor óptimo $\hat{Z}_n(m)$ de Z_{n+m} .

Por ser un proceso invertible, admite una expresión como un proceso AR(∞) de la forma

$$\beta(B)Z_t = A_t, \quad (4.3.1)$$

donde

$$\beta(B) = \frac{\phi(B)(1-B)^k}{\theta(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i B^i \text{ con } \sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i| < \infty$$

que es lo mismo que

$$Z_t = A_t - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i Z_{t-i} \quad (4.3.2)$$

En particular, para $t = n + m$

$$Z_{n+m} = A_{n+m} - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i Z_{n+m-i} \quad (4.3.3)$$

Multiplicamos ambos miembros de (4.3.3) por el operador $\tau(B) = 1 + \tau_1 B + \dots + \tau_{m-1} B^{m-1}$ y elegimos los $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ de tal forma que se hagan cero los coeficientes correspondientes a $Z_{n+m-1}, \dots, Z_{n+1}$. O

sea, despejando Z_{n+m} y agrupando los distintos Z_t se tiene

$$\begin{aligned}
Z_{n+m} &= \tau(B)A_{n+m} - \sum_{i=1}^{m-1} \tau_i Z_{n+m-i} - \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i (1 + \sum_{j=1}^{m-1} \tau_j B^j) Z_{n+m-i} - \sum_{i=m}^{\infty} \beta_i (1 + \sum_{j=1}^{m-1} \tau_j B^j) Z_{n+m-i} \\
&= \tau(B)A_{n+m} - \sum_{i=1}^{m-1} (\tau_i + \beta_i) Z_{n+m-i} - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=j+1}^{\infty} \beta_{i-j} \tau_j Z_{n+m-i} - \sum_{i=m}^{\infty} \beta_i Z_{n+m-i} \\
&= \tau(B)A_{n+m} - \sum_{i=1}^{m-1} (\tau_i + \beta_i) Z_{n+m-i} - \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i-j} \tau_j Z_{n+m-i} - \sum_{i=m}^{\infty} \beta_i Z_{n+m-i} \\
&= \tau(B)A_{n+m} - \sum_{i=2}^{m-1} (\tau_i + \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i-j} \tau_j) Z_{n+m-i} - \sum_{i=m}^{\infty} (\beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i-j} \tau_j) Z_{n+m-i} - Z_{n+m-1} (\tau_1 + \beta_1) \\
&= \tau(B)A_{n+m} - \sum_{i=1}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^i \tau_j \beta_{i-j} \right) Z_{n+m-i} - \sum_{i=m}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \tau_j \beta_{i-j} \right) Z_{n+m-i}
\end{aligned}$$

donde $\tau_0 = \beta_0 = 1$ que es lo mismo que

$$Z_{n+m} = \tau(B)A_{n+m} - \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i^{(m)} Z_{n+m-i} - \sum_{i=m}^{\infty} \beta_i^{(m)} Z_{n+m-i} \quad (4.3.4)$$

donde

$$\beta_i^{(m)} = \begin{cases} \sum_{j=0}^i \tau_j \beta_{i-j}, & \text{si } 1 \leq i \leq m-1; \\ \sum_{j=0}^{m-1} \tau_j \beta_{i-j}, & \text{si } i \geq m \end{cases}$$

y como se quiere que los coeficientes de $Z_{n+m-1}, \dots, Z_{n+1}$ sean cero,

$$\sum_{j=0}^i \tau_j \beta_{i-j} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, m-1$$

Es decir, se eligen $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ del operador $\tau(B) = 1 + \tau_1 B + \dots + \tau_{m-1} B^{m-1}$ tal que resuelvan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m-2} & \beta_{m-3} & \beta_{m-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \end{bmatrix}$$

Entonces, (4.3.4) se reduce a

$$Z_{n+m} = A_{n+m} + \sum_{j=1}^{m-1} \tau_j A_{n+m-j} - \sum_{i=m}^{\infty} \beta_i^{(m)} Z_{n+m-i} \quad (4.3.5)$$

y como $E[A_s/Z_t : t \leq n] = 0$ si $s > n$ entonces

$$\hat{Z}_m = E[Z_{n+m}/Z_t : t \leq n] = - \sum_{i=m}^{\infty} \beta_i^{(m)} Z_{n+m-i} \quad (4.3.6)$$

y tiene ECM de predicción:

$$ECM(\hat{Z}_m) = E[(Z_{n+m} - \hat{Z}_m)^2] = (1 + \tau_1^2 + \dots + \tau_{m-1}^2) \sigma_A^2 \quad (4.3.7)$$

4.4. Ejercicios del Capítulo IV

Ejercicio 4.4.1. Sea $\{X_t\}$ un ARMA(p, q) estacionario (causal) de ecuación $\phi(B)X_t = \theta(B)A_t$, donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 y sea $X_t = \alpha(B)A_t$ la expresión de este proceso como un MA(∞), es decir $\alpha(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i$ con $\alpha_0 = 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$. Considere el predictor lineal óptimo $\tilde{X}_n(m)$ de X_{n+m} basado en $X_t : -\infty < t \leq n$ dado por

$$\tilde{X}_n(m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{m+i} A_{n-i}, & \text{si } m > 0; \\ X_{n+m}, & \text{si } -(n-1) < m \leq 0 \end{cases}$$

a) Demuestre que

$$\tilde{X}_n(m) - \phi_1 \tilde{X}_n(m-1) - \dots - \phi_p \tilde{X}_n(m-p) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} A_{n-i}, & \text{si } q \geq m; \\ 0, & \text{si } q < m \end{cases}$$

(use la expresión válida para $k \in \mathbb{N}$, $\phi(B)\alpha_k = \theta_k$ donde se supone que $\alpha_j = 0$ si $j < 0$ y $\theta_k = 0$ si $k > q$).

b) En la expresión obtenida en la parte (a), reemplace A_{n-i} por la innovación $X_{n-i} - \tilde{X}_{n-i-1}(1)$ y compruebe que la fórmula resultante es la misma que se obtiene de la ecuación $\phi(B)X_{n+m} = \theta(B)A_{n+m}$ reemplazando X_{n+k} por $\tilde{X}_n(k)$ si $k > 0$, A_{n-k} por 0 si $k > 0$ y A_{n+k} por la innovación $X_{n+k} - \tilde{X}_{n+k-1}(1)$ si $k > 0$.

c) Use la fórmula obtenida en la parte (a) para hallar la expresión $\tilde{X}_n(k)$ para $m = 1$ y $m = 2$, en el caso en que $\{X_t\}$ es un AR(p) estacionario (causal) de ecuación $\phi(B)X_t = A_t$ siendo X_1, \dots, X_n las observaciones con $n > p$.

Solución. a) Sea $m > p$,

$$\tilde{X}_n(m) - \phi_1 \tilde{X}_n(m-1) - \dots - \phi_p \tilde{X}_n(m-p) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha_{m+i} - \sum_{j=1}^p \phi_j \alpha_{m+i-j}) A_{n-i}$$

Como

$$\alpha_k - \sum_{i=1}^p \phi_i \alpha_{k-i} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \geq q+1 \\ \theta_k, & \text{si } 0 \leq k \leq q \end{cases}$$

entonces la primera ecuación queda

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} A_{n-i}, & \text{si } q \geq m \\ 0, & \text{si } q < m \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \phi(B)X_{n+m} &= \tilde{X}_n(m) - \phi_1 \tilde{X}_n(m-1) - \dots - \phi_p \tilde{X}_n(m-p) \\ &= \theta(B)A_{n+m} = A_{n+m} + \sum_{j=0}^q \theta_j A_{n+m-j} \\ &= \sum_{j=-m}^{q-m} \theta_{m+j} A_{n-j} \end{aligned}$$

que es igual a

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} (X_{n-i} - \tilde{X}_{n-i-1}(1)), & \text{si } q \geq m \\ 0, & \text{si } q < m \end{cases}$$

como se quería.

- c) En un AR(p), $\tilde{X}_n(m) - \phi_1 \tilde{X}_n(m-1) - \dots - \phi_p \tilde{X}_n(m-p) = 0$
 Si $m = 1$, $\tilde{X}_n(1) = \phi_1 \tilde{X}_n(0) + \dots + \phi_p \tilde{X}_n(1-p) = \phi_1 X_n + \dots + \phi_p X_{n-p+1}$
 Si $m = 2$,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_n(2) &= \phi_1 \tilde{X}_n(1) + \dots + \phi_p \tilde{X}_n(2-p) \\ &= \phi_1 \tilde{X}_n(1) + \dots + \phi_p X_{n-p+2} \\ &= \phi_1(\phi_1 X_n + \dots + \phi_p X_{n-p+1}) + \dots + \phi_p X_{n-p+2} \\ &= (\phi_1^2 + \phi_2)X_n + (\phi_1\phi_2 + \phi_3)X_{n-1} + \dots + (\phi_1\phi_p + \phi_{p-1})X_{n-p+1} + \phi_p X_{n-p+2}\end{aligned}$$

Ejercicio 4.4.2. Sea $\{X_t\}$ un proceso de promedios móviles de orden q que satisface la ecuación $X_t = \theta(B)A_t$, donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 y donde $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ con $\theta_q \neq 0$.

- a) Demostrar que

$$\tilde{X}_n(m) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} A_{n-i}, & \text{si } m \leq q \\ 0, & \text{si } m > q \end{cases}$$

- b) Mostrar que si $q \geq m$,

$$\tilde{X}_n(m) = \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} (X_{n-i} - \tilde{X}_{n-i-1}(1)),$$

lo que constituye un procedimiento iterativo que permite calcular el mejor predictor lineal $\tilde{X}_n(m)$ de X_{n+m} a partir de $X_t : t \leq n$.

