Mejores constantes con pesos relativas a operadores laterales

por Raúl Emilio Vidal

Presentado ante la
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo 2015

Directora: Dra. María Silvina Riveros

Codirectora: Dra. Linda Victoria Saal

A mi padre Luis Vidal

Resumen

En esta memoria se estudian problemas de acotación de operadores integrales singulares e integrales fraccionarias que involucran funciones maximales y pesos laterales de Sawyer.

El primer problema a abordar es el estudio de la acotación de la función maximal fraccionaria lateral. Se logra determinar cómo es la mejor dependencia de la norma, $L^p(v) \to L^q(u)$, respecto a diferentes clases de pares de pesos, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Las acotaciones obtenidas son tanto fuertes como débiles.

Luego se trabaja con la integral fraccionaria de Weyl, W_α, logrando establecer cómo es la dependencia de la norma, $L^p(v) \to L^q(u)$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, respecto a la clase de peso $A^+_{p,q}$.

Finalmente se estudia el problema de la acotación de un operador integral singular, T^+, (con núcleo K soportado en la semirrecta $(-\infty, 0)$). Dado un peso w, función positiva localmente integrable, se analiza la norma de T^+ en medida $w(x)dx$ estudiando como depende esta norma del peso w, cuando w es un peso en la clase de Sawyer A^+_1.

Clasificación (2010):

42B20 : Singular and oscillatory integrals (Calderón-Zygmund, etc.)

42B25: Maximal functions, Littlewood-Paley theory.

Palabras Claves: Operadores integrales de Calderón-Zygmund, función maximal de Hardy-Littlewood lateral, función maximal fraccionaria lateral, integral fraccionaria lateral, pesos de Sawyer, desigualdades en norma con pesos, mejores constantes.

Abstract

In this Thesis we study the weighted norm, given by strong or weak inequalities, of the following operators: the one-sided singular integral, the one-sided fractional operator, and the one-sided maximal fractional operator.

The first problem we consider is the study of the boundedness of the one-sided maximal fractional function. We obtain the best dependency of the norm, $L^p(v) \to L^q(u)$, in relation to different classes of pairs of weights with $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. We obtain strong and weak weighted bounds.

We also work with Weyl's and the Riemann-Liouville fractional integrals, W_α and R_α. We establish the dependency of the norm, $L^p(v) \to L^q(u)$, with $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, in relation to the class $A^+_{p,q}$ or $A^-_{p,q}$.

Finally, the last problem we deal is the study of weighted inequalities of a singular integral operator with kernel K supported in $(-\infty, 0)$, T^+. We analyze the norm of T^+ respect to the measure $w(x)dx$, when $w \in A^+_1$ (the Sawyer's weight class).

Math. Subject Classification (2010):

42B20 : Singular and oscillatory integrals (Calderón-Zygmund, etc.)

42B25: Maximal functions, Littlewood-Paley theory.

Key words and phrases: Calderón-Zygmund integral operators, One-sided Hardy-Littlewood maximal operator, Ones-sided maximal fractional operator, One-sided integral fractional operators, Sawyer weights, Weighted inequalities, Best constants.

Índice general

Introducción

En esta tesis se abordarán algunos problemas del análisis armónico para operadores laterales. Dado un operador T actuando en el espacio de funciones medibles de un intervalo (a,b), con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, decimos que es un operador lateral si el valor de $Tf(x)$ solo depende de $(a,x]$, es decir $Tf(x) = T(f\chi_{(a,x]})(x)$, (o si el valor de $Tf(x)$ solo depende de $[x,b)$, es decir $Tf(x) = T(f\chi_{[x,b)})(x)$). Un ejemplo sencillo de un operador lateral es $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ para f función medible en $(0,\infty)$.

En análisis armónico un problema de gran interés es ver la acotación de operadores en los espacios $L^p(\mu)$ donde μ es una medida. En la mayoría de los casos se considera medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue y por lo tanto se estaría considerando a los espacios $L^p(w)$ donde w es una función localmente integrable y positiva, a estas funciones las llamamos pesos. Se estudian acotaciones de la forma

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |Tf(t)|^p\, u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^q\, v(t)dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

o de la forma

$$u(\{t \in \mathbb{R} : |Tf(t)| > \lambda\})^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^q\, v(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \lambda > 0,$$

con u, v pesos. A la primera desigualdad se la llama acotación de tipo fuerte mientras a la segunda de tipo débil, pues la primera implica la segunda.

Los operadores laterales aparecen de forma natural tanto en el análisis armónico como en teoría ergódica. Desigualdades con pesos para los operadores laterales están conectados al siguiente resultado clásico de la teoría ergódica dado por Dunford y Schwartz, ver [**11**].

Teorema Maximal Ergódico: Sea (X,μ) un espacio de medida y sea

$$\mathcal{T} = \{T^t : t > 0\}$$

un semigrupo de operadores fuertemente medibles en $L^1(X,\mu)$ *con* $||T^t||_1 \leq 1$ *y* $||T^t||_\infty \leq 1$. *Sea*

$$M_{\mathcal{T}}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \left| \int_0^h T^t f(x)\,dt \right|.$$

Entonces existe una constante $C > 0$ *tal que*

$$\mu(\{x \in X : M_{\mathcal{T}}f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_X |f(x)|\,d\mu,$$

para todo $\lambda > 0$ *y toda* $f \in L^1(\mu)$.

Este teorema dá una primera información sobre las desigualdades con pesos para los operadores laterales. En efecto, si tomamos $X = \mathbb{R}$, con la medida $w(t)dt$ y $T^t f(x) = f(x+t)$. La función maximal ergódica, (definida en el teorema), es la función maximal lateral dada por

$$M^+f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \left| \int_0^h f(x+t)\,dt \right| = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right|,$$

es trivial ver que T^t es una contracción en $L^\infty(w)$ y de forma sencilla se ve que T^t es contracción en $L^1(w)$ si y sólo si w es no decreciente. Luego por el teorema ergódico concluímos que las funciones no decrecientes son buenos pesos para la función maximal lateral, pues se tiene la acotación débil.

Por otro lado, una clase de operadores muy estudiados en el análisis armónico son los llamados operadores integrales de Calderón-Zygmund. A continuación definiremos un ejemplo clásico de estos operadores donde quedará manifiesto su importancia en matemáticas.

Consideremos el semiplano superior $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ y f una función medible en $\mathbb{R}$. Al estudiar la ecuación diferencial dada por:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

la solución es una función armónica u en Ω que viene dada por la convolución con el núcleo de Poisson $P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$u(x,y) = P_y * f(x) = \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t) f(t)\,dt,$$

donde $\{P_y\}$ es una aproximación de la identidad.

Es natural preguntarse cuál es la función $v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y)$ de forma que, $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en Ω. La función v viene dada por la convolución con el núcleo de Poisson conjugado $Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{y^2+x^2}$,

$$v(x,y) = Q_y * f(x) = \int_{\mathbb{R}} Q_y(x-t)f(t)\,dt.$$

Ahora $\{Q_y\}$ no es una aproximación de la identidad y cuando tomamos límite de y que tiende a 0 obtenemos

$$\frac{1}{\pi}v.p.(\frac{1}{x} * f)(x) = \lim_{y\to 0} Q_y * f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|y|>\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}\,dy,$$

es decir se obtiene el valor principal de $\frac{1}{x}*f$ como distribución temperada. Esto define un operador que a cada f le asigna $\frac{1}{\pi}v.p.(\frac{1}{x} * f)(x)$ y éste se llama Transformada de Hilbert,

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi}v.p.(\frac{1}{x} * f)(x).$$

Este operador es el ejemplo clásico de operador integral de Calderón-Zygmund y sirve como modelo en la teoría de Calderón-Zygmund.

Un resultado clásico de esta teoría es poder controlar estos operadores en norma $L^p(w)$, $1 < p < \infty$, por la función maximal de Hardy-Littlewood. Puede verificarse la siguiente desigualdad de tipo Coifman

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\, w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\, w(x)dx,$$

donde $w(x)$ es un peso de la clase de Mukenhoupt y M es la función maximal de Hardy-Littlewood.

Tanto la transformada de Hilbert como la función maximal de Hardy-Littlewood no son operadores laterales. Aimar, Forzani y Martín-Reyes, en [**1**], introducen las condiciones que tiene que cumplir un operador integral de Calderón-Zygmund para que sea un operador lateral. Además en este trabajo demuestran que estos operadores están controlados por la función maximal lateral con pesos de Sawyer. Esta acotación es mejor que la anterior en el sentido que las funciones no decrecientes no son pesos de Mukenhoupt, pero como habíamos mencionado anteriormente, son buenos pesos para la función maximal lateral. Es decir esta clase de funciones son pesos de Sawyer. De esta forma se logra la acotación para una mayor cantidad de pesos.

Por otro lado si consideramos la transformada de Fourier del operador diferencial laplaciano obtenemos $\widehat{(-\Delta f)}(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{f}(\xi)$. Si reemplazamos el exponente 2 por uno general β se define el laplaciano fraccionario como

$$\widehat{(-\Delta f)^{\beta/2}}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{\beta}\widehat{f}(\xi).$$

Es de especial interés cuando el exponente es negativo en el rango $-n < \beta < 0$. Para estos exponentes hay una realización del operador formal como un operador integral. Para este caso se define el potencial de Riez o integral fraccionaria por

$$I_\alpha(f) = \gamma(\alpha)(-\Delta)^{-\alpha/2}(f) \qquad\qquad \text{para todo } \ 0 < \alpha < n,$$

donde $\gamma(\alpha)$ sólo depende de α. La forma integral del potencial de Riez es

$$I_\alpha(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy.$$

Este operador ha sido estudiado a lo largo de las últimas décadas y tiene una gran conexión con la teoría de las ecuaciones diferenciales. Las primeras desigualdades en normas fueron dadas por Hardy y Littlewood en 1928. De forma análoga a lo que pasa para los operadores integrales de Calderón-Zygmund existe una función maximal que nos da una desigualdad de tipo Coifman

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^p\, w(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f(x)|^p\, w(x)dx,$$

donde M_α es la función maximal de Hardy-Littlewood fraccionaria.

La integral fraccionaria tiene sus versiones laterales, estos son la integral fraccionaria de Weyl y la integral fraccionaria de Riemann-Liouville, que son operadores de convolución con núcleos soportados en $(-\infty, 0)$ y $(0,\infty)$ respectivamente. Estos operadores son controlados por funciones maximales fraccionarias laterales y fueron estudiados por Andersen y Sawyer, ellos determinaron las clases pesos que los controlan en normas.

En las últimas décadas se han realizado muchos avances en la teoría estudiando cómo dependen las acotaciones de los operadores de Calderón-Zygmund y el potencial de Riez respecto a los pesos w. En este trabajo se generalizan algunos de estos resultados para operadores laterales.

Esta memoria se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 1, daremos definiciones y herramientas básicas ya conocidas que necesitaremos a los largo del trabajo. También en este capítulo se exponen algunos resultados sencillos que sirven en demostraciones posteriores. En el Capítulo 2, abordaremos problemas respecto a operadores fraccionarios laterales, se determinara la mejor constante de acotación fuerte y débil respecto de pesos para la función maximal fraccionaria lateral y la mejor constante de acotación fuerte y débil respecto de pesos para la integral fraccionaria lateral. Para ello se desarrollan resultados de extrapolación. En el Capítulo 3, se desarrolla la teoría necesaria para estudiar cómo depende la acotación de operadores integrales laterales de Calderón-Zygmund respecto a los pesos de Sawyer. En el Capítulo 4, expondremos algunos resultados teniendo en cuenta el trabajo [**42**] de Martín-Reyes y de la Torre que dan otro punto de vista a los resultados de los capítulos previos. Por último, en el Cápitulo 5, se expondrán los resultados más importantes que se obtuvieron, también se analizará como a partir de estos resultados se podría seguir trabajando a futuro y cuáles son los mayores desafíos para ello.

Vamos a considerar que el lector tiene conocimientos de la teoría de Calderón-Zygmund de integrales singulares y operadores fraccionarios. Aunque en los preliminares se expondrá los resultados más básicos que utilizaremos de esta teoría.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentaremos los principales conceptos y herramientas que son necesarios para el planteo de los problemas y resultados que se van a desarrollar en esta tesis, con la intención de hacer esta memoria lo más accesible posible. Utilizaremos definiciones estándar muy bien conocidas, que podemos encontrar en [**12**], [**16**] y [**3**].

1. Pesos de Muckenhoupt y operadores integrales

Comenzaremos definiendo diferentes formas de acotación que serán usadas.

Sean (X, ν) e (Y, μ) espacios de medida, T un operador sublineal definido de $L^p(X, \nu)$ en las funciones medibles de Y y $1 \leq p, q \leq \infty$. Diremos que:

T es de tipo fuerte (p, q), si existe una constante $C > 0$ independiente de f tal que

$$||Tf||_{L^q(Y,\mu)} \leq C||f||_{L^p(X,\nu)}.$$

T es de tipo débil (p, q), con $q < \infty$, si para todo $\lambda > 0$ existe una constante $C > 0$ independiente de f tal que

$$\lambda\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C||f||_{L^p(X,\nu)}.$$

Escribimos $||Tf||_{L^{q,\infty}(Y,\mu)} = \sup_{\lambda>0} \lambda\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}}$.
Aunque $||Tf||_{L^{q,\infty}(Y,\mu)}$ no es una norma, en este caso tenemos

$$||Tf||_{L^{q,\infty}(Y,\mu)} \leq C||f||_{L^p(X,\nu)}.$$

La desigualdad tipo débil es similar a la conocida desigualdad de Chebyshev que afirma que si $f \in L^p(X, \mu)$, con μ medida regular, entonces

$$\lambda\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})^{\frac{1}{q}} \leq C||f||_{L^p(X,\mu)}.$$

Ahora enunciaremos dos resultados bien conocidos sobre acotación de operadores que son necesarios para desarrollar el trabajo de esta tesis.

Lema 1.1 (desigualdad de Kolmogorov). *Sea T un operador sublineal definido en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y y de tipo débil $(1,1)$. Sea Q un cubo, llamamos $2Q$ al cubo con mismo centro que Q y lado el doble. Entonces para todo $0 < \epsilon < 1$ y f integrable con sop$(f) \subset 2Q$, se tiene,*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf|^\epsilon\right)^{\frac{1}{\epsilon}} \leq \frac{C}{2|Q|}\int_{2Q}|f|$$

donde C solo depende de T y ϵ.

Lema 1.2 (Interpolación de Marcinkiewicz). *Sean $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$, de tipo débil (p_0, p_0) y débil (p_1, p_1) respecto a la medida μ, regular y definida positiva. Entonces para todo $p_0 < p < p_1$, T es de tipo fuerte (p,p) respecto a la medida μ. Es más si*

$$\lambda^{p_0}\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq A_0 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0}\, d\mu(x),$$
$$\lambda^{p_1}\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq A_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1}\, d\mu(x),$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\, d\mu(x) \leq 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{1-\theta}A_1^{\theta}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\, d\mu(x),$$

donde $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_0}$.

1.1. Funciones Maximales.

Ahora vamos a introducir el concepto de funciones maximales que son fundamentales en el análisis armónico. Se consideran cubos Q que contengan al punto x, donde x no es necesariamente el centro de Q. Para la definición también se pueden considerar bolas B o otros conjuntos medibles que cumplen una serie de propiedades. Respecto al punto x, se le puede pedir que esté en el centro del cubo o la bola, como también en cualquier sitio de ésta. En todos estos casos todas las definiciones de los operadores maximales son equivalentes entre sí.

Definición 1.3. Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ definimos la función maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto x.

El teorema de diferenciación de Lebesgue establece que dada una función localmente integrable f, para casi todo punto x se cumple que

$$f(x) = \lim_{|Q| \to 0} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y)\, dy,$$

donde el límite se toma sobre todos los cubos Q que contienen a x. La función maximal tiene gran importancia en la matemática pues controla estos límites y nos permite generalizar el teorema fundamental del cálculo integral clásico para espacios de medida de Lebesgue. Además este operador esta íntimamente relacionado con los operadores integrales de Calderón-Zygmund que juegan un papel importante en las ecuaciones diferenciales parciales.

Sea $\mathcal{D}$ la familia de cubos diádicos en $\mathbb{R}^n$ definimos la función maximal diádica de Hardy-Littlewood como

$$M_d f(x) = \sup_{Q \subset \mathcal{D}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \in \mathcal{D}$ que contienen al punto x. Esta maximal es más chica que la anterior, es decir no se las puede comparar puntualmente pero si en término de normas p's para $p \geq 1$. En particular, para $p = 1$, existe una constante C_n que sólo depende de la dimensión tal que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_d f(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\, dx \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} M_d f(x)\, dx.$$

Dado $\epsilon > 0$, también definimos la siguiente función maximal:

$$M_\epsilon f(x) = (M(|f|^\epsilon)(x))^{1/\epsilon},$$

este operador es más grande que la maximal de Hardy-Littlewood si $\epsilon > 1$.

Ahora si consideramos una medida μ en $\mathbb{R}^n$ se pueden tomar las mismas definiciones pero considerando la medida μ en lugar de dx. En particular si es una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, μ viene dada por una función $g \geq 0$ y localmente integrable, definimos

$$M_g f(x) = \sup_Q \frac{1}{g(Q)} \int_Q |f(y)|\, g(y)dy,$$

donde, si E es un conjunto medible Lebesgue, $g(E) = \int_E g(y)dy$ y el supremo se toma sobre todos los cubos Q que contienen al punto x.

Como mencionamos anteriormente, en análisis armónico, interesa saber como están acotados los operadores. Es fácil ver, respecto a la medida de Lebesgue que la función maximal de Hardy-Littlewood es un operador acotado en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para $p = 1$, se tiene la siguiente desigualdad de tipo débil (1,1),

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx. \tag{1.1}$$

Por el **Lema** 1.2 (Interpolación de Marcinkiewicz), se obtiene que esta función maximal es acotada fuertemente (p, p) para $1 < p < \infty$. Es más

$$||M||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n p', \tag{1.2}$$

donde C_n depende sólo de la dimensión.

Acotaciones similares son válidas para las otras funciones maximales definidas en este apartado.

1.2. Operadores integrales de Calderón-Zygmund.

Ahora introduciremos uno de los operadores con los cuales vamos a trabajar en estas memorias. En la introducción se motivó la definición de estos, haciendo mención a la Transformada de Hilbert. Ahora vamos a dar la definición general.

Definición 1.4. Diremos que una función K en $L^1_{1oc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es un núcleo de Calderón-Zygmund, si satisface las siguientes propiedades:

- $||\widehat{K}||_\infty < c_1$,
- $|K(x)| < \frac{c_2}{|x|^n}$,
- $|K(x) - K(x-y)| < \frac{c_3|y|}{|x|^{n+1}}$, donde $|y| < \frac{|x|}{2}$,

Definimos el operador integral de Calderón-Zygmund T asociado al núcleo K por:

$$T(f)(x) = v.p.(K * f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B_\epsilon(x)^c} K(x-y)f(y)\,dy.$$

En lugar de usar bolas $B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < \epsilon\}$ podemos usar cubos en $\mathbb{R}^n$ que contengan a x y la definición es equivalente.

Dada una familia de operadores lineales, $\{T_\epsilon\}_{\epsilon>0}$, en un espacio de medida (X,μ) se define el operador maximal asociado como $T^*f(x) = \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(x)|$. En este contexto definimos el operador maximal asociado al núcleo K como

$$T^*(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{B_\epsilon(x)^c} K(x-y)f(y)\,dy \right|.$$

Observar que el operador adjunto de un operador integral de Calderón-Zygmund vuelve a ser otro operador integral de Calderón-Zygmund. Como $||\widehat{K}||_\infty < c_1$, tenemos que T es un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Usando esto y la descomposición de Calderón-Zygmund, (ver **Lema** 1.28), se prueba que T es de tipo débil $(1,1)$. Ahora, por el **Lema** 1.2 (Interpolación de Marcinkiewicz) se obtiene que el operador es de tipo fuerte (p,p) para $1 < p < 2$. Al ser el operador adjunto de T también un operador de Calderón-Zygmund, por dualidad, se obtiene la acotación fuerte (p,p), para $2 < p < \infty$. Estos resultados pueden verse en el trabajo [**6**], del año 1952, de Calderón y Zygmund.

Un resultado clásico de la teoría de Calderón-Zygmund es poder controlar estos operadores integrales en norma $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, por la función maximal de Hardy-Littlewood. Es decir la siguiente desigualdad de tipo Coifman,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p\,dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\,dx.$$

De forma natural, surge estudiar acotaciones de estos operadores en espacios $L^p(\mu)$ donde μ es una medida. En la mayoría de los casos esta medida es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y por lo tanto se estaría considerando a los espacios $L^p(w)$ donde w es una función localmente integrable y positiva (un peso). A continuación caracterizaremos cuáles son estos pesos.

1.3. Pesos de Muckenhoupt.

Benjamin Muckenhoupt en 1972, (ver [**46**]), estudió las condiciones que debe cumplir un peso w para que la función maximal de Hardy-Littlewood M esté acotada de forma débil (p,p) en medida $w(x)dx$. Él define las siguientes familias de pesos que llamaremos pesos de Muckenhoupt.

Definición 1.5. Dada una función w positiva y localmente integrable diremos que:

- w es un peso de la clase A_p, $1 < p < \infty$, si para todo cubo Q,

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)\,dy\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\,dy\right)^{p-1} \leq C_p,$$

  con C_p independiente de Q. Definimos la constante del peso w en A_p como el ínfimo de las cotas C_p y la denotamos por $||w||_{A_p}$.
- w es un peso de la clase A_1 si

$$Mw(x) \leq C_1 w(x) \qquad c.t.x \in \mathbb{R}^n,$$

  con C_1 independiente de x. Definimos la constante del peso w en A_1 como el ínfimo de las cotas C_1 y la denotamos por $||w||_{A_1}$.
- Definimos la clase $A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p$.

Respecto a la clase A_∞ vamos a considerar una constante introducida por Fujii en [**14**], que después utilizó Wilson en diversos trabajos ver [**65**], [**66**] y [**67**]. Un peso $w \in A_\infty$ si y sólo si

$$||w||_{A_\infty} = \sup_Q \frac{1}{w(Q)}\int_Q M(w\chi_Q) < \infty. \tag{1.3}$$

A esta constante la llamaremos constante de Fujii-Wilson de w.

Posteriormente Hunt, Muckenhoupt y Wheeden, en [**23**], desarrollaron la teoría de pesos adecuada para la transformada de Hilbert. Probaron que la condición A_p caracteriza las acotaciones en $L^p(w)$ de este operador exactamente igual al caso de la función maximal.

Luego Coifman y Fefferman extendieron la teoría A_p para los operadores integrales de Calderón-Zygmund, ver [**8**].

En estos trabajos no se tenía en cuenta como se relacionaba la norma del operador con la constante $||w||_{A_p}$. Años después (1993) Stephen M Buckley, estudiante de Fefferman, en [**5**], estudió la dependencia de la norma, cuando se considera la acotación fuerte (p,p), de la función maximal respecto a la constante del peso w. Este resultado es una versión moderna del obtenido por Muckenhoupt en [**46**].

Buckley demostró:

Teorema 1.6 ([**5**]). *Sea w una función positiva localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y M la función maximal de Hardy-Littlewood, entonces son equivalentes:*

- *w es un peso de la clase A_p con $1 \leq p < \infty$.*
- *M es acotado débil (p,p) en medida $w(x)dx$ con $||M||_{L^{p,\infty}(w)} \leq C_n ||w||_{A_p}^{\frac{1}{p}}$, donde el exponente $\frac{1}{p}$ es el mejor posible.*

Si consideramos $p > 1$ son equivalentes

- *w es un peso de la clase A_p con $1 < p < \infty$.*
- *M es acotado fuerte (p,p) en medida $w(x)dx$ con $||M||_{L^p(w)} \leq C_n pp' ||w||_{A_p}^{\frac{1}{p-1}}$, donde el exponente $\frac{1}{p-1}$ es el mejor posible y p' es el conjugado de p, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

En el año 1971, en [**13**], considerando el caso $p = 1$, C. Fefferman y E. M. Stein demostraron que si w es una función localmente integrable y positiva entonces

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx,$$

donde C no depende de w.
Observar que en el caso que si $w \in A_1$ se tiene:

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C||w||_{A_1}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, w(x)dx.$$

Este resultado motivó a Mukenhoupt y Wheeden a realizar las siguientes conjeturas:

• **Conjetura fuerte de M-W**:

Si w es una función localmente integrable y positiva, T un operador integral de Calderón-Zygmund entonces

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_T}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)dx,$$

donde C_T es una constante que sólo depende del operador T y la dimensión.

• **Conjetura débil de M-W**:

Si $w \in A_1$, T un operador integral de Calderón-Zygmund entonces

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : Tf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_T||w||_{A_1}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, w(x)dx,$$

donde C_T es una constante que sólo depende del operador T y la dimensión.

El estudio de estas conjeturas es de gran importancia en el análisis armónico. Otro problema de suma importancia de los últimos años es lo que se llamó conjetura A_2:

Teorema 1.7. *Sea $w \in A_2$ y T un operador integral de Calderón-Zygmund, entonces,*

$$||T||_{L^2(w)} \leq C_{n,T}||w||_{A_2}. \tag{1.4}$$

Este problema estuvo abierto durante mucho tiempo. S. Pettermichl lo probó para la Transformada de Hilbert en 2007, ver [**53**]. Luego el resultado lo extendieron Teresa Luque, Ezequiel Rela y Carlos Pérez para núcleos de convolución suaves en 2013, ver [**37**]. Finalmente Tuomas Hytönen probó la conjetura para el caso general de un operador integral de Calderón-Zygmund, ver [**24**]. Existe una nueva prueba de la conjetura más simple obtenida por Andrei Lerner en [**31**].

Respecto a la conjetura fuerte de Muckenhoupt y Wheeden el mejor resultado es el obtenido por Carlos Pérez en [**51**]

$$||Tf||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C\, 2^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_{L(\log L)^\epsilon} w(x)\, dx. \tag{1.5}$$

donde $M_{L(logL)^\epsilon}$ es un operador más grande que M, para todo $\epsilon > 0$. Luego en 2012, M. C. Reguera en [**55**] y M. C. Reguera y C. Thiele en [**56**] prueban que la conjetura es falsa trabajando con la transformada de Hilbert.

En [**33**] Lerner, Ombrosi y Peréz estudian la conjetura débil y obtienen un crecimiento logarítmico de la constante cuando $w \in A_1$. Para lograr este resultado fue necesario demostrar una desigualdad sharp de tipo Hölder al revés.

Dada una función f localmente integrable y un cubo Q, usando la desigualdad de Hölder se sabe que para $r > 1$ se tiene $\frac{1}{|Q|}\int_Q |f| \leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f|^r\right)^{\frac{1}{r}}$. La desigualdad de Hölder al revés nos dice que vale la inversa para los pesos de Muckenhoupt. Enunciamos dos versiones que optimizan las constantes, la primera es de Pérez, Lerner y Ombrosi, del trabajo [**33**] antes citado; la segunda de se debe a Hytönen y C. Pérez ver [**26**].

Lema 1.8 (Desigualdad de Hölder al revés).

- *Primera versión. Sea $w \in A_1$. Si $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+1}||w||_{A_1}}$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\right)^{\frac{1}{r_w}} \leq 2\frac{1}{|Q|}\int_Q w. \tag{1.6}$$

- *Segunda versión. Sea $w \in A_\infty$. Si $r_w = 1 + \frac{1}{2^{n+11}||w||_{A_\infty}}$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{r_w}\right)^{\frac{1}{r_w}} \leq 2\frac{1}{|Q|}\int_Q w. \tag{1.7}$$

Si tomamos supremo sobre todos los cubos Q en estas desigualdades obtenemos

$$M_{r_w}w(x) \leq 2Mw(x). \tag{1.8}$$

Notar que $r'_w = \frac{r_w}{r_w - 1} \approx ||w||_{A_1}$ en el primer caso y $r'_w = \frac{r_w}{r_w - 1} \approx ||w||_{A_\infty}$ en el segundo.

El siguiente resultado, que relaciona las normas con pesos de los operadores integrales con la de la función maximal, se debe a Coifman y Fefferman, ver [**8**]

Proposición 1.9 (Desigualdad de Coifman-Fefferman). *Sea T un operador integral de Calderón-Zygmund, $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty$. Entonces existe una constante $C_{p,w}$ que depende de T, p, la dimensión y el peso w tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,w}\left(\int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Desigualdades de tipo Coifman y Fefferman son fundamentales para poder obtener los resultados de Pérez, Lerner y Ombrosi.

Como se mencionó anteriormente, los resultados obtenidos en [**33**] y [**32**] representan uno de los mayores avances respecto a la conjetura débil de Muckenhoupt y Wheeden. A continuación citamos sus teoremas:

Teorema 1.10 ([**33**]). *Sea $1 < p, r < \infty$, $w \in A_1$ y T un operador integral de Calderón-Zygmund. Entonces,*

$$||Tf||_{L^p(w)} \leq Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}}||f||_{L^p(M_r w)},$$

donde C sólo depende de T y la dimensión.

*Si $r = r_w$ es como la ecuación (1.6) del **Lema** 1.8, entonces,*

$$||Tf||_{L^p(w)} \leq Cpp'||w||_{A_1}||f||_{L^p(w)}. \tag{1.9}$$

Respecto a la estimación débil (1,1) tenemos

Teorema 1.11 ([**33**]). *Sea $w \in A_1$ y T un operador integral de Calderón-Zygmund, entonces,*

$$||Tf||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C||w||_{A_1} \log(e + ||w||_{A_1})||f||_{L^1(w)}, \tag{1.10}$$

donde C sólo depende de T y la dimensión del espacio.

Como corolario de estos resultados, por interpolación, se tiene que:

Corolario 1.12 ([**33**]). *Sea $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ y T un operador integral de Calderón-Zygmund, entonces,*

$$||Tf||_{L^{p,\infty}(w)} \leq C||w||_{A_p} \log(e + ||w||_{A_p})||f||_{L^p(w)},$$

donde $C = C(n, p, T)$.

Por un argumento de dualidad se obtiene:

Corolario 1.13 ([**33**]). *Sea $1 < p < \infty$, $w \in A_p$ y T un operador integral de Calderón-Zygmund. Para cualquier conjunto medible E*

$$||T(\sigma\chi_E)||_{L^p(w)} \leq C||w||_{A_p}^{\frac{1}{p-1}} \log(e + ||w||_{A_p})\sigma(E)^{\frac{1}{p}},$$

donde $C = C(n, p, T)$ *y* $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$.

Cabe mencionar que recientemente F. Nazarov, A. Reznikov, V. Vasyunin, A. Volberg, probaron que la conjetura débil de Muckenhoupt-Wheeden es también falsa, ver [**48**]. Además ellos conjeturaron que los avances realizados por Pérez, Lerner y Ombrosi son óptimos. En esta tesis demostraremos teoremas análogos a los **Teoremas** 1.10 y 1.11 pero para operadores laterales y pesos de Sawyer.

Finalmente enunciaremos las propiedades fundamentales de los pesos de Muckenhoupt para poder destacar más adelante, cuáles son sus semejanzas y diferencias con los pesos de las clases de Sawyer:

- $|x|^\delta \in A_p$ si y sólo si $-n < \delta < n(p-1)$.
- $A_p \subset A_q$, para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
- Dado $1 < p < \infty$, si p' es el exponente conjugado de p, entonces $w \in A_p$ si y sólo si $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ y
$$||w^{-\frac{1}{p-1}}||_{A_{p'}} = \left(||w||_{A_p}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$
En particular si $p = 2$, $w \in A_2$ si y sólo si $w^{-1} \in A_2$ y $||w||_{A_2} = ||w^{-1}||_{A_2}$.
- Si $w \in A_p$, con $p > 1$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}$.
- Dado $0 < \delta < 1$ entonces $(Mf)^\delta \in A_1$ con $||(Mf)^\delta||_{A_1} \leq \frac{C}{1-\delta}$.
- **Teorema de factorización** Si $w_1,\ w_2 \in A_1$ entonces $w = w_1 w_2^{1-p} \in A_p$ con $||w||_{A_p} \leq ||w_1||_{A_1} ||w_2||_{A_1}^{p-1}$.
Recíprocamente dado un peso $w \in A_p$ existen pesos $w_1,\ w_2 \in A_1$ tales que $w = w_1 w_2^{1-p}$ con $||w_1||_{A_1} \leq C_n ||w||_{A_p}$, $||w_2||_{A_1} \leq C_n ||w||_{A_p}$ y
$||w||_{A_p} \leq ||w_1||_{A_1} ||w_2||_{A_1}^{p-1} \leq C_n^2 ||w||_{A_p}^2$.
- La medida $w(x)dx$ es duplicante: precisamente, para todo $r > 1$ y para todo cubo Q se satisface que
$$w(rQ) \leq r^{np} ||w||_{A_p} w(Q),$$
donde rQ denota el cubo con el mismo centro que Q y de lado r por la medida del lado del cubo Q.

Ahora mencionaremos algunas equivalencias respecto a la definición de A_∞. Un peso w está en A_∞ si y sólo si:

- Existen constantes $0 < \delta,\ \gamma < 1$ tales que para todo cubo Q, se tiene,
$$|\{x \in Q : w(x) < \gamma w(Q)\}| \leq \delta |Q|.$$
- Existen constantes $0 < \alpha,\ \beta < 1$ tales que para todo cubo Q y para todo subconjunto medible E de Q, vale que,
$$\text{si } \ |E| \leq \alpha |Q| \quad \text{entonces} \quad w(E) \leq \beta w(Q).$$
- Vale la desigualdad de Hölder al revés, ver **Lema** 1.8.
- Existen constantes $0 < C, \epsilon < \infty$ tales que para todo cubo Q y para todo subconjunto medible E de Q, se tiene que,
$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq C \left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^{\epsilon}.$$
- Existen constantes $0 < \alpha',\ \beta' < 1$ tales que para todo cubo Q y para todo subconjunto medible E de Q, vale que,
$$\text{si } \ w(E) \leq \alpha' w(Q) \quad \text{entonces} \quad |E| \leq \beta' |Q|.$$
- Para todo cubo Q se tiene
$$\left(\frac{1}{|Q|} w(Q) \right) \exp \left(\frac{1}{|Q|} \log w^{-1}(Q) \right) \leq \infty.$$
Este último resultado se debe a Hruščev, ver [**22**], y da otra definición de constante de A_∞.

2. Operadores laterales y pesos de Sawyer

En esta sección vamos a introducir las nociones básicas de pesos laterales y operadores integrales singulares laterales, haciendo énfasis en las diferencias con el caso clásico. Lo primero a notar es que sólo se trabajará en la recta real $\mathbb{R}$. Vamos a comenzar por la función maximal.

2.1. Función maximal lateral.

En el año 1930, ver [**20**], G. H. Hardy y J. E. Littlewood introducen la siguiente definición de función maximal.

Definición 1.14. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Se definen los operadores maximales laterales como

$$M^+f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt, \quad M^-f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} |f(t)|\, dt.$$

Es interesante notar que la función maximal que definieron Hardy y Littlewood es M^- y no M. Luego para el estudio de diversos operadores se terminó adoptando la definición de Maximal de Hardy-Littlewood dada en la **Definición** 1.3.

Observar que, en los promedios considerados para la definición, x está restringido al extremo del intervalo y por lo tanto $M^+f(x) \leq Mf(x)$, $M^-f(x) \leq Mf(x)$. Además se tiene $Mf(x) \leq M^+f(x) + M^-f(x)$, donde M es la maximal de Hardy-Littlewood. Luego las acotaciones que se saben en medida de Lebesgue para M son válidas también para M^+ y M^-. Es más, por la desigualdad (1.2),

$$||M^+||_{L^p(\mathbb{R})} \leq Cp', \tag{1.11}$$

donde C no depende de p.

Si tenemos un promedio de la forma $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)|\, dt$, por definición del operador maximal lateral M^+, este promedio sólo nos dá información en el punto x. El siguiente lema viene a ser una herramienta simple para lograr una mayor flexibilidad para trabajar ya que nos permite tomar al punto x en el intervalo a la izquierda del cual tomamos el promedio.

Lema 1.15. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ entonces para todo $x \in (2a-b, a)$ tenemos*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|\, dt \leq 2M^+f(x).$$

Demostración.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|\, dt \leq \frac{2}{b-x} \int_x^b |f(t)|\, dt \leq 2M^+f(x).$$

$\square$

Definimos las siguientes funciones maximales laterales.

$$M_\epsilon^+ f(x) = \sup_{h>0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)|^\epsilon \, dt \right)^{\frac{1}{\epsilon}}, \quad M_\epsilon^- f(x) = \sup_{h>0} \left(\frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} |f(t)|^\epsilon \, dt \right)^{\frac{1}{\epsilon}},$$

donde $\epsilon \geq 0$. Observar que $M^+ f \leq M_\epsilon^+ f$ para todo $\epsilon \geq 1$.

En los años '80 varios matemáticos, entre ellos E. Sawyer, F. J. Martín-Reyes, P. Ortega y A. de la Torre, empezaron a trabajar nuevamente con estas maximales por su importancia en teoría ergódica. En estos años también, se definen otras maximales laterales.