Solución. a) Este es un caso particular ($p = 0$) de lo que se vio para un proceso ARMA donde el estimador óptimo resulta ser $\tilde{X}_n(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{m+i} A_{n-i}$ con $\alpha_j = \theta_j$ si $0 \leq j \leq q$ y $\alpha_j = 0$ si $j > q$. Entonces, si $m+i \leq q$ con $i = 0, \dots, q-m$, o sea $m \leq q$ queda

$$\tilde{X}_n(m) = \sum_{i=0}^{q-m} \alpha_{m+i} A_{n-i} = \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} A_{n-i}$$

; y si $m+i > q$ con $i = 0, \dots, q-m$, es decir $q < m$ resulta que

$$\tilde{X}_n(m) = 0$$

como se quería.

- b) Como $\tilde{X}_n(1) = \sum_{i=0}^{q-1} \theta_{1+i} A_{n-i}$ y $X_t = \sum_{i=0}^q \theta_i A_{t-i}$ entonces

$$\begin{aligned}X_{n-i} &= \sum_{j=0}^q \theta_j A_{n-i-j} = A_{n-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j A_{n-i-j} \\ &= A_{n-i} + \tilde{X}_{n-i-1}(1) \\ A_{n-i} &= X_{n-i} - \tilde{X}_{n-i-1}(1)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{X}_n(m) = \sum_{i=0}^{q-m} \theta_{m+i} (X_{n-i} - \tilde{X}_{n-i-1}(1))$.

Ejercicio 4.4.3. Sea $\{X_t\}$ un proceso autorregresivo de orden p estacionario (causal) de ecuación

$$\Phi(B)X_t = A_t, \quad (4.4.1)$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 y donde $\Phi(B) = 1 + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p$ con $\phi_p \neq 0$.

- a) Halle la expresión de los coeficientes $\alpha_i : i \in \mathbb{N}$ que corresponden a la representación de este proceso como un $MA(\infty)$, es decir a la representación

$$X_t = \alpha(B)A_t \quad (4.4.2)$$

donde $\alpha(B) = \frac{1}{\Phi(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i B^i$ con $\alpha_0 = 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty$.

- b) Suponga que por un error de especificación se ha considerado que el proceso $\{X_t\}$ admite la representación

$$\theta(B)X_t = E_t, \quad (4.4.3)$$

donde $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$ con $\theta_q \neq 0$ y $q \neq p$. En consecuencia, $\{E_t\}$ no es un proceso de ruido blanco, pero X_t admite aún la representación

$$X_t = \delta(B)E_t, \quad (4.4.4)$$

donde $\delta(B) = \frac{1}{\theta(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i B^i$ con $\delta_0 = 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i^2 < \infty$. Mostrar que en este caso $\{E_t\}$ es en realidad un proceso $ARMA(p, q)$; para ello halle la expresión E_t en función de $\theta(B)$, $\Phi(B)$ y $\{A_t\}$.

- c) Suponga que en el modelo equivocado (4.4.3) se calcula el mejor predictor lineal de X_{n+m} . Si designamos a este predictor con la notación $X_n^*(m)$ muestre que se verifica que

$$X_n^*(m) = \theta_1 X_n^*(m-1) + \dots + \theta_q X_n^*(m-q). \quad (4.4.5)$$

- d) Use (4.4.3) y (4.4.5) para mostrar que el error de predicción $Y_n^*(m) = X_{n+m} - X_n^*(m)$ satisface la ecuación en diferencias

$$Y_n^*(m) - \theta_1 Y_n^*(m-1) - \dots - \theta_q Y_n^*(m-q) = E_{n+m}. \quad (4.4.6)$$

- e) Compruebe que

$$Y_n^*(m) = E_{n+m} + \delta_1 E_{n+m-1} + \dots + \delta_{m-1} E_{n+1} \quad (4.4.7)$$

es solución de la ecuación en diferencias (4.4.6) hallada en la parte (d).

- f) Use (4.4.4) y (4.4.7) para mostrar que el predictor lineal $X_n^*(m)$ está dado por

$$X_n^*(m) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{m+i} E_{n-i},$$

y en consecuencia se verifica que

$$Y_n^*(m) = Y_n^*(n-1)(m+1) - \delta_m E_n$$

(recordar que E_n se puede expresar como $E_n = X_n - Y_{n-1}^*(1)$).

g) Sea ahora $\tilde{X}_n(m)$ el mejor predictor lineal de X_{n+m} usando el modelo correcto (4.4.1) y sea $Y_n(m) = X_{n+m} - \tilde{X}_n(m)$ el error de predicción usando este modelo. Compruebe que el error de predicción cometido usando el modelo equivocado (4.4.3) se puede expresar como

$$Y_n^*(m) = (X_{n+m} - \tilde{X}_n(m)) + (\tilde{X}_n(m) - X_n^*(m)),$$

siendo los dos sumandos entre paréntesis no correlacionados entre sí y, en consecuencia,

$$\text{var}(Y_n^*(m)) = \text{var}(Y_n(m)) + \text{var}(\tilde{X}_n(m) - X_n^*(m)).$$

Solución. a) Se buscan los α_i tal que

$$\alpha(B)\phi(B) = (1 + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \alpha_3 B^3 + \dots)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) = 1.$$

Distribuyendo e igualando potencias se tiene:

$$\alpha_0 \phi_0 = 1 * 1 = 1$$

$$\alpha_1 \phi_0 - \alpha_0 \phi_1 = 0 \text{ entonces } \alpha_1 = \phi_1 \alpha_0$$

$$-\phi_2 \alpha_0 - \phi_1 \alpha_1 + \alpha_2 \phi_0 = 0 \text{ entonces } \alpha_2 = \alpha_0 \phi_2 + \alpha_1 \phi_1$$

$$-\phi_3 \alpha_0 - \phi_2 \alpha_1 - \phi_1 \alpha_2 + \alpha_3 \phi_0 = 0 \text{ entonces } \alpha_3 = \alpha_0 \phi_3 + \alpha_1 \phi_2 + \alpha_2 \phi_1$$

...

siguiendo así se llega a que si $1 \leq k \leq p$, $\alpha_k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \phi_{k-i} = \sum_{j=1}^k \phi_j \alpha_{k-j}$ y si $k > p$, $\alpha_k = \sum_{j=1}^p \phi_j \alpha_{k-j}$.

b) $E_t = \theta(B)X_t = \theta(B)\frac{1}{\phi(B)}A_t$ por lo tanto $\{E_t\}$ satisface la ecuación $\phi(B)E_t = \theta(B)A_t$ por lo que es un proceso ARMA(p,q).

c) Con el modelo equivocado $X_n^*(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{s+j} E_{n-j} \forall s \in \mathbb{N}$ donde los δ_i resultan de resolver la ecuación $\delta(B)\theta(B) = 1$ o sea $\delta_k = \sum_{j=1}^q \theta_j \delta_{k-j}$ si $k > q$.

Luego,

$$\begin{aligned} X_n^*(m) - \sum_{i=1}^q \theta_i X_n^*(m-i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{m+j} E_{n-j} - \sum_{i=1}^q \theta_i \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{m+j-i} E_{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_{m+j} - \sum_{i=1}^q \theta_i \delta_{m-i+j}) E_{n-j} = 0 \end{aligned}$$

pues $m+j \geq m > q$ y entonces $\delta_{m+j} = \sum_{i=1}^q \theta_i \delta_{m-i+j}$.

d) $Y_n^*(m) = X_{n+m} - X_n^*(m)$ entonces

$$\begin{aligned} Y_n^*(m) - \sum_{i=1}^q \theta_i Y_n^*(m-i) &= X_{n+m} - X_n^*(m) - \sum_{i=1}^q \theta_i (X_{n+m-i} - X_n^*(m-i)) \\ &= X_{n+m} - \sum_{i=1}^q \theta_i X_{n+m-i} - X_n^*(m) + \sum_{i=1}^q \theta_i X_n^*(m-i) \\ &= (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) X_{n+m} = E_{n+m} \end{aligned}$$

e)

$$Y_n^*(m) - \sum_{i=1}^q \theta_i Y_n^*(m-i) = E_{n+m} + \sum_{j=1}^{m-1} \delta_j E_{n+m-j} - \sum_{j=1}^q \theta_j (E_{n+m-i} + \sum_{j=1}^{m-i-1} \delta_j E_{n+m-i-j})$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(B)E_{n+m} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j E_{n+m-j} - X_n^*(m) - \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{\infty} \theta_i \delta_j E_{n+m-j-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i X_n^*(m-i) \\
&= \theta(B)E_{n+m} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j (E_{n+m-j} - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i E_{n+m-j}) \\
&= \theta(B)E_{n+m} + \theta(B) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j E_{n+m-j} - E_{n+m} \right) \\
&= \theta(B) \delta(B) E_{n+m} = E_{n+m}
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
X_n^*(m) &= X_{n+m} - Y_n^*(m) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j E_{n+m-j} - \sum_{j=0}^{m-1} \delta_j E_{n+m-j} \\
&= \sum_{j=m}^{\infty} \delta_j E_{n+m-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m} E_{n-i}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Y_n^*(m) - Y_{n-1}^*(m+1) &= X_{n+m} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m} E_{n-i} - (X_{n+m} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m+1} E_{n-i-1}) \\
&= - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m} E_{n-i} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j+m} E_{n-j} = -\delta_m E_n
\end{aligned}$$

g)

$$Y_n^*(m) = X_{n+m} - X_n^*(m) = (X_{n+m} - \tilde{X}_n(m)) + (\tilde{X}_n(m) - X_n^*(m))$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}
X_{n+m} - \tilde{X}_n(m) &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j A_{n+m-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-i} \\
&= \sum_{i=-m}^{\infty} \alpha_{i+m} A_{n-i} - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-i} = \sum_{i=-m}^{-1} \alpha_{i+m} A_{n-i} \\
&= \alpha_0 A_{n+m} + \alpha_1 A_{n+m-1} + \dots + \alpha_{m-1} A_{n+1}
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_n(m) - X_n^*(m) &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-j} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m} E_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-j} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j A_{n-i-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{m+j} A_{n-j} - \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{i+m} \sum_{k=i}^{\infty} \beta_{k-i} A_{n-k}\end{aligned}$$

que involucra a los $A_t : t \leq n$ y como $X_{n+m} - \tilde{X}_n(m)$ involucra a $A_{n+1}, \dots, A_{n+m-1}, A_{n+m}$ resulta que los dos términos que están entre paréntesis no están correlacionados. Por lo tanto,

$$\text{var}(Y_n^*(m)) = \text{var}(X_{n+m} - \tilde{X}_n(m)) + \text{var}(\tilde{X}_n(m) - X_n^*(m)) = \text{var}(Y_n(m)) + \text{var}(\tilde{X}_n(m) - X_n^*(m)).$$

Ejercicio 4.4.4. Sea $\{Z_t\}$ un proceso autorregresivo integrado de promedios móviles de órdenes (p, k, q) invertible de ecuación

$$\Phi(B)(1 - B)^k Z_t = \theta(B)A_t,$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_A^2 y sea $\beta(B)Z_t = A_t$ la expresión de este proceso como un $AR(\infty)$, es decir que

$$\beta(B) = \frac{\Phi(B)(1 - B)^k}{\theta(B)} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i B^i,$$

con $\beta_0 = 1$ y $\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_i| < \infty$. Considere el predictor óptimo $\hat{Z}_n(m)$ de Z_{n+m} basado en los datos $Z_t : t \leq n$ dado por

$$\tilde{X}_n(m) = - \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j^{(m)} Z_{n+m-j} \text{ si } m > 0,$$

donde

$$\beta_j^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i \beta_{j-i} \text{ para } j \geq m,$$

donde $\tau_0 = 1$ y donde $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ se obtienen del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \beta_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m-2} & \beta_{m-3} & \beta_{m-4} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \vdots \\ \tau_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \end{bmatrix}$$

a) Muestre que la variable $Y_n(m) = Z_{n+m} - \hat{Z}_n(m)$, que mide el error de predicción, está dado por

$$Y_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i A_{n+m-i} \text{ si } m > 0.$$

b) Calcule la varianza de la variable $Y_n(m)$.

c) Compruebe que para m fijo mayor que 1 se verifica que $\{Y_n(m) : n \in \mathbb{N}\}$ es un proceso de promedios móviles de orden $m - 1$ y que cuando $m = 1$ resulta ser un proceso de ruido blanco.

d) Demuestre que para $m \geq 1$ se verifica que

$$\text{cov}(Y_k(m), Y_h(m)) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \leq |k - h| \\ \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{m-1-|k-h|} \tau_j \tau_{j+|k-h|}, & \text{si } m > |k - h| \end{cases}$$

e) Demuestre que para $m, s \geq 1$ se verifica que

$$\text{cov}(Y_n(m), Y_n(s)) = \sigma_A^2 \sum_{j=0}^{\min\{m,s\}-1} \tau_j \tau_{j+|m-s|}.$$

f) Compruebe que se verifica que

$$\text{var}(Y_n(m+k)) = \text{var}(Y_n(m)) + \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{n+i}^2.$$

g) Deduzca del resultado de la parte (f) que $\text{var}(Y_n(m))$ como función de m es monótona creciente y que, en consecuencia, la longitud $L(m)$ del intervalo de predicción del $(1 - \alpha) \times 100\%$ de confianza para Z_{n+m} es también una función monótona creciente de m .

h) Compruebe que $\text{cov}(\hat{Z}_n(m), Y_n(m)) = 0$ y que por lo tanto se verifica que $\text{var}(Z_{n+m}) = \text{var}(Y_n(m)) + \text{var}(\hat{Z}_n(m))$.

i) Compruebe que $Y_{n-1}(m+1) = Y_n(m) + \tau_m A_n$ y deduzca de esto que

$$\hat{Z}_n(m) = \hat{Z}_{n-1}(m+1) + \tau_m (Z_n - \hat{Z}_{n-1}(1)). \quad (4.4.8)$$

j) Notar que el resultado (4.4.8) obtenido en la parte (i) anterior, constituye un procedimiento que sirve para actualizar predictores, ya que $\hat{Z}_{n-1}(m+1)$ es el predictor de X_{n+m} a partir de los datos hasta el tiempo $n-1$ y $\hat{Z}_n(m)$ es el predictor de Z_{n+m} cuando se cuenta con el dato adicional Z_n . Analice como actúa este procedimiento cuando el nuevo valor observado Z_n es menor (mayor) que lo que $\hat{Z}_{n-1}(1)$ predijo.

Solución. a) $Y_n(m) = Z_{n+m} - \hat{X}_n(m) = Z_{n+m} + \sum_{j=m}^{\infty} \beta_j^{(m)} Z_{n+m-j} = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i A_{n+m-i}$ como se vio en las páginas 49 y 50.

b)

$$\begin{aligned} \text{var}(Y_n(m)) &= E[Y_n(m)^2] = E\left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} \tau_i A_{n+m-i}\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{m-1} \tau_i^2 A_{n+m-i}^2 + \sum_{i \neq j} \tau_i \tau_j A_{n+m-i} A_{n+m-j}\right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i^2 E[A_{n+m-i}^2] = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i^2 \sigma_A^2 \end{aligned}$$

c) Si $m > 1$, por la parte (a), $Y_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i A_{n+m-i}$ que claramente es un proceso $MA(m-1)$. Si $m = 1$, $Y_n(1) = A_{n+1}$ o sea es un proceso de ruido blanco.

d) Se sabe que $cov(Y_k(m), Y_h(m)) = E[Y_k(m)Y_h(m)] = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tau_i \tau_j E[A_{k+m-i} A_{h+m-j}]$.
 Si $m \leq |k-h|$, $|k+m-i-h-m+j| = |(k-h) + (j-i)| \geq |k-h| - |j-i| > m + (1-m) = 1$
 entonces $E[A_{k+m-i} A_{h+m-j}] = 0$.

Por otra parte, supongamos sin pérdida de generalidad que $k < h$. Si $|k+m-i-h-m+j| = |(k-h) + (j-i)| = 0$ entonces $0 \leq i = j+k-h \leq m-1$, es decir $0 \leq i \leq m-1-(h-k)$ y $0 \leq m-1-(h-k) \leq m-1$ (o sea $|k-h| < m$). Por lo tanto, $E[A_{k+m-i} A_{h+m-j}] = \sigma_A^2$ como se quería.

e) Como se sabe $cov(Y_n(m), Y_n(s)) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \tau_i \tau_j E[A_{n+m-i} A_{n+s-j}]$.

Supongamos primero que $m > s$ entonces $|n+m-i-(n+s-j)| = |m-s+j-i| = 0$ y luego $0 \leq i = j+m-s \leq m-1$ por lo que $0 \leq j \leq s-1$ y se tiene $cov(Y_n(m), Y_n(s)) = \sum_{j=0}^{s-1} \tau_j \tau_{j+(m-s)} \sigma_A^2$.

Supongamos ahora que $s \geq m$ entonces $|n+m-i-(n+s-j)| = |m-s+j-i| = 0$ y luego $0 \leq j = i-m+s \leq m-1$ por lo que $m-s \leq 0 \leq j \leq m-1+m-s \leq m-1$ y se tiene $cov(Y_n(m), Y_n(s)) = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i \tau_{i-(m-s)} \sigma_A^2$.

f)

$$\begin{aligned} var(Y_n(m+k)) &= cov(Y_n(m+k), Y_n(m+k)) = \sum_{j=0}^{m+k-1} \tau_j^2 \sigma_A^2 \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \tau_j^2 \sigma_A^2 + \sum_{j=m}^{m+k-1} \tau_j^2 \sigma_A^2 \\ &= var(Y_n(m)) + \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{i+m}^2 \end{aligned}$$

g) Si $m < l$, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $l = m + k$. Entonces,

$$var(Y_n(l)) = var(Y_n(m+k)) = var(Y_n(m)) + \sigma_A^2 \sum_{i=0}^{k-1} \tau_{i+m}^2 \geq var(Y_n(m)).$$

Por lo tanto, es monótona creciente.

La parte de este ítem que corresponde a longitud del intervalo de predicción no se desarrollará ya que es necesario conocer sobre ruido blanco gaussiano que no se desarrollo en este trabajo.

h) Por (a), $Y_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i A_{n+m-i}$, o sea están involucrados A_{n+1}, \dots, A_{n+m} . Mientras que $\widehat{Z}_n(m) = -\sum_{j=m}^{\infty} \beta_j^{(m)} Z_{n+m-j} = -\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i \beta_{j-i} Z_{n+m-j}$ que involucra a los $A_t : t \leq n$ pues $\beta(B)Z_t = A_t$ por lo que $Y_n(m)$ y $\widehat{Z}_n(m)$ no están correlacionados y $cov(\widehat{Z}_n(m), Y_n(m)) = 0$. Además,

$$\begin{aligned} var(Z_{n+m}) &= var((Z_{n+m} - \widehat{Z}_n(m)) + \widehat{Z}_n(m)) = var(Y_n(m) + \widehat{Z}_n(m)) \\ &= var(Y_n(m)) + var(\widehat{Z}_n(m)). \end{aligned}$$

i)

$$Y_n(m) - Y_{n-1}(m+1) = \sum_{i=0}^{m-1} \tau_i A_{n+m-i} - \sum_{i=0}^m \tau_i A_{n+m-i} = -\tau_m A_n.$$

Además, como $Y_n(m) = Z_{n+m} - \widehat{Z}_n(m)$, $Y_{n-1}(m+1) = Z_{n+m} - \widehat{Z}_{n-1}(m+1)$ y por el resultado anterior resulta que

$$\widehat{Z}_n(m) = \widehat{Z}_{n-1}(m+1) + \tau_m A_n$$

que debido a que

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_{n-1}(1) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{(1)} Z_{n-j} \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j Z_{n-j} = - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j Z_{n-j} - \beta_0 Z_n \right) \\ &= -(A_n - Z_n) = Z_n - A_n \end{aligned}$$

la fórmula queda

$$\widehat{Z}_n(m) = \widehat{Z}_{n-1}(m+1) + \tau_m (Z_n - \widehat{Z}_{n-1}(1))$$

- j) La relación $\widehat{Z}_n(m) = \widehat{Z}_{n-1}(m+1) + \tau_m (Z_n - \widehat{Z}_{n-1}(1))$ nos dice que el predictor $\widehat{Z}_{n-1}(m+1)$ de Z_{n+m} se modifica al agregar el conocimiento del dato X_n y esta modificación dependerá de τ_m y del error al predecir Z_n pero no se puede analizar el cambio de acuerdo a si Z_n es mayor (o menor) que $\widehat{Z}_{n-1}(1)$ pues este también dependerá de como sea τ_m .