Además de las ya mencionadas, vamos a considerar las siguientes funciones maximales laterales introducidas por Martín-Reyes, Ortega Salvador, y de la Torre en [**43**]. En lugar de considerar la medida de Lebesgue tomamos una medida absolutamente continua dada por un peso g.

$$M_g^+ f(x) = \sup_{h>0} \int_x^{x+h} |f(t)| g(t) \, dt \left(\int_x^{x+h} g(t) \, dt \right)^{-1}, \tag{1.12}$$

$$M_g^- f(x) = \sup_{h>0} \int_{x-h}^{x} |f(t)| g(t) \, dt \left(\int_{x-h}^{x} g(t) \, dt \right)^{-1}, \tag{1.13}$$

donde g es una función positiva localmente integrable en $\mathbb{R}$.

2.2. Pesos de Sawyer.

En análisis armónico, dado un operador, es natural preguntarse para qué clase de pesos está acotado de forma fuerte (p, p) y de forma débil (p, p). Respecto a la función maximal lateral Eric Sawyer respondió esta pregunta en el año 1986, ver [**59**], en este trabajo introduce las siguientes clases de pesos que llamaremos pesos de Sawyer.

Definición 1.16. Dada $w \geq 0$ localmente integrable diremos que:

- w es un peso de la clase A_p^+, con $1 < p < \infty$, si existe una constante C_p tal que, para todo $a < b < c$,

$$\frac{1}{(c-a)^p} \left(\int_a^b w \right) \left(\int_b^c w^{\frac{-1}{p-1}} \right)^{p-1} < C_p,$$

  llamamos constante del peso w en A_p^+ a la menor constante C_p y la denotamos por $||w||_{A_p^+}$.

- w es un peso de la clase A_1^+ si existe una constante C_1 tal que, para casi todo $x \in \mathbb{R}$,
$$M^- w(x) < C_1 \, w(x), \tag{1.14}$$
llamamos constante del peso w en A_1^+ a la menor constante C_1 y la denotamos por $||w||_{A_1^+}$.
- Definimos la clase $A_\infty^+ = \bigcup_{p \geq 1} A_p^+$.

De forma análoga se definen las clases A_p^- con $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$. Enunciamos ahora las propiedades básicas de estos pesos donde se ven sus semejanzas y diferencias con los pesos de Muckenhoupt.

- Si $0 \leq w$ es creciente, entonces $w \in A_p^+$ y $||w||_{A_p^+} = 1$.
- Para $1 \leq p \leq \infty$, $A_p \subset A_p^+$, $A_p \subset A_p^-$ y $A_p^- \cap A_p^+ = A_p$.
- $A_p^+ \subset A_q^+$, para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$.
- Dado $1 < p < \infty$, si p' es el exponente conjugado de p, entonces $w \in A_p^+$ si y sólo si $\sigma = w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}^-$ y
$$||\sigma||_{A_{p'}^-} = \left(||w||_{A_p^+}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$
En particular, si $p = 2$, $w \in A_2^+$ si y sólo si $w^{-1} \in A_2^-$ y $||w||_{A_2^+} = ||w^{-1}||_{A_2^-}$.
- Si $w \in A_p^+$ con $p > 1$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in A_{p-\epsilon}^+$.
- Dado $0 < \delta < 1$, entonces $(M^- f)^\delta \in A_1^+$ con $||(M^- f)^\delta||_{A_1^+} \leq \frac{C}{1-\delta}$.
- **Teorema de factorización** Si $w_1 \in A_1^+$ y $w_2 \in A_1^-$ entonces $w = w_1 w_2^{1-p} \in A_p^+$ con $||w||_{A_p^+} \leq ||w_1||_{A_1^+} ||w_2||_{A_1^-}^{p-1}$.
Recíprocamente, dado un peso $w \in A_p^+$, existen pesos $w_1 \in A_1^+$ y $w_2 \in A_1^-$ tales que $w = w_1 w_2^{1-p}$, con $||w_1||_{A_1^+} \leq C_n ||w||_{A_p^+}$, $||w_2||_{A_1^-} \leq C_n ||w||_{A_p^+}$ y $||w||_{A_p^+} \leq ||w_1||_{A_1^+} ||w_2||_{A_1^-}^{p-1} \leq C^2 ||w||_{A_p^+}^2$.
- Los pesos no son duplicantes, pero si $w \in A_p^+$ entonces para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a < b < c$ y E un conjunto medible en (b, c) se cumple que
$$w(a, b) \leq \left(\frac{c-a}{|E|}\right)^p ||w||_{A_p^+} w(E). \tag{1.15}$$

En particular si $x \in \mathbb{R}$, $h > 0$ y tomamos $a = x$, $b = x + h$, $c = x + 2h$ y $E = (x + h, x + 2h)$ se cumple que,

$$\int_x^{x+h} w(x)\, dx \le 2^p ||w||_{A_p^+} \int_{x+h}^{x+2h} w(x)\, dx.$$

Demostración de la ecuación (1.15). Por la definición de $w \in A_p^+$, con $p > 1$ y por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{|E|}{c-a}\right)^p &= \left(\frac{1}{c-a}\int_b^c \chi_E w^{\frac{1}{p}} w^{\frac{-1}{p}}\right)^p \\
&\le \frac{1}{(c-a)^p}\left(\int_b^c \chi_E w\right)\left(\int_b^c w^{\frac{-p'}{p}}\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\le \frac{1}{(c-a)^p}\left(\int_b^c \chi_E w\right)\frac{(c-a)^p}{w(a,b)}||w||_{A_p^+},
\end{aligned}$$

luego

$$w(a,b) \le \left(\frac{c-a}{|E|}\right)^p ||w||_{A_p^+} w(E).$$

Si $w \in A_1^+$ se tiene que para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, $\frac{1}{h}\int_{x-h}^x w \le ||w||_{A_1^+} w(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{|E|}{c-a} = \frac{1}{c-a}\int_b^c \chi_E w w^{-1} &\le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(b,c)} \frac{w^{-1}(x)}{c-a}\left(\int_b^c \chi_E w\right) \\
&\le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(b,c)} \frac{x-a}{c-a}\left(\int_b^c \chi_E w\right)||w||_{A_1^+}\left(\int_a^x w\right)^{-1} \\
&\le \frac{c-a}{c-a}\left(\int_b^c \chi_E w\right)||w||_{A_1^+}\left(\int_a^b w\right)^{-1},
\end{aligned}$$

luego

$$w(a,b) \le \left(\frac{c-a}{|E|}\right)||w||_{A_1^+} w(E).$$

□

Eric Sawyer da los primeros resultados de acotación con pesos de las funciones maximales laterales, ver [**59**]. Nosotros vamos a mostrar una versión de estas acotaciones (al estilo de las pruebas dadas por Martín-Reyes y de la Torre, ver [**42**]), en la cual se tiene en cuenta la dependencia de la norma respecto a la constante del peso.

Primero damos una definición equivalente para pesos en A_p^+.

Definición 1.17. Dado w un peso se define la constante $[w]_{A_p^+}$ para el peso w como el ínfimo de las cotas C_p que cumplen que

$$\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b w\right)\left(\frac{1}{(c-b)}\int_b^c w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} < C_p,$$

donde C_p es independiente de a, b, c y $c-b=b-a=\frac{1}{2}(c-a)$.

De forma análoga para A_p^-.

Martín-Reyes y de la Torre en [**42**] prueban el siguiente teorema:

Teorema 1.18 ([**42**]). *Dado $1<p<\infty$, w un peso en $\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $w \in A_p^+$, *es decir* $||w||_{A_p^+} < \infty$,
2. $[w]_{A_p^+} < \infty$,
3. *existe una constante C tal que,*

$$\int_a^b \sigma(t)\,dt \leq C(b-a)M_w^+(w^{-1}\chi_{(a,b)})(a)^{\frac{1}{p-1}},$$

C no depende del intervalo (a,b),

4. *existe una constante C tal que si $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$ entonces*

$$M^+(\sigma\chi_{(a,b)})(a) \leq CM_w^+(w^{-1}\chi_{(a,b)})(a)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Es más, si A es el ínfimo de todas las constantes C que satisfacen (3) y (4), se tiene

$$2^{-p'}[w]_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}} \leq ||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}} \leq A \leq [w]_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Ahora daremos el teorema de Buckley, versión lateral que demuestran Martín-Reyes y de la Torre en [**42**].

Teorema 1.19 (Teorema de Buckley lateral, [**42**]). *Dado $1<p<\infty$, w un peso en $\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $w \in A_p^+$,

2. *Existe una constante C tal que para toda función medible f y para todo número real a se tiene*

$$M^+f(a) \leq C\left(M_w^+(w^{-1}(M_\sigma(f/\sigma)))^{p-1}(a)\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

3. *M^+ es acotada fuerte en $L^p(w)$.*

Es más, tenemos las siguientes desigualdades,

$$\frac{1}{2}[w]_{A_p^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)} \leq ||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)} \leq ||M^+f||_{L^p(w)}$$
$$\leq 2\mathrm{e}\,p'[w]_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}}||f||_{L^p(w)} \leq 2^{p'+1}\mathrm{e}\,p'||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}}||f||_{L^p(w)}. \tag{1.16}$$

Respecto a las desigualdades débiles demuestran:

Teorema 1.20 ([**42**]). *Dado $1 \leq p < \infty$, w un peso en $\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$w \in A_p^+$,*
2. *Existe una constante C tal que para toda función medible f y para todo número real a se tiene*

$$M^+f(a) \leq C\left(M_w|f|^p(a)\right)^{\frac{1}{p}},$$

3. *M^+ es acotada débilmente (p,p) en medida $w(x)dx$.*

Es más, tenemos las siguientes desigualdades,

$$\frac{1}{2}[w]_{A_p^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)} \leq ||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)} \leq ||M^+f||_{L^{p,\infty}(w)}$$
$$\leq 8||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)} \leq 8[w]_{A_p^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)}.$$

En el año 1993, ver [**44**], Martín-Reyes, Pick y de la Torre estudian condiciones para que un peso w esté en A_∞^+, obtienen el siguiente resultado

Teorema 1.21. *Sea w un peso las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$w \in A_\infty^+$, es decir existe $p \geq 1$ tal que $w \in A_p^+$.*

2. *Existen constantes positivas C y δ tales que, para todos los números reales $a < b < c$ y $E \subset (b,c)$ medible,*
$$\frac{|E|}{c-a} \leq C\left(\frac{w(E)}{w(a,b)}\right)^{\delta}.$$
3. *Para todo α, $0 < \alpha < 1$, existe $\beta > 0$ tal que, para todos los números $a < b < c$ y todo $E \subset (b,c)$, con $\frac{w(E)}{w(a,b)} \leq \beta$, tenemos $\frac{|E|}{c-a} \leq \alpha$.*
4. *Para todo α, $0 < \alpha < 1$, existe $\beta > 0$ que implica lo siguiente: dado $\lambda > 0$ y un intervalo (a,b), tal que $\lambda \leq \frac{w(a,x)}{x-a}$, para todo $x \in (a,b)$ entonces,*
$$|\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda x\}| > \alpha(b-a).$$
5. *Vale la Desigualdad de Hölder al revés débil, (ver el trabajo de Martín-Reyes, [**39**]). Existen constantes positivas C y δ, tal que para todo intervalo (a,b),*
$$\int_a^b w(t)^{1+\delta}\,dt \leq C(M^-(w\chi_{(a,b)}))(b)^{\delta}\int_a^b w(t)\,dt.$$
6. *Existen constantes positivas C y δ, tales que para todo intervalo (a,b),*
$$M_w^-(w^{\delta}\chi_{(a,b)}))(b) \leq C(M^-(w\chi_{(a,b)}))(b)^{\delta}.$$
7. *Existen constantes positivas C y δ, tales que para todo intervalo (a,b),*
$$(M^-)^{1+\delta}(w\chi_{(a,b)}))(b) \leq C(M^-(w\chi_{(a,b)}))(b).$$
8. *Existe γ, con $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ y $C > 0$, tales que*
$$w(a,b)\exp\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d \log w^{-1}\right) \leq C(b-a),$$
para todo $a < b \leq c < d$, donde $b-a = d-c = \gamma(d-a)$.

Observar que, para estos pesos, no vale la desigualdad de Hölder al revés sino una versión más débil. Esta nos da una desigualdad similar a (1.8) pero localizada, que es el ítem **7)**.

En el año 1998 M. S. Rviveros y A. de la Torre dan una definición equivalente de pesos en A_p^+, ver [**57**].

Al comienzo trabajamos en intervalos contiguos, ahora tomaremos promedios en intervalos separados. Para muchos problemas es esto más conveniente.

Proposición 1.22. *Un peso w esta en A_p^+, $p > 1$, si y sólo si existen constantes γ, con $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$, y C_γ tales que para todos los números reales $a < b < c < d$ con $b - a = d - c = \gamma(c - b)$, se tiene,*

$$\frac{1}{(b-a)^p}\left(\int_a^b w\right)\left(\int_c^d w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} < C_\gamma. \tag{1.17}$$

Observar que no se está tomando ninguna integral sobre el intervalo (b, c).

Además para obtener nuestros resultados vamos a tener que usar desigualdades con pares de pesos para la función maximal M_g^+ antes definida, donde g es una función positiva. Las siguientes definiciones y resultados son de Martín-Reyes, Ortega y de La Torre, del año 1990, ver [**43**].

Definición 1.23. Dada una función g positiva localmente integrable, $1 < p < \infty$, decimos que una función w no negativa, localmente integrable esta en la clase $A_p^+(g)$, si existe una constante $C_p < \infty$, tal que para todo $a < b < c$,

$$\left(\int_a^b w\right)\left(\int_b^c g^{p'}\sigma\right)^{p-1} \leq C_p\left(\int_a^b g\right)^p, \tag{1.18}$$

donde $\sigma = w^{\frac{-1}{p-1}}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Decimos que $w \in A_1^+(g)$ si es no negativa, localmente integrable y si existe una constante C_1, tal que,

$$M_g^-(g^{-1}w)(x) \leq C_1\,(g^{-1}w)(x), \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que $w \in A_p^+(g)$ si y sólo si M_g^+ es acotada fuertemente de $L^p(w)$ en $L^p(w)$ para $1 < p < \infty$, también se sabe que $w \in A_1^+(g)$ si y sólo si M_g^+ es acotada débilmente de $L^1(w)$ en $L^{1,\infty}(w)$. Observar que si $g \equiv 1$ entonces $A_p^+(g) = A_p^+$, para $1 \leq p < \infty$.

En el año 1993, Martín-Reyes, en [**39**], dá la siguiente condición para que un par de pesos esté en la clase de Sawyer A_p^+.

Decimos que la dupla (u, v) está en A_p^+, con $1 \leq p < \infty$ si existe una constante C_p independiente de x tal que

- $p > 1$

$$\sup_{h>0}\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C_p.$$

para todo $h > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

- $p = 1$

$$M^{-}u(x) \leq C_1 v(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$.

A la menor constante C_p que satisface esto la llamamos contante A_p^+ del par de pesos (u, v) y la denotamos por $||(u, v)||_{A_p^+}$. Martín-Reyes demuestra que $(u, v) \in A_p^+$ si y sólo si M^+ satisface la siguiente desigualdad de tipo débil (p, p), con las normas dadas por los pesos u y v,

$$\lambda^p u(\{x \in \mathbb{R} : M^+ f(x) > \lambda\}) \leq 4^p ||(u, v)||_{A_p^+} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, v(x)dx. \tag{1.19}$$

2.3. Operadores integrales singulares laterales.

Como mencionamos antes, los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund están controlados por normas en medida $w(x)dx$ por la maximal de Hardy-Littlewood, con w un peso de Muckenhoupt, ver la Desigualdad de Coifman-Fefferman (1.9). La clase de pesos de Muckenhoupt está contenida en la clase de pesos de Sawyer y esta inclusión es estricta; por ejemplo, como se menciono en la introducción, las funciones no decrecientes están en A_p^+ pero no están A_p (pues no cumplen la propiedad doblante). Es natural preguntarse que condiciones debe cumplir un operador integral singular de Calderón-Zygmund para ser operador lateral y estar controlado por la función maximal lateral, es decir que el operador cumpla una desigualdad de tipo Coifman-Fefferman bajo la medida $w(x)dx$ con w peso de la clase de Sawyer. En 1997 H. Aimar, L. Forzani y J. F. Martín-Reyes, en [**1**], dan respuesta a este interrogante definiendo los siguientes operadores.

Definición 1.24. Un operador integral singular lateral T^+ es un operador integral de Calderón-Zygmund, es decir su núcleo K cumple con las condiciones de la

Definición 1.4, y además el núcleo K tiene soporte en el intervalo $(-\infty, 0)$. En este caso escribimos

$$T^+ f(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{x+\epsilon}^{\infty} K(x-y) f(y)\, dy.$$

Análogamente se define el operador integral singular lateral T^-, en este caso el núcleo tiene soporte en el intervalo $(0, \infty)$. Observar que si $(T^+)^*$ es el adjunto de T^+, entonces $(T^+)^*$ es un operador integral singular lateral con núcleo K soportado en $(0, \infty)$, en este caso vamos a denotar $(T^+)^* = T^-$.

Ellos dan el siguiente ejemplo de operador integral singular lateral.

Ejemplo 1.25 ([**1**]). La función

$$K(x) = \frac{1}{x} \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{\log x} \chi_{(0,\infty)}(x),$$

es un núcleo no trivial con soporte en $(0, \infty)$, que define un operador integral singular T^-.

Es importante para nuestro trabajo que los pesos de Sawyer controlan a los operadores integrales singulares laterales. Como antes mencionamos, Aimar, Forzani y Martín-Reyes probaron en [**1**] que un operador integral singular lateral T^+ está controlado por la maximal lateral M^+ en norma $L^p(w)$, si $w \in A_\infty^+$. Ellos demostraron

Teorema 1.26 ([**1**]). *Sea T^+ un operador integral singular lateral y $w \in A_\infty^+$ entonces:*

1. ***Desigualdad de Coifman-Fefferman**. Existe una constante C que depende de p, T^+ y w, tal que,*

$$\int_{\mathbb{R}} |T^+ f(x)|^p\, w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^+ f(x))^p\, w(x) dx, \qquad 1 < p < \infty$$

y

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^p w(\{x : |T^+ f(x)| > \lambda\}) \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda^p w(\{x : M^+ f(x) > \lambda\}), \quad 1 \leq p < \infty,$$

donde $f \in L^p(w)$.

2. ***Acotación fuerte***. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $w \in A_p^+$, *entonces existe una constante* C, *que depende de* p, T^+ *y* w, *tal que,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |T^+ f(x)|^p \, w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

   para toda $f \in L^p(w)$.

3. ***Acotación débil***. *Si* $1 \leq p < \infty$ *y* $w \in A_p^+$, *entonces existe una constante* C, *que depende de* p, T^+ *y* w, *tal que,*

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda^p w(\{x : |T^+ f(x)| > \lambda\}) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

   para toda $f \in L^p(w)$.

Como antes mencionamos, en esta tesis, estudiaremos resultados análogos a los obtenidos por Lerner, Ombrosi y Pérez en [**33**], pero para operadores integrales singulares laterales y pesos de la clase de Sawyer. Ellos analizan lo que fue conjetura débil de Muckenhoupt y Wheeden.

Respecto a lo que fue conjetura fuerte de Muckenhoupt y Wheeden, en el año 2009 , ver [**35**], Lorente, M. and Martell, J. M. and Pérez, C. y Riveros, M. S. obtuvieron el siguiente resultado análogo al dado por Pérez en [**51**], (ver desigualdad (1.5)).

Teorema 1.27 ([**35**]). *Sea* T^+ *un operador integral singular lateral y* w *un peso, (no necesariamente de la clase de Sawyer), entonces,*

$$||T^+ f||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C \, 2^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M^-_{L(\log L)^\epsilon} w(x) \, dx.$$

donde $M^-_{L(logL)^\epsilon}$ *es un operador más grande que* M^-, *para todo* $\epsilon > 0$.

2.4. Lemas de cubrimiento.

Ahora daremos algunas diferencias técnicas a la hora de trabajar con la función maximal de Hardy-Littlewood o la función maximal lateral. El análisis siguiente está dirigido a lectores que tienen algún conocimiento en la teoría clásica de Calderón-Zygmund.

En esta teoría, para poder estudiar acotaciones de operadores, es común recurrir a lo que llamamos lemas de cubrimiento. Por lo general los que se usan para los pesos de Muckenhoupt no sirven para los de Sawyer. En este apartado nos proponemos dar las principales diferencias entre ambos.

Como se mencionó anteriormente para estudiar desigualdades débiles de operadores integrales de Calderón-Zygmund con pesos de Muckenhoupt se utiliza el siguiente lema, ver [**12**], [**16**].

Lema 1.28 (descomposición de Calderón-Zygmund). *Sea M_d la función maximal diádica de Hardy-Littlewood, f localmente integrable y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$ con $0 < \lambda$. Entonces existen una colección de cubos diádicos, numerable, Q_j, que son disjuntos dos a dos y que cumplen:*

$$\Omega = \bigcup_j Q_j, \qquad \lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(y)|\, dy \leq 2^n \lambda.$$

Cuando trabajamos con M^+, la función maximal lateral, este lema no suele servir. En su lugar se utiliza el siguiente resultado de Sawyer. Ver [**59**] y [**41**].

Lema 1.29 ([**59**]). *Sea f integrable con soporte compacto en $\mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Si (a, b) es una intervalo maximal del abierto $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : M^+ f(x) > \lambda\}$, entonces para todo $a < x < b$,*

$$\frac{1}{x-a} \int_a^x |f(t)|\, dt \leq \lambda \leq \frac{1}{b-x} \int_x^b |f(t)|\, dt.$$

Es más $\lambda = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|\, dt$.

Si trabajamos con M^- en lugar de M^+ las desigualdades se dan al revés.

Demostración. Podemos suponer $f \geq 0$. Para la demostración fijemos $x \in (a, b)$. Sea r el mayor número que cumple que $\frac{1}{r-x} \int_x^r f \geq \lambda$. Si $r < b$, entonces $\frac{1}{s-r} \int_r^s f > \lambda$, para algún $s > r$, pues $r \in \Omega$, y se tiene

$$\int_x^s f = \int_x^r f + \int_r^s f > \lambda[(s-r) + r - x] = \lambda(s-x).$$

Luego $\frac{1}{s-x} \int_x^s f > \lambda$, contradiciendo la maximalidad de r.

Ahora como $r \geq b$ y $b \notin \Omega$ se cumple que $\frac{1}{r-b} \int_b^r f \leq \lambda$. Supongamos que $\frac{1}{b-x} \int_x^b f < \lambda$, entonces se sigue que

$$\int_x^r f = \int_x^b f + \int_b^r f < \lambda[(b-x) + (r-b)] = \lambda(r-x),$$

lo que implica que $\frac{1}{r-x}\int_x^r f < \lambda$, contradiciendo la definición de r, por lo tanto $\frac{1}{b-x}\int_x^b f \geq \lambda$.

Finalmente por la maximalidad del intervalo (a,b), se observa que $\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$. Supongamos que $\frac{1}{x-a}\int_a^x f > \lambda$, entonces

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f > \lambda[(x-a)+(b-x)] = \lambda(b-a),$$

luego $\lambda > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\frac{1}{x-a}\int_a^x f \leq \lambda$. $\square$

Observación 1.30. Este lema también lo aplicaremos a otros operadores que no son M^+ ni M^- pero en esencia son laterales, es decir se toma supremos sobre alguna clase de promedio donde el punto x es extremo del intervalo.

Otro lema de cubrimiento muy utilizado en la teoría de Calderón-Zygmund es el siguiente, (ver [**16**]).

Lema 1.31 (Descomposición de Whitney). *Sea Ω un abierto no vacío propio de $\mathbb{R}^n$ entonces existe una familia de cubos cerrados $\{Q_j\}_j$ tal que*

- $\Omega = \bigcup_j Q_j$, *y los cubos tienen interior disjunto dos a dos.*
- $\sqrt{n}l(Q_j) \leq dist(Q_j, \Omega^c) \leq 4\sqrt{n}l(Q_j)$.
- *Si los bordes de dos cubos Q_j y Q_k se tocan entonces*
$$\frac{1}{4} \leq \frac{l(Q_j)}{l(Q_k)} \leq 4.$$
- *Dado un cubo Q_j a lo sumo hay 12^n cubos Q_k de la familia que lo tocan.*

donde $l(Q_j)$ es el lado del cubo Q_j.

Observación 1.32. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$, con M la función maximal de Hardy-Littlewood. Aplicando el **Lema** 1.31 obtenemos $\Omega = \bigcup_j Q_j$, donde la unión es disjunta. Si tomamos $\widetilde{Q_j} = 4\sqrt{n}Q_j$ entonces $\widetilde{Q_j} \cap \Omega^c \neq \emptyset$ y por lo tanto $\frac{1}{|\widetilde{Q_j}|}\int_{\widetilde{Q_j}} |f(x)|\,dx \leq \lambda$.

Este lema no se suele aplicar al caso lateral. En su lugar, según el caso, se tiene las siguientes posibilidades.

Observación 1.33. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : M^+f(x) > \lambda\}$, con M^+ la función maximal lateral. Primero tomamos los intervalos maximales disjuntos J_j tales que $\Omega = \bigcup_j J_j$. Sea (a,b) uno de estos intervalos. Se pueden realizar las siguientes particiones:

1. En la primera tomamos $x_0 = b$ y para $i > 0$ elegimos x_i tal que $x_{i-1} - x_i = x_i - a$, definimos $I_i = (x_{i+1}, x_i)$. Tenemos que $(a,b) = \bigcup_i I_i$, unión disjunta. Si $I_i^- = (a, x_{i+1})$, por el **Lema** 1.29, $\frac{1}{|I_i^-|}\int_{I_i^-} |f(t)|\,dt \leq \lambda$.
2. En la segunda tomamos las sucesiones x_i, y_i que cumplan que $2(x_i - a) = (y_i - a) = (\frac{2}{3})^i(b-a)$. Sea $H_i^- = (a, x_i)$, $H_i = (x_i, y_i)$ y $H_i^+ = (y_i, y_{i-1})$. Luego $H_i^+ \subset H_{i-1}$ y $(a,b) = \bigcup_i H_i^+$, unión disjunta. Por el **Lema** 1.29 $\frac{1}{|H_i^-|}\int_{H_i^-} |f(t)|\,dt \leq \lambda$.
3. La tercera es similar a la primera. Sea $x_0 = a$ y para $i > 0$, elegimos x_i tal que $x_i - x_{i-1} = b - x_i$. Definimos $I_i = (x_{i-1}, x_i)$. Tenemos que $(a,b) = \bigcup_i I_i$, unión disjunta. Si $I_i^+ = (x_i, b)$, por el **Lema** 1.29, $\lambda \leq \frac{1}{|I_i^+|}\int_{I_i^+} |f(t)|\,dt$.
4. La cuarta es similar a la segunda. Sean las sucesiones x_i, y_i que cumplan que $(b - x_j) = 2(b - y_j) = (\frac{2}{3})^i(b-a)$. Definimos $H_i^- = (x_{i-1}, x_i)$, $H_i = (x_i, y_i)$ y $H_i^+ = (y_i, b)$. Luego $H_i^- \subset H_{i-1}$ y $(a,b) = \bigcup_i H_i^-$, unión disjunta. Por el **Lema** 1.29, $\lambda \leq \frac{1}{|H_i^+|}\int_{H_i^+} |f(t)|\,dt$.

Observar que a diferencia de los lemas clásicos de cubrimiento, en estos casos tenemos dos clases de intervalos unos que tienen la propiedad de cubrir y “los contiguos” tienen la propiedad para el promedio. En el caso clásico los cubos y sus dilatados son los que sirven.

Si trabajamos con M^- en lugar de M^+ las desigualdades se dan al revés. Para ver más sobre (1) y (3) ver por ejemplo [**1**], [**39**], [**59**], etc. Respecto a las particiones (2) y (3) ver la **Proposition 3.6** del trabajo [**49**] de S. Ombrosi y L. de Rosa.

Estas particiones también se pueden realizar con una medida $w(x)dx$ en lugar de la medida de Lebesgue, por ejemplo en (1) se pediría que $w(x_i, x_{i-1}) = w(a, x_i)$.

3. Espacios de Lorentz

En esta sección definiremos y daremos algunas propiedades de los espacios de Lorentz. Estos resultados serán utilizados en demostraciones de teoremas de extrapolación.

Sea f una función medible en el espacio $(\mathbb{R}^n, \mu)$, con μ una medida boreliana, regular y definida positiva en $\mathbb{R}^n$. La reordenada no creciente de f es definida por

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}) \leq t\},$$

para $0 < t < \infty$.

Definición 1.34. Decimos que la función f está en el espacio de Lorentz $L(p, q, \mu)$, con $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q < \infty$, si la cantidad

$$||f||_{p,q,\mu} = \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

es finita.
Decimos que la función f está en el espacio de Lorentz $L(p, \infty, \mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, si la cantidad

$$||f||_{p,\infty,\mu} = \sup_{t>0} \left[t^{1/p} f^*(t) \right],$$

es finita.

Para estos espacios es válida la siguiente desigualdad de Hölder:

Sean p y q como en la definición, p' y q' sus exponentes conjugados, respectivamente. Entonces para toda función $f \in L(p, q, \mu)$ y para toda función $g \in L(p', q', \mu)$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(t).g(t)| \, d\mu(t) \leq ||f||_{p,q,\mu} ||g||_{p',q',\mu}. \tag{1.20}$$

Para más información ver [**61**].

4. Operadores fraccionarios

Como se mencionó en la introducción otros operadores laterales que estudiaremos, en esta memoria, son la función maximal fraccionaria lateral y la integral fraccionaria lateral.

4.1. Operadores fraccionarios, el caso no lateral.

Empezaremos hablando del caso no lateral.

La función maximal de Hardy-Littlewood fraccionaria se define por

$$M_\alpha f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1-\alpha/n}} \int_Q |f(y)|\, dy, \qquad 0 < \alpha < n,$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q de $\mathbb{R}^n$ que contienen al punto x.

La integral fraccionaria ha sido objeto de estudio desde hace mucho tiempo, su definición es

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy, \qquad 0 < \alpha < n.$$

Hardy y Littlewood dan las primeras desigualdades en norma en 1928, ver [**19**], ellos consideran el caso de una dimensión con la medida de Lebesgue. También, ellos obtienen acotaciones para el peso $w(x) = |x|^\alpha$. El resultado para la medida de Lebesgue y dimensión n lo prueba Sobolev, en [**62**]. Con $w(x) = |x|^\alpha$, Stein y Weiss, en [**63**]. Walsh, en [**64**], mejoró estos resultados introduciendo más funciones como pesos. Fueron Muckenhoup y Wheeden, en [**47**], quienes introducen la clase de pesos $A_{p,q}$.

Definición 1.35. Decimos que un peso w está en la clase $A_{p,q}$, con $1 < p,\ q < \infty$, si existe una constante $C_{p,q}$ tal que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^q\, dy\right)\left(\frac{1}{Q}\int_Q w(y)^{-p'}\, dy\right)^{q/p'} \leq C_{p,q},$$

a la menor constante posible $C_{p,q}$ la llamamos constante del peso w en $A_{p,q}$ y la denotamos por $||w||_{A_{p,q}}$.

Por otro lado decimos que un peso w está en la clase $A_{1,q}$, con $1 < q < \infty$, si existe una constante $C_{1,q}$ tal que para todo cubo Q

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(y)^q\,dy\right) \leq C_{1,q} w(x)^q, \qquad\qquad \text{para todo } x \in Q,$$

a la menor constante posible $C_{1,q}$ la llamamos constante del peso w en $A_{1,q}$ y la denotamos por $||w||_{A_{1,q}}$.

Finalmente, para $1 \leq q < \infty$, definimos la clase $A_{\infty,q}$ como $A_{\infty,q} = \bigcup_{p\geq 1} A_{p,q}$. La constante de $A_{\infty,q}$ es definida por:

$$||w||_{A_{\infty,q}} := \sup_Q \frac{1}{w^q(Q)}\int_Q M(\chi_Q w^q)dx < \infty.$$

Es fácil ver que $w \in A_{p,q}$ si y sólo si $(w^q, w^q) \in A_{1+q/p'}$ con

$$||w||_{A_{p,q}} = ||(w^q, w^q)||_{A_{1+q/p'}}.$$

Muckenhoup y Wheeden demuestran que, si $w \in A_{p,q}$, la función maximal de Hardy-Littlewood fraccionaria, M_α, y la integral fraccionaria, I_α, están acotadas de forma fuerte de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$, cuando $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Ellos no consideran como depende la norma de la constante del peso w.

Otros trabajos importantes donde se obtienen desigualdades con pesos para estos operadores son por ejemplo: Sawyer [**58**] y [**60**]; Gabidzashvili y Kokilashvili [**28**], Sawyer y Wheeden [**61**], y Pérez [**50**] y [**52**].

En [**60**] Eric Sawyer trabaja con pares de pesos, él demuestra que si $1 < p \leq q < \infty$, dados un par de pesos (u, v) entonces

$$I_\alpha : L^p(v) \to L^q(u)$$

si y sólo si el par de pesos (u, v) satisfacen las siguientes condiciones:

$$[u,\sigma]_{S_{p,q}} := \sup_Q \sigma(Q)^{-1/p}||\chi_Q I_\alpha(\chi_Q \sigma)||_{L^q(u)} < \infty,$$
$$[\sigma,u]_{S_{q',p'}} := \sup_Q u(Q)^{-1/q'}||\chi_Q I_\alpha(\chi_Q u)||_{L^{p'}(\sigma)} < \infty,$$

donde $\sigma = v^{1-p'}$. Es más

$$||I_\alpha||_{L^p(v)\to L^q(u)} \approx [u,\sigma]_{S_{p,q}} + [\sigma,u]_{S_{q',p'}}.$$

Además Sawyer trabajó con desigualdades de tipo débil, en [**58**] determinó que

$$||I_\alpha||_{L^p(v)\to L^{q,\infty}(u)} \approx [\sigma, u]_{S_{q',p'}}.$$

Estos resultados fueron utilizados por Lacey, Moen, Pérez y Torres en [**29**] para obtener el análogo del Teorema A_2, (ver (1.7)), para la integral fraccionaria. Ellos demostraron

Teorema 1.36 ([**29**]). *Sea* $0 < \alpha < n$*,* $1 < p < n/\alpha$ *y* q *tal que* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$*. Si* $w \in A_{p,q}$ *entonces*

$$||I_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^{q,\infty}(w^q)} \leq ||w||_{A_{p,q}}^{1-n/\alpha},$$
$$||I_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \leq ||w||_{A_{p,q}}^{(1-n/\alpha)\,\text{máx}\{1,p'/q\}}.$$

es más, los exponentes son óptimos.

Ellos también demuestran el teorema análogo al de Buckley para la función maximal de Hardy-Littlewood fraccionaria, M_α. Kabel Moen, en [**45**], obtiene varios resultados para la función maximal M_α; demuestra:

Teorema 1.37 ([**45**]). *Sea* $0 \leq \alpha < n$ *y* $1 < p \leq q < n/\alpha$*, si* (u, v) *es un par pesos con* $\sigma = v^{1-p'}$*. Entonces*

$$||M_\alpha f||_{L^q(u)} \leq C||f||_{L^p(v)},$$

si y sólos si

$$||(u,v)||_{S_{p,q}} := \sup_Q \frac{\left(\int_Q M_\alpha(\chi_Q \sigma)^q \, u dx\right)^{1/q}}{\sigma(Q)^{1/p}} < \infty.$$

Es más

$$||M_\alpha||_{L^p(v)\to L^q(u)} \leq C||(u,v)||_{S_{p,q}},$$

donde la constante C *no depende del par de pesos* (u, v)*.*

Otro resultado que prueba es

Teorema 1.38 ([**45**]). *Sea $0 \leq \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y q tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si (u, v) es un par pesos que satisface*

$$||(u,v)||_{T_{q,\alpha}} := \sup_Q \frac{\left(\int_Q M(\chi_Q \sigma)^{(1-\frac{\alpha}{n})q}\, u dx\right)^{1/q}}{\sigma(Q)^{1/q}} < \infty,$$

entonces

$$||M_\alpha f||_{L^q(u)} \leq C||f||_{L^p(v)}.$$

Es más

$$||M_\alpha||_{L^p(v)\to L^q(u)} \leq C||(u,v)||_{T_{q,\alpha}},$$

donde la constante C no depende del par de pesos (u, v).

Respecto a un peso prueba

Teorema 1.39 ([**45**], [**29**]). *Sea $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y q tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in A_{p,q}$ entonces*

$$||M_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \leq C||w||_{A_{p,q}}^{(1-n/\alpha)p'/q},$$

es más, el exponente es óptimo.

Finalmente J. Recchi estudia desigualdades débiles en el caso extremo, donde el peso w está en $A_{1,q}$ y no vale la acotación fuerte, ver [**54**], ella demuestra que

Teorema 1.40 ([**54**]). *Sea $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y q tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. Si $w \in A_{1,q}$ entonces*

$$||I_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||w||_{A_{\infty,q}}^{1/p'}||w||_{A_{1,q}}^{1/q}||f||_{L^p(w^p)},$$

es más, los exponentes son óptimos.

Teorema 1.41 ([**54**]). *Sea $0 < \alpha < n$, si $w \in A_1$ entonces*

$$||I_\alpha f||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C||w||_{A_1}||f||_{L^1(M_\alpha w)}.$$

4.2. Operadores fraccionarios laterales.

Las integrales fraccionarias laterales clásicas son operadores de convolución con núcleos que tienen soporte en $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. Cuando el soporte es $(0, \infty)$ se la llama integral fraccionaria de Riemann-Liouville y la denotamos por I_α^- o R_α, cuando el soporte es $(-\infty, 0)$ se llama integral fraccionaria de Weyl y la denotamos por I_α^+ o W_α. La definición de estos operadores es

Definición 1.42. Sea $0 < \alpha < 1$, para una función f localmente integrable definimos:

La integral fraccionaria de Weyl como

$$W_\alpha f(x) = I_\alpha^+ f(x) := \left(f(y) * \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \chi_{(-\infty,0)}(y) \right)(x) = \int_x^\infty \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\, dy.$$

La integral fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$R_\alpha f(x) = I_\alpha^- f(x) := \left(f(y) * \frac{1}{|y|^{1-\alpha}} \chi_{(0,\infty)}(y) \right)(x) = \int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\, dy.$$

Mientras las funciones maximales fraccionarias laterales se definen por:

Definición 1.43. Sea $0 \leq \alpha < 1$, para una función f localmente integrable definimos las funciones maximales fraccionarias laterales como

$$M_\alpha^+ f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt, \qquad M_\alpha^- f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_{x-h}^{x} |f(t)|\, dt.$$

Observar que cuando $\alpha = 0$ obtenemos la función maximal lateral de la **Definición** 1.14.

Uno de los primeros resultados obtenidos para estos operadores fue dado por Hardy, Littlewood y Pólya, ver [**21**]. Para $p > 1$, $1/p > \alpha$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ prueban que I_α^+ es acotada de $L^p(\mathbb{R})$ en $L^q(\mathbb{R})$ con la medida de Lebesgue.

En 1988 Andersen y Sawyer, ver [**2**], consideran el caso de un peso. A continuación damos la definición de pares de pesos en la clase $A_{p,q}^+$. Cuando los dos pesos son iguales y $1 < p$, $q < \infty$, la definición coincide con la dada por Andersen y Sawyer.

Definición 1.44. Decimos que un par de pesos (u, v) está en la clase $A^+_{p,q}$, con $1 < p \leq \infty$, $1 < q < \infty$, si existe una constante $C_{p,q}$ tal que

$$\sup_{h>0} \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{|h|}\int_{x-h}^{x} u(y)^q\,dy\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v(y)^{-p'}\,dy\right)^{q/p'} \leq C_{p,q}.$$

A la menor constante posible $C_{p,q}$, la llamamos constante del par de pesos (u, v) en $A^+_{p,q}$ y la denotamos por $||(u, v)||_{A^+_{p,q}}$.

Por otro lado decimos que un par de pesos (u, v) está en la clase $A^+_{1,q}$, con $1 < q < \infty$, si existe una constante $C_{1,q}$ tal que

$$M^-(u^q)(x) \leq C_{1,q} v(x)^q, \qquad \text{para casi todo } x \in \mathbb{R}.$$

A la menor constante posible $C_{1,q}$, la llamamos constante del par de pesos (u, v) en $A^+_{1,q}$ y la denotamos por $||(u, v)||_{A^+_{1,q}}$.

Finalmente decimos que un par de pesos (u, v) está en la clase $A^+_{p,\infty}$, con $1 < p \leq \infty$, si existe una constante $C_{p,\infty}$ tal que

$$\sup_{h>0} \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} \left|\left|\chi_{[x-h,x]}u\right|\right|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v(y)^{-p'}\,dy\right)^{1/p'} < C_{p,\infty}.$$

A la menor constante posible $C_{p,\infty}$, la llamamos constante del par de pesos (u, v) en $A^+_{p,\infty}$ y la denotamos por $||(u, v)||_{A^+_{p,\infty}}$.

El siguiente lema da la relación entre las clases $A^+_{p,q}$ y A^+_r.

Lema 1.45. *Sean $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$.*

(i.) $(u, v) \in A^+_{p,q}$ *si y sólo si* $(u^q, v^q) \in A^+_r$ *con* $r = 1 + q/p'$. *Además*

$$||(u, v)||_{A^+_{p,q}} = ||(u^q, v^q)||_{A^+_r}.$$

(ii.) $(u, v) \in A^+_{p,q}$ *si y sólo si* $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A^-_r$ *con* $r = 1 + p'/q$. *Además*

$$||(u, v)||^{p'/q}_{A^+_{p,q}} = ||(v^{-p'}, u^{-p'})||_{A^-_r}.$$

(iii.) $(u, v) \in A^+_{p,\infty}$ *si y sólo si* $(u^{-p'}, v^{-p'}) \in A^-_1$. *Además*

$$||(u, v)||_{A^+_{p,\infty}} \approx ||(v^{-p'}, u^{-p'})||^{1/p'}_{A^-_1}.$$

Demostración. Si $r = 1+q/p'$, entonces (i.) se deduce de la siguiente igualdad

$$\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-q\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1} = \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-q\frac{1}{q/p'}}\right)^{q/p'}$$

$$= \left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^q\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)^{q/p'}.$$

Ahora, si $r = 1 + p'/q$, entonces (ii.) se deduce de la siguiente igualdad

$$\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^{p'\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1} = \left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^{p'\frac{1}{p'/q}}\right)^{p'/q}$$

$$= \left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)\left(\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} u^{q}\right)^{p'/q}.$$

Finalmente para (iii.) primero consideremos $(u,v) \in A^+_{p,\infty}$, luego

$$\left|\left|\chi_{[x-h,x]}u\right|\right|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \leq ||(u,v)||_{A^+_{p,\infty}},$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $h > 0$, entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $h > 0$ tenemos que

$$u(x)\left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \leq ||(u,v)||_{A^+_{p,\infty}},$$

por lo tanto

$$M^+(v^{-p'})(x) \leq ||(u,v)||^{p'}_{A^+_{p,\infty}} u^{-p'}(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$ de donde se deduce que $||(v^{-p'}, u^{-p'})||_{A_1^-} \leq ||(u,v)||^{p'}_{A^+_{p,\infty}}$. Por otra parte si $(v^{-p'}, u^{-p'}) \in A_1^-$ tenemos que

$$u^{p'}(x)M^+(v^{-p'})(x) \leq ||(v^{-p'}, u^{-p'})||_{A_1^-},$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Sean x y $h > 0$ tal que $\left|\left|\chi_{[x-h,x]}u\right|\right|_\infty < \infty$, entonces existe $t \in [x-h, x]$ con $\left|\left|\chi_{[x-h,x]}u\right|\right|_\infty \leq 2u(t)$. Luego

$$\left|\left|\chi_{[x-h,x]}u\right|\right|_\infty \left(\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'} \leq 2u(t)\left(\frac{x+h-t}{h}\frac{1}{x+h-t}\int_{t}^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'}$$

$$\leq 4u(t)\left(\frac{1}{x+h-t}\int_{t}^{x+h} v^{-p'}\right)^{1/p'}$$

$$\leq 4u(t)M^+(v^{-p'})(t)^{1/p'} \leq 4||(v^{-p'}, u^{-p'})||^{1/p'}_{A_1^-}.$$

Por lo tanto $||(u,v)||_{A^+_{p,\infty}} \leq 4||(v^{-p'},u^{-p'})||^{1/p'}_{A^-_1}$. □

Andersen y Sawyer demuestran que I^+_α y M^+_α son acotadas fuertemente, de $L^p(w^p)$ en $L^q(w^q)$, si y solo si $w \in A^+_{p,q}$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$. Martín-Reyes y de la Torre, en [**40**], caracterizan los pares de pesos para los cuales las funciones maximales fraccionarias laterales son acotadas. En 1989 Gabidzashvili y Kokilashvili, en [**28**], dan condiciones para el tipo débil (p,q), $1 \leq p < q < \infty$, para la integral fraccionaria de Weyl. Lorente Domínguez y Martín-Reyes en [**34**], [**9**], caracterizan los pares de pesos (u,v) para el tipo débil (p,q) respecto a las medidas u y v. También caracterizan los pares de pesos (u,v) para los cuales las integrales fraccionarias laterales son de tipo fuerte (p,q). Los resultados de Lorente Domínguez y Martín-Reyes son la versión lateral de los resultados obtenidos por Sawyer en [**58**] y [**60**]. En estos trabajos no se tiene en cuenta la dependencia de la acotación respecto a la constante de los pesos. Algunos de estos teoremas, que vamos a necesitar, son:

Teorema 1.46 ([**34**], [**9**]). *Sean $1 < p \leq q < \infty$ o $p = 1 < q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. La siguiente desigualdad dédil*

$$u(\{x : I^+_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq C\left(\frac{1}{\lambda^p}\int f^p v\right)^{q/p},$$

vale para toda función $f \in L^p(v)$ con C independiente de f, si y sólo si el par de pesos (u,v) satisface

$$[\sigma,u]_{S^+_{q',p'}} := \sup_I \left(\int_I u\right)^{-1/q'} \left(\int_I I^-_\alpha(\chi_I u)^{p'}\sigma\right)^{1/p'} < \infty, \qquad si\ 1 < p \leq q < \infty,$$

o

$$[\sigma,u]_{S^+_{q',p'}} := \sup_I \left(\int_I u\right)^{-1/q'} ||I^-_\alpha(\chi_I u)v^{-1}||_{L^\infty(v)} < \infty, \qquad si\ p = 1 < q < \infty.$$

Es más

$$||I^+_\alpha||_{L^p(v)\to L^{q,\infty}(u)} \approx [\sigma,u]_{S^+_{q',p'}}.$$

Teorema 1.47 ([**34**], [**9**]). *Sean $1 < p \leq q < \infty$ y $0 < \alpha < 1$. La siguiente desigualdad fuerte vale toda función $f \in L^p(v)$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |I_\alpha^+ f|^q u\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p v\right)^{1/p},$$

con C independiente de f, si y sólo si el par de pesos (u, v) satisface

$$[\sigma, u]_{S^+_{q',p'}} := \sup_I \left(\int_I u\right)^{-1/q'} \left(\int_I I_\alpha^-(\chi_I u)^{p'} \sigma\right)^{1/p'} < \infty,$$

y

$$[u, \sigma]_{S^-_{p,q}} := \sup_I \left(\int_I \sigma\right)^{-1/p} \left(\int_I I_\alpha^+(\chi_I \sigma)^q u\right)^{1/q} < \infty.$$

Es más

$$||I_\alpha^+||_{L^p(v) \to L^q(u)} \approx [\sigma, u]_{S^+_{q',p'}} + [u, \sigma]_{S^-_{p,q}}.$$

De estos dos resultados podemos concluir que

$$||I_\alpha^+||_{L^p(v)\to L^q(u)} \approx ||I_\alpha^+||_{L^p(v)\to L^{q,\infty}(u)} + ||I_\alpha^-||_{L^{q'}(u^{1-q'})\to L^{p',\infty}(v^{1-p'})}.$$

De esta última desigualdad para un peso $w \in A^+_{p,q}$, considerando $u = w^q$ y $v = w^p$, deducimos que

$$||I_\alpha^+||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} \approx ||I_\alpha^+||_{L^p(w^p)\to L^{q,\infty}(w^q)} + ||I_\alpha^-||_{L^{q'}(w^{-q'})\to L^{p',\infty}(w^{-p'})}. \tag{1.21}$$

Martín-Reyes y de la Torre, en [**40**], introducen la función maximal fraccionaria diádica lateral, estudian sus buenos pesos y la relación entre ambas funciones maximales. A continuación daremos algunas de estos resultados, en el Capítulo 2 estableceremos con detalles estas relaciones.

En adelante cuando escribamos I^- e I^+ haremos referencia a intervalos de igual longitud y contiguos, no necesariamente diádicos. Dado un par de pesos (u, v) denotaremos por σ a $v^{1-p'}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ vamos a considerar la siguiente familia de intervalos diádicos

$$A_x^+ = \{I^- : \ I^- \text{ es un intervalo diádico y } x \in I^-\},$$

Definición 1.48 ([**40**]). Sea $0 \leq \alpha < 1$, f una función localmente integrable, definimos la función maximal fraccionaria diádica lateral como

$$M^+_{\alpha,d}f(x) = \sup_{I^- \in A^+_x} \frac{1}{|I^+|^{1-\alpha}} \int_{I^+} |f(t)|\, dt,$$

Martín-Reyes y de la Torre demuestran que esta función maximal es equivalente a la dada en la **Definición** 1.53. En el Capítulo 2 daremos la demostración de este resultado. También introducen las siguientes clases de pares de pesos.

Definición 1.49 ([**40**]). Dada las funciones $u, v \geq 0$ localmente integrables diremos que:

(u, v) están en la clase $S^+_{p,q,\alpha}$, con $1 < p \leq q$, si existe una constante C tal que, para todo intervalo I

$$\int_I \sigma < \infty \qquad \text{y} \qquad \left(\int_I (M^+_\alpha \sigma\chi_I)^q u\right)^{1/q} \leq C\left(\int_I \sigma\right)^{1/p}.$$

donde $\sigma = v^{1-p'}$.

Llamamos constante del par de pesos (u, v) en $S^+_{p,q,\alpha}$ al ínfimo de las constantes C y la denotamos por $||(u, v)||_{S^+_{p,q,\alpha}}$.

Definición 1.50 ([**40**]). Dada las funciones $u, v \geq 0$ localmente integrables diremos que:

(u, v) están en la clase $S^+_{p,q,\alpha,d}$, con $1 < p \leq q$, si existe una constante C tal que, para todos los intervalos I^- e I^+, contiguos de igual longitud, con $\int_{I^-} u > 0$ se cumple que

$$\int_{I^- \cup I^+} \sigma < \infty \qquad \text{y} \qquad \left(\int_{I^- \cup I^+} (M^+_{\alpha,d} \sigma\chi_{I^+})^q u\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{I^+} \sigma\right)^{1/p},$$

donde $\sigma = v^{1-p'}$.

Llamamos constante del par de pesos (u, v) en $S^+_{p,q,\alpha,d}$ al ínfimo de las constantes C y la denotamos por $||(u, v)||_{S^+_{p,q,\alpha,d}}$.

De forma análoga se definen las clases $S^-_{p,q,\alpha}$ y $S^-_{p,q,\alpha,d}$ con $1 < p \leq q$.

Martín-Reyes y de la Torre prueban

Proposición 1.51 ([**40**]). *Sean* u, $v \geq 0$ *funciones localmente integrables. El par* (u, v) *está en la clase* $S^+_{p,q,\alpha,d}$ *si y sólo si* (u, v) *está en la clase* $S^+_{p,q,\alpha}$. *Es más existen constantes* k_1 *y* k_2*, que sólo dependen de* p*,* q *y* α*, tales que*

$$||(u,v)||_{S^+_{p,q,\alpha,d}} \leq k_1||(u,v)||_{S^+_{p,q,\alpha}} \qquad y \qquad ||(u,v)||_{S^+_{p,q,\alpha}} \leq k_2||(u,v)||_{S^+_{p,q,\alpha,d}}. \quad (1.22)$$

Ninguno de los artículos citados, que trabajan con operadores fraccionarios laterales y clases de pesos, tienen en cuenta como dependen las acotaciones de las constantes respecto de los pesos. Recientemente, en [**42**], Martín-Reyes y de la Torre demuestran el análogo al teorema de Buckley para una función maximal fraccionaria lateral, más general que M^+_α, estableciendo la dependencia óptima respecto a la constante del peso. En el Capítulo 2 daremos otra demostración de este resultado para M^+_α usando un teorema de extrapolación.

Teorema 1.52 ([**42**]). *Sean* $0 \leq \alpha < 1$*,* $1 < p \leq q < \infty$ *con* $1/p - 1/q = \alpha$ *y* w *un peso en la clase* $A^+_{p,q}$. *Para toda* $f \in L^p(w)$ *se tiene que*

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||w||^{(1-\alpha)p'/q}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

donde el exponente $(1-\alpha)p'/q$ *es el mejor posible.*

Además en el Cápitulo 2 enunciaremos y demostraremos las versiones laterales de los **Teoremas** 1.36, 1.37, 1.38 y 1.39.

Para finalizar con los preliminares enunciaremos un resultado de A. Bernal, ver [**4**], que vamos a necesitar para lograr nuestros resultados. De forma análoga a la ecuación (1.12) definimos

Definición 1.53. Sea $0 \leq \alpha < 1$, μ una medida boreliana, regular y definida positiva en $\mathbb{R}$. Para una función f localmente integrable, en la medida μ, definimos las siguientes funciones maximales

$$M_{\alpha,\mu}f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{\mu(I)^{1-\alpha}} \int_I |f(t)|\, d\mu(t),$$

$$M^+_{\alpha,\mu}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu(x,x+h)^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(t)|\, d\mu(t),$$

$$M^-_{\alpha,\mu}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{\mu(x,x+h)^{1-\alpha}} \int_{x-h}^{x} |f(t)|\, d\mu(t).$$

A. Bernal, en [**4**], demuestra que

Teorema 1.54 ([**4**]). *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ *con* $1/p - 1/q = \alpha$ *y* μ *una medida boreliana, regular y definida positiva en* $\mathbb{R}$. *Entonces, para toda* $f \in L^p(\mu)$ *se tiene que*

$$||Nf||_{L^q(\mu)} \leq C_{p,q}||f||_{L^p(\mu)},$$

donde N *denota a cualquiera de los operadores* $M_{\alpha,\mu}f(x)$, $M^+_{\alpha,\mu}f(x)$ *o* $M^-_{\alpha,\mu}f(x)$ *de la definición anterior. La constante* $C_{p,q}$ *cambia para cada uno de los operadores pero en ningún caso depende de la medida* μ.

Observación 1.55. Para demostrar el teorema anterior primero se trabaja con las funciones maximales laterales $M^+_{\alpha,\mu}f(x)$ y $M^-_{\alpha,\mu}f(x)$; para el caso de $M_{\alpha,\mu}f(x)$ se usa que $M_{\alpha,\mu}f(x) \leq M^+_{\alpha,\mu}f(x) + M^-_{\alpha,\mu}f(x)$; por esto es importante que las funciones maximales estén definidas en $\mathbb{R}$. En el caso no lateral y dimensión arbitraria, para poder obtener una acotación donde la constante no dependa de la medida μ, se debe considerar funciones maximales diádicas o centradas.

Capítulo 2

Estimaciones sharp para operadores fraccionarias laterales

En este capítulo estudiamos cómo depende la norma de operadores fraccionarios laterales respecto a diferentes constantes para pares de pesos. Se obtendrán estimaciones sharp para la noma fuerte y débil de la función maximal fraccionaria lateral. Respecto a las integrales fraccionarias de Riemman-Liuville y de Wely también se obtienen las constantes óptimas de las normas fuertes y débiles. Para poder lograr estos resultados es necesario desarrollar teoremas previos de extrapolación.

1. Resultados de extrapolación

En este apartado vamos a demostrar algunos resultados de extrapolación que nos permitirán obtener cotas sharp para operadores fraccionarios laterales.

Los resultados equivalentes para pesos en A_p los prueban E. Harboure, R. Macías, y C. Segovia en los trabajos [**18**] y [**17**]. Respecto al caso lateral R. Macías y M. S. Riveros, en [**38**], obtienen resultados análogos. En ninguno de estos trabajos se tiene en cuenta la dependencia de la cota respecto a los pesos. Dragicevic, Grafakos, Pereyra y Petermichl en [**10**] y Lacey, Moen, Pérez y Torres en [**29**] mejoran algunos de los resultados de [**18**] y [**17**] teniendo en cuenta la dependencia respecto de los pesos.

Vamos a necesitar algunos lemas previos. Las ideas que se siguen, para su demostración, son de Rubio de Francia y Garcia Cuerva, ver [**15**].

Lema 2.1. *Sean $p, s > 1$ y $h \in L^s(w)$. Si $w \in A_p^+$ definimos*

$$S(h) = \left(w^{-1}M^-(h^{s/p'}w)\right)^{p'/s}.$$

Entonces

(a) *S es acotado en $L^s(w)$, es más,*

$$||S(h)||_{L^s(w)} \leq Cp^{p'/s}||h||_{L^s(w)};$$

(b) *Si los exponentes s y p cumplen que $r := p/s' \in [1, \infty)$, entonces para una función no negativa $h \in L^s(w)$ tenemos que:*

- *si $r > 1$, el par de pesos $(hw, S(h)w)$ está en la clase A_r^+, es más*

$$||(hw, S(h)w)||_{A_r^+} \leq 2^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{1-p'/s}.$$

- *si $r = 1$, el par de pesos $(hw, S(h)w)$ está en la clase A_1^+ con constante igual a uno.*

Demostración. Para ver **(a)** estimemos directamente la norma de S. Para ello vamos a usar el análogo de la ecuación (1.16) del **Teorema** 1.19 pero para la función maximal lateral M^-, es decir

$$||M^-||_{L^{p'}(w^{1-p'})} \leq Cp||w^{1-p'}||_{A_{p'}^-}^{\frac{1}{p'-1}},$$

con $w^{1-p'} \in A_{p'}^-$, pues, por las propiedades de los pesos de Sawyer, si $w \in A_p^+$ tenemos que $w^{1-p'} \in A_{p'}^-$ y $||w^{1-p'}||_{A_{p'}^-} = ||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
||Sh||_{L^s(w)} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(w^{-1}M^-(h^{s/p'}w)\right)^{p'} wdx\right)^{1/s} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(M^-(h^{s/p'}w)\right)^{p'} w^{1-p'}dx\right)^{1/s} \\
&\leq \left(||M^-||_{L^{p'}(w^{1-p'})}\right)^{p'/s} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(h^{s/p'}w\right)^{p'} w^{1-p'}dx\right)^{1/s} \\
&\leq \left(Cp||w^{1-p'}||_{A_{p'}^-}^{\frac{1}{p'-1}}\right)^{p'/s} ||h||_{L^s(w)} = Cp^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{\frac{p}{(p-1)s}}||h||_{L^s(w)} \\
&= Cp^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{\frac{p'}{s}}||h||_{L^s(w)},
\end{aligned}$$

luego $||S||_{L^s(w)} \leq Cp^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{\frac{p'}{s}}$.

Para ver **(b)**, primero observar que si $s = p'$ entonces $S(h)w = M^-(hw)$ de lo cual tenemos, trivialmente, que el par de pesos está en la clase A_1^+ con constante igual a uno.

Ahora, si $s > p' > 1$, entonces $p > s' > 1$ y $r > 1$. Notar que $r-1 = (p-1)(1-\frac{p'}{s})$ y por la definición de función maximal lateral, para intervalos I^- e I^+ contiguos de igual longitud y para todo $t \in I^+$ se cumple

$$\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} h^{s/p'}w \le 2M^-(h^{s/p'}w)(t),$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} hw\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} (S(h)w)^{\frac{-1}{r-1}}\right)^{r-1} \\
&= \left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} hw\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} \left(\left(w^{-1}M^-(h^{s/p'}w)\right)^{p'/s} w\right)^{\frac{-1}{r-1}}\right)^{r-1} \\
&= \left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} hw^{p'/s}w^{1-p'/s}\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} \left(M^-(h^{s/p'}w)\right)^{\frac{-1}{r-1}\frac{p'}{s}} w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{r-1} \\
&\le \left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} h^{s/p'}w\right)^{p'/s}\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} w\right)^{1-p'/s} \\
&\qquad \sup_{t\in I^+}(M^-(h^{s/p'}w)(t)^{-p'/s}\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{(p-1)(1-\frac{p'}{s})} \\
&\le 2^{p'/s}\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} h^{s/p'}w\right)^{p'/s}\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} w\right)^{1-p'/s} \\
&\qquad \left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} h^{s/p'}w\right)^{-p'/s}\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{(p-1)(1-\frac{p'}{s})} \\
&\le 2^{p'/s}\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} w\right)^{1-p'/s}\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} w^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{(p-1)(1-\frac{p'}{s})} \\
&\le 2^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{1-p'/s},
\end{aligned}$$

tomando supremo finaliza la demostración. □

Lema 2.2. *Sean r, p y s números reales y w un peso.*

(a) *Sean $p, s > 1$ y $w \in A_p^+$ con $r := p/s' \in [1,\infty)$. Para toda función $h \in L^s(w)$, no negativa, existe una función, no negativa, H en $L^s(w)$ tal que:*

1. *$h \le H$;*
2. *$||H||_{L^s(w)} \le 2||h||_{L^s(w)}$;*
3. *$H.w \in A_r^+$ con $||H.w||_{A_r^+} \le Cp^{p'/s}2^{p'/s}||w||_{A_p^+}$,*

donde la constante C no depende de $||w||_{A_p^+}$ ni de p.

Una forma alternativa de escribir el enunciado anterior es:

(a') *Sean $1 \leq r < p < \infty$, $s = (p/r)'$ y $w \in A_p^+$. Para toda función $h \geq 0$, $h \in L^s(w)$, existe $H \geq 0$, $H \in L^s(w)$, tal que:*

1. *$h \leq H$;*
2. *$||H||_{L^s(w)} \leq 2||h||_{L^s(w)}$;*
3. *$H.w \in A_r^+$ con $||H.w||_{A_r^+} \leq C(p,r)||w||_{A_p^+}$,*

donde la constante C no depende de $||w||_{A_p^+}$ ni de p.

(b) *Sean $1 < p < r < \infty$ y $s = p/(p-r)$ y $w \in A_p^+$. Para toda función $h \geq 0$, $h \in L^s(w)$, existe $H \geq 0$, $H \in L^s(w)$, tal que:*

1. *$h \leq H$;*
2. *$||H||_{L^s(w)} \leq 2^{r-1}||h||_{L^s(w)}$;*
3. *$H^{-1}.w \in A_r^+$ con $||H^{-1}.w||_{A_r^+} \leq C(p,r)||w||_{A_p^+}^{\frac{r-1}{p-1}}$,*

donde la constante C no depende de $||w||_{A_p^+}$ ni de p.

Demostración. Comenzaremos por el inciso **(a)**. Definimos la función H vía la siguiente serie convergente de Neumann:

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k(h)}{2^k||S||^k}, \qquad \text{donde} \quad ||S|| = ||S||_{L^s(w)}.$$

A partir de esta definición es claro que se cumplen las desigualdades 1 y 2.
El inciso 3 se sigue de la definición de la función H y del operador S,

$$S(H) \leq 2||S||(H-h) \leq 2||S||H,$$

Si $r = 1$ y $s = p'$, por el **Lema** 2.1, $||S|| \leq Cp^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{\frac{p'}{s}}$ y tenemos

$$M^-(Hw) = M^-(Hw)w^{-1}w = S(H)w \leq 2||S||Hw \leq Cp||w||_{A_p^+}Hw.$$

Si $r > 1$, por el **Lema** 2.1, el par de pesos $(hw, S(h)w)$ está en la clase A_r^+, con

$$||(hw, S(h)w)||_{A_r^+} \leq 2^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{1-p'/s},$$

luego

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} Hw\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}(Hw)^{\frac{-1}{r-1}}\right)^{r-1}\\
&\qquad\le \left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} Hw\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}(S(H)w)^{\frac{-1}{r-1}}\right)^{r-1} 2||S||\\
&\qquad\le 2^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{1-p'/s} Cp^{p'/s}||w||_{A_p^+}^{\frac{p'}{s}} = Cp^{p'/s}2^{p'/s}||w||_{A_p^+},
\end{aligned}$$

Tomando supremo se termina la prueba del ítem **(a)**.

Para ver **(a')** observar que $r > 1$ implica $\frac{p'}{s} = \frac{p-r}{p-1}$, luego $s' < p$ y al ser $r = p/s'$ aplicamos el inciso **(a)**.

Para ver **(b)**. Los exponentes duales satisfacen $r' < p'$ y si definimos $\overline{s} = (p'/s')'$, implica que $\overline{s} = s(r-1)$. Vamos a aplicar la versión correspondiente de **(a')** para p', r' y $w^{1-p'} \in A_{p'}^-$. Si $h \ge 0$ con $h \in L^s(w)$, entonces $\overline{h} = h^{s/\overline{s}}w^{p'/\overline{s}} \in L^{\overline{s}}(w^{1-p'})$ y por **(a')** existe $\overline{H} \in L^{\overline{s}}(w^{1-p'})$ tal que $\overline{h} \le \overline{H}$,

$$||\overline{H}||_{L^{\overline{s}}(w^{1-p'})} \le 2||\overline{h}||_{L^{\overline{s}}(w^{1-p'})},$$

$$\overline{H}.w^{1-p'} \in A_{r'}^-, \quad \text{con,} \qquad ||\overline{H}.w^{1-p'}||_{A_{r'}^-} \le C(p,r)||w^{1-p'}||_{A_{p'}^-} = C(p,r)||w||_{A_p^+}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Definimos H tal que $\overline{H} = H^{s/\overline{s}}w^{p'/\overline{s}}$, esto es, $H = \overline{H}^{\overline{s}/s}w^{-p'/s}$. Claramente

$$h(x) \le H(x) \quad \text{c.t.p. x} \qquad ||H||_{L^s(w)} \le 2^{r-1}||h||_{L^s(w)},$$

es más $H^{-1}w = (\overline{H}w^{1-p'})^{1-r} \in A_r^+$ y

$$\begin{aligned}
||H^{-1}w||_{A_r^+} &= ||(\overline{H}w^{1-p'})^{1-r}||_{A_r^+}\\
&= ||\overline{H}w^{1-p'}||_{A_{r'}^-}^{\frac{1}{r'-1}}\\
&\le C(p,r)||w||_{A_p^+}^{\frac{r-1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

□

A continuación enunciaremos otro lema, similar a los anteriores, que será utilizado en el capítulo siguiente. La versión no lateral de este lema la obtuvieron Lerner, Ombrosi y Pérez en [**33**].

Lema 2.3. *Sea $1 < s < \infty$ y v un peso. Para toda función $h > 0$, con $h \in L^s(v)$, existe una función $H > 0$, con $H \in L^s(v)$, tal que:*

1. $h \leq H$;
2. $||H||_{L^s(v)} \leq 2||h||_{L^s(v)}$;
3. $H.v^{\frac{1}{s}} \in A_1^-$ *con* $||H.v^{\frac{1}{s}}||_{A_1^-} \leq cs'$,

Demostración. Vamos a considerar el siguiente operador R definido por:

$$R(h) = \frac{M^+(hv^{\frac{1}{s}})}{v^{\frac{1}{s}}}.$$

Por la ecuación 1.11 tenemos que $||M^+||_{L^s(\mathbb{R})} \leq cs'$, luego

$$||R(h)||_{L^s(v)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{M^+(hv^{\frac{1}{s}})}{v^{\frac{1}{s}}}\right)^s v\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_{\mathbb{R}} M^+(hv^{\frac{1}{s}})^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq cs'||h||_{L^s(v)}.$$

Ahora definimos la función H por la siguiente serie de Neumann:

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k(h)}{2^k||R||^k}, \qquad \text{donde} \quad ||R|| = ||R||_{L^s(v)}.$$

Por la definición de la función H es claro que se cumplen los ítems 1 y 2. Veamos 3. Por la definición de R tenemos

$$R(H) \leq 2||R||(H - h) \leq 2||R||H \leq cs'\, H,$$

luego

$$M^+(Hv^{\frac{1}{s}}) = M^+(Hv^{\frac{1}{s}})v^{\frac{-1}{s}}v^{\frac{1}{s}} = R(H)v^{\frac{1}{s}} \leq cs'\, Hv^{\frac{1}{s}},$$

por lo tanto $H.v^{\frac{1}{s}} \in A_1^-$ con $||H.v^{\frac{1}{s}}||_{A_1^-} \leq cs'$. □

Teorema 2.4. *Sea T un operador sublineal definido en $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Sean $1 \leq p_0 \leq q_0 < \infty$ tales que*

$$||Tf||_{L^{q_0}(w^{q_0})} \leq c||w||^{\gamma}_{A^+_{q_0,p_0}}||f||_{L^{p_0}(w^{p_0})},$$

para todo peso $w \in A^+_{q_0,p_0}$ y para algún $\gamma > 0$. Entonces para todo $1 \leq p \leq q < \infty$ con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$ y para todo peso $w \in A^+_{p,q}$ se tiene

$$||Tf||_{L^q(w^q)} \leq c||w||^{\gamma\, \text{máx}\{1, \frac{q_0}{p_0'}\frac{p'}{q}\}}_{A^+_{q,p}}||f||_{L^p(w^p)},$$

Demostración. Primero supongamos que $w \in A^+_{p,q}$ y $1 \leq p_0 < p$ que implica $q > q_0$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |Tf|^q w^q\right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|Tf|^{q_0}\right)^{q/q_0} w^q\right)^{\frac{q_0}{q}\frac{1}{q_0}}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}} |Tf|^{q_0} g w^q\right)^{\frac{1}{q_0}},$$

para alguna función $g \in L^{(q/q_0)'}(w^q)$ con $||g||_{L^{(q/q_0)'}(w^q)} = 1$. Ahora sea $r = 1 + q/p'$ y $r_0 = 1 + q_0/p_0'$. Como $p > p_0$ tenemos $r > r_0$. Es más por la relación $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$ tenemos que $q/q_0 = r/r_0$. Luego por el **Lema** 2.2 inciso **(a')**, usando que $w^q \in A^+_r$, existe G con $G > g$, $||G||_{L^{(r/r_0)'}(w^q)} \leq 2$, $Gw^q \in A^+_{r_0}$ con $||Gw^q||_{A^+_{r_0}} \leq c||w^q||_{A^+_r} = c||w||_{A^+_{p,q}}$. Como $Gw^q \in A^+_{r_0}$ entonces $(Gw^q)^{1/q_0} \in A^+_{p_0,q_0}$. Pues, si tomamos I^- e I^+ intervalos contiguos de igual longitud, tenemos

$$\left|\left|(Gw^q)^{1/q_0}\right|\right|_{A^+_{p_0,q_0}} = \sup\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}\left(G^{1/q_0}w^{q/q_0}\right)^{q_0}\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}\left(G^{1/q_0}w^{q/q_0}\right)^{-p_0'}\right)^{q_0/p_0'}$$
$$= \sup\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}(Gw^q)\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}(Gw^q)^{-p_0'/q_0}\right)^{q_0/p_0'}$$
$$= ||Gw^q||_{A^+_{r_0}}.$$

Por lo tanto, usando la relación

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0},$$

y la desigualdad de Hölder con p/p_0 y $(p/p_0)'$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} |Tf|^q w^q\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |Tf|^{q_0} g w^q\right)^{1/q_0} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |Tf|^{q_0} G w^q\right)^{1/q_0} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |Tf|^{q_0} \left(G^{1/q_0} w^{q/q_0}\right)^{q_0}\right)^{1/q_0} \\
&\leq c||G^{1/q_0} w^{q/q_0}||^{\gamma}_{A^+_{q_0,p_0}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_0} \left(G^{1/q_0} w^{q/q_0}\right)^{p_0}\right)^{1/p_0} \\
&\leq c||G w^q||^{\gamma}_{A^+_{r_0}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_0} w^{p_0} G^{p_0/q_0} w^{q/(p/p_0)'}\right)^{1/p_0} \\
&\leq c||w^q||^{\gamma}_{A^+_{r}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p} w^{p}\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} G^{(r/r_0)'} w^q\right)^{(p-p_0)/pp_0} \\
&\leq c||w||^{\gamma}_{A^+_{p,q}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p} w^{p}\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el caso donde $1 \leq p_0 < p$.

Para el caso $1 < p < p_0$, como $q < q_0$ tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p w^p\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|f w^{p'}|^{p_0}\right)^{p/p_0} w^{-p'}\right)^{1/p}.$$

Como $p/p_0 < 1$, existe una función $g \geq 0$ con

$$\int_{\mathbb{R}} g^{p/(p-p_0)} w^{-p'} = 1$$

tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p w^p\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f w^{p'}|^{p_0} g w^{-p'}\right)^{1/p},$$

ver pagina 135 en [**16**].

Sean $h = g^{-p_0'/p_0}$, $r = 1 + p'/q$ y $r_0 = 1 + p_0'/q_0$, con $r > r_0$. Como $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$ implica que $r/r_0 = p'/p_0'$ lo que a su vez implica

$$\frac{p_0'}{p_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)' = \frac{p}{p_0 - p}. \tag{2.1}$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} h^{(r/r_0)'} w^{-p'} = \int_{\mathbb{R}} g^{p/(p-p_0)} w^{-p'} = 1.$$

Observar que $w^{-p'} \in A_r^-$, luego por el **lema** 2.2 inciso **(a')**, existe una función H tal que $H \geq h$, $||H||_{L^{(r/r_0)'}(w^{-p'})} \leq 2$ y $Hw^{-p'} \in A_{r_0}^-$ con $||Hw^{-p'}||_{A_{r_0}^-} \leq c||w^{-p'}||_{A_r^-} = c||w||_{A_{p,q}^+}^{p'/q}$.