Capítulo 5

Estimación e identificación de los modelos de series de tiempos

5.1. Identificación de procesos. Determinación del orden y verificación de diagnóstico

Las técnicas de identificación permiten decidir cual es el proceso que mejor se ajusta a los datos observados. Entre estas técnicas está el estudio del comportamiento de las funciones de autocorrelación muestral y autocorrelación parcial muestral. Una manera de verificar que el modelo diagnosticado es el correcto es analizando el residuo

$$\hat{A}_t = X_t - \hat{X}_t$$

donde \hat{X}_t es la estimación hecha con el modelo elegido. Si \hat{A}_t se comporta como un proceso de ruido blanco es porque el modelo elegido es el adecuado. Por otro lado, si con los datos X_1, \dots, X_n se ha estimado un proceso ARMA(p,q) de ecuación $\Phi_p(B)X_t = \theta_q(B)E_t$ y los residuos $\hat{E}_t = X_t - \hat{X}_t$ son tales que se comportan como un proceso ARMA(r,s), entonces el modelo adecuado para los datos originales es un ARMA(p+r,q+s).

Un test basado en la función de autocorrelación muestral $\hat{\rho}_{\hat{A}}(k)$ de los residuos que sirven para verificar la hipótesis nula $H_0 : \rho_A(1) = \rho_A(2) = \dots = \rho_A(m) = 0$ es el llamado Test de Portmanteau de falta de ajuste, que usa la estadística

$$P = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{1}{n-k} \hat{\rho}_{\hat{A}}^2(k)$$

que tiene una distribución aproximadamente Chi-cuadrado con $m - e$ grados de libertad, donde e es el número de parámetros estimados en el modelo.

5.1.1. Criterios de Akaike: FPE, AIC, BIC

Akaike propuso en 1969 el método del Error de Predicción Final (FPE) que sirve para determinar el orden del modelo AR que mejor ajusta a los datos. Consiste en calcular:

$$FPE(k) = \frac{n+k}{n-k} \hat{\sigma}_A^2 \quad (5.1.1)$$

donde n es el número de observaciones y $\hat{\sigma}_A^2$ es la estimación máxima verosímil de la varianza residual que está dada por $\hat{\sigma}_A^2 = \hat{\gamma}_0 - \hat{\phi}_1 \hat{\gamma}_1 - \dots - \hat{\phi}_p \hat{\gamma}_p$ y se elige el orden p como aquel valor de k que minimiza $FPE(k)$.

Otro método propuesto por Akaike en 1971 y 1974, es el Criterio de Información de Akaike y se

lo indica por AIC. Si el número de parámetros estimados independientemente es e entonces el AIC correspondiente está definido por

$$AIC(e) = -2\log(\text{verosimilitud maximada}) + 2e = -2\hat{L} + 2e \quad (5.1.2)$$

En particular, para modelos ARMA con ruido blanco gaussiano,

$$\hat{L} = -\frac{m}{2}\log(\hat{\sigma}_A^2) - \frac{m}{2} \quad (5.1.3)$$

para m suficientemente grande, donde m es el número efectivo de datos considerados.

En 1976, Shibata demostró que el AIC tiende a sobreestimar el orden de la parte autorregresiva y en 1978 y 1979, Akaike desarrolló una extensión bayesiana del AIC a la que denominó Criterio de Información Bayesiana (que se indica BIC) y demostró mediante simulación que este método es menos proclive a sobreestimar el valor de p . Este está definido por

$$BIC(e) = n\log(\hat{\sigma}_A^2) - (n - e)\log\left(\frac{n - e}{n}\right) + e\log(n) + e\log\left(\frac{\hat{\sigma}_X^2 - \hat{\sigma}_A^2}{e\hat{\sigma}_A^2}\right) \quad (5.1.4)$$

donde e es el número de parámetros estimados, n el número total de variables observadas, $\hat{\sigma}_X^2$ es la varianza muestral de la serie y $\hat{\sigma}_A^2$ es la estimación máximo verosímil de la varianza residual. El método consiste en elegir el modelo que minimiza $BIC(e)$.

Hurvich y Tsai propusieron en 1989 una versión corregida del criterio de Akaike original (se lo denominó AICC) que toma el sumando $2e$ de AIC y lo reemplaza por $\frac{2e.n}{n-e-1}$ que penaliza aún más la incorporación de nuevos parámetros al modelo, eliminando de esa forma la sobreestimación del criterio de Akaike.

5.2. Reglas prácticas para la identificación de procesos

En la práctica, los métodos de identificación y estimación propuestos en la sección anterior puede convertirse en una tarea larga y complicada. A continuación se esbozarán los pasos a seguir para simplificar la búsqueda:

1. Es importante entender que es lo miden los datos, cual es el significado dentro de la disciplina en la que se encuadran y conocer dentro de lo posible los métodos con que ellos se obtuvieron. Esto sirve para conocer ciertos aspectos sobre el comportamiento de los datos y también es útil como elemento de juicio entre modelos diferentes igualmente aceptables según los criterios de identificación.
2. El análisis de la representación gráfica de los datos nos permitirá observar si se satisfacen las condiciones básicas de estacionariedad: media y varianza constantes en el tiempo. También se puede descubrir la presencia de periodicidades propias de las componentes estacionales. Si existe una tendencia debe observarse si la dispersión en los datos varía con la tendencia. En ese caso, deben transformarse los datos para estabilizar la varianza.
3. Una vez estabilizada la varianza se debe observar si hay tendencia y/o estacionalidad, en cuyo caso se aplicará algunos de los métodos discutidos en la sección 3: método clásico o método de la diferenciación. En este último caso se aplicará el operador diferencia de tamaño d hasta que se elimine la estacionalidad y luego se usará el operador diferencia tantas veces como sea necesario para deshacerse de la tendencia.

4. Cuando los datos no presenten desviaciones evidentes de estacionariedad, se intentará ajustar por un modelo ARMA. Las funciones de autocorrelación muestral y autocorrelación parcial muestral permitirán seleccionar de forma descriptiva los posibles modelos que ajustan observando los coeficientes de correlación que son significativamente distintos de cero. Por lo general se considera que un valor es significativo si en módulo supera el valor $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Esto proviene de suponer que si las variables e_t no estuvieran correlacionadas entre sí entonces los coeficientes de correlación tendrían una distribución muestral normal con media cero y una cierta desviación estándar, esto es, que en el 95% de los casos los coeficientes caerán entre la media ($= 0$) más menos 1.96 de desviación estándar (que se suele redondear a 2), y solamente el 5% de los coeficientes de correlación se apartarán de una media cero en $\pm 1,96$ de desviación estándar. Es decir, el coeficiente de correlación es estadísticamente significativo si con un 95% de confianza la media de las correlaciones es cero.

Una vez elegidos, se estiman los parámetros de cada uno de ellos. Es conveniente establecer intervalos de confianza para los coeficientes, pues cuando el intervalo de algún coeficiente incluye el cero se puede considerar como modelo alternativo el que corresponde a forzar en el modelo original que dicho coeficiente sea cero.

5. La decisión sobre el modelo que mejor ajusta a los datos se realiza usando los criterios de identificación de procesos vistos en la sección anterior. El criterio corregido de Akaike y el criterio de información bayesiana son los que mejor desempeño tienen. Sin embargo, cuando hay más de un modelo adecuado según estos criterios se recurre a tomar consideraciones como el análisis de los residuos, simplicidad del modelo y facilidad en su interpretación desde el punto de vista de la disciplina en la que se está estudiando la serie de tiempo en consideración.

Capítulo 6

Aplicación

Las imágenes satelitales proporcionan diversas herramientas para discriminar entre masas vegetales en una región fitogeográfica, siendo el índice diferencial normalizado de vegetación, NDVI, una de ellas.

De este indicador es posible obtener numerosas variables, tales como contenido de agua en las hojas, productividad neta de la vegetación, contenido de clorofila en la hoja, evapotranspiración potencial, etc. El NDVI varía entre -1 y +1, aunque es frecuente el tratamiento de valores reparametrizados del índice; cuanto más próximo a 1, mayor resulta el vigor vegetal (Chuvieco [6]). Diferentes autores han estudiado series temporales de este índice. Por ejemplo, Barbosa et al [5] emplearon una serie mensual correspondiente a 20 años del NDVI en la región noreste de Brasil para estudiar el comportamiento temporal del índice en la región.

En este capítulo nos propusimos encontrar un modelo ARIMA para explicar el comportamiento del NDVI en la selva Misionero-Brasileña. Esta zona corresponde a la región fitogeográfica Paranaense (Cabrera [4]), que comprende la provincia de Misiones y gran parte de la provincia de Corrientes. El estudio se basó en una serie de tiempo mensual de 17 años de NDVI de la zona (período 1982-1998). Los datos fueron provistos por CONAE (Comisión Nacional de Actividades espaciales) y fueron , producidas por el sensor AVHRR (Advanced Very High Resolution Radiometer) que se encuentra a bordo de satélites meteorológicos de la serie NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). Este sensor genera imágenes en cinco canales o bandas, cuyas combinaciones posibilitan la determinación de diferentes indicadores de propiedades biofísicas, entre ellos el NDVI que se calcula con datos de los canales 1 y 2 del sensor, según:

$$NDVI = \frac{Ch2 - Ch1}{Ch1 + Ch2}$$

donde $Ch1$ y $Ch2$ son los valores provistos por las bandas 1 y 2 del AVHRR, respectivamente.