Ahora como $Hw^{-p'} \in A_{r_0}^-$ tenemos $(Hw^{-p'})^{-1/p_0'} \in A_{p_0,q_0}^+$ con $||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+} = ||Hw^{-p'}||_{A_{r_0}^-}^{q_0/p_0'}$. En efecto

$$
\begin{aligned}
||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+} &= \sup\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}(H^{-1/p_0'}w^{-p'/p_0'})^{q_0}\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}(H^{-1/p_0'}w^{-p'/p_0'})^{-p_0'}\right)^{q_0/p_0'} \\
&= \sup\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-}(Hw^{-p'})^{-q_0/p_0'}\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+}Hw^{-p'}\right)^{q_0/p_0'}. \\
&= ||Hw^{-p'}||_{A_{r_0}^-}^{q_0/p_0'}.
\end{aligned}
$$

Finalmente usando (2.1) tenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^p w^p\right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}}|f|^{p_0}h^{-p_0/p_0'}w^{p'(p_0-1)}\right)^{1/p_0} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}}|f|^{p_0}H^{-p_0/p_0'}w^{p'(p_0-1)}\right)^{1/p_0} \\
&\geq \frac{||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+}^{\gamma}}{||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+}^{\gamma}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^{p_0}(H^{-1/p_0'}w^{p'/p_0'})^{p_0}\right)^{1/p_0} \\
&\geq \frac{c}{||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+}^{\gamma}}\left(\int_{\mathbb{R}}|Tf|^{q_0}(H^{-1/p_0'}w^{p'/p_0'})^{q_0}\right)^{1/q_0} \\
&\geq \frac{c}{||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+}^{\gamma}}\left(\int_{\mathbb{R}}|Tf|^q w^q\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}}H^{(r/r_0)'}w^{p'}\right)^{q-q_0/qq_0} \\
&\geq \frac{c}{||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+}^{\gamma}}\left(\int_{\mathbb{R}}|Tf|^q w^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Hemos usado la desigualdad de Hölder para exponente menor a 1. Es decir si $0 < s < 1$ entonces

$$||fg||_{L^1} \geq ||f||_{L^s}||g||_{L^{s'}},$$

donde $s' = s/(s-1)$, en nuestro caso $s = q/q_0$.

Hemos demostrado que

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|Tf|^q w^q\right)^{1/q} \leq c||(Hw^{-p'})^{-1/p_0'}||_{A_{p_0,q_0}^+}^{\gamma}\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^p w^p\right)^{1/p}.$$

De esto último deducimos que

$$\begin{aligned}||T||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} &\leq c||(Hw^{-p'})^{-1/p'_0}||^{\gamma}_{A^+_{p_0,q_0}} = c||Hw^{-p'}||^{\gamma\frac{q_0}{p'_0}}_{A^-_{r_0}}\\ &\leq c||w^{-p'}||^{\gamma\frac{q_0}{p'_0}}_{A^-_{1+p'/q}} = c||w||^{\gamma\frac{q_0}{p'_0}\frac{p'}{q}}_{A^+_{p,q}},\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el teorema. □

Corolario 2.5. *Supongamos que para algún* $1 \leq p_0 \leq q_0 < \infty$*, un operador* T *satisface la siguiente acotación de tipo débil* (p_0, q_0)*,*

$$||Tf||_{L^{q_0,\infty}(w^{q_0})} \leq c||w||^{\gamma}_{A^+_{p_0,q_0}}||f||_{L^{p_0}(w^{p_0})}$$

para todo peso $w \in A^+_{p_0,q_0}$ *y para algún* $\gamma > 0$*. Entonces* T *satisface la siguiente desigualdad de tipo débil* (p, q)*,*

$$||Tf||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq c||w||^{\gamma\,\text{máx}\{1,\frac{q_0}{p'_0}\frac{p'}{q}\}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

para todo $1 \leq p \leq q < \infty$ *con*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0},$$

y para todo $w \in A^+_{p,q}$*.*

Demostración. Notar que en la demostración del teorema no se usa que T sea lineal. Vamos a aplicar el resultado al operador $T_\lambda f = \lambda\chi_{\{|Tf|>\lambda\}}$. Fijamos $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned}||T_\lambda f||_{L^{q_0}(w^{q_0})} &= \lambda w^{q_0}(\{x : |Tf(x)| > \lambda\})^{1/q_0}\\ &\leq ||Tf||_{L^{q_0,\infty}(w^{q_0})} \leq c||w||^{\gamma}_{A^+_{p_0,q_0}}||f||_{L^{p_0}(w^{p_0})},\end{aligned}$$

donde la constante c es independiente de λ. Si $w \in A^+_{p,q}$, aplicando el **Teorema** 2.4 al operador $T_\lambda : L^p(w^p) \to L^q(w^q)$ para todo $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$, obtenemos

$$||T_\lambda f||_{L^q(w^q)} \leq c||w||^{\gamma\,\text{máx}\{1,\frac{q_0}{p'_0}\frac{p'}{q}\}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

con c independiente de λ por lo tanto,

$$||Tf||_{L^{q,\infty}(w^q)} = \sup_{\lambda>0}||T_\lambda f||_{L^q(w^q)} \leq c||w||^{\gamma\,\text{máx}\{1,\frac{q_0}{p'_0}\frac{p'}{q}\}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)}.$$

$\square$

Teorema 2.6 (Extrapolación débil desde ∞). *Sea T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(\mathbb{R})$, a valores en el espacio de las funciones medibles. Dado $1 < \beta \le \infty$, supongamos que T satisface que, para todo par $(a,b) \in A^+_{\beta,\infty}$ vale la desigualdad*

$$||aT(f)||_\infty \le C(T)C(||(a,b)||_{A^+_{\beta,\infty}})||fb||_\beta \ ,$$

donde la constante $C(T)$ es independiente de la constante de $A^+_{\beta,\infty}$ del par (a,b).

Sean $1 < p < \beta$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}$ y $(u,v) \in A^+_{p,q}$, entonces existe $C(T,p,q)$, que sólo depende de p, q, y del operador T, tal que

$$\lambda u^q\left(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\right)^{1/q} \le C(T,p,q)||(u,v)||^{1/q}_{A^+_{p,q}} \left(\int |f|^p v^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, llamemos $0 < m = \int |f|^p v^p\, dx$, y (u,v) $\in A^+_{p,q}$. Definimos

$$b(x) = \begin{cases} |f(x)|^{\frac{p}{\beta}-1} v(x)^{\frac{p}{\beta}} m^{\frac{1}{q}} & \text{si} \quad |f(x)| > 0 \\ \\ e^{\pi\frac{|x|^2}{q}} v(x) & \text{si} \quad |f(x)| = 0, \end{cases}$$

Esta b satisface

(i) $||fv||_{L^p} = ||fb||_{L^\beta}$,

(ii) $\int b^{-q} v^q\, dx \le 2$.

Probemos estas dos afirmaciones:

Sea $\beta < \infty$. Para **(i)**

$$\begin{aligned} \left(\int |f|^\beta b^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} &= \left(\int_{\{x:f\neq 0\}} |f|^\beta |f|^{(\frac{p}{\beta}-1)\beta} v^p m^{\frac{\beta}{q}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} \ . \end{aligned}$$

Veamos **(ii)**,

$$\begin{aligned}
\int b(x)^{-q}v(x)^q\,dx \\
&= m^{-1}\int_{\{x:f\neq 0\}}\left(|f(x)|^{\frac{p}{\beta}-1}v(x)^{\frac{p}{\beta}}\right)^{-q}v(x)^q dx + \int_{\{x:f=0\}}\left(e^{-\pi\frac{|x|^2}{q}}v(x)\right)^{-q}v(x)^q dx \\
&= m^{-1}\int_{\{x:f\neq 0\}}|f(x)|^{\frac{-qp}{\beta}+q}v(x)^{\frac{-qp}{\beta}+q}\,dx \;+\int_{\{x:f=0\}}e^{-\pi|x|^2}\,dx \\
&\leq 2,
\end{aligned}$$

pues, como $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\beta}$ entonces $p=q-\frac{pq}{\beta}$.

El caso $\beta=\infty$ es más simple, puesto que p coincide con q y las afirmaciones son inmediatas.

Definamos

$$a(x)=\left(M^+b^{-\beta'}(x)\right)^{-\frac{1}{\beta'}}\ .$$

Notemos que $(a,b)\in A^+_{\beta,\infty}$, con constane 4, pues:

$$\begin{aligned}
||a\chi_{[x-h,x]}||_\infty\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}b^{-\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} &= \left|\left|\left(M^+b^{-\beta'}(x)\right)^{-\frac{1}{\beta'}}\chi_{[x-h,x]}\right|\right|_\infty\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}b^{-\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} \\
&\leq 2\left(M^+b^{-\beta'}(t)\right)^{-\frac{1}{\beta'}}\left(\frac{2}{x+h-t}\int_t^{x+h}b^{-\beta'}\right)^{\frac{1}{\beta'}} \\
&\leq 4\left(M^+b^{-\beta'}(t)\right)^{-\frac{1}{\beta'}}\left(M^+b^{-\beta'}(t)\right)^{\frac{1}{\beta'}} \\
&= 4\,,
\end{aligned}$$

donde $t\in[x-h,x]$. Sea $E_\lambda=\{x:|Tf(x)|>\lambda\}$; luego por la desigualdad de Hölder para espacios de Lorentz (1.20)

$$\begin{aligned}
u^q(E_\lambda) &= \int_{E_\lambda}u^q\,dx \\
&= \int\chi_{E_\lambda}(x)a^{-1}(x)a(x)u^q(x)\,dx \\
&\leq ||\chi_{E_\lambda}||_{(1+1/q,1,au^q)}||a^{-1}||_{(q+1,\infty,au^q)}.
\end{aligned}$$

Para estimar el segundo factor observamos que

$$\lambda^{q+1}\int_{\{x:a(x)^{-1}>\lambda\}} au^q \leq \lambda^q \int_{\{x:M^+b^{-\beta'}(x)>\lambda^{\beta'}\}} u^q \,. \tag{2.2}$$

Como $(u,v)\in A^+_{p,q}$, se sigue que $(u^q,v^q)\in A^+_s$, con $s=1+q/p'$ y

$$||(u^q,v^q)||_{A^+_s} = ||(u,v)||_{A^+_{p,q}},$$

(ver **Lema** 1.45). Recordemos que M^+ es de tipo débil $L^s(v^q)\to L^s(u^q)$, (ver (1.19)), con

$$\lambda^s u^q(\{x\in\mathbb{R}: M^+f(x)>\lambda\}) \leq 4^s ||(u,v)||_{A^+_{p,q}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^s\, v^q dx,$$

para toda $f\in L^s(v^q)$. Luego,

$$\begin{aligned}(2{,}2) &\leq \frac{\lambda^q 4^s}{(\lambda^{\beta'})^s}||(u,v)||_{A^+_{p,q}} \int (b^{-\beta'})^s v(x)^q \\ &= 4^s||(u,v)||_{A^+_{p,q}} \int b^{-q}v^q \leq 4^s 2||(u,v)||_{A^+_{p,q}}\,.\end{aligned}$$

Ahora, calculemos la reordenada de a^{-1} respecto de la medida au^q, esto es

$$\begin{aligned}(a^{-1})^*(t) &= \operatorname{ínf}\{y:\ au^q(\{x:\ |a(x)^{-1}|>y\})\leq t\} \\ &\leq \operatorname{ínf}\{y:\ \frac{4^s 2||(u,v)||_{A^+_{p,q}}}{y^{q+1}} \leq t\} \\ &= \left(\frac{4^s 2||(u,v)||_{A^+_{p,q}}}{t}\right)^{\frac{1}{q+1}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que,

$$||a^{-1}||_{(q+1,\infty,au^q)} = \sup_{t>0}\ t^{\frac{1}{q+1}}(a^{-1})^*(t) \leq \left(4^s 2||(u,v)||_{A^+_{p,q}}\right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Un reordenamiento no decreciente de χ_{E_λ} es $\chi_{[0,R)}$, con $R=\int_{E_\lambda} au^q$, por lo tanto

$$||\chi_{E_\lambda}||_{(1+\frac{1}{q},1,au^q)} = \frac{q}{q+1}\int_0^R t^{\frac{q}{q+1}}\,\frac{dt}{t} = \frac{q}{q+1}\int_0^R t^{-\frac{1}{q+1}}\,dt = R^{\frac{q}{q+1}}.$$

Por otro lado, usando la hipotesis y que $||(a,b)||_{A^+_{\beta,\infty}} \leq 4$

$$\begin{aligned} R = \int_{E_\lambda} a u^q &\leq \lambda^{-1} \int_{E_\lambda} |Tf| a u^q \\ &\leq \lambda^{-1} ||aTf||_\infty \int_{E_\lambda} u^q \\ &\leq C(T)\lambda^{-1} ||fb||_\beta \int_{E_\lambda} u^q \,. \end{aligned}$$

Por esto,

$$||\chi_{E_\lambda}||_{(1+\frac{1}{q},1,au^q)} \leq C(T)^{\frac{q}{q+1}} \lambda^{-\frac{q}{q+1}} ||fb||_\beta^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{E_\lambda} u^q \right)^{\frac{q}{q+1}} \,.$$

Teniendo presente las propiedades de b y que $\int_{E_\lambda} u^q < \infty$, pues $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, se sigue que

$$\begin{aligned} u^q(E_\lambda) &\leq ||\chi_{E_\lambda}||_{(1+1/q,1,au^q)} ||a^{-1}||_{(q+1,\infty,au^q)} \\ &\leq C(T)^{\frac{q+s}{q+1}} 2^{\frac{1}{q+1}} \lambda^{-\frac{q}{q+1}} ||fb||_\beta^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{E_\lambda} u^q \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(||(u,v)||_{A_{p,q}^+} \right)^{\frac{1}{q+1}} \\ &\leq C(T)^{\frac{q+s}{q+1}} 2^{\frac{1}{q+1}} \lambda^{-\frac{q}{q+1}} ||fv||_p^{\frac{q}{q+1}} \left(||(u,v)||_{A_{p,q}^+} \right)^{\frac{1}{q+1}} (u^q(E_\lambda))^{\frac{q}{q+1}} \,. \end{aligned}$$

Es decir

$$(u^q(E_\lambda))^{\frac{1}{q+1}} \leq C(T)^{\frac{q+s}{q+1}} 2^{\frac{1}{q+1}} \lambda^{-\frac{q}{q+1}} ||fv||_p^{\frac{q}{q+1}} \left(||(u,v)||_{A_{p,q}^+} \right)^{\frac{1}{q+1}} \,.$$

En conclusión, tenemos que

$$u^q(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq C(T)^{1+\frac{q+1}{p'}} 2||(u,v)||_{A_{p,q}^+} \left(\frac{1}{\lambda^p} \int f^p v^p \right)^{\frac{q}{p}} \,.$$

Por lo tanto

$$||T||_{L^p(v^p) \to L^{q,\infty}(u^q)} \leq C(T,q,p) ||(u,v)||_{A_{p,q}^+}^{1/q} .$$

□

Teorema 2.7 (Extrapolación fuerte desde ∞). *Sean $1 < \beta < \infty$ y T un operador sublineal definido en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ que satisface*

$$||vTf||_\infty \,\leq\, C(T)||v||_{A_{\beta,\infty}^+}^\gamma \left(\int |f|^\beta v^\beta \right)^{1/\beta} ,$$

para todo $v \in A^+_{\beta,\infty}$ *y algún* $\gamma > 0$. *Entonces, para todo* $1 < p < \beta$, $1/p - 1/q = 1/\beta$ *y* $v \in A^+_{p,q}$, *vale que*

$$\left(\int |Tf|^q v^q dx\right)^{1/q} \leq C(T,p,q)||v||^{\gamma\frac{p'}{q\beta'}}_{A^+_{p,q}} \left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Demostración. Sea $v \in A^+_{p,q}$ con $1/p - 1/q = 1/\beta$ y $f \in C^\infty_0(\mathbb{R})$; puesto que

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int \left(|fv^{p'}|^\beta\right)^{\frac{p}{\beta}} v^{-p'}\right)^{\frac{\beta}{p}\frac{1}{\beta}},$$

existe $g \geq 0$, con $\int g^{(\frac{p}{\beta})'} v^{-p'} = 1$, tal que

$$\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |fv^{p'}|^\beta g v^{-p'}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Sea $h = g^{-\beta'/\beta}$ entonces $h^{q/\beta'} = g^{-q/\beta} = g^{(p/\beta)'}$ y por lo tanto

$$1 = \int g^{(\frac{p}{\beta})'} v^{-p'} = \int h^{\frac{q}{\beta'}} v^{-p'}.$$

Sea $r = 1 + p'/q$ y $r_0 = 1$ y ponemos $s = (r/r_0)' = (1 + p'/q)' = q/\beta'$. Resulta que $v^{-p'} \in A^-_r$, y aplicando **Lema** 2.2 inciso **(a')**, pero para un peso en A^-_r en lugar de A^+_r, sabemos que existe $H \geq h$ con

$$Hv^{-p'} \in A^-_1 \qquad \text{y} \qquad \int H^{\frac{q}{\beta'}} v^{-p'} \leq 2,$$

es más

$$||Hv^{-p'}||_{A^-_1} \leq C(p,q)||v^{-p'}||_{A^-_r} \leq C(p,q)||v^q||^{p'/q}_{A^+_{r'}}.$$

Veamos que $H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'} \in A^+_{\beta,\infty}$, como $Hv^{-p'} \in A^-_1$ tenemos que

$$\left(M^+(Hv^{-p'})\right)^{1/\beta'} H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'} \leq C(p,q)^{1/\beta'}||v^q||^{p'/(q\beta')}_{A^+_{r'}},$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$ fijos. Si $||H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}\chi_{[x-h,x]}||_\infty < \infty$, entonces existe $t \in [x-h,x]$ tal que $||H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}\chi_{[x-h,x]}||_\infty \leq 2H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}(t)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
||H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}\chi_{[x-h,x]}||_\infty &\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} Hv^{-p'}\right)^{1/\beta'} \\
&\leq 2H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}(t)\left(\frac{x+h-t}{h}\frac{1}{x+h-t}\int_t^{x+h} Hv^{-p'}\right)^{1/\beta'} \\
&\leq 4H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}(t)\left(M^+(Hv^{-p'})(t)\right)^{1/\beta'} \\
&\leq C(p,q)||v^q||_{A^+_{r'}}^{p'/(q\beta')}.
\end{aligned}$$

Lo que afirma que $H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'} \in A^+_{\beta,\infty}$ con $||H^{-1/\beta'}v^{p'/\beta'}||_{A^+_{\beta,\infty}} \leq C(p,q)||v^q||_{A^+_{r'}}^{p'/(q\beta')}$.
De esta manera,

$$\begin{aligned}
\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int |fv^{p'}|^\beta g v^{-p'}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\int |f|^\beta \left(h^{-\frac{1}{\beta'}}v^{\frac{p'}{\beta'}}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \\
&\geq \left(\int |f|^\beta \left(H^{-\frac{1}{\beta'}}v^{\frac{p'}{\beta'}}\right)^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \geq C(T,p,q)||v^q||_{A^+_{r'}}^{-\gamma p'/(q\beta')}||H^{-\frac{1}{\beta'}}v^{\frac{p'}{\beta'}}Tf||_\infty \\
&\geq C(p,q)||v^q||_{A^+_{r'}}^{-\gamma p'/(q\beta')}||H^{-\frac{1}{\beta'}}v^{\frac{p'}{\beta'}}Tf||_\infty \left(\int H^{\frac{q}{\beta'}}v^{-p'}dx\right)^{1/q} \\
&\geq C(p,q)||v^q||_{A^+_{r'}}^{-\gamma p'/(q\beta')}\left(\int H^{-\frac{q}{\beta'}}v^{\frac{qp'}{\beta'}}|Tf|^q H^{\frac{q}{\beta'}}v^{-p'}dx\right)^{1/q} \\
&= C(p,q)||v||_{A^+_{p,q}}^{-\gamma p'/(q\beta')}\left(\int |Tf|^q v^q dx\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

pues como $1/q = 1/p - 1/\beta$ se sigue que $\frac{qp'}{\beta'} + p' = q$. Luego

$$\left(\int |Tf|^q v^q dx\right)^{1/q} \leq C(p,q)||v||_{A^+_{p,q}}^{\gamma\frac{p'(\beta-1)}{q\beta}}\left(\int |f|^p v^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

2. Diferentes constantes para pesos laterales

En esta sección cuando escribamos I^- e I^+ haremos referencia a intervalos de igual longitud y contiguos.

En este apartado introduciremos nuevas definiciones de pares de pesos y mostraremos la relación que existe con las dadas en el Capítulo 1. También demostraremos comparaciones entre funciones maximales fraccionarias laterales y clases de pesos.

Para poder dar la demostración del resultado de Martín-Reyes y de la Torre, (ver [**40**]), que compara la función maximal fraccionaria diádica lateral, $M^+_{\alpha,d}$, con la función maximal fraccionaria lateral, M^+_α, debemos introducir la siguiente definición.

Definición 2.8 ([**40**]). Sea $0 \leq \alpha < 1$, f una función localmente integrable, definimos la función maximal fraccionaria lateral N^+_α como

$$N^+_\alpha f(x) = \sup_{h>0} \frac{2^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}} \int_{x+h/2}^{x+h} |f(t)|\, dt.$$

Martín-Reyes y de la Torre demuestran los siguientes resultados.

Proposición 2.9 ([**40**]).

$$M^+_\alpha f(x) \leq (2^{1-\alpha} - 1)^{-1} N^+_\alpha f(x), \qquad\qquad N^+_\alpha f(x) \leq 2^{1-\alpha} M^+_\alpha f(x). \tag{2.3}$$

Demostración. Consideramos $f > 0$, las desigualdades se siguen de

$$\frac{2^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}} \int_{x+h/2}^{x+h} |f(t)|\, dt \leq \frac{2^{1-\alpha}}{h^{1-\alpha}} \int_{x}^{x+h} |f(t)|\, dt \leq 2^{1-\alpha} M^+_\alpha f(x),$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_{x}^{x+h} |f(t)|\, dt &= \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_{x}^{x+h/2} |f(t)|\, dt + \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_{x+h/2}^{x+h} |f(t)|\, dt \\ &\leq 2^{\alpha-1} M^+_\alpha f(x) + 2^{\alpha-1} N^+_\alpha f(x).\end{aligned}$$

□

Proposición 2.10 ([**40**]). *Para cada $0 \leq \alpha < 1$, existen constantes C^1_α y C^2_α tales que,*

$$M^+_\alpha f(x) \leq C^1_\alpha M^+_{\alpha,d} f(x) \qquad y \qquad M^+_{\alpha,d} f(x) \leq C^2_\alpha M^+_\alpha f(x). \tag{2.4}$$

Demostración. Consideramos $f > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. Sea $I^- = [a, b)$ con $I^- \in A^+_x$. Recordemos que

$$A^+_x = \{I^- :\ I^- \text{ es un intervalo diádico y } x \in I^-\}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{|I^+|^{1-\alpha}} \int_{I^+} |f(t)|\, dt \leq \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{|I^+|^{1-\alpha}} \frac{1}{(b-x)^{1-\alpha}} \int_x^b |f(t)|\, dt \leq 2^{1-\alpha} M^+_\alpha f(x).$$

Tomando supremo sobre todos los intervalos $I^- \in A_x^+$ obtenemos la segunda desigualdad.

Recíprocamente, primero observemos que alcanza pensar el caso cuando h tiene longitud 2^k con $k \in \mathbb{Z}$. Si h es de longitud arbitraria tomemos k tal que $2^{k-1} < h < 2^k$, y tenemos que

$$\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f(t)|\, dt \leq \frac{2^{(1-\alpha)k}}{h^{1-\alpha}} \frac{1}{2^{(1-\alpha)k}} \int_x^{x+2^k} |f(t)|\, dt \leq 2^{1-\alpha} \frac{1}{2^{(1-\alpha)k}} \int_x^{x+2^k} |f(t)|\, dt.$$

Por esto, basta considerar que $h = 2^k$ para algún k.

Sean I_1^+ y I_2^+ dos intervalos diádicos de longitud 2^{k-1} tales que $[x+h/2, x+h) \subseteq I_1^+ \cup I_2^+$. Si $I^+ = I_1^+ \cup I_2^+$ es diádico, entonces $I^- \in A_x^+$ y

$$\int_{x+h/2}^{x+h} |f(t)|\, dt \leq \int_{I^+} |f(t)|\, dt \leq 2^{k(1-\alpha)} M_{\alpha,d}^+ f(x).$$

Si $I_1^+ \cup I_2^+$ no es diádico sea I^+ el padre, de longitud 2^k, de I_2^+. Es claro que I_1^- e I^- estan en A_x^+, luego

$$\int_{x+h/2}^{x+h} |f(t)|\, dt \leq \int_{I_1^+} |f(t)|\, dt + \int_{I^+} |f(t)|\, dt \leq \left(2^{(k-1)(1-\alpha)} + 2^{k(1-\alpha)}\right) M_{\alpha,d}^+ f(x).$$

En los dos casos se cumple que

$$\int_{x+h/2}^{x+h} |f(t)|\, dt \leq 2^{k(1-\alpha)} \left(1 + 2^{\alpha-1}\right) M_{\alpha,d}^+ f(x),$$

luego $N_\alpha^+ f(x) \leq (1 + 2^{\alpha-1})\, M_{\alpha,d}^+ f(x)$ y por la desigualdad (2.3) obtenemos nuestro resultado. □

Teniendo en cuenta la definición de clases de pesos $T_{q,\alpha}$ dadas en [**45**] por Moen, (ver **Teorema** 1.38), introducimos las siguientes clases para pares de pesos.

Definición 2.11. Dadas las funciones u, $v \geq 0$ localmente integrables, $0 \leq \alpha < 1$ y $1 < q < \infty$ diremos que: (u, v) está en la clase $T_{q,\alpha}^+$ si existe una constante C tal que para todo intervalo I

$$\left(\int_I (M^+ \sigma \chi_I)^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_I \sigma dx\right)^{1/q},$$

donde $\sigma = v^{1-p'}$. A la menor constante posible C la llamamos contante del par (u, v) en $T_{q,\alpha}^+$ y la denotamos por $||(u,v)||_{T_{q,\alpha}^+}$.

Además si consideramos la función maximal fraccionaria diádica lateral definimos

Definición 2.12. Dadas las funciones u, $v \geq 0$ localmente integrables, $0 \leq \alpha < 1$ y $1 < q < \infty$ diremos que: (u, v) está en la clase $T^+_{q,\alpha,d}$ si existe una constante C tal que para todo par de intervalos I^- e I^+ contiguos de igual longitud

$$\left(\int_{I^- \cup I^+} (M^+_d \sigma \chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{I^+} \sigma dx\right)^{1/q},$$

donde $\sigma = v^{1-p'}$. A la menor constante posible C la llamamos contante del par (u, v) en $T^+_{q,\alpha,d}$ y la denotamos por $||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha,d}}$.

Estas clases de pesos tienen la siguiente relación entre ellas.

Teorema 2.13. *Sean u y v funciones positivas, $1 < q$ y $0 \leq \alpha < 1$, con $(1-\alpha)q > 1$. Entonces (u, v) está en la clase $T^+_{q,\alpha}$, es decir $||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}} < \infty$, si y sólo si (u, v) está en la clase $T^+_{q,\alpha,d}$, es decir $||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha,d}} < \infty$. Es más,*

$$||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha,d}} \leq C_1 ||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}} \leq C_2 ||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha,d}}, \tag{2.5}$$

donde C_1 y C_2 no dependen de u y v.

Demostración. Que (u, v) está en la clase $T^+_{q,\alpha,d}$ implica auntomáticamente que (u, v) está en la clase $T^+_{q,\alpha}$, ya que M^+_d y M^+ son equivalentes, ver ecuación 2.4.

Recíprocamente, sea I^- un intervalo. Entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{I^- \cup I^+} (M^+_d \sigma \chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} \\
&\qquad \leq K \left(\int_{I^-} (M^+ \sigma \chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} + K \left(\int_{I^+} (M^+ \sigma \chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} \\
&\qquad \leq K \left(\int_{I^-} (M^+ \sigma \chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} + K ||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}} \left(\int_{I^+} \sigma(x)\, dx\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Sólo debemos ver que para todo intervalo I^- existe una constante C que no depende de u y v tal que

$$\left(\int_{I^-} (M^+ \sigma \chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} \leq C ||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}} \left(\int_{I^+} \sigma(x)\, dx\right)^{1/q}.$$

Sea $I^- = [a,b)$ e $I^+ = [b,c)$. Supongamos primero que $\int_{I^-} \sigma \leq \int_{I^+} \sigma$, luego

$$\begin{aligned}\left(\int_{I^-} (M^+\sigma\chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} &\leq \left(\int_{I^-\cup I^+} (M^+\sigma\chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\, u dx\right)^{1/q} \\ &\leq ||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha}} \left(\int_{I^-\cup I^+} \sigma(x)\, dx\right)^{1/q} \\ &\leq 2^{1/q}||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha}} \left(\int_{I^+} \sigma(x)\, dx\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\int_{I^-} \sigma \geq \int_{I^+} \sigma$, luego elegimos un sucesión $x_0 = b > x_1 > x_2 > \cdots > x_k > \cdots > x_{N-1} > x_N = a$ tal que para $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $\int_{x_k}^c \sigma = 2^k \int_b^c \sigma$ y $\int_a^c \sigma = r \int_b^c \sigma$, $2^{N-1} < r < 2^N$. Se sigue que $\int_{x_k}^{x_{k-1}} \sigma = 2^{k-1} \int_b^c \sigma$, $0 < k < N$, mientras $\int_a^{x_{N-1}} \sigma \leq 2^{N-1} \int_b^c \sigma$. Ahora si, $x_k < x < x_{k-1}$, $1 < k \leq N$, e $y \in I^+$, entonces

$$\int_x^y \sigma\chi_{(b,c)} = \int_b^y \sigma \leq \int_b^c \sigma = 2^{-(k-2)} \int_{x_{k-1}}^{x_{k-2}} \sigma \leq 2^{-(k-2)} \int_x^y \sigma.$$

Multiplicando los dos lados de la desigualdad por $(y-x)^{-1}$ y tomando supremo obtenemos que para cada x con $x_k < x < x_{k-1}$

$$M^+(\sigma\chi_{(b,c)})(x) \leq 2^{-(k-2)} M^+(\sigma\chi_{(x,c)})(x), \qquad k = 2, \ldots N,$$

Para $k = 1$ tenemos la estimación trivial

$$M^+(\sigma\chi_{(b,c)})(x) \leq M^+(\sigma\chi_{(x,c)})(x), \qquad x_1 < x < b.$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_a^b (M^+\sigma\chi_{(b,c)})^{(1-\alpha)q}\, udx &= \sum_{k=1}^{N}\int_{x_k}^{x_{k-1}} (M^+\sigma\chi_{(b,c)})^{(1-\alpha)q}\, udx \\
&\leq \sum_{k=2}^{N} 2^{-(k-2)(1-\alpha)q}\int_{x_k}^{x_{k-1}} (M^+\sigma\chi_{(x_k,c)})^{(1-\alpha)q}\, udx + \int_{x_1}^{b} (M^+\sigma\chi_{(x_1,c)})^{(1-\alpha)q}\, udx \\
&\leq \sum_{k=2}^{N} 2^{-(k-2)(1-\alpha)q}\int_{x_k}^{c} (M^+\sigma\chi_{(x_k,c)})^{(1-\alpha)q}\, udx + \int_{x_1}^{c} (M^+\sigma\chi_{(x_1,c)})^{(1-\alpha)q}\, udx \\
&\leq ||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha}}\left[\sum_{k=2}^{N} 2^{-(k-2)(1-\alpha)q}\int_{x_k}^{c}\sigma + \int_{x_1}^{c}\sigma\right] \\
&\leq ||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha}}\left[\sum_{k=2}^{N} 2^{-(k-2)(1-\alpha)q}2^k + 2\right]\int_b^c \sigma
\end{aligned}
$$

Como $(1-\alpha)q > 1$ la serie converge y obtenemos el resultado.

$\square$

Observación 2.14. Si pedimos $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$ entonces $(1-\alpha)q = (1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})q = \frac{q}{p'} + 1 > 1$ y se cumplen las hipótesis del teorema anterior, es decir la desigualdad (2.5) es válida.

3. Estimaciones sharp para la función maximal fraccionaria lateral

En esta sección enunciaremos y demostraremos los teoremas referidos a la función maximal fraccionaria lateral.

Teorema 2.15. *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ y (u,v) un par de pesos en $S^+_{p,q}$. Entonces para toda $f \in L^p(v)$*

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(u)} \leq C||(u,v)||_{S^+_{p,q}}||f||_{L^p(v)},$$

donde la constante C no depende del par de pesos (u,v). Es más, la dependencia de la norma $||M^+_\alpha||_{L^p(v)\to L^q(u)}$ respecto a la constante, $||(u,v)||_{S^+_{p,q}}$ del par de peso, es lineal.

Teorema 2.16. *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, q tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ y (u, v) un par de pesos en $T^+_{q,\alpha}$. Entonces para toda $f \in L^p(v)$,*

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(u)} \leq C||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}}||f||_{L^p(v)},$$

donde la constante C no depende del par de pesos (u, v). Es más, la dependencia de la norma $||M^+_\alpha||_{L^p(v)\to L^q(u)}$ respecto a la constante, $||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}}$ del par de peso, es lineal.

Teorema 2.17. *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p \leq q < \infty$ con $1/p - 1/q = \alpha$ y (u, v) un par de pesos en $A^+_{p,q}$. Entoncesexiste $C > 0$ tal que*

$$||M^+_\alpha f||_{L^{q,\infty}(u^q)} \leq C||(u, v)||^{1/q}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(v^p)},$$

para toda $f \in L^p(v)$. Es más, la dependencia de la norma $||M^+_\alpha||_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)}$ respecto a la constante, $||(u, v)||_{A^+_{p,q}}$ del par de peso, es $||(u, v)||^{1/q}_{A^+_{p,q}}$.

Respecto a un mismo peso obtenemos otras demostraciones del resultado de Martín-Reyes y de la Torre

Teorema 2.18 ([**42**]). *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ con $1/p - 1/q = \alpha$ y w un peso en $A^+_{p,q}$. Entonces para toda $f \in L^p(w)$,*

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||w||^{(1-\alpha)p'/q}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

donde la constante C no depende del peso w. Es más, la dependencia de la norma $||M^+_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)}$ respecto a la constante, $||w||_{A^+_{p,q}}$ del peso, es $||w||^{(1-\alpha)p'/q}_{A^+_{p,q}}$.

La demostración del **Teorema** 2.15 es consecuencia del siguiente teorema y las desigualdades (2.4) y (1.22). En la sección 4 de este capítulo, veremos que el exponente de la constante $||(u, v)||^+_{S_{p,q,d}}$ es el mejor posible.

Teorema 2.19. *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ y (u, v) un par de pesos en $S^+_{p,q,d}$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$||M^+_{\alpha,d} f||_{L^q(u)} \leq C||(u, v)||_{S^+_{p,q,d}}||f||_{L^p(v)},$$

para toda $f \in L^p(v)$.

Demostración. Para demostrar el teorema nos basamos en ideas de B. Jawerth, ver [**27**]. Supongamos $f > 0$ y denotemos $\sigma = v^{1-p'}$. Vamos a considerar la función maximal $M^{N,+}_{\alpha,d}$, donde sólo consideramos cubos diádicos de longitud a lo sumo 2^N. Sea $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{N,+}_{\alpha,d}(f)(x) \leq 2^{k+1}\}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Para estudiar estos conjuntos consideremos $O_k = \{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{N,+}_{\alpha,d}(f)(x)\}$, como estos conjuntos son abiertos, tomamos los intervalos maximales diádicos disjuntos de longitud a lo sumo 2^N, $I^-_{k,j}$ tales que $O_k = \bigcup_j I^-_{k,j}$, y que cumplan que

$$2^k < \frac{1}{(I^+_{k,j})^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f,$$

observemos que por la definición de $M^{N,+}_{\alpha,d}$ los intervalos $I^-_{k,j}$ e $I^+_{k,j}$ son contiguos de igual longitud. Definimos

$$E_{k,j} = I^-_{k,j} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{N,+}_{\alpha,d}(f) \leq 2^{k+1}\},$$

son disjuntos dos a dos y $\Omega_k = \bigcup_j E_{k,j}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(M^{N,+}_{\alpha,d}(f)\right)^q u(x)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\Omega_k} \left(M^{N,+}_{\alpha,d}(f)\right)^q u(x)dx \\
&\leq \sum_{k,j} \int_{E_{k,j}} (2^{k+1})^q\, u(x)dx \\
&\leq 2^q \sum_{k,j} \int_{E_{k,j}} \left(\frac{1}{|I^+_{k,j}|^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\, dy\right)^q u(x)dx \\
&\leq 2^q \sum_{k,j} \left(\frac{1}{\sigma(I^+_{k,j})} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\sigma^{-1}(y)\sigma(y)\, dy\right)^q u(E_{k,j}) \left(\frac{\sigma(I^+_{k,j})}{|I^+_{k,j}|^{1-\alpha}}\right)^q \\
&\leq 2^q \int_X g\, d\mu,
\end{aligned}$$

donde $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ con la medida $\mu(k,j) = u(E_{k,j}) \left(\frac{\sigma(I^+_{k,j})}{|I^+_{k,j}|^{1-\alpha}}\right)^q$, y

$$g(k,j) = \left(\frac{1}{\sigma(I^+_{k,j})} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\sigma^{-1}(y)\sigma(y)\, dy\right)^p.$$

Definimos el conjunto de nivel a altura $\lambda > 0$ por

$$\Gamma_\lambda = \{(k,j) \in X : g(k,j) > \lambda\}.$$

Sea

$$B_\lambda = \bigcup \{I^+_{k,j} : (k,j) \in \Gamma_\lambda\}.$$

Observar que si $\left(\frac{1}{\sigma(I^+_{k,j})}\int_{I^+_{k,j}} f(y)\sigma^{-1}(y)\sigma(y)\,dy\right)^q > \lambda$, entonces para todo $x \in I^+_{k,j}$ se tiene que $M_\sigma(f\sigma^{-1})^q > \lambda$, luego $B_\lambda \subseteq \{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^q > \lambda\}$.

Como los intervalos $I^-_{k,j}$, (con $(k,j) \in \Gamma_\lambda$), tienen longitud a lo sumo 2^N y son diádicos, podemos considerar la subfamilia $\{I^-_r\}$ de $\{I^-_{k,j}\}$ con $(k,j) \in \Gamma_\lambda$, formada por los intervalos con la propiedad de que los I^+_r son maximales disjuntos. Observar que $B_\lambda = \bigcup I^+_r$, donde la unión es disjunta. Además si $I^+_{k,j} \subset I^+_r$ entonces $I^-_{k,j} \subset I^-_r \cup I^+_r$.

Estimemos $\mu(\Gamma_\lambda)$ usando la condición del peso

$$\begin{aligned}
\mu(\Gamma_\lambda) &= \sum_{(k,j)\in\Gamma_\lambda} u(E_{k,j}) \left(\frac{\sigma(I^+_{k,j})}{|I^+_{k,j}|^{1-\alpha}}\right)^q \leq \sum_{(k,j)\in\Gamma_\lambda} \int_{E_{k,j}} M^+_{\alpha,d}(\sigma\chi_{I^+_{k,j}})^q\, u(x)dx \\
&\leq \sum_r \sum_{(k,j)\in\Gamma_\lambda,\, I^+_{k,j}\subset I^+_r} \int_{E_{k,j}} M^+_{\alpha,d}(\sigma\chi_{I^+_{k,j}})^q\, u(x)dx \\
&\leq \sum_r \int_{I^-_r\cup I^+_r} M^+_{\alpha,d}(\sigma\chi_{I^+_r})^q u(x)dx \leq ||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \sum_r \sigma(I^+_r)^{q/p} \\
&\leq ||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \sigma(B_\lambda)^{q/p} \leq ||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^q > \lambda\}^{q/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo la sustitución $\lambda = t^{q/p}$, $d\lambda = \frac{q}{p}t^{q/p}\frac{dt}{t}$,

$$\begin{aligned}
\int_X g\,d\mu = \int_0^\infty \mu(\Gamma_\lambda)\,d\lambda &\leq ||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \int_0^\infty \sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^q > \lambda\}^{q/p}\,d\lambda \\
&= \frac{q}{p}||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \int_0^\infty (t\sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > t\})^{q/p}\,\frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

usando que $p \leq q$ obtenemos

$$\int_0^\infty (t\sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > t\})^{q/p} \frac{dt}{t} \tag{2.6}$$
$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{2^l}^{2^{l+1}} (t\sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > t\})^{q/p} \frac{dt}{t}$$
$$\leq 2^{q/p} \log 2 \sum_{l\in\mathbb{Z}} (2^l\sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > 2^l\})^{q/p}$$
$$\leq C \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} 2^l\sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > 2^l\} \right)^{q/p}$$
$$\leq C \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{2^{l-1}}^{2^l} \sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > t\}\, dt \right)^{q/p}$$
$$= C \left(\int_0^\infty \sigma\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > t\}\, dt \right)^{q/p}$$
$$= C \left(\int_{\mathbb{R}} M_\sigma(f\sigma^{-1})^p\, \sigma dx \right)^{q/p} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} f^p\sigma^{1-p} dx \right)^{q/p} = C \left(\int_{\mathbb{R}} f^p v dx \right)^{q/p}.$$

la última desigualdad se debe a la acotación de la función maximal M_σ en $L^p(\sigma)$, ver **Teorema** 1.54.

En conclusión tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(M_{\alpha,d}^{N,+}(f) \right)^q u(x)dx \leq C||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p v dx \right)^{q/p},$$

y por el teorema de la convergencia monótona tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(M_{\alpha,d}^{+}(f) \right)^q u(x)dx \leq C||(u,v)||^q_{S^+_{p,q,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p v dx \right)^{q/p}.$$

Observar que en el caso $p = q$ la ecuación (2.6) se simplifica pues al ser $q/p = 1$ tenemos

$$\int_0^\infty \sigma(\{x : M_\sigma(f\sigma^{-1})^p > t\})\, dt = \int_{\mathbb{R}} M_\sigma(f\sigma^{-1})^p\, \sigma dx \leq C \int_{\mathbb{R}} f^p\sigma^{1-p} dx = C \int_{\mathbb{R}} f^p v dx.$$

$\square$

La demostración del **Teorema** 2.16 es consecuencia del teorema siguiente y las desigualdades (2.4) y (2.5). También en el apartado 4 veremos que el exponente de la constante $||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha}}$ es el mejor posible.

Teorema 2.20. *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, q tal que $1/q = 1/p - \alpha$ y (u, v) un par de pesos en $T^+_{q,\alpha,d}$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$||M^+_{\alpha,d} f||_{L^q(u)} \leq C||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha,d}} ||f||_{L^p(v)},$$

para toda $f \in L^p(v)$.

Demostración. Para demostrar el teorema nos basamos en ideas de B. Jawerth, ver [**27**]. Supongamos $f > 0$ y denotemos por $\sigma = v^{1-p'}$. Vamos a considerar la función maximal $M^{N,+}_{\alpha,d}$, donde sólo consideramos cubos diádicos de longitud a lo sumo 2^N. Sea $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{N,+}_{\alpha,d}(f)(x) \leq 2^{k+1}\}$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Para estudiar estos conjuntos consideremos $O_k = \{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{N,+}_{\alpha,d}(f)(x)\}$, como estos conjuntos son abiertos, tomamos los intervalos maximales diádicos disjuntos de longitud a lo sumo 2^N, $I^-_{k,j}$ tales que $O_k = \bigcup_j I^-_{k,j}$, y que cumplan que

$$2^k < \frac{1}{(I^+_{k,j})^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f,$$

observemos que por la definición de $M^{N,+}_{\alpha,d}$ los intervalos $I^-_{k,j}$ e $I^+_{k,j}$ son contiguos de igual longitud. Definimos

$$E_{k,j} = I^-_{k,j} \cap \{x \in \mathbb{R} : 2^k < M^{N,+}_{\alpha,d}(f) \leq 2^{k+1}\},$$

son disjuntos dos a dos y $\Omega_k = \bigcup_j E_{k,j}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(M^{N,+}_{\alpha,d}(f)\right)^q u(x)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\Omega_k} \left(M^{N,+}_{\alpha,d}(f)\right)^q u(x)dx \\
&\leq \sum_{k,j} \int_{E_{k,j}} (2^{k+1})^q \, u(x)dx \\
&\leq 2^q \sum_{k,j} \int_{E_{k,j}} \left(\frac{1}{|I^+_{k,j}|^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\, dy\right)^q u(x)dx \\
&\leq 2^q \sum_{k,j} \left(\frac{1}{\sigma(I^+_{k,j})^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\sigma^{-1}(y)\sigma(y)\, dy\right)^q u(E_{k,j}) \left(\frac{\sigma(I^+_{k,j})}{|I^+_{k,j}|}\right)^{(1-\alpha)q} \\
&\leq 2^q \int_X g\, d\mu,
\end{aligned}$$

donde $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ con la medida $\mu(k,j) = u(E_{k,j}) \left(\frac{\sigma(I^+_{k,j})}{|I^+_{k,j}|} \right)^{(1-\alpha)q}$, y

$$g(k,j) = \left(\frac{1}{\sigma(I^+_{k,j})^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\sigma^{-1}(y)\sigma(y)\, dy \right)^q .$$

Definimos el conjunto de nivel a altura $\lambda > 0$ por

$$\Gamma_\lambda = \{(k,j) \in X : g(k,j) > \lambda\}.$$

Sea

$$B_\lambda = \bigcup \{I^+_{k,j} : (k,j) \in \Gamma_\lambda\}.$$

Observar que si $\left(\frac{1}{\sigma(I^+_{k,j})^{1-\alpha}} \int_{I^+_{k,j}} f(y)\sigma^{-1}(y)\sigma(y)\, dy \right)^q > \lambda$, entonces para todo $x \in I^+_{k,j}$ se tiene que $M_{\alpha,\sigma}(f\sigma^{-1})^q > \lambda$, luego $B_\lambda \subseteq \{x : M_{\alpha,\sigma}(f\sigma^{-1})^q > \lambda\}$.

Como los intervalos $I^-_{k,j}$, (con $(k,j) \in \Gamma_\lambda$), tienen longitud a lo sumo 2^N y son diádicos, podemos considerar la subfamilia de $\{I_{k,j}\}$ con $(k,j) \in \Gamma_\lambda$, $\{I^-_r\}$ formada por los intervalos con la propiedad de que los I^+_r son maximales disjuntos. Observar que $B_\lambda = \bigcup I^+_r$, donde la unión es disjunta. Además si $I^+_{k,j} \subset I^+_r$ entonces $I^-_{k,j} \subset I^-_r \cup I^+_r$.

Estimemos $\mu(\Gamma_\lambda)$ usando la condición del peso

$$\begin{aligned}
\mu(\Gamma_\lambda) &= \sum_{(k,j)\in\Gamma_\lambda} u(E_{k,j}) \left(\frac{\sigma(I^+_{k,j})}{|I^+_{k,j}|} \right)^{(1-\alpha)q} \\
&\leq \sum_{(k,j)\in\Gamma_\lambda} \int_{E_{k,j}} M^+_d(\sigma\chi_{I^+_{k,j}})^{(1-\alpha)q}\, u(x)dx \\
&\leq \sum_r \sum_{(k,j)\in\Gamma_\lambda,\, I^+_{k,j}\subset I^+_r} \int_{E_{k,j}} M^+_d(\sigma\chi_{I^+_{k,j}})^{(1-\alpha)q}\, u(x)dx \\
&\leq \sum_r \int_{I^-_r \cup I^+_r} M^+_d(\sigma\chi_{I^+_r})^{(1-\alpha)q} u(x)dx \\
&\leq ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \sum_r \sigma(I^+_r) \\
&= ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \sigma(B_\lambda) \\
&\leq ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \sigma\{x : M_{\alpha,\sigma}(f\sigma^{-1})^q > \lambda\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_X g\, d\mu &= \int_0^\infty \mu(\Gamma_\lambda)\, d\lambda \\
&\leq ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \int_0^\infty \sigma\{x : M_{\alpha,\sigma}(f\sigma^{-1})^q > \lambda\}\, d\lambda \\
&= ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} M_{\alpha,\sigma}(f\sigma^{-1})^q \, \sigma dx \right) \\
&\leq C||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p \sigma^{1-p} dx \right)^{q/p} \\
&= C||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p v dx \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a la acotación de la función maximal $M_{\alpha,\sigma}$ de $L^p(\sigma)$ en $L^q(\sigma)$ con $1/q = 1/p - \alpha$, ver **Teorema** 1.54.

En conclusión tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(M^{N,+}_{\alpha,d}(f) \right)^q u(x) dx \leq C||(u,v)||^q_{T^+_{p,\alpha,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p v dx \right)^{q/p},$$

y por el teorema de la convergencia monótona tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(M^+_{\alpha,d}(f) \right)^q u(x) dx \leq C||(u,v)||^q_{T^+_{p,\alpha,d}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p v dx \right)^{q/p}.$$

□

Para la demostración del **Teorema** 2.17 vamos a usar el teorema de extrapolación débil desde ∞. En el apartado 4 veremos que el exponente $1/q$ de la constante $||(u,v)||_{A^+_{p,q}}$ es el mejor posible.

Demostración del Teorema 2.17. Veamos que M^+_α satisface las hipotesis del **Teorema** 2.6. Sea $\beta = 1/\alpha$ y $(a,b) \in A^+_{\beta,\infty}$. Sea $h > 0$ y x fijo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f|\, dx &= \frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} |f| b b^{-1}\, dx \\
&\leq \frac{1}{h^{1-\alpha}} \left(\int_x^{x+h} |f|^{1/\alpha} b^{1/\alpha}\, dx \right)^\alpha \left(\int_x^{x+h} b^{\frac{-1}{1-\alpha}}\, dx \right)^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Como a es finita para casi todo punto, sea x tal que $a(x) \leq ||a\chi_{[x-h,x]}||_\infty$, luego

$$\begin{aligned}
&a(x)\left(\frac{1}{h^{1-\alpha}}\int_x^{x+h}|f|\,dx\right)\\
&\leq ||a\chi_{[x-h,x]}||_\infty \frac{1}{h^{1-\alpha}}\left(\int_x^{x+h}|f|^{1/\alpha}b^{1/\alpha}\,dx\right)^\alpha\left(\int_x^{x+h}b^{\frac{-1}{1-\alpha}}\,dx\right)^{1-\alpha}\\
&\leq ||(a,b)||_{A^+_{\beta,\infty}}||fb||_{L^{1/\alpha}},
\end{aligned}$$

tomando supremo sobre h y luego sobre x, obtenemos

$$||aM^+_\alpha f||_\infty \leq ||(a,b)||_{A^+_{\beta,\infty}}||fb||_{1/\alpha}. \tag{2.7}$$

Aplicamos el **Teorema** 2.6 para obtener que para todo par de pesos (u,v) en $A^+_{p,q}$, con $1/p-1/q=\alpha$, se cumple que

$$||M^+_\alpha||_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)} \leq C(T,q,p)||(u,v)||^{1/q}_{A^+_{p,q}}.$$

$\square$

Ahora estudiaremos que resultados se deducen de los teoremas anteriores pero para un solo peso. Daremos la demostración del **Teorema** 2.18.

Martín-Reyes y de la Torre en [**40**] demuestran

Teorema 2.21 ([**40**]). *Sea $0\leq\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$, $1/q=1/p-\alpha$ y w un peso. Entonces w está en la clase $A^+_{p,q}$ si y sólo si (w^q,w^p) está en la clase $S^+_{p,q,d}$. Es más*

$$||w||_{A^+_{p,q}} \leq ||(w^q,w^p)||^q_{S^+_{p,q,d}} \leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}}.$$

Por la ecuación (1.22) tenemos

Corolario 2.22 ([**40**]). *Sea $0\leq\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$, $1/q=1/p-\alpha$ y w un peso. Entonces w está en la clas $A^+_{p,q}$ si y sólo si (w^q,w^p) está en la clase $S^+_{p,q}$. Es más*

$$||w||_{A^+_{p,q}} \leq K_{p,q}||(w^q,w^p)||^q_{S^+_{p,q}} \leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}}.$$

Siguiendo las ideas de cómo se prueba este teorema probamos el siguiente resultado referido a la clase $T^+_{q,\alpha,d}$ en lugar de las clases $S^+_{p,q,d}$.

Teorema 2.23. *Sea $0\leq\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$, $1/q=1/p-\alpha$ y w un peso. Entonces son equivalentes*

- *w está en la clase $A^+_{p,q}$, es decir $||w||_{A^+_{p,q}} < \infty$, donde*

$$\left(\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} w^q\,dx\right)\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} w^{-p'}dx\right)^{q/p'} \leq ||w||_{A^+_{p,q}},$$

para todo par de intervalos contiguos I^- e I^+ de igual longitud.

- *(w^q, w^p) está en la clase $T^+_{q,\alpha,d}$, es decir $||(w^q,w^p)||_{T^+_{q,\alpha,d}} < \infty$, donde*

$$\left(\int_{I^-\cup I^+} (M_d^+\sigma\chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\,w^q dx\right)^{1/q} \leq ||(w^q,w^p)||_{T^+_{q,\alpha,d}}\left(\int_{I^+}\sigma dx\right)^{1/q},$$

para todo par de intervalos contiguos I^- e I^+ de igual longitud, donde $\sigma = w^{-p'}$.

Es más,

$$||w||_{A^+_{p,q}} \leq ||(w^q,w^p)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}}.$$

Por la ecuación (2.5) tenemos

Corolario 2.24. *Sea $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha$ y w un peso. Entonces w está en la clas $A^+_{p,q}$ si y sólo si (w^q,w^p) está en la clase $T^+_{p,\alpha}$. Es más,*

$$||w||_{A^+_{p,q}} \leq K_{p,q}||(w^q,w^p)||^q_{T^+_{p,\alpha}} \leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}}.$$

Demostración del Teorema 2.23. Sea $u = w^q$, $v = w^p$ y $\sigma = w^{-p'}$. Empecemos viendo que si (w^q,w^p) está en la clase $T^+_{q,\alpha}$, entonces w está en la clase $A^+_{p,q}$. Sean I^- e I^+ intervalos contiguos de igual longitud entonces tenemos que

$$\left(\int_{I^-\cup I^+} (M^+w^{-p'}\chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\,w^q dx\right)^{1/q} \leq ||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha,d}}\left(\int_{I^+} w^{-p'}dx\right)^{1/q},$$

lo que implica

$$\left(\int_{I^-} (M^+w^{-p'}\chi_{I^+})^{(1-\alpha)q}\,w^q dx\right)^{1/q} \leq ||(u,v)||_{T^+_{q,\alpha,d}}\left(\int_{I^+} w^{-p'}dx\right)^{1/q},$$

luego, usando que $(1-\alpha)q = 1 + q/p'$

$$\begin{aligned}\int_{I^-} w^q(x)\,dx\left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} w^{-p'}\right)^{1+q/p'} &\leq \int_{I^-} (M_d^+(w^{-p'}\chi_{I^+})(x))^{1+q/p'}\,w(x)^q dx \\ &\leq ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}}\left(\int_{I^+} w^{-p'}dx\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{|I^-|}\int_{I^-} w^q(x)\,dx \left(\frac{1}{|I^+|}\int_{I^+} w^{-p'}\right)^{q/p'} \leq ||(u,v)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}},$$

Por lo tanto

$$||w||_{A^+_{p,q}} \leq ||(w^q, w^p)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}}.$$

Para demostrar la recíproca vamos a usar la equivalencia entre $T^+_{q,\alpha,d}$ y $T^+_{q,\alpha}$, ver **Observación** 2.14 y desigualdad (2.5). Sea I un intervalo, para $x \in I$ existe h_x tal que $(x, x+h_x) \subset I$ y

$$M^+(w^{-p'}\chi_I)(x) \leq \frac{3}{2h_x}\int_x^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt.$$

Observar

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_x}\int_x^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt &= \frac{2}{2h_x}\int_x^{x+h_x/2} w^{-p'}\chi_I\,dt + \frac{1}{h_x}\int_{x+h_x/2}^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt \\ &\leq \frac{1}{2}M^+(w^{-p'}\chi_I)(x) + \frac{1}{h_x}\int_{x+h_x/2}^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt,\end{aligned}$$

luego

$$M^+(w^{-p'}\chi_I)(x) \leq 6\frac{1}{h_x}\int_{x+h_x/2}^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt.$$

Usando la condición $A^+_{p,q}$ y la relación entre α, q y p tenemos

$$\begin{aligned}M^+(w^{-p'}\chi_I)(x)^{1+q/p'} &\leq \left(\frac{6}{h_x}\int_{x+h_x/2}^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt\right)^{1+q/p'} \\ &= \left(\frac{6}{h_x}\int_{x+h_x/2}^{x+h_x} w^{-p'}\chi_I\,dt\right)^{q/p'(1+p'/q)} \\ &\leq C_{p,q}||w||^{1+p'/q}_{A^+_{p,q}}\left(h_x/2\left(\int_x^{x+h_x/2} w^q\right)^{-1}\right)^{1+p'/q} \\ &= C_{p,q}||w||^{1+p'/q}_{A^+_{p,q}}\left(\frac{1}{w^q(x,x+h_x/2)}\int_x^{x+h_x/2} w^{-q}w^q\,dx\right)^{1+p'/q} \\ &\leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}}\left(M^+_{w^q}(w^{-q}\chi_I)(x)\right)^{1+p'/q}.\end{aligned}$$

Como $M^+_{w^q}$ es acotada fuerte en $L^{1+p'/q}(w^q)$ con norma que no depende de w^q, ver **Teorema** 1.54, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_I M^+(w^{-p'}\chi_I)(x)^{1+q/p'}\, w^q(x)dx &\leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}} \int_I \left(M^+_{w^q}(w^{-q}\chi_I)(x)\right)^{1+p'/q}\, w^q(x)dx \\ &\leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}} \int_I w^{-q(1+p'/q)}(x)\, w^q(x)dx \\ &= C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}} \int_I w^{-p'}(x)dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$||(w^q, w^p)||^q_{T^+_{q,\alpha,d}} \leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'}_{A^+_{p,q}}.$$

□

Demostración del Teorema 2.18. Vamos a ver dos formas de obtener el resultado.

La primera es consecuencia del **Teorema** 2.16 y del **Corolario** 2.24. Por estos resultados se deduce que si $w \in A^+_{p,q}$ entonces $(w^q, w^p) \in T^+_{q,\alpha}$ y

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||(w^q, w^p)||_{T^+_{q,\alpha}}||f||_{L^p(w^p)} \leq C_{p,q}||w||^{(1-\alpha)p'/q}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)}.$$

Una deducción similar se puede realizar a partir del **Teorema** 2.15 y del **Corolario** 2.22.

La otra forma en que se puede demostrar el **Teorema** 2.18 es usando el **Teorema** 2.7. En la demostración del **Teorema** 2.17, desigualdad (2.7), vimos que si $\beta = 1/\alpha$ y $(a, b) \in A^+_{\beta,\infty}$, obtenemos

$$||aM^+_\alpha f||_\infty \leq ||(a, b)||_{A^+_{1/\alpha,\infty}}||fb||_{1/\alpha}.$$

Al ser $\beta = 1/\alpha$ tenemos que $\frac{\beta-1}{\beta} = 1-\alpha$, luego aplicando el **Teorema** 2.7 obtenemos

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C_{p,q}||w||^{\frac{(\beta-1)p'}{\beta q}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)} = C_{p,q}||w||^{\frac{(1-\alpha)p'}{q}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

que demuestra el teorema. □

4. Demostraciones que las estimaciones son sharp

En esta sección demostraremos que las constantes obtenidas en los **Teoremas** 2.18, 2.17, 2.15 y 2.16, respecto a la función maximal fraccionaria lateral son las mejores posibles, es decir no se pueden mejorar la dependencia respecto a las deiferentes constasntes de los pesos.

Supongamos que $0 < \alpha < 1$ con $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$. Definimos

$$w_\delta(x) = |x|^{(1-\delta)/p'}$$

entonces $w_\delta \in A^+_{p,q}$ con $||w_\delta||_{A^+_{p,q}} \leq \delta^{-q/p'}$.

Es sabido que $|x|^{\delta-1} \in A_1$ con $\left|\left||x|^{\delta-1}\right|\right|_{A_1} \approx 1/\delta$ que implica que $|x|^{(1-\delta)q/p'} \in A_{1+q/p'}$ con $\left|\left||x|^{(1-\delta)q/p'}\right|\right|_{A_{1+q/p'}} \approx 1/\delta^{q/p'}$, (ver [**5**] **Lemma** 1.4). Luego, como $A_{1+q/p'} \subset A^+_{1+q/p'}$, por el **Lema** 1.45, $w_\delta \in A^+_{p,q}$ con $||w_\delta||_{A^+_{p,q}} = ||w_\delta^q||_{A^+_{1+q/p'}} \leq 1/\delta^{q/p'}$.

Tomamos $f_\delta(x) = |x|^{\delta-1}\chi_{[-1,0]}(x)$, entonces

$$||f_\delta||_{L^p(w_\delta^p)} = \left(\int_0^1 x^{[(\delta-1)/p]p}\,dx\right)^{1/p} = \delta^{-1/p}.$$

Ahora si $-1 < x < 0$ tenemos que

$$M^+_\alpha f(x) > \frac{1}{|x|^{1-\alpha}}\int_x^0 |y|^{\delta-1}\,dy = \frac{|x|^{\alpha-1+\delta}}{\delta}.$$

Luego

$$\int_{\mathbb{R}} M^+_\alpha f(x)^q\, w_\delta^q dx > \delta^{-q}\int_0^1 x^{(\alpha-1+\delta)q}x^{(1-\delta)q/p'} = \delta^{-q}\frac{p}{q}\delta^{-1} = \frac{p}{q}\delta^{-1-q},$$

pues

$$\begin{aligned}\alpha q + (\delta-1)q - (\delta-1)q/p' + 1 &= \alpha q + (\delta-1)q - (\delta-1)q(1/p-1) + 1\\ &= q(\alpha + (\delta-1)/p) + 1 = q(1/p + (\delta-1)/p) = \frac{q}{p}\delta.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}C_{q,p}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1+1/q} &\leq ||M^+_\alpha f_\delta||_{L^q(w_\delta^q)} \leq ||w_\delta||^{p'/q(1-\alpha)}_{A^+_{p,q}}||f_\delta||_{L^p(w_\delta^p)} \qquad (2.8)\\ &\leq \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1+1/q}.\end{aligned}$$

La ecuación (2.8) demuestra que en el **Teorema** 2.18 se ha obtenido la dependencia óptima respecto a la constante en $A^+_{p,q}$.

Para ver que en el **Teorema** 2.16 se logra obtener la mejor constante posible, tomamos como pares de pesos (w^q_δ, w^p_δ) luego por el **Corolario** 2.24 tenemos que

$$||(w^q_\delta, w^p_\delta)||_{T^+_{q,\alpha}} \leq C_{p,q}||w_\delta||^{(1-\alpha)p'/q}_{A^+_{p,q}},$$

por lo cual la dependencia tiene que ser óptima, pues sino, no lo sería la del **Teorema** 2.18.

De forma similar se ve para el **Teorema** 2.15.

Ahora vamos a demostrar la dependencia lograda en el **Teorema** 2.17 de la norma de la función maximal fraccionaria lateral respecto a la constante $||(u,v)||_{A^+_{p,q}}$ es el mejor posible. Nos basamos en ideas de Muckenhoup, ver [**46**]. Para ello vamos a ver que $||(u,v)||^{1/q}_{A^+_{p,q}} \leq 2^{(1-\alpha)+\frac{1}{q}}||M||_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)}$.

Primero supongamos $p > 1$. Para un par de intervalos fijos (a,b) y (b,c) con $a < b < c$ y $b - a = c - b$, definimos $A = \left(\int_b^c v^{-p'}(y)dy\right)^{q/p'}$. Si $A = \infty$ al estar $(u,v) \in A^+_{p,q}$ debe ser $\int_a^b u^q(y)dy = 0$. Luego tanto en el caso $A = \infty$ o $A = 0$, trivialmente, tenemos que

$$0 = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u^q(y)dy\right)\left(\frac{1}{b-c}\int_b^c v^{-p'}(y)dy\right)^{q/p'} \leq ||M^+_\alpha||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)}.$$

Supongamos que $0 < A < \infty$, sea $f(x) = v(x)^{-p'}$, si, $x \in (b,c)$ y $f(x) = 0$ si, $x \notin (b,c)$. Luego

$$\frac{A^{p'/q}}{(b-c)^{1-\alpha}} = \frac{1}{(b-c)^{1-\alpha}}\int_b^c v^{-p'}(y)dy \leq 2^{1-\alpha}M^+_\alpha f(x),$$

para todo $x \in (a,b)$. Por lo tanto $(a,b) \subset \{x \in \mathbb{R} : M_\alpha^+ f(x) > \frac{A^{p'/q}}{2(2(b-c))^{1-\alpha}}\}$ y

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)^q\,dx &\le u^q\left(\left\{x \in \mathbb{R} : M_\alpha^+ f(x) > \frac{A^{p'/q}}{2(2(b-c))^{1-\alpha}}\right\}\right)\\
&\le ||M_\alpha^+||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)} \frac{2(2(b-c))^{(1-\alpha)q}}{A^{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^p\, v(x)^p dx\right)^{q/p}\\
&\le ||M_\alpha^+||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)} \frac{2(2(b-c))^{(1-\alpha)q}}{A^{p'}}\left(\int_b^c v^{-p'p}(x) v(x)^p dx\right)^{q/p}\\
&\le ||M_\alpha^+||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)} \frac{2(2(b-c))^{(1-\alpha)q}}{A^{p'}}\left(\int_b^c v^{-p'}(x) dx\right)^{q/p}\\
&\le ||M_\alpha^+||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)} 2(2(b-c))^{(1-\alpha)q} A^{-p'} A^{p'/p}\\
&\le ||M_\alpha^+||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)} 2(2(b-c))^{(1-\alpha)q} A^{-1},
\end{aligned}$$

multiplicando por $(b-c)^{-(1-\alpha)q}A$ ambos miembros, al ser $1 + q/p' = (1-\alpha)q$, obtenemos

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u^q(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-c}\int_b^c v^{-p'}(x)dx\right)^{q/p'} \le 2^{(1-\alpha)q}2||M^+||^q_{L^p(v^p)\to L^{q,\infty}(u^q)},$$

obteniendo la afirmación para el caso $p > 1$.

Ahora si $p = 1$, observar que, para todo par de intervalos (a,b) y (b,c) con $a < b < c$ y $b - a = c - b$ tenemos

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b u(y)^q\,dy \le 4||M||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in(b,c)} v(x)^q. \tag{2.9}$$

Luego para casi todo $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$

$$\frac{1}{h}\int_{x-h}^x u(y)^q\,dy \le 4||M||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} v(x)^q,$$

lo que implica que $||(u,v)||_{A^+_{1,q}} \le 4||M||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)}$.

Luego, como $(1-\alpha)q = 1$, basta demostrar la ecuación (2.9). Fijamos un par de intervalos (a,b) y (b,c) con $a < b < c$ y $b - a = c - b$. Si ess inf $_{x\in(b,c)} v(x)^q = \infty$ entonces se cumple (2.9).

Si ess inf $_{x\in(b,c)} v(x)^q \neq \infty$, para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $E \subset (b,c)$ tal que $|E| > 0$ y $v(x) < \epsilon +$ess inf $_{y\in(b,c)} v(y)$ para todo $x \in E$. Tomamos $f(x) = \chi_E(x)$ luego

$$\frac{|E|}{(b-c)^{1-\alpha}} = \frac{1}{(b-c)^{1-\alpha}} \int_b^c \chi_E(y)\, dy \leq 2^{1-\alpha} M_\alpha^+ f(x),$$

para todo $x \in (a,b)$. Entonces $(a,b) \subset \{x \in \mathbb{R} : M_\alpha^+ f(x) > \frac{|E|}{2(2(b-c))^{1-\alpha}}\}$ y

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)^q\, dx &\leq u^q \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : M_\alpha^+ f(x) > \frac{|E|}{2(2(b-c))^{1-\alpha}} \right\} \right) \\
&\leq ||M_\alpha^+||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} \frac{2(2(b-c))^{(1-\alpha)q}}{|E|^q} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, v(x) dx \right)^q \\
&\leq ||M_\alpha^+||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} \frac{4(b-c)}{|E|^q} \left(\int_E v(x) dx \right)^q \\
&\leq ||M_\alpha^+||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} \frac{4(b-c)}{|E|^q} |E|^q \left(\epsilon + \operatorname*{ess\,inf}_{y\in(b,c)} \ v(y) \right) \\
&= ||M_\alpha^+||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} 4(b-c) \left(\epsilon + \operatorname*{ess\,inf}_{y\in(b,c)} \ v(y) \right),
\end{aligned}$$

luego al ser $c - b = b - a$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x)^q\, dx \leq 4 ||M_\alpha^+||^q_{L^1(v)\to L^{q,\infty}(u^q)} \left(\epsilon + \operatorname*{ess\,inf}_{y\in(b,c)} \ v(y) \right).$$

Como la desigualdad es válida para todo $\epsilon > 0$ obtenemos la desigualdad (2.9).

5. Estimaciones sharp para las integrales fraccionarias de Weyl y de Riemann-Liouville

En el estudio de los operadores fraccionarios laterales logramos obtener los resultados análogos al **Teorema** 1.36. Por medio de un argumento de extrapolación, **Corolario** 2.5, se logra la siguiente estimación débil,

Teorema 2.25. *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p < 1/\alpha$ *y* q *que satisface* $1/q = 1/p - \alpha$. *Entonces para* $w \in A^+_{p,q}$

$$||I_\alpha^+ f||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C ||w||^{1-\alpha}_{A^+_{p,q}} ||f||_{L^p(w^p)}, \tag{2.10}$$

para toda $f \in L^p(w^q)$. *Es más, la dependencia de la norma* $||I_\alpha^+||_{L^p(w^p)\to L^{q,\infty}(w^q)}$ *respecto a la constante,* $||w||_{A^+_{p,q}}$ *del peso, es* $||w||^{1-\alpha}_{A^+_{p,q}}$.

Como corolario obtenemos la siguiente estimación fuerte

Teorema 2.26. *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$ *y* q *que satisface* $1/q = 1/p - \alpha$. *Entonces para* $w \in A^+_{p,q}$

$$||I^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||w||^{(1-\alpha)\,\text{máx}\{1,p'/q\}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

para toda $f \in L^p(w^q)$. *Es más, la dependencia de la norma* $||I^+_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)}$ *respecto a la constante,* $||w||_{A^+_{p,q}}$ *del peso, es* $||w||^{(1-\alpha)\,\text{máx}\{1,p'/q\}}_{A^+_{p,q}}$.

Demostración del Teorema 2.25. Aplicaremos el **Corolario** 2.5, de extrapolación débil, con $q_0 = \frac{1}{1-\alpha}$ y $p_0 = 1$ y con el peso w^q. Para ello alcanza ver que

$$||I^+_\alpha f||_{L^{q_0,\infty}(u)} \leq C||f||_{L^1((M^-u)^{\frac{1}{q_0}})}, \tag{2.11}$$

para cualquier peso u. El hecho que $w \in A^+_{1,q_0}$ equivale a que $M^-(w^{q_0})(x) \leq ||w||_{A^+_{1,q_0}} w^{q_0}(x)$, para casi todo x, luego de (2.11) se deduce

$$||I^+_\alpha f||_{L^{q_0,\infty}(w^{q_0})} \leq C\,||w||^{1-\alpha}_{A^+_{1,q_0}}\,||f||_{L^1(w)}.$$

Por extrapolación débil, **Corolario** 2.5, con $\gamma = 1-\alpha$, obtenemos:

$$||I^+_\alpha f||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C\,||w||^{(1-\alpha)\,\text{máx}\{1,\frac{q_0}{p_0'}\frac{p'}{q}\}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^1(w^p)},$$

para todo $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ y q con $1/q = 1/p - \alpha$. Como $p_0 = 1$,

$$||I^+_\alpha f||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C||w||^{(1-\alpha)}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^1(w^p)},$$

que es el resultado buscado.