El Gráfico 6.1 muestra los datos de la serie de NDVI objeto de análisis y el 6.2, el gráfico de las funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie.

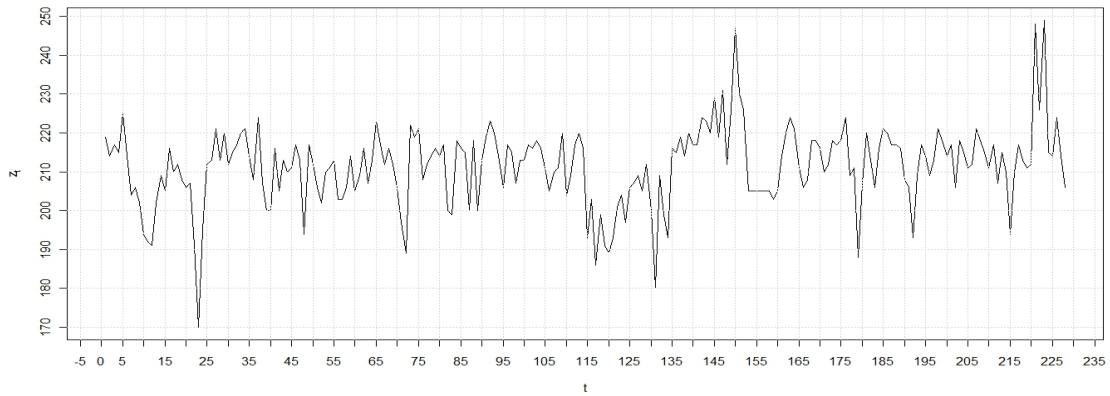


Gráfico 6.1: Serie de tiempo de NDVI

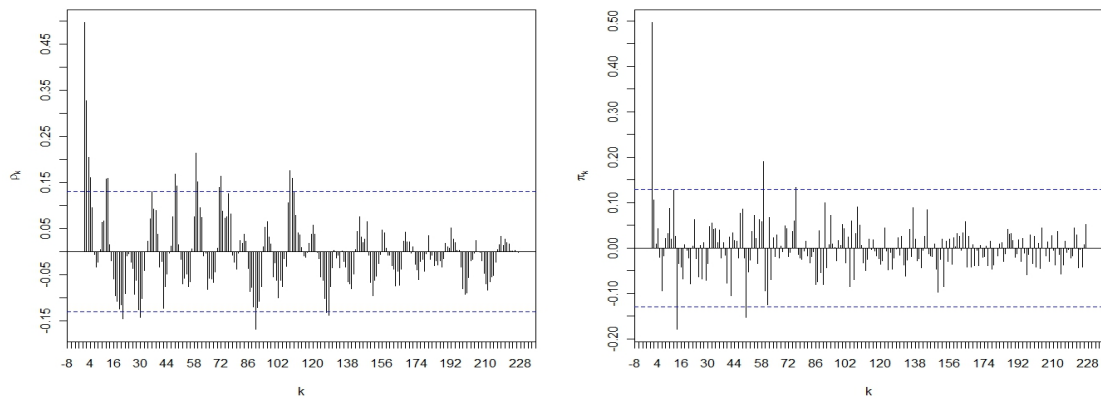


Gráfico 6.2: Función de autocorrelación simple de la serie (izq.). Función de autocorrelación parcial de la serie (der.)

De la simple observación de ρ_k y π_k (Gráfico 6.2) se dificulta la propuesta de un modelo ARIMA que ajuste razonablemente los datos de la serie, ya que ambas funciones muestran correlaciones significativas (fuera de las bandas de confianza) para rezagos altos. Por otro lado, en la Gráfico 6.1 se puede apreciar a partir del dato 115 un aumento en la tendencia que se detiene aproximadamente en el dato correspondiente a $k = 150$. Ello nos alentó a analizar por separado dos sub-series de la serie original; por un lado los datos entre 1 y 115, y por otro, los datos entre 116 y 228. Denotaremos a estas series como $\{z1_t\}$ y $\{z2_t\}$ respectivamente.

A continuación presentamos el gráfico de $\{z1_t\}$:

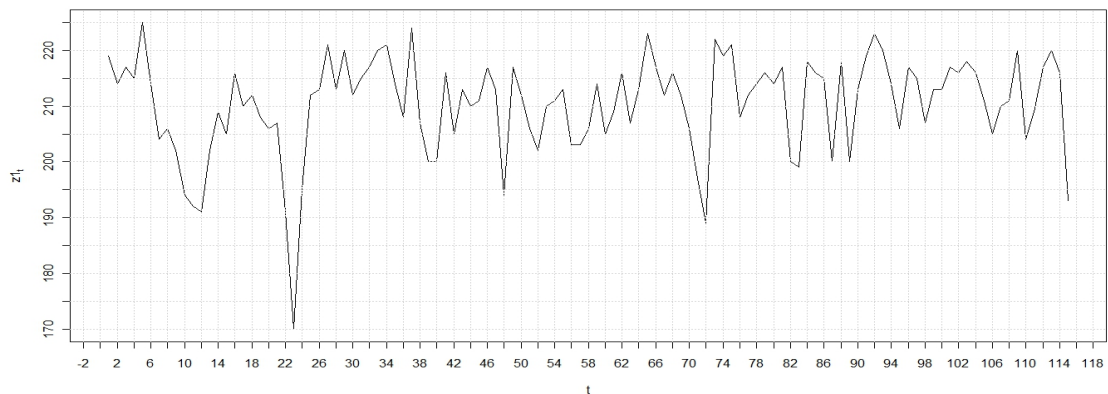


Gráfico 6.3: Serie de tiempo $\{z1_t\}$ de NDVI en la región Paranaense.

Restamos a $\{z_{1t}\}$ su media para conseguir una serie de media cero y estabilizamos su varianza aplicando la transformación logaritmo (ver sección 3.3). Resulta entonces que las funciones de autocorrelación simple y parcial muestrales de la serie corregida corresponden a las exhibidas en el Gráfico 6.4. A los efectos de no complicar en exceso la notación, de ahora en más $\{z_{1t}\}$ designará la versión corregida de $\{z_{1t}\}$.

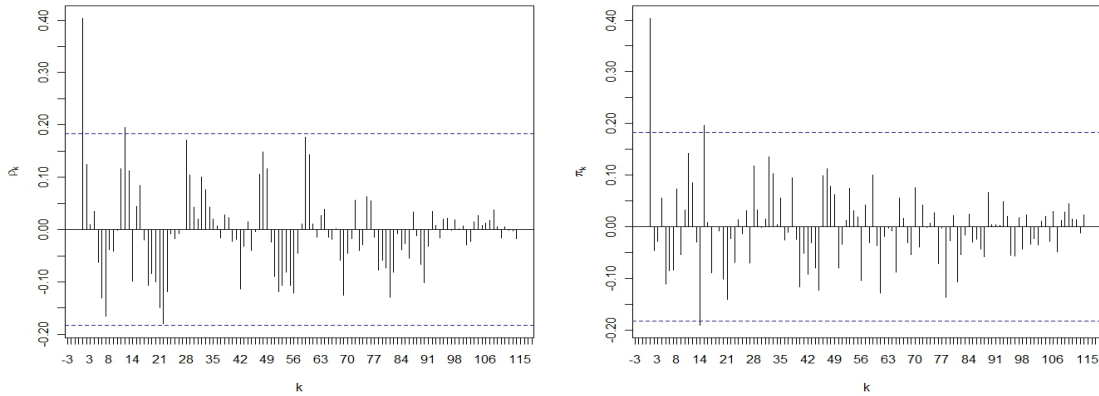


Gráfico 6.4: Funciones de autocorrelación simple y parcial de $\{z_{1t}\}$

A través del criterio de Akaike Corregido (AICC) y usando el método de Yule-Walker, el programa R propuso un modelo AR(1) para la serie. Pero atendiendo a las funciones de autocorrelación se propone finalmente un modelo ARMA(1,1):

$$Z_{1t} = \phi Z_{1t-1} + \theta A_{1t-1} + A_{1t}$$

donde $\{A_{1t}\}$ es un proceso de ruido blanco y ϕ y θ son parámetros a estimar.

Estimamos ϕ y θ por el método de Mínimos Cuadrados Condicionales:

$$\hat{\phi} = 0,3206 \quad \hat{\theta} = 0,1198$$

El gráfico 6.5, muestra el patrón de los residuos estandarizados correspondientes al modelo ajustado a la serie.

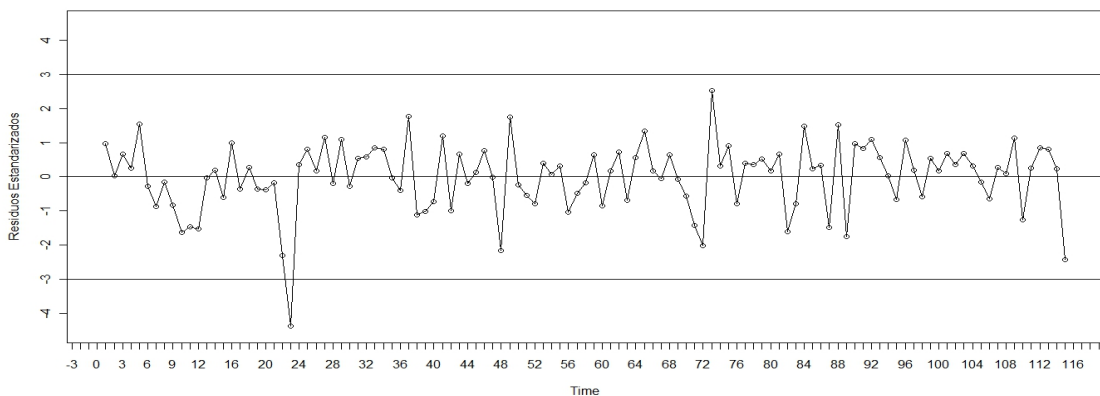


Gráfico 6.5 Residuos estandarizados para el ARMA(1,1) ajustado a la serie $\{z_{1t}\}$.