Para demostrar (2.11), notar que al ser $q_0 > 1$, $||\cdot||_{L^{q_0,\infty}}$ es equivalente a una norma y podemos aplicar la desigualdad integral de Minkowski. Luego

$$\begin{aligned}||I^+_\alpha f||_{L^{q_0,\infty}(u)} &= \left|\left|\int_\cdot^\infty \frac{|f(y)|}{(y-\cdot)^{1-\alpha}}\,dy\right|\right|_{L^{q_0,\infty}(u)}\\ &\leq C_{q_0}\int_{\mathbb{R}}|f(y)|\sup_{\lambda>0}\lambda u\left(\left\{x\in(-\infty,y):(y-x)^{\alpha-1}>\lambda\right\}\right)^{\frac{1}{q_0}}\,dy.\end{aligned}$$

Estimemos la norma débil para completar la prueba

$$\sup_{\lambda>0}\lambda u\left(\left\{x\in(-\infty,y):(y-x)^{\alpha-1}>\lambda\right\}\right)^{\frac{1}{q_0}} = \left(\sup_{t>0}\frac{1}{t}u\left\{x\in(-\infty,y):(y-x)<t\right\}\right)^{\frac{1}{q_0}}$$

$$\left(\sup_{t>0}\frac{1}{t}\int_{y-t}^t u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q_0}} = (M^-(u)(y))^{\frac{1}{q_0}}.$$

Para ver que la dependencia de la norma $||I_\alpha^+||_{L^p(w^p)\to L^{q,\infty}(w^q)}$ respecto a la constante, $||w||_{A_{p,q}^+}$ del peso, es la mejor posible, para $p \geq 1$, observemos que la ecuación (2.10) es equivalente a

$$||I_\alpha^+ f||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C||w^q||_{A_{1+q/p'}^+}^{1-\alpha} ||f||_{L^p(w^p)},$$

y si tomamos $w^q \in A_1$ implica que

$$||I_\alpha^+ f||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C||w^q||_{A_1^+}^{1-\alpha} ||f||_{L^p(w^p)}.$$

Llamemos $u = w^q$. Tomando como función $u^\alpha f = w^{q\alpha} f$, la última ecuación es equivalente a

$$||I_\alpha^+(u^\alpha f)||_{L^{q,\infty}(u)} \leq C||u||_{A_1^+}^{1-\alpha} ||f||_{L^p(u)}.$$

Si vemos que en la última desigualdad el exponente es óptimo lo será también en la ecuación (2.10). Tomemos $u_\delta = |x|^{\delta-1}$, de forma similar a como se trabajó en la Sección 4 con w_δ, se ve que $u_\delta \in A_1^+$ con

$$||u_\delta||_{A_1^+} \leq \frac{1}{\delta}. \tag{2.12}$$

Tomemos $f_\delta = \chi_{[0,1]}$, es fácil ver que

$$||f_\delta||_{L^p(u_\delta)} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/p}. \tag{2.13}$$

Sea $0 < \xi < 1$ un parámetro a elegir. Luego tenemos

$$\begin{aligned}
||I_\alpha^+(u_\delta^\alpha f_\delta)||_{L^{q,\infty}(u_\delta)} &\geq \sup_{\lambda>0} \lambda \left(u_\delta \left\{ 0 < x < \xi : \int_x^1 \frac{y^{(\delta-1)\alpha}}{(y-x)^{1-\alpha}}\, dy > \lambda \right\} \right)^{1/q} \\
&\geq \sup_{\lambda>0} \lambda \left(u_\delta \left\{ 0 < x < \xi : \int_x^1 \frac{y^{(\delta-1)\alpha}}{(2y)^{1-\alpha}}\, dy > \lambda \right\} \right)^{1/q} \\
&= \sup_{\lambda>0} \lambda \left(u_\delta \left\{ 0 < x < \xi : \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha\delta}(1 - x^{\delta\alpha}) > \lambda \right\} \right)^{1/q} \\
&\geq \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha\delta} \left(u_\delta \left\{ 0 < x < \xi : \frac{2^{\alpha-1}}{\delta\alpha}(1 - x^{\delta\alpha}) > \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha\delta} \right\} \right)^{1/q} \\
&\geq \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha\delta} \left(u_\delta \left\{ 0 < x < \xi : \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha\delta}} > x \right\} \right)^{1/q} \\
&\geq \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha\delta} \left(u_\delta[0,\xi] \right)^{1/q},
\end{aligned}$$

la última desigualdad es válida tomando $\xi = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha\delta}}$. Luego para $0 < \delta < 1$ tenemos

$$||I_\alpha^+(u_\delta^\alpha f_\delta)||_{L^{q,\infty}(u)} \geq \frac{2^{\alpha-2}}{\alpha\delta} \left(\frac{\xi^\delta}{\delta} \right)^{1/q} = c_{\alpha,q} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1+1/q}. \tag{2.14}$$

Finalmente combinando (2.12), (2.13) y (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned}
c_{\alpha,q} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1+1/q} &\leq ||I_\alpha^+(u^\alpha f)||_{L^{q,\infty}(u)} \leq C ||u||_{A_1^+}^{1-\alpha} ||f||_{L^p(u)} \\
&\leq C \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1/p} = C \left(\frac{1}{\delta} \right)^{1+1/q},
\end{aligned}$$

por lo cual se tiene que la dependencia de la norma $||I_\alpha^+||_{L^p(w^p) \to L^{q,\infty}(w^q)}$ respecto a la constante, $||w||_{A_{p,q}^+}$ del peso es, $||w||_{A_{p,q}^+}^{1-\alpha}$. □

Demostración del Teorema 2.26. Este resultado es una consecuencia inmediata del **Teorema** 2.25 y de la ecuación (1.21).

La ecuación (1.21), como se explica en el Capítulo 1, Preliminares, se deduce de la tesis doctoral de María Lorente Domínguez, ver [**36**].

Para un peso $w \in A_{p,q}^+$, tenemos que

$$(1{,}21) \qquad ||I_\alpha^+||_{L^p(w^p) \to L^q(w^q)} \approx ||I_\alpha^+||_{L^p(w^p) \to L^{q,\infty}(w^q)} + ||I_\alpha^-||_{L^{q'}(w^{-q'}) \to L^{p',\infty}(w^{-p'})}.$$

Luego por el **Teorema** 2.25 obtenemos, para un peso $w \in A^+_{p,q}$,

$$\begin{aligned} ||I^+_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} &\approx ||I^+_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^{q,\infty}(w^q)} + ||I^-_\alpha||_{L^{q'}(w^{-q'})\to L^{p',\infty}(w^{-p'})} \\ &\approx ||w||^{1-\alpha}_{A^+_{p,q}} + ||w^{-1}||^{1-\alpha}_{A^-_{q',p'}} \approx ||w||^{(1-\alpha)\,\text{máx}\{1,p'/q\}}_{A^+_{p,q}}, \end{aligned}$$

pues por el **Lema** 1.45 tenemos $||w^{-1}||_{A^-_{q',p'}} = ||w^q||^{p'/q}_{A_{1+q/p'}} = ||w||^{p'/q}_{A^+_{p,q}}$.

Veamos que la dependencia de la norma $||I^+_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)}$ respecto a la constante, $||w||_{A^+_{p,q}}$, del peso es $||w||^{(1-\alpha)\,\text{máx}\{1,p'/q\}}_{A^+_{p,q}}$. Primero observemos que si f es positiva entonces $M^+_\alpha f(x) \le I^+_\alpha f(x)$,

pues sea $h > 0$, si $y \in (x, x+h)$ entonces $(y-x)^{1-\alpha} \le h^{1-\alpha}$ luego

$$\frac{1}{h^{1-\alpha}} \int_x^{x+h} f(y)\,dy \le \int_x^{x+h} \frac{f(y)}{(y-x)^{1-\alpha}}\,dy \le I^+_\alpha f(x)$$

tomando supremo obtenemos que $M^+_\alpha f(x) \le I_\alpha f(x)^+$, si f es positiva.

Ahora pensemos en el peso $w_\delta = |x|^{(1-\delta)/p'}$ de $A^+_{p,q}$ y la función $f_\delta(x) = |x|^{\delta-1}\chi_{[-1,0]}(x)$, como en la Sección 4. Si $p'/q \ge 1$ entonces $(1-\alpha)\,\text{máx}\{1, p'/q\} = (1-\alpha)p'/q$. Razonando en forma similar que en la ecuación (2.8) obtenemos

$$C\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1+1/q} \le ||M^+_\alpha f_\delta||_{L^q(w^q_\delta)} \le ||I^+_\alpha f_\delta||_{L^q(w^q_\delta)} \le ||w_\delta||^{p'/q(1-\alpha)}_{A^+_{p,q}} ||f_\delta||_{L^p(w^p_\delta)} \le \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1+1/q}.$$

que demuestra que la dependencia es la mejor posible para $p'/q \ge 1$.

Para el caso en que $p'/q < 1$ utilizamos un argumento de dualidad. Si $w \in A^+_{p,q}$ entonces $w^{-1} \in A^-_{q',p'}$ pues: por (ii) del **Lema** 1.45 tenemos que $w \in A^+_{p,q}$ si y sólo si $(w^{-p'}, w^{-p'}) \in A^-_{1+p'/q}$ con $||w||_{A^+_{p,q}} = ||(w^{-p'}, w^{-p'})||^{q/p'}_{A^-_{1+p'/q}}$; y por (i) del mismo lema tenemos que $(w^{-p'}, w^{-p'}) \in A^-_{1+p'/q}$ si y sólo si $(w^{-1}, w^{-1}) \in A^-_{q',p'}$ con $||(w^{-p'}, w^{-p'})||_{A^-_{1+p'/q}} = ||w^{-1}||_{A^-_{q',p'}}$.

Por el razonamiento análogo al anterior aplicado al operador I^-_α, que es el operador adjunto de I^+_α, tenemos que

$$||I^-_\alpha||_{L^{q'}(w^{-q'})\to L^{p'}(w^{-p'})} \approx ||w^{-1}||^{(1-\alpha)q/p'}_{A^-_{q',p'}},$$

donde la dependencia es la mejor posible.

Luego por el **Lema** 1.45 tenemos que $||w^{-1}||_{A^-_{q',p'}} = ||w||^{p'/q}_{A^+_{p,q}}$ y por dualidad, obtenemos que

$$||I^+_\alpha||_{L^p(w^p)\to L^q(w^q)} = ||I^-_\alpha||_{L^{q'}(w^{-q'})\to L^{p'}(w^{-p'})} \approx ||w||^{(1-\alpha)}_{A^+_{p,q}},$$

donde la dependencia es la mejor posible.

□

Capítulo 3

Acotaciones A_1^+ de operadores integrales singulares laterales

En este capítulo estudiamos cómo dependen las cotas de los operadores integrales singulares laterales respecto a las constantes de los pesos $w \in A_1^+$. Los principales teoremas obtenidos son los resultados análogos a los **Teoremas** 1.11 y **Teorema** 1.10, enunciados en el Capítulo 1. Para lograr estos resultados nos basamos en las ideas de Lerner, Ombrosi y Pérez desarrolladas en [**33**] y [**32**], pero adaptándolas al caso lateral. En estos trabajos es fundamental la desigualdad que prueban de Hölder al revés (ver **Lema** 1.8).

1. Estimación de normas respecto a A_1^+

A continuación enunciaremos los resultados obtenidos. Respecto a la acotación fuerte (p,p) en medida wdx se tiene

Teorema 3.1. *Sea $1 < p, r < \infty$, w un peso y T^+ un operador integral singular lateral, entonces,*

$$||T^+f||_{L^p(w)} \leq Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}}||f||_{L^p(M_r^- w)}, \tag{3.1}$$

donde C sólo depende de T^+.

Si $w \in A_1^+$, entonces de la desigualdad anterior se obtiene

$$||T^+f||_{L^p(w)} \leq Cpp'||w||_{A_1^+}||f||_{L^p(w)}, \tag{3.2}$$

donde C sólo depende de T^+.

Respecto a la acotación débil $(1,1)$ en medida wdx se tiene

Teorema 3.2. *Sea $w \in A_1^+$ y T^+ un operador integral singular lateral, entonces,*

$$||T^+f||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C||w||_{A_1^+}\log(e + ||w||_{A_1^+})||f||_{L^1(w)}, \tag{3.3}$$

donde C sólo depende de T^+.

Por extrapolación el **Teorema** 3.2 implica el siguiente corolario sobre la acotación débil (p,p) en medida w,

Corolario 3.3. *Sea $1<p<\infty$, $w\in A_p^+$ y T^+ un operador integral singular lateral, entonces,*

$$||T^+f||_{L^{p,\infty}(w)}\leq C||w||_{A_p^+}\log(e+||w||_{A_p^+})||f||_{L^p(w)},$$

donde $C=C(p,T^+)$, sólo depende de p y T^+.

Por un argumento de dualidad, el **Corolario** 3.3 implica el siguiente resultado,

Corolario 3.4. *Sea $1<p<\infty$, $w\in A_p^-$ y T^- un operador integral singular lateral, entonces para cada conjunto medible E*

$$||T^-(\sigma\chi_E)||_{L^p(w)}\leq C||w||_{A_p^-}^{\frac{1}{p-1}}\log(e+||w||_{A_p^-})\sigma(E)^{\frac{1}{p}},$$

donde $\sigma=w^{\frac{-1}{p-1}}$ y $C=C(p,T^-)$, sólo depende de p y T^-.

2. Desigualdad de Hölder al revés débil

Vamos a empezar estudiando una versión sharp de la Desigualdad de Hölder al revés débil que enunciamos a continuación, la demostración se basa en el trabajo [**39**] de Martín-Reyes. Como se mencionó, este resultado es fundamental para poder demostrar los teoremas antes enunciados.

Teorema 3.5 (Desigualdad de Hölder al revés débil).
Sea $1\leq p<\infty$. Si $p>1$ y $w\in A_p^+$ tomamos $r=r_w=1+\frac{1}{4^{p+2}e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_p^+}}$. Si $p=1$ y $w\in A_1^+$ tomamos $r=r_w=1+\frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}$. Entonces,

$$\int_a^b w^{r_w}\leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1}\int_a^b w,$$

para todo intervalo acotado (a,b).

Corolario 3.6. *Bajo las mismas hipótesis que el teorema valen las siguientes desigualdades*

a) *para todo intervalo acotado* (a,b) *se tiene*

$$M_{r_w}^-(w\chi_{(a,b)})(b) \leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b),$$

b) *para todo intervalo acotado* (a,b) *se tiene*

$$M_w^-(w^{r_w-1}\chi_{(a,b)})(b) \leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1},$$

c) *para todo* $b \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$M_{r_w}^-(w)(b) \leq 2M^-(w)(b),$$

d) *para todo* $b \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$M_w^-(w^{r_w-1})(b) \leq 2M^-(w)(b)^{r_w-1}.$$

e) *para todo intervalo acotado* (a,b) *se tiene*

$$M_{r_w}(w\chi_{(a,b)})(b) \leq 2M(w\chi_{(a,b)})(b),$$

f) *para todo intervalo acotado* (a,b) *se tiene*

$$M_w(w^{r_w-1}\chi_{(a,b)})(b) \leq 2M(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1},$$

Demostración del Corolario 3.6. Dividiendo miembro a miembro por $b-a$, la desigualdad obtenida en el **Teorema** 3.5, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b w^{r_w} &\leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1}\frac{1}{b-a}\int_a^b w\chi_{(a,b)} \\ &\leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w} \leq 2M^-(w)(b)^{r_w},\end{aligned} \tag{3.4}$$

al tomar supremo para todo $a < b$ y elevando a la $\frac{1}{r_w}$ obtenemos el ítem *c*).
Observar que la ecuación (3.4) implica que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b w^{r_w}\chi_{(a,b)} \leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w}, \tag{3.5}$$

para todo $a < b$.
Sea $h > 0$. Si $b - a < h$ entonces por (3,5)

$$\frac{1}{h}\int_{b-h}^b w^{r_w}\chi_{(a,b)} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b w^{r_w}\chi_{(a,b)} \leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w}.$$

Si $h < b - a$ entonces por la ecuación (3.5)

$$\frac{1}{h}\int_{b-h}^{b} w^{r_w}\chi_{(a,b)} = \frac{1}{h}\int_{b-h}^{b} w^{r_w}\chi_{(b-h,b)} \leq 2M^{-}(w\chi_{(b-h,b)})(b)^{r_w} \leq 2M^{-}(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w}.$$

Ahora si tomamos supremo para todo $h > 0$ y elevando a la $\frac{1}{r_w}$ obtenemos el ítem a).

Para obtener los ítem b) y d) observamos que el resultado del **Teorema** 3.5 implica

$$\frac{1}{w(a,b)}\int_{a}^{b} w^{r_w-1}w \leq 2M^{-}(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1} \leq 2M^{-}(w)(b)^{r_w-1},$$

luego procedemos de la misma forma que en los ítem a) y c)

Las demostraciones de los ítem e) y f) son similares. Demos la idea para f), si $h > 0$ y $k > 0$, se cumple $w(b-h, b+k) \geq w(b-h, b)$, luego

$$\frac{1}{w(b-h,b+k)}\int_{b-h}^{b+k} w^{r_w-1}\chi_{(a,b)}w \leq \frac{1}{w(b-h,b)}\int_{b-h}^{b} w^{r_w-1}\chi_{(a,b)}w.$$

Por la demostración del ítem b) el segundo termino de la desigualdad está acotado por $2M^{-}(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1}$ lo que implica

$$\frac{1}{w(b-h,b+k)}\int_{b-h}^{b+h} w^{r_w-1}\chi_{(a,b)}w \leq 2M(w\chi_{(a,b)})(b)^{r_w-1}$$

luego tomando supremo sobre $h > 0$ y $k > 0$ se termina la prueba. □

Para poder demostrar el **Teorema** 3.5 necesitamos de los siguientes lemas previos, dados en [**39**] por Martín-Reyes. Para el desarrollo de nuestros resultados tenemos que ser precisos en algunas constantes por lo cual repetimos las demostraciones.

Lema 3.7 ([**39**]). *Sea $1 < p < \infty$, $\lambda > 0$ y (a,b) un intervalo acotado. Sea $w \in A_p^+$ con w integrable en (a,b) y*

$$\lambda \leq \frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} w.$$

para todo $x \in (a,b]$. Si $\beta = \frac{1}{4^p||w||_{A_p^+}}$ entonces se cumple que

$$|\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}| > \frac{1}{2}(b-a).$$

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k=0}^{-\infty}$ una suseción en (a,b) definida por: $x_0 = b$, $x_k < x_{k+1}$ y $\int_{x_k}^{x_{k+1}} w = \int_a^{x_k} w$, $k < 0$, (ver **Observación** 1.33, inciso 1., con medida $w(x)dx$), entonces:

$$|\{x \in (a,b) : w(x) \leq \beta\lambda\}| = \sum_{k=-1}^{-\infty} |\{x \in (x_k, x_{k+1}) : w(x) \leq \beta\lambda\}| .$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda \leq \frac{1}{x_{k+1}-a}\int_a^{x_{k+1}} w &= \frac{1}{x_{k+1}-a}\left(\int_a^{x_k} w + \int_{x_k}^{x_{k+1}} w\right)\\ &= \frac{2}{x_{k+1}-a}\int_a^{x_k} w\\ &= \frac{2}{x_{k+1}-a}\left(\int_a^{x_{k-1}} w + \int_{x_{k-1}}^{x_k} w\right)\\ &= \frac{4}{x_{k+1}-a}\int_{x_{k-1}}^{x_k} w.\end{aligned}$$

Entonces si $E_k = \{x \in [x_k, x_{k+1}) : w(x) \leq \frac{4\beta}{x_{k+1}-a}\int_{x_{k-1}}^{x_k} w\}$, luego

$$|\{x \in (a,b) : w(x) \leq \beta\lambda\}| \leq \sum_{k=-1}^{-\infty} |E_k| .$$

Si $w \in A_p^+$, con $p > 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}\left(\frac{|E_k|}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right)^{p-1} &= \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{x_{k+1}-x_{k-1}}\int_{E_k} dx\right)^{p-1}\\ &= \left(\frac{4}{x_{k+1}-a}\int_{x_{k-1}}^{x_k} w\right)\left(\frac{1}{x_{k+1}-x_{k-1}}\int_{E_k}\left(\frac{4\beta}{x_{k+1}-a}\int_{x_{k-1}}^{x_k} w\right)^{(\frac{-1}{p-1})}\right)^{p-1}\\ &\leq \left(\frac{4}{x_{k+1}-x_{k-1}}\int_{x_{k-1}}^{x_k} w\right)\left(\frac{1}{x_{k+1}-x_{k-1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} w^{(\frac{-1}{p-1})}\right)^{p-1}\\ &\leq 4||w||_{A_p^+}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}|\{x \in (a,b) : w(x) \leq \beta\lambda\}| &\leq (4||w||_{A_p^+}\beta)^{\frac{1}{p-1}}\sum_{k=-1}^{-\infty}(x_{k+1}-x_{k-1})\\ &\leq 2(4||w||_{A_p^+}\beta)^{\frac{1}{p-1}}(b-a),\end{aligned}$$

y se tiene que

$$(b-a) - |\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}| < 2(4||w||_{A_p^+}\beta)^{\frac{1}{p-1}}(b-a),$$

entonces

$$(b-a)(1 - 2(4||w||_{A_p^+}\beta)^{\frac{1}{p-1}}) < |\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}|\,,$$

y por como elegimos β se concluye la prueba. $\square$

Lema 3.8 ([**39**]). *Sea $1 \le p < \infty$, (a,b) es un intervalo acotado y $\lambda \ge M^-(w\chi_{(a,b)})(b)$. Si $w \in A_p^+$ entonces*

$$w(\{x \in (a,b) : w(x) > \lambda\}) \le 2\lambda\,|\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}|\,, \tag{3.6}$$

donde $\beta = \frac{1}{4^p||w||_{A_p^+}}$, si, $p > 1$ y $\beta = \frac{1}{||w||_{A_1^+}}$, si, $p = 1$.

Demostración. Supongamos $p = 1$, $w \in A_1^+$, es decir $M^-w \le ||w||_{A_1^+}w$. Sea $\Omega_\lambda = \{x \in (a,b) : M^-(w\chi_{(a,b)})(x) > \lambda\}$, si I_j son los intervalos disjuntos maximales cuya unión da Ω_λ, entonces $\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} w = \lambda$ para todo j (ver **Lema** 1.29). Luego

$$\begin{aligned} w(\Omega_\lambda) &= \sum_j \int_{I_j} w = \lambda \sum_j I_j \\ &= \lambda\,|\Omega_\lambda| \le \lambda \left| \left\{ x \in (a,b) : w(x) > \frac{\lambda}{||w||_{A_1^+}} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} w(\{x \in (a,b) : w(x) > \lambda\}) &\le w(\{x \in (a,b) : M^-(w\chi_{(a,b)})(x) > \lambda\}) \\ &\le \lambda \left| \left\{ x \in (a,b) : w(x) > \frac{\lambda}{||w||_{A_1^+}} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Ahora supongamos $p > 1$ volvemos a tomar $\Omega_\lambda = \{x \in (a,b) : M^-(w\chi_{(a,b)})(x) > \lambda\}$. Si $I_j = (a_j, b_j)$ son los intervalos disjuntos maximales cuya unión me da Ω_λ, por **Lema** 1.29, tenemos $\lambda = \frac{1}{I_j}\int_{I_j} w \le \frac{1}{x-a_j}\int_{a_j}^x w$ para todo $x \in (a,b)$. Usando lo visto en el **Lema** 3.7,

$$\begin{aligned} w(\{x \in (a,b) : w(x) > \lambda\}) &\leq \sum_j \int_{I_j} w = \lambda \sum_j (b_j - a_j) \\ &\leq 2\lambda \sum_j |\{x \in (a_j, b_j) : w(x) > \beta\lambda\}| \leq 2\lambda \, |\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}| \, . \end{aligned}$$

□

Demostración de la desigualdad de Hölder al revés débil, 3.5.

Sea $\lambda_0 = M^-(w\chi_{(a,b)})(b)$ multiplicamos la desigualdad (3.6), del lema anterior, por $\lambda^{\delta-1}$ e integramos entre λ_0 e ∞, con δ a determinar.

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{\{x\in(a,b):w(x)>\lambda\}} w(x)\, dx\, d\lambda &\leq 2 \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\delta} \, |\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}| \, d\lambda \\ &\leq 2 \int_0^{\infty} \lambda^{\delta} \, |\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}| \, d\lambda. \end{aligned}$$

Para el lado derecho de la desigualdad tomamos $t = \beta\lambda$, $dt = \beta \, d\lambda$ y $\lambda = \frac{t}{\beta}$, entonces

$$\begin{aligned} 2\int_0^{\infty} \lambda^{\delta} \, |\{x \in (a,b) : w(x) > \beta\lambda\}| \, d\lambda &= 2\int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\delta} \frac{1}{\beta} \, |\{x \in (a,b) : w(x) > t\}| \, dt \\ &= \frac{2}{\beta^{\delta+1}} \int_0^{\infty} t^{\delta} \, |\{x \in (a,b) : w(x) > t\}| \, dt = \frac{2}{\beta^{\delta+1}} \int_a^b \int_0^{w(x)} t^{\delta} \, dt\, dx \\ &= \frac{2}{(1+\delta)\beta^{\delta+1}} \int_a^b w(x)^{1+\delta}\, dx. \end{aligned}$$

Para el lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{\{x\in(a,b):w(x)>\lambda\}} w(x)\, dx\, d\lambda &= \int_{\{x\in(a,b):w(x)>\lambda_0\}} w(x) \int_{\lambda_0}^{w(x)} \lambda^{\delta-1}\, d\lambda\, dx \\ &= \int_{\{x\in(a,b):w(x)>\lambda_0\}} w(x) \frac{1}{\delta}(w(x)^{\delta} - \lambda_0^{\delta})\, dx \\ &\geq \frac{1}{\delta}\int_a^b w(x)^{1+\delta}\, dx - \frac{\lambda_0^{\delta}}{\delta}\int_a^b w(x)\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos

$$\left(1 - \frac{2\delta}{(1+\delta)\beta^{\delta+1}}\right) \int_a^b w(x)^{1+\delta}\, dx \leq \lambda_0^{\delta} \int_a^b w(x)\, dx.$$

Recordemos que $\beta = \frac{1}{\tau||w||_{A_p^+}}$ con τ que depende de p, tomo $\delta = \frac{1}{c\tau||w||_{A_p^+}}$, luego

$$
\begin{aligned}
1-\frac{2\delta}{(1+\delta)\beta^{\delta+1}} &= 1-\frac{2\delta(\tau||w||_{A_p^+})^{\delta+1}}{(1+\delta)} = 1-\frac{2\delta\tau||w||_{A_p^+}(\tau||w||_{A_p^+})^{\frac{1}{c\tau||w||_{A_p^+}}}}{(1+\delta)}\\
&\geq 1-\frac{2\delta\tau||w||_{A_p^+}e^{\frac{1}{ce}}}{(1+\delta)}\\
&= 1-\frac{2\frac{1}{c\tau||w||_{A_p^+}}\tau||w||_{A_p^+}e^{\frac{1}{ce}}}{(1+\frac{1}{c\tau||w||_{A_p^+}})} = 1-\frac{\frac{2}{c}e^{\frac{1}{ce}}}{\frac{c\tau||w||_{A_p^+}+1}{c\tau||w||_{A_p^+}}}\\
&= 1-\frac{2\tau||w||_{A_p^+}e^{\frac{1}{ce}}}{c\tau||w||_{A_p^+}+1} = \frac{(\tau(c-2e^{\frac{1}{ce}}))||w||_{A_p^+}+1}{c\tau||w||_{A_p^+}+1}\\
&\geq \frac{(\tau(c-2e^{\frac{1}{ce}}))||w||_{A_p^+}+1}{\frac{c\tau}{(\tau(c-2e^{\frac{1}{ce}}))}((\tau(c-2e^{\frac{1}{ce}}))||w||_{A_p^+}+1)}\\
&= \frac{(c-2e^{\frac{1}{ce}})}{c} \geq \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

esto último es eligiendo $c = 4e^{\frac{1}{e}}$. Entonces para $p = 1$, tenemos $\delta = \frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}$ y si $p > 1$, $\delta = \frac{1}{4^{p+2}e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_p^+}}$. Observar que $r = r_w = 1+\delta$. $\square$

Ahora daremos otra versión de la Desigualdad de Hölder al revés débil dada en el **Teorema** 3.5, observar que el enunciado se asemeja más al de la desigualdad de Hölder al revés para pesos de Muckenhoupt, **Lema** 1.8, pues aparecen promedios en intervalos y ninguna función maximal.

Teorema 3.9 (Desigualdad de Hölder al revés débil bis).

Sea $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p^+$ *y* $a < b < c$ *con* $b-a = 2(c-b)$. *Sea* $r = r_w = 1+\frac{1}{4^{p+2}e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_p^+}}$, *si,* $p > 1$ *y* $r = r_w = 1+\frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}$, *cuando* $p = 1$. *Entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b w^r \leq \frac{27}{4}\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c w\right)^r.$$

Demostración. Por **Teorema** 3.5 sabemos que

$$\int_a^x w^{r_w} \leq 2M^-(w\chi_{(a,x)})(x)^{r_w-1}\int_a^x w.$$

para todo intervalo acotado (a,x). Entonces para todo $x \in (b,c)$, tenemos

$$\int_a^b w^r \leq \int_a^x w^r \leq 2M^-(w\chi_{(a,x)})(x)^{r-1} \int_a^x w \leq 2M(w\chi_{(a,c)})(x)^{r-1} \int_a^c w.$$

Luego $(b,c) \subset \left\{ x : M(w\chi_{(a,c)})(x) \geq \left(\frac{\int_a^b w^r}{2\int_a^c w} \right)^{\frac{1}{r-1}} \right\}$. Usando que M es de tipo débil $(1,1)$ respecto a la medida de Lebesgue, ver ecuación (1.1), obtenemos que

$$c - b \leq 3 \left(\frac{2\int_a^c w}{\int_a^b w^r} \right)^{\frac{1}{r-1}} \int_a^c w,$$

entonces

$$(c-b) \left(\int_a^b w^r \right)^{\frac{1}{r-1}} \leq 2^{\frac{1}{r-1}} 3 \left(\int_a^c w \right)^{\frac{r}{r-1}}.$$

Como $1 < r < 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} \int_a^b w^r &= \frac{1}{2(c-b)} \int_a^b w^r \leq 2\, 3^{r-1} \frac{1}{2(c-b)(c-b)^{r-1}} \left(\int_a^c w \right)^r \\
&= 3^{r-1} \left(\frac{3}{2(c-a)} \int_a^c w \right)^r = \frac{3^{2r-1}}{2^r} \left(\frac{1}{(c-a)} \int_a^c w \right)^r \\
&\leq \frac{27}{4} \left(\frac{1}{(c-a)} \int_a^c w \right)^r.
\end{aligned}$$

□

Como corolario del teorema anterior obtenemos una prueba de una de las propiedades bien conocidas de los pesos A_p^+.

Corolario 3.10. *Sean $1 < p < \infty$ y $w \in A_p^+$, entonces $w \in A_{p-\epsilon}^+$, con $p - \epsilon = \frac{p-1}{r(\sigma)} + 1$ donde $\sigma = w^{1-p'}$ y $r(\sigma)$ es el obtenido en la versión análoga de **Teorema** 3.9 para σ en $A_{p'}^-$.*

Demostración. Vamos a usar la definición dada por la **Proposición** 1.22 de $w \in A_{p-\epsilon}^+$, es decir queremos ver que existe $C > 0$ tal que

$$\sup \frac{1}{(b-a)^{p-\epsilon}} \left(\int_a^b w \right) \left(\int_c^d w^{\frac{-1}{p-\epsilon-1}} \right)^{p-\epsilon-1} < C. \tag{3.7}$$

donde el supremo es tomado sobre todos los $a < b < c < d$ tal que
$2(b-a) = 2(d-c) = c-b$.

Sea $r = r(\sigma)$, el dado en el **Teorema** 3.9 y a, b, c, d con las propiedades antes mencionadas, entonces,

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b w\right)\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d w^{\frac{-1}{p-\epsilon-1}}\right)^{p-\epsilon-1} \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b w\right)\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d \sigma^r\right)^{\frac{p-1}{r}}$$
$$\leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b w\right)\left(\frac{1}{d-b}\frac{27}{4}\int_b^d \sigma\right)^{p-1} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{81}{64}\right)^{p-1}||w||_{A_p^+}.$$

□

3. Aplicaciones de la desigualdad de Hölder al revés débil

A continuación daremos algunas aplicaciones de la desigualdad de Hölder al revés débil **Teorema** 3.5. Lo que se va a establecer es comparaciones en medida wdx de conjuntos a partir de comparaciones en la medida de Lebesgue.

Lema 3.11. *Sea $w \in A_p^-$ un peso lateral $p \geq 1$, $a < b < c$ números reales $E \subseteq (b, c)$ un conjunto medible. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $C = C(\epsilon, p)$ tal que si $|E| < e^{-C||w||_{A_p^-}}(b-a)$ se cumple que $w(E) < \epsilon w(a, c)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $w \in A_p^-$ vamos a usar el **Teorema** 3.5 pero para pesos en A_p^-, el Teorema nos diría que si tenemos un intervalo acotado (b, c) entonces

$$\int_b^c w^r \leq 2M^+(w\chi_{(b,c)})(b)^{r-1}\int_b^c w.$$

Por el análogo al **Corolario** 3.6, ítem f), tenemos

$$(M_w(w^{r-1}\chi_{(b,c))}(b))^{\frac{1}{r-1}} \leq 2M(w\chi_{(b,c)})(b),$$

donde $r = 1 + \frac{1}{4^{p+2}e^{\frac{1}{\epsilon}}||w||_{A_p^-}}$ si $p > 1$ y $r = 1 + \frac{1}{16e^{\frac{1}{\epsilon}}||w||_{A_1^-}}$ si $p = 1$. Luego por la definición de M_w tenemos para todo $x \in (a, b)$,

$$\left(\frac{1}{w(a,c)}\int_b^c w^{r-1}w\right)^{\frac{1}{r-1}} \leq (M_w(w^{r-1}\chi_{(x,c)})(x))^{\frac{1}{r-1}} \tag{3.8}$$
$$\leq 2M(w\chi_{(x,c)})(x)$$
$$\leq 2M(w\chi_{(a,c)})(x).$$

Observemos que la función constante 1 es un peso en $A^+_{r'}(w)$, con contante 12, es decir que

$$(b-a)\left(\int_b^c w^{r-1}w\right)^{r'-1} \leq 12(\int_a^c w)^{r'},$$

por la ecuación (3.8) tenemos $(a,b) \subseteq \{x : M(w\chi_{(a,c)})(x) > \frac{1}{4}(\frac{1}{w(a,c)}\int_b^c w^{r-1}w)^{\frac{1}{r-1}}\}$ y como M en débil $(1,1)$ respecto a la medida lebesgue, ver ecuación (1.1), entonces

$$b-a < 12w(a,c)^{\frac{1}{r-1}}\left(\int_b^c w^{r-1}w\right)^{\frac{-1}{r-1}} w(a,c),$$

por lo cual $1 \in A^+_{r'}(w)$.

Se sabe que M^+_w es débil (r',r') respecto a la medida $1\,dx$ pues $1 \in A^+_{r'}(w)$. Si observamos el trabajo Martín-Reyes, Ortega y de La Torre, [**43**], vemos que la norma $||M^+_w||_{L^{r'}(1dx)}$ es inferior a $K = 48r'r^{r'-1}$, luego $K^{\frac{1}{r'}} \leq 96e^{\frac{1}{e}}$.
Teníamos $E \subset (b,c)$, si $x \in (a,b)$ entonces

$$M^+_w(\chi_E(x)) \geq \frac{1}{w(x,c)}\int_x^c \chi_E(t)w(t)\,dx \geq \frac{w(E)}{w(a,c)},$$

esto implica que $(a,b) \subset \{x : M^+_w(\chi_E(x)) > \frac{w(E)}{2w(a,c)}\}$ luego por la desigualdad débil $(1,1)$ de M^+_w con la medida dx,

$$b-a < K\left(\frac{w(a,c)}{w(E)}\right)^{r'}|E|\,.$$

Ahora escribimos $r = 1 + \frac{1}{\tau||w||_{A^-_p}}$ con $\tau = 4^{p+2}e^{\frac{1}{e}}$ si $p > 1$ y $\tau = 16e^{\frac{1}{e}}$ si $p = 1$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{w(E)}{w(a,c)} < \left(K\frac{|E|}{b-a}\right)^{\frac{1}{r'}} &< 96e^{\frac{1}{e}}e^{\frac{-C||w||_{A^-_p}}{r'}}\\ &\leq 96e^{\frac{1}{e}}e^{\frac{-C}{2\tau}} < \epsilon,\end{aligned}$$

la última desigualdad es debida a que $r' \leq \tau||w||_{A^-_p}$ y tomando un C adecuado que depende de p y ϵ podemos acotar todo por ϵ. □

El siguiente lema es una versión más débil del **Lema** 3.11 que sale aplicando el **Teorema** 3.9.

Lema 3.12. *Sea $p \geq 1$, $w \in A_p^-$, $a < b < c$ tal que $2(b-a) = (c-b)$ y $E \subseteq (b,c)$ un conjunto medible. Para todo $\epsilon > 0$, existe una constante $C = C(\epsilon, p)$ tal que, si $|E| < e^{-C||w||_{A_p^-}}(b-a)$ entonces $w(E) < \epsilon w(a,c)$.*

Demostración. Vamos a usar el análogo al **Lema** 3.9 para pesos en A_p^-.

$$\begin{aligned} w(E) &= \frac{1}{c-b}\int_b^c w\chi_E\,(c-b) \leq (c-b)\left(\frac{1}{c-b}\int_b^c w^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{c-b}\int_b^c \chi_E^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \\ &= \left(\frac{|E|}{c-b}\right)^{\frac{1}{r'}}(c-b)\frac{27}{4}\frac{1}{c-a}\int_a^c w \leq \left(\frac{|E|}{b-a}\right)^{\frac{1}{r'}}\frac{27}{4}\frac{2}{3}\int_a^c w \leq \epsilon w(a,c), \end{aligned}$$

la última desigualdad sale de forma similar al final de la demostración del lema anterior. □

4. Desigualdad de Coifman-Fefferman lateral

En esta sección vamos a demostrar una desigualdad de Coifman-Fefferman, como en el **Teorema** 1.26, pero teniendo en cuenta cómo depende la norma de la constante $||w||_{A_p^+}$. El resultado análogo, para pesos Muckenhoupt, lo obtuvo Buckley en [**5**]. Observar que la desigualdad de Coifman-Fefferman dada por Aimar, Forzani y Martín-Reyes en [**1**], ver **Teorema** 1.26, primer inciso, se refiere cuando $p > 1$, el teorema que vamos a demostrar, nos da información en el exponente crítico $p = 1$.

Teorema 3.13 (Desigualdad de Coifman-Fefferman). *Sea T^- un operador integral singular lateral con núcleo K soportado en $(0,\infty)$. Si $p \geq 1$ y $w \in A_p^-$ entonces existe una constante $C = C(p, T^+)$ que depende sólo de p y T^+ tal que*

$$||T^- f||_{L^1(w)} \leq c||w||_{A_p^-}||M^- f||_{L^1(w)}.$$

Para poder demostrar este teorema necesitamos dos resultados previos. El primero se debe a Buckley, ver **Lemma 2.11** de [**5**].

Lema 3.14 ([**5**]). *Sea $f \in L^\infty(Q)$ y T un operador sublineal tal que*

$$|\{x : Tg(x) > \alpha\}| \leq \left(\frac{Cp||g||_{L^p}}{\alpha}\right)^p,$$

para toda $g \in L^p(Q)$ con p suficientemente grande y C que no depende de p. Entonces

$$|\{x : Tf(x) > \alpha\}| \leq e^{\frac{-\alpha}{e||f||_\infty}}|Q|.$$

El segundo resultado es la estimación exponencial de Carleson, ver [**7**].

Lema 3.15 ([**7**]). *Sea $\{I_k\}$ un cubrimiento disjunto de un intervalo I, t_k el punto intermedio de I_k y δ_k su longitud. Para $x \notin I$ definimos*

$$\Delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k^2}{\delta_k^2 + (t_k - x)^2}.$$

Entonces

$$\left| \left\{ x \in I : \Delta(x) > \frac{c}{\gamma} \right\} \right| < Ce^{-\frac{c}{\gamma}} \left| I \right|.$$

Para demostrar el **Teorema** 3.13 vamos aplicar un argumento estándar usando la siguiente desigualdad de "buenos lambdas".

Lema 3.16 (Desigualdad de buenos lambdas). *Sea $1 \leq p < \infty$, $w \in A_p^-$, T^- un operador integral singular lateral y T^* el operador maximal relativo a T^-. Entonces existen constantes positivas c_1, c_2, $\gamma_0 > 0$, tales que, para todo $0 < \gamma < \gamma_0$,*

$$\left| \{ x \in \mathbb{R} : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda \} \right| < c_1 e^{-\frac{c_2}{\gamma}} \left| \{ T^* f(x) > \lambda \} \right|,$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Además, para todo $\epsilon > 0$, existe c' dependiendo solo de ϵ, γ_0 y p, tal que,

$$w \left(\left\{ x \in \mathbb{R} : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}} \right\} \right) < \epsilon w(\{ T^* f(x) > \lambda \}).$$

Demostración. Como $f \in L^1$ podemos escribir $\{T^* f(x) > \lambda\}$ como unión disjunta númerable de intervalos abiertos. Sea $J = (a, b)$ uno de estos intervalos. Veamos que

$$\left| \{ x \in J : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda \} \right| < c_1 e^{-\frac{c_2}{\gamma}} \left| J \right|,$$

y que si $w \in A_p^-$ entonces

$$w \left(\left\{ x \in J : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}} \right\} \right) < \epsilon w(J).$$

Como se mostró en la **Observación** 1.33, sea $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de puntos tal que $x_0 = b$ y $x_{i-1} - x_i = x_i - a$ para $i > 0$. Vamos a demostrar que

$$\left| \{ x \in (x_{i+1}, x_i) : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda \} \right| < c_1 e^{-\frac{c_2}{\gamma}} (x_{i+1} - x_{i+2}). \qquad (3.9)$$

Si tenemos esta desigualdad, sea

$$E = \{x \in (x_{i+1}, x_i) : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda\},$$

usando el **Lema** 3.11, existe una constante c' que depende de $\epsilon, \gamma_0, p, c_1, c_2$, tal que

$$w\left(\left\{x \in (x_{i+1}, x_i) : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}\right\}\right) < \epsilon w(x_i, x_{i+2}). \quad (3.10)$$

Ahora demostremos (3.9). Fijamos i, si

$$\{x \in (x_{i+1}, x_i) : T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda\} = \emptyset$$

no hay nada que probar. Supongamos que el conjunto no es vació y definamos el punto $\overline{a} < a$ tal que $x_i - a = a - \overline{a}$ y

$$\xi = \sup\{x \in (x_{i+1}, x_i) : M^- f(x) \leq \gamma\lambda\}.$$

Escribimos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 = f\chi_{(\overline{a},\xi)}$ entonces

$$\begin{aligned} \{x \in (x_{i+1}, x_i) :& T^* f(x) > 2\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda\} \\ &\subset \left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^* f_1(x) > \frac{1}{2}\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda\right\} \\ &\qquad \cup \left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^* f_2(x) > \frac{3}{2}\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda\right\}. \end{aligned}$$

Primero trabajemos con el conjunto donde aparece f_2. Por una estimación estándar (ver el trabajo de Aimar, Forzani y Martín-Reyes, [**1**]), tenemos que para $x \in (x_{i+1}, \xi)$, $T^* f_2(x) \leq \frac{3}{2}\lambda$, si $0 < \gamma < \gamma_0$, donde γ_0 es elegido suficientemente pequeño. Luego

$$\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^* f_2(x) > \frac{3}{2}\lambda, M^- f(x) < \gamma\lambda\right\} = \emptyset,$$

para $0 < \gamma < \gamma_0$.

Ahora para trabajar con f_1 tomamos $\Omega = \{x \in (x_{i+1}, \xi) : M^- f_1(x) > 3\gamma\lambda\}$ observemos que

$$\frac{1}{\xi - \overline{a}} \int_{\overline{a}}^{\xi} f(t)\, dt \leq M^- f(\xi) \leq \gamma\lambda,$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(t)\,dt \leq 4\gamma\lambda(x_i - x_{i+1}),$$

lo que implica que $\Omega \subset (\overline{a}, \widetilde{a})$ con $\widetilde{a} - \xi = \frac{4}{3}(x_i - x_{i+1})$. Veamos esto último, supongamos que no es cierto, entonces existe $x \notin (\overline{a}, \widetilde{a})$ con $x > \widetilde{a}$ y $x \in \Omega$, luego debe existir $h > x - \xi > \widetilde{a} - \xi$ tal que $\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f_1(t)\,dt > \gamma\lambda$, esto último implica que

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(t)\,dt > 3\gamma\lambda h > 3\gamma\lambda(\widetilde{a} - \xi) = 4\gamma\lambda(x_i - x_{i+1}),$$

lo cual es absurdo.

Ahora, como en el **Lema** 1.29, escribimos $\Omega = \bigcup I_j = \bigcup (a_j, b_j)$ intervalos maximales disjuntos, entonces

$$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f_1(t)\,dt = 3\gamma\lambda.$$

Tomamos $I_j^+ = (b_j, c_j)$, con $\left|I_j^+\right| = 2\,|I_j|$. Observar que $\widetilde{\Omega} = \bigcup (I_j^+ \cup I_j) = \bigcup \widetilde{I}_j$, donde $I_j^+ \cup I_j = \widetilde{I}_j$. Definimos $f_1 = g + h$ donde

$$g = f_1\chi_{\mathbb{R}\setminus\Omega} + \sum_j 3\gamma\lambda\chi_{I_j}, \qquad h = \sum_j h_j = \sum_j (f_1 - 3\gamma\lambda)\chi_{I_j}.$$

Observar que $g \leq 3\gamma\lambda$ y esta soportada en $(\overline{a}, \widetilde{a})$, luego por el **Lema** 3.14 obtenemos

$$\left|\left\{x : T^*g(x) > \frac{\lambda}{4}\right\}\right| \leq e^{\frac{-c}{\gamma}}(\widetilde{a} - \overline{a}) \leq \frac{32}{3}e^{\frac{-c}{\gamma}}(x_{i+1} - x_{i+2}).$$

Estimemos T^*h para $x \notin \widetilde{\Omega}$. Sea K el núcleo de T^-, que tiene soporte en $(0, \infty)$.

$$
\begin{aligned}
|T^* h(x)| &\leq \left| \sum_j \int_{I_j} h_j(y) K(x-y)\, dy \right| \\
&\leq \sum_j \int_{I_j} |h_j(y)(K(x-y) - K(x-b_j))|\, dy \\
&\leq C_{T^-} \sum_j \int_{I_j} |h_j(y)| \frac{y-b_j}{(x-b_j)^2}\, dy \\
&\leq \frac{3}{2} C_{T^-} \sum_j \frac{\delta_j}{\delta_j^2 + (x-b_j)^2} \int_{I_j} |h_j(y)|\, dy \\
&\leq 3C_{T^-} \sum_j \frac{\delta_j}{\delta_j^2 + (x-b_j)^2} \int_{I_j} |f_1|\, dy \\
&= 3C_{T^-} \gamma\lambda \sum_j \frac{\delta_j}{\delta_j^2 + (x-b_j)^2} |I_j| \\
&\leq C\gamma\lambda \sum_j \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 + (x-b_j)^2},
\end{aligned}
$$

donde $\delta_j = c_j - a_j$. Escribimos $\Delta(x) = \sum_j \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 + (x-b_j)^2}$.

Observar que si $x \in \widetilde{\Omega}$ entonces $M^- f(x) \geq \gamma\lambda$. De hecho, si $x \in I_j$, para algún j, por la definición de Ω tenemos que $3\gamma\lambda < M^- f_1(x) < M^- f(x)$. Si $x \in I_j^+$ entonces

$$
3\gamma\lambda = \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} f_1(t)\, dt = \frac{x-a_j}{(x-a_j)|I_j|} \int_{a_j}^{x} f(t)\, dt \leq 3M^- f(x).
$$

Por la estimación exponencial de Carleson, **Lema** 3.15, tenemos que

$$
\left| \left\{ x \in (x_{i+1}, \xi) : \Delta(x) > \frac{c}{\gamma} \right\} \right| < Ce^{\frac{-c}{\gamma}} |(x_{i+1}, \xi)| = 2Ce^{\frac{-c}{\gamma}} (x_{i+1} - x_{i+2}).
$$

Lo que obtuvimos, teniendo en cuenta esta última desigualdad y eligiendo γ_0 suficientemente pequeño, es

$$
\begin{aligned}
&\left|\{x \in (x_{i+1}, x_i) : T^*f(x) > 2\lambda, M^-f(x) < \gamma\lambda\}\right| \\
&\qquad \leq \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^*f_1(x) > \frac{1}{2}\lambda, M^-f(x) < \gamma\lambda\right\}\right| \\
&\qquad\quad + \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^*f_2(x) > \frac{3}{2}\lambda, M^-f(x) < \gamma\lambda\right\}\right| \\
&\qquad = \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^*f_1(x) > \frac{1}{2}\lambda, M^-f(x) < \gamma\lambda\right\}\right| \\
&\qquad \leq \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^*g(x) > \frac{1}{4}\lambda, M^-f(x) < \gamma\lambda\right\}\right| \\
&\qquad\quad + \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^*h(x) > \frac{1}{4}\lambda, M^-f(x) < \gamma\lambda\right\}\right| \\
&\qquad \leq \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : T^*g(x) > \frac{1}{4}\lambda\right\}\right| \\
&\qquad\quad + \left|\left\{x \in (x_{i+1}, \xi) : \Delta(x) > \frac{c}{\gamma}\right\}\right| \\
&\qquad < c_1 e^{-\frac{c_2}{\gamma}}(x_{i+1} - x_{i+2}).
\end{aligned}
$$

De esta forma obtuvimos las desigualdades (3.9) y (3.10) y sumando sobre i y luego sobre los intervalos maximales de $\{T^*f(x) > \lambda\}$ se obtienen las desigualdades buscadas.

$\square$

A continuación, a partir de este último resultado, vamos a demostrar la desigualdad de Coifman-Fefferman.

Demostración del Teorema 3.13: la desigualdad de Coifman-Fefferman,

Por el **Lema** 3.16, con $\epsilon = 1/4$, existe c' que no depende de $||w||_{A_p^+}$ tal que

$$
w\left(\left\{x \in \mathbb{R} : T^*f(x) > 2\lambda, M^-f(x) < \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}\right\}\right) < \frac{1}{4}w(\{T^*f(x) > \lambda\}). \quad (3.11)
$$

Luego tenemos que

$$\int_0^N w(\{T^- f > \lambda\})\, d\lambda \leq \int_0^N w(\{T^* f > \lambda\})\, d\lambda \leq 2\int_0^{\frac{N}{2}} w(\{T^* f > 2\lambda\})\, d\lambda$$

$$\leq 2\int_0^{\frac{N}{2}} w(\{T^* f > 2\lambda, M^- f < \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}\})\, d\lambda + 2\int_0^{\frac{N}{2}} w(M^- f \geq \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}\})\, d\lambda$$

$$= B_1 + B_2.$$

Empecemos estimando B_1, por la ecuación (3.11) tenemos

$$B_1 = 2\int_0^{\frac{N}{2}} w(\{T^* f > 2\lambda, M^- f < \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}\})\, d\lambda$$

$$\leq \frac{2}{4}\int_0^{\frac{N}{2}} w(\{T^* f > \lambda\})\, d\lambda \leq \frac{1}{2}\int_0^{N} w(\{T^* f > \lambda\})\, d\lambda.$$

Veamos B_2, para ello hacemos el cambio de variables $t = \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}$, $dt = \frac{c'}{||w||_{A_p^-}} d\lambda$,

$$B_2 = 2\int_0^{\frac{N}{2}} w(M^- f \geq \frac{c'\lambda}{||w||_{A_p^-}}\})\, d\lambda = \frac{2||w||_{A_p^-}}{c'}\int_0^{\frac{Nc'}{2||w||_{A_p^-}}} w(M^- f \geq t\})\, dt.$$

Luego por lo visto para B_1 y B_2, tenemos

$$\frac{1}{2}\int_0^N w(\{T^* f > \lambda\})\, d\lambda \leq \frac{2||w||_{A_p^-}}{c'}\int_0^{\frac{Nc'}{2||w||_{A_p^-}}} w(M^- f \geq \lambda\})\, d\lambda,$$

tomando limite cuando $N \to \infty$ obtenemos

$$||T^- f||_{L^1(w)} \leq \frac{4||w||_{A_p^-}}{c'}||M^- f||_{L^1(w)},$$

Así queda demostrado el Teorema. $\square$

5. Demostración de las estimaciones de normas respecto a A_1^+

En esta sección, usando lo que antes desarrollamos, demostraremos los **Teoremas** 3.2 y 3.1, como los **Corolarios** 3.3 y 3.4.

5.1. Resultados previos.

Para poder demostrar estos teoremas necesitamos probar algunos resultados previos. Para ello utilizaremos el **Lema** 2.3, sobre extrapolación, dado en el Capítulo 2. Veamos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 3.17. *Sean w un peso, p, $r > 1$ y T^- un operador integral singular lateral. Entonces existe C que solo depende de T^- tal que.*

$$\left|\left|\frac{T^-f}{M_r^-w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^-w)} \leq Cp'\left|\left|\frac{M^-f}{M_r^-w}\right|\right|_{L_{p'}(M_r^-w)}.$$

Nota: Por las propiedades de los pesos de Sawyer, que enunciamos en los preliminares, sabemos que $(M_r^-w)^{1-p'}$ es una peso en A_∞^- con la constante correspondiente independiente de w. Por lo cual el **Lema** 3.17 es un caso particular de la estimación de Coifman-Fefferman dada en el **Teorema** 1.26, pero teniendo presente como depende la constate de p.

Demostración. Queremos ver que

$$\left|\left|\frac{T^-f}{M_r^-w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^-w)} \leq Cp'\left|\left|\frac{M^-f}{M_r^-w}\right|\right|_{L_{p'}(M_r^-w)}$$

Por dualidad sabemos que

$$\left|\left|\frac{T^-f}{M_r^-w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^-w)} = \sup_{||h||_{L^p(M_r^-w)}=1}\int_{\mathbb{R}}\left|T^-f\right| h\,dx.$$

Apliquemos el **Lema** 2.3, con $s = p$ y $v = M_r^-w$, luego para $h \in L^p(M_r^-w)$ existe una función H, tal que

- $h \leq H$,
- $||H||_{L^p(M_r^-w)} \leq 2||H||_{L^p(M_r^-w)}$,
- $H(M_r^-w)^{\frac{1}{p}} \in A_1^-$ con $||H(M_r^-w)^{\frac{1}{p}}||_{A_1^-} \leq cp'$.

Por las propiedades de los pesos de Sawyer $(M_r^-w)^{\frac{1}{2p}} \in A_1^+$ con $||(M_r^-w)^{\frac{1}{2p}}||_{A_1^+} \leq \frac{c}{(1-\frac{1}{2pr})}$, luego por el lema de factorización para pesos laterales

$$\begin{aligned}||H||_{A_3^-} &= ||H(M_r^-w)^{\frac{1}{p}}[(M_r^-w)^{\frac{1}{2p}}]^{-2}||_{A_3^-}\\ &\leq ||H(M_r^-w)^{\frac{1}{p}}||_{A_1^-}||(M_r^-w)^{\frac{1}{2p}}||^2_{A_1^+}\\ &\leq cp'\left(\frac{c}{1-\frac{1}{2pr}}\right)^2 \leq cp'.\end{aligned}$$

Finalmente vamos a usar el **Teorema** 3.13 con el peso H que está en A_3^-, luego la desigualdad de Hölder con p y su conjugado p', entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|T^- f\right| h\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|T^- f\right| H\,dx \leq c||H||_{A_3^-} \int_{\mathbb{R}} M^-(f)H\,dx \\ &\leq cp' \int_{\mathbb{R}} \frac{M^- f}{M_r^- w} H M_r^- w\,dx \leq cp' \left|\left|\frac{M^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)} ||H||_{L^p(M_r^- w)},\end{aligned}$$

como $||h||_{L^p(M_r^- w)} = 1$ obtuvimos

$$\left|\left|\frac{T^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)} \leq cp' \left|\left|\frac{M^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)}.$$

□

5.2. Demostración de los Teoremas 1.10 y 1.11.

Ahora vamos a demostrar los resultados principales

Demostración del Teorema 1.10.

Empecemos demostrando la desigualdad (3.1), es decir

$$||T^+ f||_{L^p(w)} \leq Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}} ||f||_{L_p(M_r^- w)}.$$

Sea $(T^+)^* = T^-$ el operador adjunto de T^+, que es un operador integral singular lateral con núcleo soportado en $(0,\infty)$. Además observemos como $(M_r^- w) \in A_1^+ \subset A_p^+$, entonces $(M_r^- w)^{1-p'} \in A_{p'}^-$. Luego, por dualidad, es equivalente probar

$$\left|\left|\frac{T^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)} \leq Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}} \left|\left|\frac{f}{w}\right|\right|_{L_{p'}(w)}.$$

Por la desigualdad de Hölder, con pr, en (a,b),

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f w^{-\frac{1}{p}} w^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b w^r\right)^{\frac{1}{pr}} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f w^{-\frac{1}{p}}\right)^{(pr)'}\right)^{\frac{1}{(pr)'}},$$

tomando supremo sobre todos los a con $a < b$ tenemos

$$(M^- f(b))^{p'} \leq (M_r^- w(b))^{p'-1} (M_{(pr)'}^-(f w^{-\frac{1}{p}})(b))^{p'}.$$

Luego integrando en $\mathbb{R}$ respecto a b,

$$\left|\left|\frac{M^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)} \leq \left|\left|M_{(pr)'}^-(f w^{-\frac{1}{p}})\right|\right|_{L^{p'}}.$$

Ahora por la ecuación (1.11), sabemos que $||M_k^- g||_{L^s} \leq C(\frac{s}{k})'^{\frac{1}{k}}||g||_{L^s}$ si $\frac{s}{k} > 1$. Como $p, r > 1$ tenemos que $\frac{p'}{(pr)'} > 1$ y podemos aplicar esto con $g = fw^{\frac{1}{p}}$, $k = (pr)'$ y $s = p'$, luego

$$\left|\left|\frac{M^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)} \leq C \left(\frac{rp-1}{r-1}\right)^{1-\frac{1}{pr}} \left|\left|\frac{f}{w}\right|\right|_{L_{p'}(w)}$$
$$\leq C\, p \left(\frac{1}{r-1}\right)^{1-\frac{1}{pr}} \left|\left|\frac{f}{w}\right|\right|_{L_{p'}(w)},$$

como

$$\left(\frac{1}{r-1}\right)^{1-\frac{1}{pr}} \leq (r')^{1-\frac{1}{p+1}+\frac{1}{pr'}} \leq 2(r')^{\frac{1}{p'}},$$

pues $t^{\frac{1}{t}} \leq 2$ para $t \geq 1$. Finalmente usando el **Lema** 3.17, tenemos

$$\left|\left|\frac{T^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)} \leq C\, p' \left|\left|\frac{M^- f}{M_r^- w}\right|\right|_{L^{p'}(M_r^- w)}$$
$$\leq C\, pp'(r')^{\frac{1}{p'}} \left|\left|\frac{f}{w}\right|\right|_{L_{p'}(w)}.$$

Ahora veamos la desigualdad (3.2), es decir

$$||T^+ f||_{L^p(w)} \leq Cpp'||w||_{A_1^+}||f||_{L^p(w)},$$

para $w \in A_1^+$. Si elegimos $r_w = 1 + \frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}$ entonces $r_w' \lesssim ||w||_{A_1^+}$. Luego usando este r_w en la desigualdad (3.1), tenemos

$$\begin{aligned} ||T^+ f||_{L^p(w)} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |T^+ f|^p(x) w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.12)\\ &\leq Cpp'(r_w')^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p(x) M_{r_w}^-(w)(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Cpp'(r_w')^{\frac{1}{p'}} \left(2\int_{\mathbb{R}} |f|^p(x) M^-(w)(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq Cpp'(||w||_{A_1^+})^{\frac{1}{p'}}||w||_{A_1^+}^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w)} \leq Cpp'||w||_{A_1^+}||f||_{L^p(w)}. \end{aligned}$$

donde las últimas desigualdades se deben al **Corolario** 3.6, ítem c) que afirma que $M_{r_w}^-(w)(x) \leq 2M^-(w)(x) \leq 2||w||_{A_1^+} w(x)$ para casi todo x en $\mathbb{R}$.

Para finalizar veamos que $r'_w \lesssim ||w||_{A_1^+}$

$$r'_w = \frac{r_w}{r_w - 1} = \frac{1 + \frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}}{\frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}} = (1 + \frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}})16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+} \leq 32e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}.$$

□

Corolario 3.18. *De la demostración, se deduce que, para* p*,* $r > 1$*,* w *un peso y* M^-*, la función maximal lateral, existe una constante* C *que no depende de* p*, ni de* r *ni de* w *tal que*

$$||M^- f||_{L^p((M_r^-(w))^{1-p})} \leq C\, p'(r')^{\frac{1}{p}}||f||_{L^p(w^{1-p})}.$$

Ahora veamos la prueba del teorema que nos da el crecimiento logarítmico de la desigualdad débil para pesos de Sawyer.

Demostración del Teorema 1.11.

Recordar que queremos demostrar la desigualdad (5.2), es decir

$$w(\{x \in \mathbb{R} : T^+ f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}||w||_{A_1^+} \log(e + ||w||_{A_1^+})||f||_{L^1(w)}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir w acotada de soporte compacto y $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ positiva. Por el **Lema** 1.29 podemos escribir

$$\Omega = \{x : M^+ f(x) > \lambda\} = \bigcup_j I_j = \bigcup_j (a_j, b_j),$$

donde los $I_j = (a_j, b_j)$ son las componentes conexas maximales de Ω. Los I_j satisfacen

$$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(t)\, dt = \lambda,$$

notar que si $x \notin \Omega$ entonces para toda $h > 0$,

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq \lambda.$$

Luego por el teorema de difereciación de Lebesgue $f(x) \leq \lambda$ para casi todo $x \notin \Omega$. Sea $I_j^- = (c_j, a_j)$ donde elegimos c_j de tal forma que $\left|I_j^-\right| = 2\,|I_j|$ y definimos

$$\widetilde{\Omega} = \bigcup_j (I_j^- \cup I_j) = \bigcup_j \widetilde{I}_j.$$

Escribimos $f = g + h$ donde,

$$g = f\chi_{\mathbb{R}\setminus\Omega} + \sum_j \lambda\chi_{I_j}, \qquad h = \sum_j h_j = \sum_j (f-\lambda)\chi_{I_j}.$$

Observar que $g(x) \leq \lambda$ para casi todo punto x en la recta real $\mathbb{R}$ y que h_j tiene integral nulo. Luego

$$w\{x : |T^+f(x)| > \lambda\} \leq w\left(\widetilde{\Omega}\right) + w\left(\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega} : |T^+h(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)$$
$$+ w\left(\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega} : |T^+g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) = I + II + III.$$

Estimemos I:

$$I = w(\widetilde{\Omega}) \leq \sum_j (w(I_j^-) + w(I_j)).$$

Para cada j y $x \in I_j$,

$$\begin{aligned} w(I_j^-) &= \frac{w(I_j^-)}{|I_j|}|I_j| = \frac{w(I_j^-)}{|I_j|}\frac{1}{\lambda}\int_{I_j} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{I_j}\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j^-} w(t)\,dt\,f(x)\,dx \leq \frac{3}{\lambda}\int_{I_j}\frac{1}{(x-c_j)}\int_{c_j}^{x} w(t)\,dt\,f(x)\,dx \\ &\leq \frac{3}{\lambda}\int_{I_j} f(x)M^-w(x)\,dx. \end{aligned}$$

Por otro lado es muy fácil ver que (w, M^-w) están en A_1^+ con constante 1. Luego M^+ es débil $(1,1)$ respecto a este par de pesos y por la desigualdad (1.19), tenemos

$$\sum_j w(I_j) = w(\{x : M^+f(x) > \lambda\}) < \frac{4}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(t)M^-w(t)\,dt.$$

Por lo tanto

$$I = w(\widetilde{\Omega}) \leq \frac{7}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(t)M^-w(t)\,dt \leq \frac{7}{\lambda}||w||_{A_p^+}\int_{\mathbb{R}} f(t)w(t)\,dt.$$

Ahora estimamos II. Primero usamos la desigualdad de Chebyshev. Después vamos a usar que h_j tiene integral nula y soporte en I_j, es decir $\int_{I_j} h_j = 0$. Sea $r_j = |I_j| =$

$\frac{1}{2}\left|I_j^-\right|$. Recordar que el soporte de K está incluido en $(-\infty, 0)$. Luego,

$$\begin{aligned}
II = w\left(\left\{x \in \widetilde{\Omega}^c : \left|T^+h(x)\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) &\leq \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega}} \left|T^+h(t)\right| w(t)\,dt \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega}} \left|T^+h_j(t)\right| w(t)\,dt \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\sum_j \int_{I_j} |h_j(y)| \int_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j} |K(t-y) - K(t-a_j)|\, w(t)\,dt\,dy \\
&= \frac{2}{\lambda}\sum_j \int_{I_j} |h_j(y)| \int_{-\infty}^{c_j} |K(t-y) - K(t-a_j)|\, w(t)\,dt\,dy.
\end{aligned}$$

Observemos que es suficiente ver que para cada $y \in I_j$ se cumple que

$$\int_{-\infty}^{c_j} |K(t-y) - K(t-a_j)|\, w(t)\,dt \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{z \in I_j}\; M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(z).$$

Para esto usamos la condición del núcleo K, como $|y - a_j| \leq |I_j| = \frac{1}{2}\left|I_j^-\right| \leq \frac{|t-a_j|}{2}$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{c_j} |K(t-y) - K(t-a_j)| w(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_j - 2^{k+1}r_j}^{a_j - 2^k r_j} |K(t-y) - K(t-a_j)|\, w(t)\,dt \\
&\leq K_{T^+} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_j - 2^{k+1}r_j}^{a_j - 2^k r_j} \left|\frac{y - a_j}{(t-a_j)^2}\right| w(t)\,dt \\
&\leq K_{T^+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y - a_j}{(2^k r_j)^2} \int_{a_j - 2^{k+1}r_j}^{a_j - 2^k r_j} w(t)\chi_{(a_j - 2^k r_j, a_j - 2^{k+1} r_j)}\,dt \\
&\leq K_{T^+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^k r_j)} \int_{a_j - 2^{k+1}r_j}^{a_j - 2^k r_j} w(t)\chi_{(a_j - 2^k r_j, a_j - 2^{k+1} r_j)}\,dt,
\end{aligned}$$

donde K_{T^+} depende solo de T^+. Si $x \in I_j$, entonces

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{c_j} |K(t-y) - K(t-a_j)|\, w(t)\,dt \\
&\leq K_{T^+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{x - a_j + 2^{k+1}r_j}{2^k r_j}\frac{1}{x - a_j + 2^{k+1}r_j} \int_{a_j - 2^{k+1}r_j}^{x} w(t)\chi_{(a_j - 2^k r_j, a_j - 2^{k+1} r_j)}\,dt \\
&\leq K_{T^+} M^- w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{x - a_j}{2^k r_j} + \frac{2^{k+1}r_j}{2^k r_j}\right) \leq C M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(x),
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
II &\leq \frac{C}{\lambda}\sum_j \operatorname*{ess\,inf}_{I_j} \; M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})\int_{I_j}|h_j(y)|\;dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{I_j}|h_j(y)|\,M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(y)\,dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda}\left[\sum_j \int_{I_j} f(y)M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(y)\,dy + \sum_j \int_{I_j}|g(y)|\,M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(y)\,dy\right] \\
&= \frac{C}{\lambda}(A+B).
\end{aligned}
$$

Para A no hay nada que probar. Trabajemos en B

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_j \int_{I_j}|g(y)|\,M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(y)\,dy = \sum_j \int_{I_j}|\lambda|\,M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(y)\,dy \\
&\leq \sum_j \int_{I_j} f(t)\,dt \frac{1}{I_j}\int_{I_j} M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(y)\,dy \\
&\leq \frac{3}{2}\;\sum_j \int_{I_j} f(t)\,dt \operatorname*{ess\,inf}_{z\in I_j}\; M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(z) \\
&\leq \frac{3}{2}\;\sum_j \int_{I_j} f(t)M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j})(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Veamos esto último, es decir que,

$$
M_r^-\left(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}\right)(y) \leq \frac{3}{2}\operatorname*{ess\,inf}_{z\in I_j}\; M_r^-\left(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}\right)(z), \tag{3.13}
$$

para todo $y \in I_j$ y $r \geq 1$. Nosotros lo estamos usando para el caso $r = 1$. Si $y, z \in I_j$ entonces,

$$\begin{aligned}
M_r^- \left(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}\right)(y) &= \sup_{t<y}\left[\frac{1}{y-t}\int_t^y \left(w(s)\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}(s)\right)^r ds\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \sup_{t<c_j}\left[\frac{1}{y-t}\int_t^{c_j} \left(w(s)\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}(s)\right)^r ds\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \sup_{t<c_j}\left[\frac{z-t}{y-t}\frac{1}{z-t}\int_t^{c_j} \left(w(s)\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}(s)\right)^r ds\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \sup_{t<c_j}\left[\frac{3}{2}\frac{1}{z-t}\int_t^{c_j} \left(w(s)\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}(s)\right)^r ds\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{3}{2}\sup_{t<z}\left[\frac{1}{z-t}\int_t^{z} \left(w(s)\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}(s)\right)^r ds\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{3}{2}M_r^-\left(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}\right)(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$II \leq \frac{C}{\lambda}\sum_j \int_{I_j} f(t)M^-\left(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{I}_j}\right)(t)\,dt \leq \frac{C}{\lambda}||w||_{A_1^+}\int_{\mathbb{R}} f(t)w(t)\,dt.$$

Finalmente para estimar III empezamos aplicando la desigualdad de Chebyshev y que $g \leq \lambda$. Además elegimos $r = r_w = 1 + \frac{1}{16e^{\frac{1}{e}}||w||_{A_1^+}}$ para aplicar la ecuación (3.1) del **Teorema** 3.1 y luego el **Corolario** 3.6, ítem $c)$ que afirma que $M_{r_w}^-(w)(x) \leq 2M^-(w)(x)$,

$$\begin{aligned}
III &= w\left(\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega} : \left|T^+g\right|(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \qquad (3.14)\\
&\leq \frac{2^p}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}}(\left|T^+g\right|(x))^p w(x)\chi_{(\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega})}(x)\,dx \\
&\leq \frac{2^p}{\lambda^p}(Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}})^p\int_{\mathbb{R}}(|g|(x))^p M_r^-(w\chi_{(\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega})})(x)\,dx \\
&\leq \frac{2^{p+1}}{\lambda}(Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}})^p\int_{\mathbb{R}}(|g|(x))M^-(w\chi_{(\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega})})(x)\,dx \\
&\leq \frac{2^{p+1}}{\lambda}(Cpp'((r')^{\frac{1}{p'}})^p\left[\int_{\mathbb{R}/\Omega}|g(x)|M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega}})(x)dx + \int_{\Omega}|g(x)|M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega}})(x)dx\right].
\end{aligned}$$

En el primer sumando usamos que $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}\setminus\Omega$. Para el segundo sumando aplicamos un argumento similar al usado en B para la integral de

g sobre Ω, ver la desigualdad (3.13) con $r = r_w$. Luego obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| M^-(w\chi_{\mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega}})(x)\, dx \leq \frac{3}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) M^-(w)(x)\, dx.$$

Como $w \in A_1^+$ y $r' = r'_w \leq C||w||_{A_1^+}$ tenemos

$$\begin{aligned} III &\leq \frac{2^{p+1}}{\lambda} (Cpp'((r')^{\frac{1}{p'}})^p \int_{\mathbb{R}} f(x) M^- w(x)\, dx \\ &\leq \frac{2^{p+1}}{\lambda} (Cpp'(||w||_{A_1^+})^{\frac{1}{p'}})^p ||w||_{A_1^+} \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x)\, dx \\ &\leq \frac{C^p 2^{p+1}}{\lambda} [pp'||w||_{A_1^+}]^p \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x)\, dx. \end{aligned}$$

Para terminar la demostración tomamos $p = 1 + \frac{1}{log(e+||w||_{A_1^+})}$, observar que

$$pp' = \frac{(1 + \frac{1}{\log(e+||w||_{A_1^+})})^2}{\frac{1}{log(e+||w||_{A_1^+})}} = log(e + ||w||_{A_1^+}) + 2 + \frac{1}{log(e + ||w||_{A_1^+})}.$$

Usamos que $t^{(\log(e+t))^{-1}}$ y $t^{t^{-1}}$ están acotados para $t > 1$, y que $\log(e + ||w||_{A_1^+}) > 1$,

$$\begin{aligned} [pp'||w||_{A_1^+}]^p &= [(\log(e + ||w||_{A_1^+}) + 2 + \frac{1}{\log(e + ||w||_{A_1^+})})||w||_{A_1^+}]^{1+\frac{1}{\log(e+||w||_{A_1^+})}} \\ &\leq [4\log(e + ||w||_{A_1^+})][4\log(e + ||w||_{A_1^+})]^{\frac{1}{\log(e+||w||_{A_1^+})}} ||w||_{A_1^+} ||w||_{A_1^+}^{\frac{1}{\log(e+||w||_{A_1^+})}} \\ &\leq C \log(e + ||w||_{A_1^+}) ||w||_{A_1^+}, \end{aligned}$$

y como $1 < p < 2$ tenemos que

$$III \leq \frac{C}{\lambda} \log(e + ||w||_{A_1^+}) ||w||_{A_1^+} \int_{\mathbb{R}} f(x) w(x)\, dx.$$

Combinando esta estimación con lo visto para I y II terminamos la prueba. □

Observación 3.19. La demostración se basa en escribir la función f como la suma de dos funciones g y h.

La función h es combinación de funciones h_j soportadas en intervalos I_j y con integral nula, a estas funciones se las suele denominar átomos. Es conocido que si una función está en el subespacio de $L^1(\mathbb{R})$ generado por los átomos entonces la función maximal es fuerte $(1, 1)$. En la demostración se ve que la dependencia de la norma $||T^+h||_{L^{1,\infty}(w)}$ con respecto a $||w||_{A_1^+}$ es lineal, como en la conjetura débil de Mukenhoupt y Wheeden.

Donde aparece el término logarítmico es a la hora de trabajar con g, es decir es la función mas problemática. En la prueba clásica de la desigualdad débil para un operador integral singular está función es llamada “Good” pues está en el L^2 y como K el núcleo del operador cumple que $||\widehat{K}||_\infty < c_1$ es muy fácil ver la acotación de T^+g.

5.3. Demostración de los Corolarios 3.3 y 3.4.

Demostración del Corolario 3.3. Para $\alpha > 0$ tomamos el conjunto $\Omega_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : |T^+f(x)| > \alpha\}$ y sea $\varphi(t) = t\log(e+t)$. Aplicamos el **Lema** 2.2, inciso **(a)**, con $s = p'$ que implica $r = 1$, luego tenemos una función H acotada en $L^{p'}(w)$ satisfaciendo las propiedades:

1. $h \leq H$;
2. $||H||_{L^{p'}(w)} \leq 2||h||_{L^{p'}(w)}$;
3. $H.w \in A_1^+ \quad \text{con} \quad ||H.w||_{A_1^+} \leq Cp||w||_{A_p^+}$.