Si el modelo fuese adecuado, la serie generada a partir de la diferencia entre la serie observada y la estimada debería comportarse, una vez estandarizada, como un proceso de ruido blanco con media 0 y

varianza 1. Esta serie recibe el nombre de “serie de residuos estandarizados”, o simplemente “residuos estandarizados”. Un análisis descriptivo de los residuos estandarizados se puede apreciar a través de los siguientes gráficos:

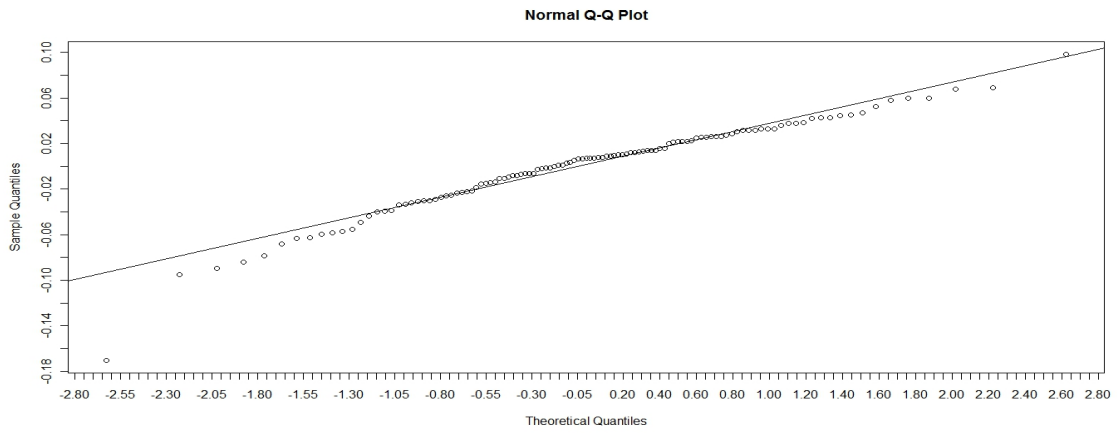


Gráfico 6.6: Cuantiles de los residuos vs. cuantiles de una normal estándar.

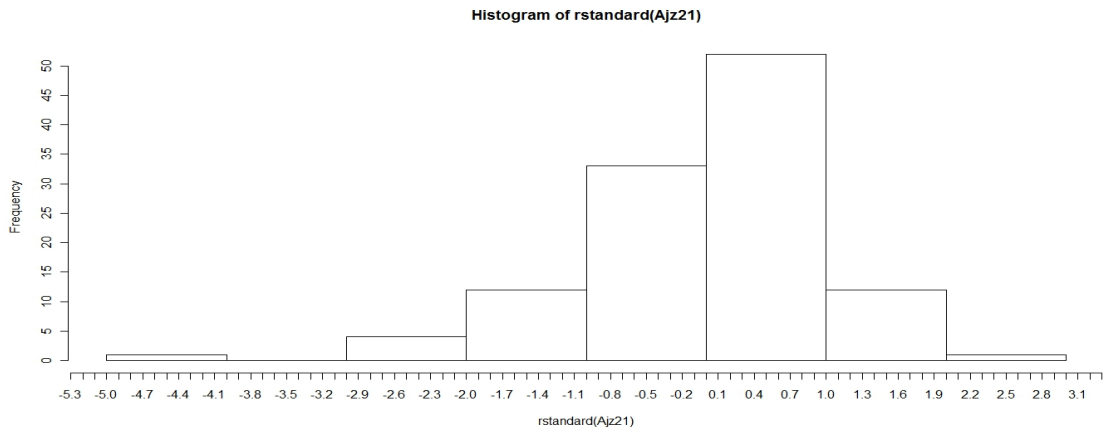


Gráfico 6.7: histograma de los residuos estandarizados.

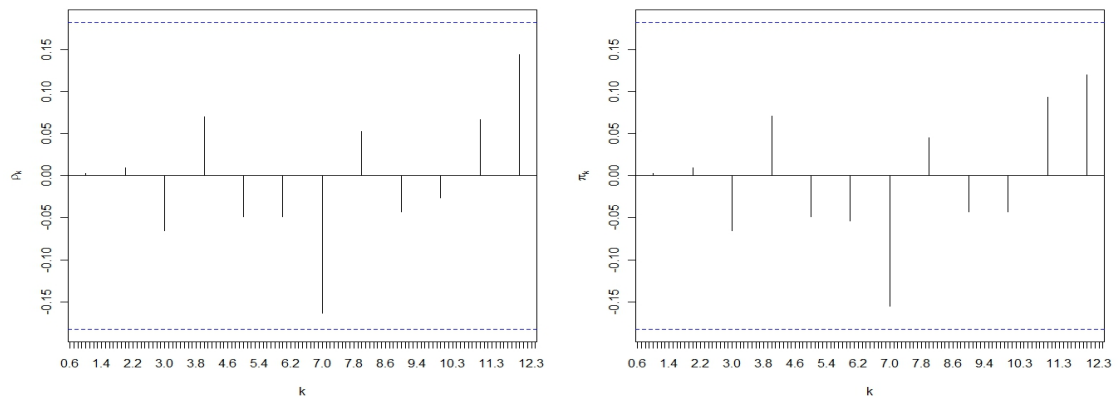


Gráfico 6.8: Funciones de autocorrelación simple y parcial muestrales de los residuos estandarizados.

Se observa que los residuos estandarizados no están correlacionados, aunque el supuesto de normalidad parece no satisfacerse (es evidente la asimetría en el gráfico 6.7). Teniendo en cuenta que $\{z_{1t}\}$ constituye el pasado “ más remoto” de la serie original, concentraremos nuestra atención en el análisis de la serie $\{z_{2t}\}$, la historia más reciente de la serie de NDVI objeto de estudio (valores de la serie

de $t = 116$ a $t = 228$). El siguiente gráfico muestra el perfil de estos datos corregidos (se estabilizó su varianza con la ayuda de la función logaritmo y se restó su media). Igual que procedimos con $\{z1_t\}$, de ahora en adelante $\{z2_t\}$ denotará a la serie $\{z2_t\}$ estabilizada o corregida:

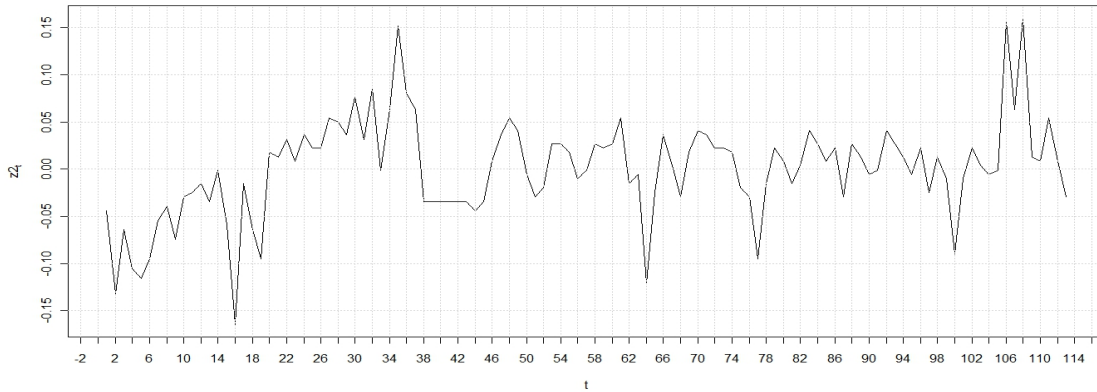


Gráfico 6.8: Serie $\{z2_t\}$ corregida.

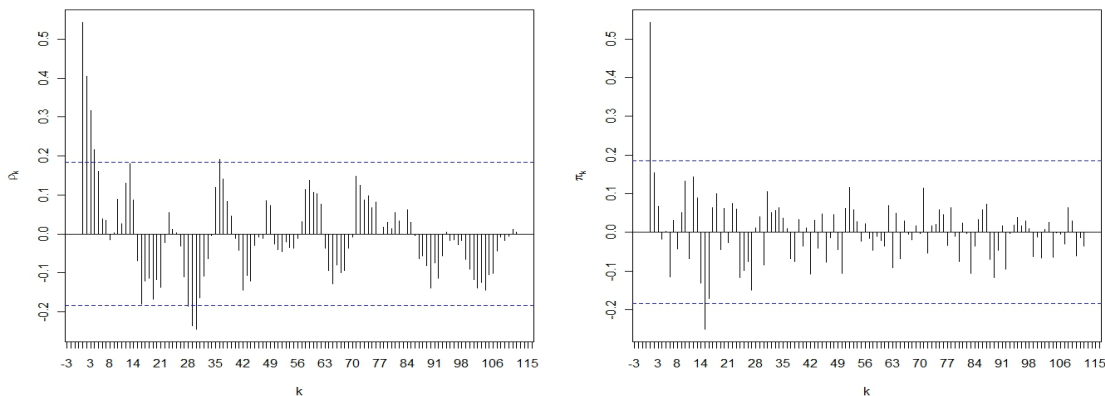


Gráfico 6.9: Funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie $\{z2_t\}$ corregida.

Analizando descriptivamente las autocorrelaciones, una opción sería quedarnos con un modelo autorregresivo y proponer un modelo AR(15). Cuando le sugerimos a R este modelo, en base al criterio de Akaike Corregido (AICC) y usando el método de Yule-Walker, el programa R propone un modelo AR(2). Sin embargo la función de autocorrelación parcial de la serie no muestra evidencias de que la autocorrelación parcial de orden 2 sea estadísticamente significativa, por lo que no se justificaría incluir un término autorregresivo de orden 2 en el modelo. Se pensó entonces en un modelo ARMA(1,4), atendiendo a las autocorrelaciones simples y parciales más notables fuera de las bandas en el gráfico 6.9:

$$Z2_t = \phi Z2_{t-1} + \theta_1 A2_{t-1} + \theta_2 A2_{t-2} + \theta_3 A2_{t-3} + \theta_4 A2_{t-4} + A2_t$$

donde $\{A2_t\}$ es un proceso de ruido blanco y ϕ y $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ son parámetros a estimar.