Usando esto y el **Teorema** 1.11, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\alpha} h\,w\,dx \leq \int_{\Omega_\alpha} H\,w\,dx &\leq \frac{C}{\alpha}\varphi(||H.w||_{A_1^+})||f||_{L^1(H.w)}\\ &\leq \frac{C}{\alpha}\varphi(Cp||w||_{A_p^+})\int_{\mathbb{R}}|f|H\,wdx\\ &\leq \frac{C}{\alpha}2\varphi(Cp)\varphi(||w||_{A_p^+})\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^p\,wdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}}H^{p'}\,wdx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leq \frac{C}{\alpha}\varphi(||w||_{A_p^+})||f||_{L^p(w)}||h||_{L^{p'}(w)},\end{aligned}$$

tomando supremo sobre todos los h, con $||h||_{L^{p'}(w)} = 1$, completamos la prueba. □

Demostración del Corolario 3.4. Dado un operador integral singular lateral T^-, su operador adjunto es T^+. Sea $w \in A_p^-$ entonces $\sigma \in A_{p'}^+$ con $||\sigma||_{A_{p'}^+} = ||w||_{A_p^-}^{\frac{1}{p-1}}$. Ahora aplicamos **Corolario** 3.3 para el operador integral singular lateral

T^+ y el peso σ, tenemos,

$$\begin{aligned} ||T^+||_{L^{p',\infty}(\sigma)} &\leq C||w||_{A_p^-}^{\frac{1}{p-1}} \log\left(e + ||w||_{A_p^-}^{\frac{1}{p-1}}\right) ||f||_{L^{p'}(\sigma)} \\ &\leq C||w||_{A_p^-}^{\frac{1}{p-1}} \log(e + ||w||_{A_p^-})||f||_{L^{p'}(\sigma)}. \end{aligned}$$

Luego por dualidad,

$$||T^-||_{L^p(w)} \leq C||w||_{A_p^-}^{\frac{1}{p-1}} \log(e + ||w||_{A_p^-}) \left|\left|\frac{f}{\sigma}\right|\right|_{L^{p,1}(\sigma)},$$

donde $L^{p,1}(\sigma)$ es el espacio estándar de Lorentz con pesos. Tomando ahora $f = \sigma\chi_E$, con E un conjunto medible arbitrario, completamos la demostración. $\square$

Capítulo 4

Apéndice

1. Estimaciones en normas respecto a A_∞^+

Los siguientes resultados de Martín-Reyes y de la Torre, ver [**42**], nos permitirán generalizar algunos de los temas desarrollados en el Capítulo 3.

En esta sección vamos a trabajar con las constantes de A_∞^+ equivalentes a la constante de Fujii-Wilson de un peso en A_∞, ver ecuación (1.3).

Definición 4.1 ([**42**]). Vamos a definir la constante de un peso $w \in A_\infty^+$ como

$$||w||_{A_\infty^+} = \sup \frac{\int_I M^-(w\chi_I)(x)\,dx}{\int_I w(x)\,dx},$$

donde el supremo se toma sobre todos los intervalos acotados $I \subset \mathbb{R}$.

También se define la siguiente constante:

Definición 4.2 ([**42**]). Definimos la constante de un peso $w \in A_\infty^+$ como

$$[w]_{A_\infty^+} = \sup \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b w(x)\,dx \right) \exp\left(\frac{1}{c-b} \int_b^c \log(1/w(x))\,dx \right),$$

donde el supremo se toma sobre todos los $a < b < c$ tal que $b - a = c - b$.

El siguiente teorema relaciona estas definiciones con los resultados de los preliminares.

Teorema 4.3 ([**42**]). *Sea w un peso en A_p^+, con $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$||w||_{A_\infty^+} \leq e[w]_{A_\infty^+} \leq e||w||_{A_p^+} \leq e[w]_{A_p^+},$$

donde $[w]_{A_p^+}$ es la constante de A_p^+ de la ***Definición*** *1.17.*

En este trabajo Martín-Reyes y de la Torre demuestran la siguiente Desigualdad de Hölder al reves débil.

Teorema 4.4 ([**42**]). *Sea $w \in A^+_\infty$, entonces*

- *si $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2||w||_{A^+_\infty}}$ entonces para todo intervalo $I = (a,b)$,*

$$\int_a^b M^-(w\chi_I)^{1+\epsilon}(x)\,dx \leq 2||w||_{A^+_\infty} M^-(w\chi_I)^\epsilon(b) \int_a^b w(x)\,dx,$$

- *si $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2||w||_{A^+_\infty}}$ entonces para todo intervalo $I = (a,b)$,*

$$\int_a^b (w(x))^{1+\epsilon}\,dx \leq 2M^-(w\chi_I)^\epsilon(b) \int_a^b w(x)\,dx,$$

  en consecuencia si $r = 1+\epsilon$ se tiene $M^-_r(w\chi_{(a,b)})(b) \leq 2M^-(w\chi_{(a,b)})(b)$,

- *si $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2||w||_{A^+_\infty}}$ entonces para todos números reales $a < b < c$,*

$$(c-b)^\epsilon \left(\int_a^b w^{1+\epsilon}(x)\,dx\right) \leq 2\left(\int_a^c w(x)\,dx\right)^{1+\epsilon},$$

  en consecuencia $w^{-1} \in A^-_p(wdx)$, con $p = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$ y $||w^{-1}||_{A^-_p(wdx)} \leq 2^{\frac{1}{\epsilon}}$.

Como consecuencia prueban la siguiente propiedad de los pesos A^+_p, pero teniendo mejor dominio de las constantes.

Teorema 4.5 ([**42**]). *Sea w un peso en A^+_p, con $1 < p < \infty$, $\sigma = w^{1-p}$, $0 < \delta \leq \frac{1}{2||\sigma||_{A^-_\infty}}$ y $q = \frac{p+\delta}{1+\delta}$, entonces $1 < q < p$, $w \in A^+_q$ y*

$$[w]_{A^+_q} \leq [w]_{A^+_p}.$$

Como consecuencia ellos obtienen el siguiente teorema de Buckley lateral.

Teorema 4.6 ([**42**]). *Sea $1 < p < \infty$. Si $w \in A^+_p$ entonces para toda $f \in L^p(w)$*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |M^+f(x)|^p\, w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^7 \left(p'[w]_{A^+_p}||\sigma||_{A^-_\infty}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el Capítulo 3 demostramos una desigualdad de Hölder al reves débil, **Teorema** 3.5. Esta fue utilizada para obtener los resultados de los teoremas **Teoremas** 3.1 y 3.2. Ahora si tenemos en cuenta el resultado del **Teorema** 4.4 en lugar del dado por el **Teorema** 3.5 obtenemos los siguientes resultados

Teorema 4.7. *Sea $1 < p < \infty$, $w \in A_1^+$ y T^+ un operador integral singular lateral. Entonces*

$$||T^+f||_{L^p(w)} \leq Cpp'(||w||_{A_1^+})^{\frac{1}{p}}(||w||_{A_\infty^+})^{\frac{1}{p'}}||f||_{L^p(w)},$$

donde C solo depende de T^+.

Respecto a la acotación débil $(1,1)$ en medida w se tiene

Teorema 4.8. *Sea $w \in A_1^+$ y T^+ un operador integral singular lateral, entonces,*

$$||T^+f||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C||w||_{A_1^+}\log(e+||w||_{A_\infty^+})||f||_{L^1(w)},$$

donde C solo depende de T^+.

Estos resultados son mejores que los **Teoremas** 3.1 y 3.2, pues por el **Teorema** 4.3 se tiene $||w||_{A_\infty^+} \leq e||w||_{A_p^+}$.

Demostración del Teorema 4.7. Para obtener el resultado partimos de la formula (3.1) del **Teorema** 3.1

$$||T^+f||_{L^p(w)} \leq Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}}||f||_{L_p(M_r^- w)},$$

y proseguimos al igual que en la ecuación (3.12) pero tomando $r = r_w = 1 + \frac{1}{2||w||_{A_\infty^+}}$ del **Teorema** 4.4 en lugar del r_w dado por el **Teorema** 3.5. □

Demostración del Teorema 4.8. Para obtener este resultado se prosigue al igual que en la demostracón del **Teorema** 3.2 pero a la hora de estimar

$$w\left(\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega} : \left|T^+g\right|(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right),$$

realizamos los mismos pasos que en la ecuación (3.14) pero eligiendo $r = r_w = 1 + \frac{1}{2||w||_{A_\infty^+}}$ como en el **Teorema** 4.4 para obtener

$$\begin{aligned} w\left(\left\{x \in \mathbb{R}\setminus\widetilde{\Omega} : \left|T^+g\right|(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) &\leq \frac{2^{p+1}}{\lambda}(Cpp'((r'_w)^{\frac{1}{p'}})^p\int_{\mathbb{R}} f(x)M^-w(x)\,dx \\ &\leq \frac{C^p2^{p+1}}{\lambda}[pp']^p||w||_{A_\infty^+}^{p-1}||w||_{A_1^+}\int_{\mathbb{R}} f(x)w(x)\,dx, \end{aligned}$$

pues al ser $w \in A_1^+$ se tiene que $M^-w(x) \leq ||w||_{A_1^+}w(x)$ y como $r_w = 1 + \frac{1}{2||w||_{A_\infty^+}}$ se ve que $r'_w \leq C||w||_{A_\infty^+}$.

Para terminar la demostración se toma $p = 1 + \frac{1}{log(e+||w||_{A_\infty^+})}$ y se prosigue al igual que en la parte final de la demostración del **Teorema** 3.2. $\square$

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos a futuro

1. Conclusiones

Como se mencionó en los Preliminares, Capítulo 1, en los últimos años, para diferentes operadores del análisis armónico, se ha buscado demostrar acotaciones con pesos teniendo en cuenta cómo depende la norma del operador respecto a la constante del peso. Se trata de establecer la dependencia óptima del exponente que aparece en dicha constante.

Teniendo en cuenta cómo se fueron desarrollando en el tiempo y la dificultad, la clase de problemas a abordar se pueden clasificar de la siguiente forma: primero podemos considerar el estudio de acotaciones de tipo fuerte (p, q) para una función maximal, a esta clase de problemas se lo suele llamar de Buckley, pues él consiguió los primeros resultados para la función maximal de Hardy-Littlewood. En segundo lugar consideramos el estudio de la acotación fuerte (p, q) de un operador que esté controlado por una función maximal, esta clase de problema suele ser bastante más complicada que la anterior; para los operadores integrales de Calderón-Zygmund tenemos el **Teorema** 1.7. Por último consideramos el caso extremo de la acotación débil $(1, q)$, al no existir la acotación fuerte, para un operador que esté controlado por una función maximal.

En esta tesis nos propusimos desarrollar algunos de estos resultados, que se conocían para pesos de Muckenhoup, pero ahora teniendo en cuenta el contexto de operadores laterales y pesos de Sawyer.

Respecto al operador singular lateral estudiamos el caso extremo considerando un peso de la clase de Sawyer A_1^+. Los teoremas más importantes que logramos son:

Teorema 5.1 (**Teor.** 3.1). *Sea $1 < p, r < \infty$, w un peso y T^+ un operador integral singular lateral, entonces,*

$$||T^+ f||_{L^p(w)} \leq Cpp'(r')^{\frac{1}{p'}} ||f||_{L_p(M_r^- w)},$$

donde C solo depende de T^+.

Si $w \in A_1^+$, entonces de la desigualdad anterior se obtiene

$$||T^+ f||_{L^p(w)} \leq Cpp'||w||_{A_1^+} ||f||_{L^p(w)},$$

donde C solo depende de T^+.

Teorema 5.2 (**Teor.** 3.2). *Sea $w \in A_1^+$ y T^+ un operador integral singular lateral, entonces,*

$$||T^+ f||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C||w||_{A_1^+} \log(e + ||w||_{A_1^+})||f||_{L^1(w)},$$

donde C solo depende de T^+.

Respecto a la función maximal fraccionaria lateral logramos obtener resultados de acotaciones, tanto fuertes como débiles, para diferentes clases de pesos.

Teorema 5.3 (**Teor.** 2.15). *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ y (u, v) un par de pesos en $S^+_{p,q}$. Entonces para toda $f \in L^p(v)$*

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(u)} \leq C||(u, v)||_{S^+_{p,q}} ||f||_{L^p(v)},$$

donde la constante C no depende del par de pesos (u, v). Es más el exponente que aparece en la constante del par de pesos, es óptimo.

Teorema 5.4 (**Teor.** 2.16). *Sean $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < \infty$, q tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$ y (u, v) un par de pesos en $T^+_{q,\alpha}$. Entonces para toda $f \in L^p(v)$,*

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(u)} \leq C||(u, v)||_{T^+_{q,\alpha}} ||f||_{L^p(v)},$$

donde la constante C no depende del par de pesos (u, v). Es más el exponente que aparece en la constante del par de pesos, es óptimo.

Teorema 5.5 (**Teor.** 2.17). *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p \leq q < \infty$ *con* $1/p - 1/q = \alpha$ *y* (u, v) *un par de pesos en* $A^+_{p,q}$. *Entonces*

$$||M^+_\alpha f||_{L^{q,\infty}(u^q)} \leq C||(u,v)||^{1/q}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(v^p)},$$

para toda $f \in L^p(v)$. *Es más el exponente que aparece en la constante del par de pesos, es óptimo.*

Respecto a un mismo peso obtenemos otras demostraciones del resultado de Martín-Reyes y de la Torre

Teorema 5.6 ([**42**],**Teor.** 2.18). *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p \leq q < \infty$ *con* $1/p - 1/q = \alpha$ *y* w *un pesos en* $A^+_{p,q}$. *Entonces para toda* $f \in L^p(w)$,

$$||M^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||w||^{(1-\alpha)p'/q}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

donde la constante C *no depende del peso* w. *Es más el exponente que aparece en la constante del pesos, es óptimo.*

Por último en el estudio de las integrales fraccionarias de Weyl y de Riemann-Liouville logramos obtener la mejor constante de acotación débil (p, q) respecto a pesos de Sawyer, en el sentido que el exponente que aparece en la constante del peso no puede ser mejorado. Como corolario determinamos la acotación fuerte (p, q) respecto a estos pesos, también obteniendo la mejor constante respecto al exponente que aparece en la constante del peso.

Teorema 5.7 (**Teor.** 2.25). *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 \leq p < 1/\alpha$ *y* q *que satisface* $1/q = 1/p - \alpha$. *Entonces para* $w \in A^+_{p,q}$

$$||I^+_\alpha f||_{L^{q,\infty}(w^q)} \leq C||w||^{1-\alpha}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

para toda $f \in L^p(w^q)$. *Es más el exponente* $1 - \alpha$ *es el mejor posible.*

Teorema 5.8 (**Teor.** 2.26). *Sean* $0 \leq \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$ *y* q *que satisface* $1/q = 1/p - \alpha$. *Entonces para* $w \in A^+_{p,q}$

$$||I^+_\alpha f||_{L^q(w^q)} \leq C||w||^{(1-\alpha)\,\text{máx}\{1,p'/q\}}_{A^+_{p,q}}||f||_{L^p(w^p)},$$

para toda $f \in L^p(w^q)$. *Es más el exponente* $(1 - \alpha)\,\text{máx}\{1, p'/q\}$ *es el mejor posible.*

2. Trabajos a futuro

Andrei Lerner ha obtenido uno de los resultados más importantes del análisis armónico y la teoría de Calderón-Zygmund de los últimos años. Logra descomponer una función f en termino de oscilaciones locales; esto nos permite obtener desigualdades puntuales para diferentes operadores, las cuales son más precisas que las desigualdades de tipo Coifman-Fefferman, ver **Proposición** 1.9. Una versión de su resultados, obtenido por Tuomas Hytönen, es el siguiente, ver [**30**], [**25**]

Dado un cubo Q^0, denotamos por $D(Q^0)$ la colección de todos los cubos diádicos Q incluidos en Q^0. Si Q es uno de estos cubos denotamos por $\widetilde{Q}$ el cubo diádico padre. El resultado es,

Teorema 5.9 ([**30**],[**25**]). *Sea f una función medible en $\mathbb{R}^n$ y Q^0 un cubo fijo. Entonces existe una colección (posiblemente vacía) de cubos $Q_j^k \in D(Q^0)$ tal que:*

- *para casi todo $x \in Q^0$,*

$$|f(x) - m_f(Q^0)| \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j \omega_{1/2^{n+2}}(f, \widetilde{Q}_j^k) \chi_{Q_j^k}(x)$$

- *para cada k fijo, los cubos Q_j^k son dos a dos disjuntos;*
- *si $\Omega_k = \bigcup_j Q_j^k$, entonces $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$;*
- $|\Omega_{k+1} \cap Q_j^k| \leq 1/2 |Q_j^k|$.

donde $m_f(Q)$ es el valor medio de f sobre Q, si $f > 0$ entonces $m_f(Q) = (f\chi_Q)^*(|Q|/2)$. La oscilación $\omega_\lambda(f, Q)$ es la definida por

$$\omega_\lambda(f, Q) = ((f - m_f(Q))\chi_Q)^*(\lambda |Q|), \qquad 0 < \lambda < 1,$$

Esta fórmula entre otros resultados es fundamental en la demostración del **Teorema** 1.7 y del **Teorema** 1.41. Además de sus versiones para el operador conmutador.

En el trabajo de tesis los primeros resultados obtenidos fueron los del Capítulo 3, los cuales se trataron de generalizar para el operador conmutador lateral. Sean T^+ un operador integral singular lateral y b una función del espacio BMO, el operador conmutador lateral se define por

$$[T^+, b]f(x) = b(x)T^+(f)(x) - T^+(bf)(x).$$

Para poder obtener los teoremas buscados, para este operador, es necesario obtener varios resultados de carácter técnico. Para lo cual debíamos obtener una fórmula similar a la del **Teorema** 5.9 pero que nos sirva para trabajar con operadores laterales.

Tratamos de lograr el resultado de A. Lerner dado en [**30**], pero versión lateral. Lo que planteamos como conjetura es lo siguiente

Dado un Intervalo I, denotaremos por I^- e I^+ los intervalos de igual longitud, siendo I^- el contiguo a la izquierda e I^+ el de la derecha. Sea I^0 un intervalo. Para $x \in I^0$ definimos $B_{x,I^0} = \{I : x \in I^- \subset (I^0)^-\}$, Notar que si $I \in B_{x,I^0}$ entonces $I^+ \subset (I^0)^- \cup I^0 \cup (I^0)^+$.

Sea f una función medible en $\mathbb{R}$, $0 < \lambda \leq 1$ y I^0 un intervalo, la función maximal sharp local lateral relativa a I^0 de f es definida por

$$M^{+,\#}_{\lambda,I^0} f(x) = \sup \left\{ \omega_\lambda(f, I^+) : I \in B_{x,I^0} \right\}. \tag{5.1}$$

Conjetura 5.10. *Sea f una función medible en $\mathbb{R}$ y sea I^0 un intervalo fijo. Entonces existe una colección (posiblemente vacía) de intervalos $I^k_{j,r}$, con $(I^k_{j,r})^- \subset (I^0)^-$ tal que:*

- *para casi todo $x \in (I^0)^-$,*

$$|f(x) - m_f((I^0)^+)| \leq 2M^{+,\#}_{1/4,I^0}(f)(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j \sum_{r=1}^{\infty} \omega_{1/4}(f, (I^k_{j,r})^+)\chi_{(I^k_{j,r})^-}(x),$$

- *para cada k fijo, los intervalos $(I^k_{j,r})^-$ son dos a dos disjuntos;*
- *si $\Omega_k = \bigcup_{j,r} (I^k_{j,r})^-$, entonces $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$;*
- $|\Omega_{k+1} \cap (I^k_{j,r})^-| \leq 1/2|(I^k_{j,r})^-|$;
- *para cada k fijo y para cada j fijo, $(I^k_{j,r+1})^- \subset I^k_{j,r}$ y $\frac{3}{2}|(I^k_{j,r+1})^-| = |I^k_{j,r}|$;*
- *si $E^k_{j,r} = (I^k_{j,r})^- \setminus \Omega_{k+1}$ entonces $E^k_{j,r}$ son conjuntos dos a dos disjuntos (para cada k, j, r) y $\frac{1}{2}|(I^k_{j,r})^-| \leq |E^k_{j,r}|$.*

Cuando abordamos este tema nos encontramos con poca bibliografía sobre funciones maximales sharp laterales definidas a través de reordenadas decrecientes, por lo cual tuvimos que dar la definición del operador $M^{+;\#}_{\lambda,I^0}$, fórmula (5.1).

Al tratar de adaptar la demostración de Andrei Lerner al caso lateral encontramos muchas dificultades con las reordenadas decrecientes debido a no trabajar en los mismos intervalos. En nuestra fórmula aparecen las oscilaciones en los intervalos $(I^k_{j,r})^+$ multiplicadas por las funciones caracteristícas de los intervalos $(I^k_{j,r})^-$.

En el caso clásico, el **Teorema** 5.9, está muy relacionado con la conocida desigualdad de John-Nirenberg. La versión lateral que planteamos, **Conjetura** 5.10, también se relaciona con la desigualdad de John-Nirenberg lateral dada por Martín-Reyes y de la Torre en [**41**].

Teorema 5.11 (Desigualdad de John-Nirenberg lateral, [**41**]). *Existe una constante $K > 0$ y $\alpha > 0$ tal que*

$$\left|\left\{x \in I^- : (f(x) - f_{I^+})^+ > \lambda\right\}\right| \le K|I| \exp\left(\frac{-\alpha\lambda}{||f^{\#,+}||_\infty}\right),$$

para toda $f \in \mathrm{BMO}^+$, para todo interlvalo I y todo $\lambda > 0$. Donde $f^{\#,+}$ es la función maximal sharp lateral.

A continuación enunciaremos las aplicaciones que pudimos obtener suponiendo válida “la fórmula de Lerner Lateral”, **Conjetura** 5.10.

2.1. Normas de operadores conmutadores laterales respecto a A_1^+.

Uno de los resultados que se lograrían si fuese cierta la **Conjetura** 5.10 es la versión lateral para el operador conmutador de los **Teoremas** 3.1 y 3.2,

Teorema 5.12. *Sean $1 < p < \infty$, $b \in BMO$, w un peso y T^+ un operador integral singular lateral. Entonces existe C que solo depende de T^+ tal que,*

$$||[T^+, b]f||_{L^p(w)} \le C2^p(pp')^2(r')^{1+\frac{1}{p'}}||b||_{BMO}||f||_{L^p(M_r^+w)}.$$

Si $w \in A_1^+$ entonces

$$||[T^+, b]f||_{L^p(w)} \le C2^p(pp')^2||b||_{BMO}||w||^2_{A_1^+}||f||_{L^p(w)},$$

donde C solo depende de T^+.

Teorema 5.13. *Sean $b \in BMO$, $w \in A_1^+$ y T^+ un operador integral singular lateral. Entonces,*

$$||[T^+,b]f||_{L^{1,\infty}(w)} \leq C||b||^2_{BMO}\phi(||w||_{A_1^+}) \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)\, dx,$$

donde $\phi(t) = t\log(e+t)$ y C solo depende de T^+.

2.2. Normas con pesos para desigualdades de Coifman-Fefferman.

Logramos una aplicación que relaciona la norma en $L^1(w)$ de una función f con la norma en $L^1(w)$ de su función maximal δ sharp lateral, cuando $w \in A_p^+$.

Teorema 5.14. *Sea $w \in A_p^+$ y $0 < \delta < 1$. Entonces existe una constante $C > 0$, que depende solo de δ tal que,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|w(x)\, dx \leq C6^p||w||_{A_p^+} \int_{\mathbb{R}} f_\delta^{+,\#}(x)w(x)\, dx.$$

Una consecuencia directa del **Teorema** 5.14, Es la desigualdad de Coifman-Fefferman dada en el **Teorema** 3.13.

Además para la función maximal lateral M_δ^+ se obtiene

Teorema 5.15. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $w \in A_p^+$, sea $0 < \delta < 1$. Entonces existe una constante $C > 0$, que depende solo de δ tal que,*

$$\int_{\mathbb{R}} |M_\delta^+ f(x)|w(x)\, dx \leq C6^p||w||_{A_p^+} \int_{\mathbb{R}} f_\delta^{+,\#}(x)w(x)\, dx.$$

Para el operador conmutador obtenemos

Teorema 5.16. *Sea T^+ un operador integral singular lateral y b una función en* BMO. *Dado $w \in A_p^+$, existe una constante $C > 0$, que solo depende de T^+ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |[T^+,b]f(x)|w(x)\, dx \leq C6^{2p}||b||_{\mathrm{BMO}}||w||^2_{A_p^+} \int_{\mathbb{R}} (M^+)^2 f(x)w(x)\, dx.$$

2.3. Desigualdades en normas con dos pesos.

A continuación enunciaremos el equivalente, para el caso lateral, a la conjetura D. Cruz-Uribe y C. Pérez demostrada por Andrei Lerner en [**30**],

Teorema 5.17. *Sea T^+ un operador integral singular lateral. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos funciones de Young tal que*

$$\overline{\mathcal{A}} \in B_{p'} \qquad y \qquad \overline{\mathcal{B}} \in B_p.$$

si

$$||u^{1/p}||_{\mathcal{A},(a,b)}||v^{-1/p}||_{\mathcal{B},(b,c)} \leq \infty,$$

para todo $a < b < c$ con $b - a < c - b$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |T^+ f(x)|^p \, u(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, v(x)dx.$$

2.4. Desigualdades sharp con pesos en A_1^+.

Se demuestra la siguiente desigualdad de tipo Coifman

Teorema 5.18. *Sea T^+ un operador integral singular lateral. Para una función apropiada f y para toda función localmente integrable φ, tenemos*

$$||T^+ f||_{L^p((M^+\varphi)^{-\mu})} \leq C_{T^+} \operatorname{máx}\{p2^p, \mu 2^\mu\}||M^+ f||_{L^p((M^+\varphi)^{-\mu})},$$

donde $1 < p < \infty$, $\mu > 0$ y C_{T^+} depende solo de T^+.

Para obtener el **Teorema** 5.18 se demuestra el siguiente resultado a partir de la **Conjetura** 5.10.

Teorema 5.19. *Para cualquier función medible f con $f^*(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y para cualquier peso w tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}} |f|w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^{+,\#}_{1/4} f(x))^\delta M^-[(M^{+,\#}_{1/4} f)^{1-\delta} w](x)\, dx,$$

donde la constante C no depende de w, y $0 < \delta < 1$.

Para un operador integral singular lateral se tiene que

Teorema 5.20. *Sea T^+ un operador integral singular lateral. Para cada función apropiada f y para cada peso w, tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}} |T^+ f| w(x)\, dx \leq C_{T^+} \int_{\mathbb{R}} (M^+ f(x))^{\delta} M^-[(M^+ f)^{1-\delta} w](x)\, dx,$$

donde $0 < \delta < 1$ y C_{T^+} depende solo de T^+.

2.5. Desigualdades de tipo Jhon-Strömberg-Fefferman-Stein.

Como consecuencia de la **Conjetura** 5.10, se obtienen desigualdades similares a la Desigualdad de John-Nirenberg lateral, **Teorema** 5.11.

Teorema 5.21. *Sea J un intervalo y $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{R})$ con $sop(f) \subset J^- \cup J \cup J^+$. Entonces existen constantes α, $c > 0$ tales que*

$$|\{x \in J^- : |f(x) - m_f(J^+)| > t M^{+,\#}_{1/4,J}(f)(x)\}| \leq c\, e^{-\alpha t} |J|, \qquad t > 0.$$

Como consecuencia de este teorema obtenemos,

Teorema 5.22. *Sea T^+ un operador integral singular lateral. Sea J un intervalo y $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $sop(f) \subset J^- \cup J \cup J^+$. Entonces existen constantes α, $c > 0$ tales que*

$$|\{x \in J^- : |T^+ f(x)| > t M^+ f(x)\}| \leq c\, e^{-\alpha t} |J|, \qquad t > 0.$$

Teorema 5.23. *Sea T^+ un operador integral singular lateral y b una función en* BMO. *Sea J un intervalo y $f \in L_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $sop(f) \subset J^- \cup J \cup J^+$. Entonces existen constantes α, $c > 0$ tales que*

$$|\{x \in J^- : |[T^+, b] f(x)| > t (M^+)^2 f(x)\}| \leq c\, e^{-\sqrt{\alpha t ||b||_{BOM}}} |J|, \qquad t > 0.$$

Bibliografía

[1] H. Aimar, L. Forzani, and F. J. Martín-Reyes. On weighted inequalities for singular integrals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(7):2057–2064, 1997.

[2] K. F. Andersen and E. T. Sawyer. Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 308(2):547–558, 1988.

[3] C. Bennett and R. C. Sharpley. *Interpolation of operators*. New York, Academic press, 1988.

[4] A. Bernal. A note on the one-dimensional maximal function. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 111(3-4):325–328, 1989.

[5] S. M. Buckley. Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse jensen inequalities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 340(1):253–272, 1993.

[6] A. P. Calderón and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Mathematica*, 88(1):85–139, 1952.

[7] L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Mathematica*, 116(1):135–157, 1966.

[8] R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51.

[9] M. Lorente Dominguez. *Convergencia en L^1 de integrales singulares en teoría ergódica y pesos para las integrales fraccionarias laterales*. Universidad de Málaga, 1997.

[10] O. Dragicevic, L. Grafakos, M. C. Pereyra, and S. Petermichl. Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces. *Publ. Mat*, 49(1):73–91, 2005.

[11] N. Dunford and J. Schwartz. Convergence almost everywhere of operator averages. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 41(4):229, 1955.

[12] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. Providence, RI, 2000.

[13] C. Fefferman and E. M. Stein. Some maximal inequalities. *American Journal of Mathematics*, pages 107–115, 1971.

[14] N. Fujii. Weighted bounded mean oscillation and singular integrals. *Math. Japon*, 22(5):529–534, 1977.

[15] J. García-Cuerva and J. L. Rubio De Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*. Elsevier, 2011.

[16] L. Grafakos. *Modern Fourier Analysis.* Second edition, Springer-Verlag, 2008.

[17] E. Harboure, R. Macías, and C. Segovia. An extrapolation theorem for pairs of weights. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 40(3-4):37–48, 1997.

[18] E. Harboure, R. A Macías, and C. Segovia. Extrapolation results for classes of weights. *American Journal of Mathematics*, pages 383–397, 1988.

[19] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some properties of fractional integrals. i. *Mathematische Zeitschrift*, 27(1):565–606, 1928.

[20] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Mathematica*, 54(1):81–116, 1930.

[21] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities.* Cambridge university press, 1952.

[22] S. V. Hruščev. A description of weights satisfying the A_∞ condition of Muckenhoupt. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 90(2):253–257, 1984.

[23] R. Hunt, B. Muckenhoup, and R. Wheeden. Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 176.

[24] T. Hytönen. The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators. *arXiv preprint arXiv:1007.4330*, 2010.

[25] T. Hytönen. The A_2 theorem: remarks and complements. *Harmonic Analysis and Partial Differential Equations*, 612:91–106, 2013.

[26] T. Hytönen and C. Pérez. Sharp weighted bounds involving A_∞. *Journal of Analysis and Partial Differential Equations.*, pages 777–818, 2013.

[27] B. Jawerth. Weighted inequalities for maximal operators: linearization, localization and factorization. *American Journal of Mathematics*, pages 361–414, 1986.

[28] V. Kokilashvili and M. Gabidzashvili. Two-weight weak-type inequalities for fractional-type integrals. *preprint*, 45:1–11, 1989.

[29] M. Lacey, K. Moen, C. Pérez, and R. Torres. Sharp weighted bounds for fractional integral operators. *Journal of Functional Analysis*, 259(5):1073–1097, 2010.

[30] A. K. Lerner. A pointwise estimate for the local sharp maximal function with applications to singular integrals. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 42(5):843–856, 2010.

[31] A. K. Lerner. A simple proof of the A_2 conjeture. *International Mathematics Research Notices*, 2013(14):3159–3170, 2013.

[32] A. K. Lerner, S. Ombrosi, and C. Pérez. Sharp A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden. *IMRN: International Mathematics Research Notices*, 2008, 2008.

[33] A. K. Lerner, S. Ombrosi, and C. Pérez. A_1 bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden. *Math. Res. Lett*, 16(1):149–156, 2009.

[34] M. Lorente. A characterization of two weight norm inequalities for one-sided operators of fractional type. *Canadian Journal of Mathematics*, 49(5):1010–1033, 1997.

[35] M. Lorente, J. M. Martell, C. Pérez, and M. S. Riveros. Generalized Hörmander conditions and weighted endpoint estimates. *Studia Mathematica*, 195(2):157, 2009.

[36] M. Lorente Dominguez. Converguencia en L^1 de integrales singulares en teoría ergódica y pesos para las integrales fraccionarias laterales. *Universidad de Málaga, Facultad de Ciencias, Sección matemáticas*, Tesis, 1996.

[37] T. Luque, C. Pérez, and E. Rela. Optimal exponents in weighted estimates without examples. *arXiv preprint arXiv:1307.5642*, 2013.

[38] R. Macías and M. Riveros. One-sided extrapolation at infinity and singular integrals. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 130(05):1081–1102, 2000.

[39] F. J. Martín-Reyes. New proofs of weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 117(3):691–698, 1993.

[40] F. J. Martín-Reyes and A. de la Torre. Two weight norm inequalities for fractional one-sided maximal operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 117(2):483–489, 1993.

[41] F. J. Martín-Reyes and A. De La Torre. One-sided BMO spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 49(3):529–542, 1994.

[42] F. J. Martín-Reyes and A. de la Torre. Sharp weighted bounds for one-sided maximal operators. *Collectanea Mathematica*, 2015.

[43] F. J. Martín-Reyes, P. Ortega, and A. de la Torre. Weighted inequalities for one-sided maximal functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 517–534, 1990.

[44] F. J. Martín-Reyes, L. Pick, and A. De La Torre. A_∞^+ condition. *Canad. J. Math*, 45:1231–1244, 1993.

[45] K Moen. Sharp one-weight and two-weight bounds for maximal operators. *Studia Math*, 194(2):163–180, 2009.

[46] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 207–226, 1972.

[47] B. Muckenhoupt and R. Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 192:261–274, 1974.

[48] F. Nazarov, A. Reznikov, V. Vasyunin, and A. Volberg. Weak norm estimates of weighted singular operators and Bellman functions. *Preprint*, 2010.

[49] S. Ombrosi and L. de Rosa. Boundedness of the Weyl fractional integral on one-sided weighted Lebesgue and Lipschitz spaces. *Publ. Mat*, 47:71–102, 2003.

[50] C. Pérez. Two weighted inequalities for potential and fractional type maximal operators. *Indiana University Mathematics Journal*, 43(2):663–684, 1994.

[51] C. Pérez. Weighted norm inequalities for singular integral operators. *Journal of the London Mathematical Society*, 49(2):296–308, 1994.

[52] C. Pérez. L^p-weighted Sobolev inequalities. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 45, pages 809–824. Chartres: L'Institut, 1950-, 1995.

[53] S. Petermichl. The sharp bound for the Hilbert transform on weighted Lebesgue spaces in terms of the classical A_p characteristic. *American journal of mathematics*, 129(5):1355–1375, 2007.

[54] J. Recchi. Mixed A_1–A_∞ bounds for fractional integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 403(1):283–296, 2013.

[55] M. C. Reguera. On Muckenhoupt-Wheeden conjecture. *Advances in Mathematics*, 227(4):1436–1450, 2011.

[56] M. C. Reguera and C. Thiele. The Hilbert transform does not map $\mathrm{L}^1(\mathrm{M}w)$ to $\mathrm{L}^{1,\infty}(w)$. *Math. Res. Lett.*, (1):1–7, 2012.

[57] M. S. Riveros and A. De La Torre. On the best ranges for A_p^+ and RH_r^+. *Czechoslovak mathematical journal*, 51(2):285–301, 2001.

[58] E. Sawyer. A two weight weak type inequality for fractional integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 339–345, 1984.

[59] E. Sawyer. Weighted inequalities for the one-sided Hardy-Littlewood maximal functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 297(1):53–61, 1986.

[60] E. Sawyer. A characterization of two weight norm inequalities for fractional and Poisson integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 533–545, 1988.

[61] E. Sawyer and R. L. Wheeden. Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces. *American Journal of Mathematics*, pages 813–874, 1992.

[62] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. *Mat. Sbornik*, 4:471–497, 1938.

[63] E. M Stein and G. Weiss. Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 7(4):503–514, 1958.

[64] T. Walsh. On weighted norm inequalities for fractional and singular integrals. *Canad. J. Math.*, 23:907–928, 1971.

[65] J. M. Wilson. Weighted inequalities for the dyadic square function without dyadic A_∞. *Duke Mathematical Journal*, 55(1):19–49, 1987.

[66] J. M. Wilson. Weighted norm inequalities for the continuous square function. *Transactions of the American Mathematical Society*, 314(2):661–692, 1989.

[67] J. M. Wilson. *Weighted Littlewood-Paley theory and exponential-square integrability*, volume 1924. Springer, 2008.