Cabe mencionar en este punto que un modelo constituye una representación de la realidad. Pueden formularse diferentes modelos y el hecho de quedarnos con uno, no implica que no exista otro que pueda superarlo sobre la base de ciertos criterios o requisitos que se desee satisfacer, como por ejemplo la parsimonia.

Las estimaciones de los parámetros involucrados en el modelo ARMA(1,4) propuesto se muestran a continuación:

$$\hat{\phi} = 0,6715, \quad \hat{\theta}_1 = 0,2416, \quad \hat{\theta}_2 = 0,0413, \quad \hat{\theta}_3 = 0,0649, \quad \hat{\theta}_4 = 0,0495$$

El gráfico 6.10 muestra los residuos estandarizados una vez que se ajustó a la serie z_{2t} un modelo ARMA(1,4).

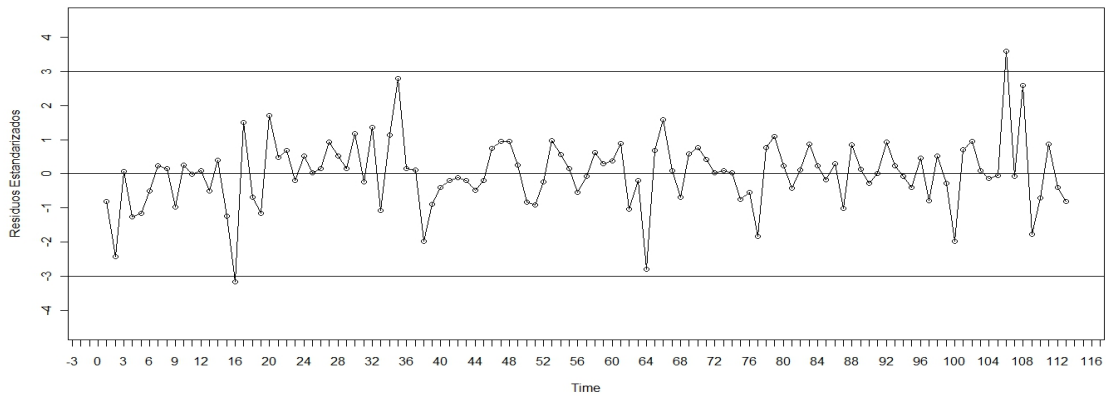


Gráfico 6.10: Residuos estandarizados para el ARMA(1,4) ajustado a la serie $\{z_{2t}\}$.

El análisis descriptivo de los residuos muestra que el modelo es aceptable. Este estudio puede apreciarse a través de los gráficos 6.11, 6.12 y 6.13.

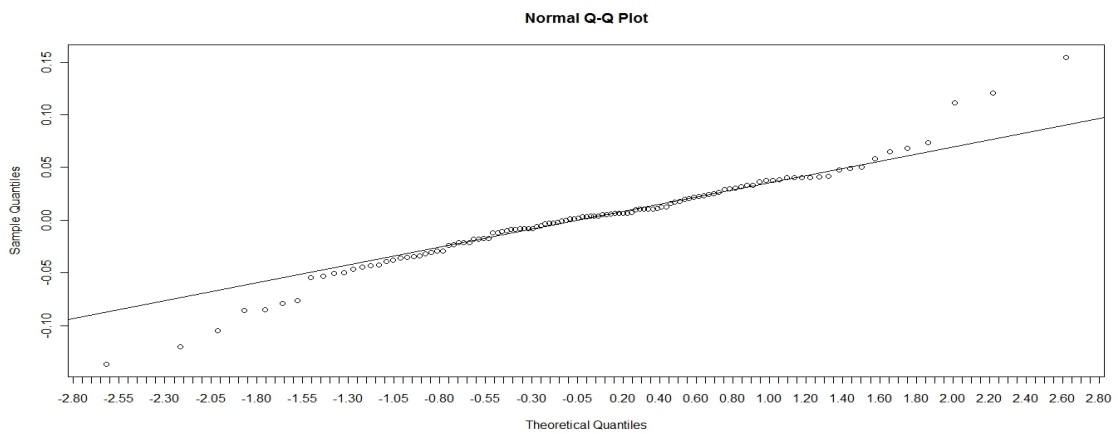


Gráfico 6.11: Cuantiles de los residuos vs. cuantiles de una normal estándar.

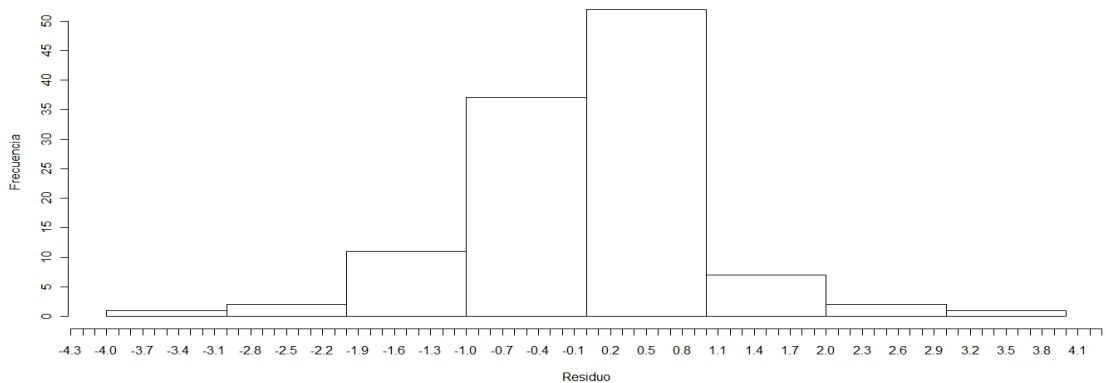


Gráfico 6.12: histograma de los residuos estandarizados.

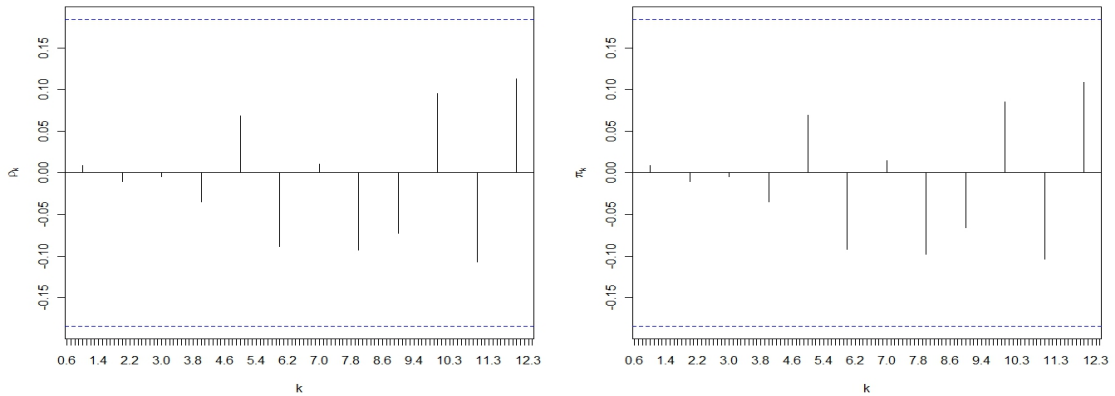


Gráfico 6.13: Funciones de autocorrelación simple y parcial muestrales de los residuos estandarizados.

Debido a que la serie original de NDVI (Gráfico 6.1) presenta un cambio en la tendencia entre $t = 115$ y $t = 150$ aproximadamente, y teniendo presente que lo importante será poder predecir valores futuros de la serie a partir de su pasado más reciente, consideramos sólo los últimos 7 años de la serie. A esta nueva serie la llamamos $\{z_t\}$ y sus valores corregidos y funciones de autocorrelación simple y parcial se muestran en los siguientes gráficos:

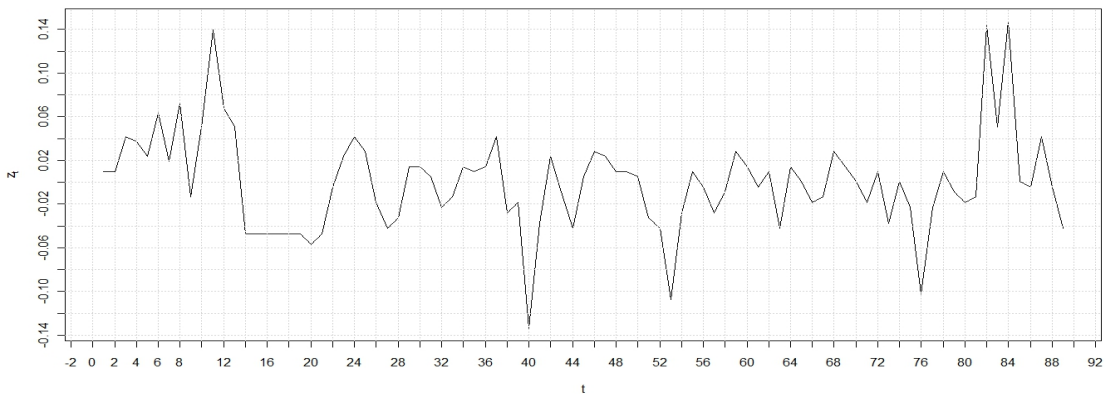


Gráfico 6.14: Datos correspondientes a la serie $\{z_t\}$.

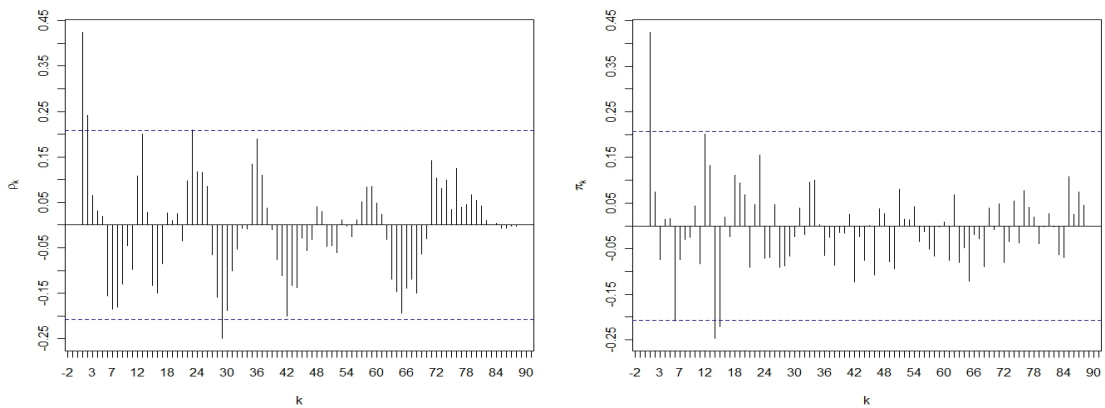


Gráfico 6.15: Funciones de autocorrelación simple y parcial de la serie $\{z_t\}$ corregida.

A partir de las correlaciones proponemos un modelo AR(15) que comparando a través del criterio AICC y el método de Yule-Walker con modelos autorregresivos de menor orden, es desplazado por un modelo AR(1):

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + A_t$$

donde $\{A_t\}$ es un proceso de ruido blanco y ϕ un parámetro a estimar.

Se estimó el valor de ϕ por el método de Yule-Walker, obteniéndose $\hat{\phi} = 0,4243$

Los gráficos 6.16 a 6.19, muestran los residuos estandarizados una vez que se ajustó la serie $\{z_t\}$ un modelo AR(1) y un análisis descriptivo de los mismos.

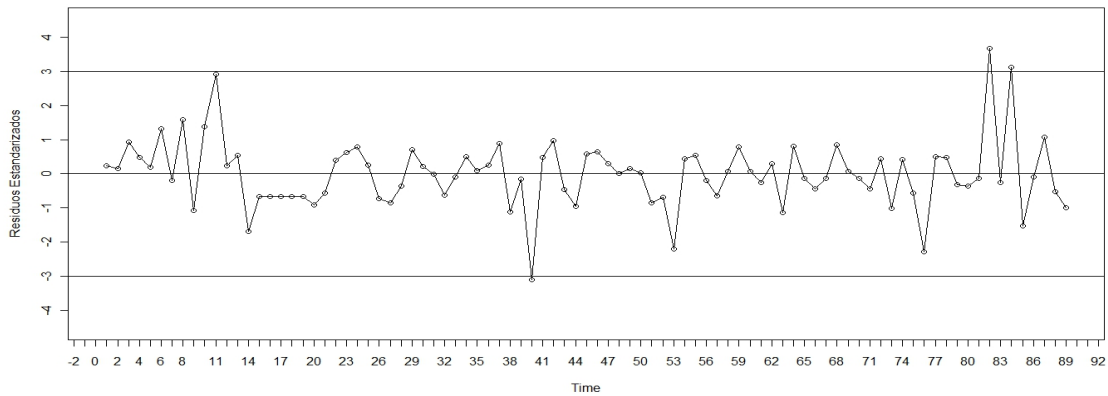


Gráfico 6.16: Residuos estandarizados para el modelo AR(1) ajustado a la serie $\{z_t\}$.

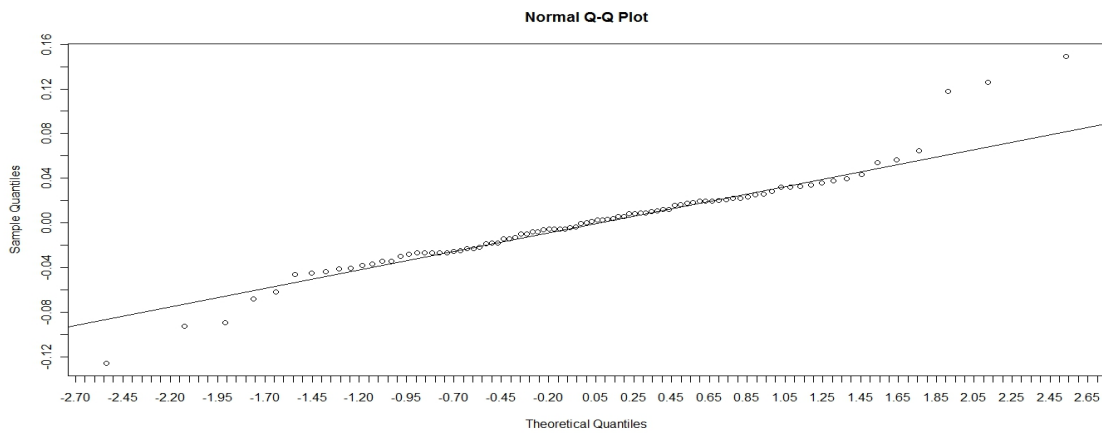


Gráfico 6.17: Cuantiles de los residuos vs. cuantiles de una normal estándar.

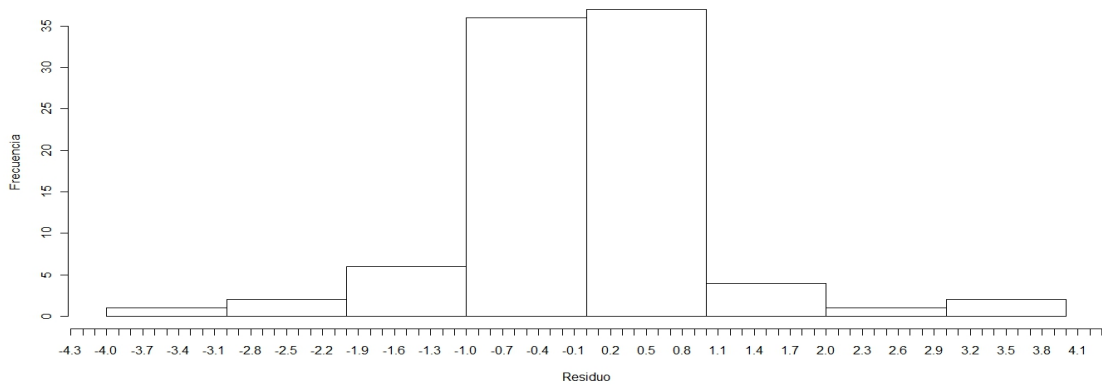


Gráfico 6.18: histograma de los residuos estandarizados.

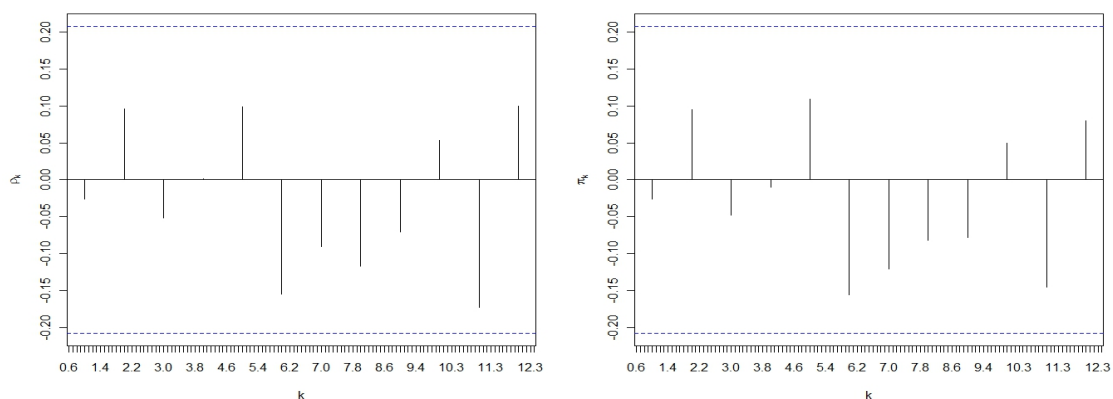


Gráfico 6.19: Funciones de autocorrelación simple y parcial de los residuos para el ajuste AR(1) obtenido para la serie $\{z_t\}$ corregida.

El análisis previo evidencia que el modelo propuesto es adecuado ya que se cumplen sobre los residuos los supuestos asumidos, con lo cual sería factible su utilización para realizar predicciones a corto y mediano plazo del NDVI de la región Paranaense.

Bibliografía

- [1] Leiva, R. 1995. Introducción al Análisis de las series de tiempo. Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo. ISBN 9-503-90057-3 e-ISBN 978-9-503-90057-4.
- [2] Brockwell, P., Davis, R. 2002. Introduction to Time Series and Forecasting. Springer Texts in Statistics. ISBN 0-387-95351-5. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.
- [3] Peña Sánchez de Rivera D. 1993. Estadística, modelos y métodos: Fundamentos 2. Modelos lineales y series temporales. Alianza Universal Textos. ISBN 84-206-8110-5 e-ISBN 978-8-420-68993-7. Alianza Editorial.
- [4] Cabrera, ÁL (1976) Regiones fitogeográficas argentinas. En Kugler WF (Ed.) Enciclopedia argentina de agricultura y jardinería. Tomo 2. 2a edición. Acme. Buenos Aires. Argentina. Fascículo 1. pp. 1-85.
- [5] Barbosa, HA, Huetea, AR, Baethgenb, WE (2006) A 20-year study of NDVI variability over the Northeast Region of Brazil. *Journal of Arid Environments* 67 288-307.
- [6] Chuvieco Salinero E (1996) Teledetección Ambiental Capitulo 2, 57-59. Editorial Ariel SA.