



FACULTAD  
DE CIENCIAS  
ECONÓMICAS



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

# REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

## Comparación de métodos de agregación y ponderación evaluando la pérdida de información en la construcción de indicadores del desarrollo humano de países latinoamericanos

Mariana Funes, Hernán Pablo Guevel, Josefina Racagni

Artículo publicado en Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa  
Volumen 22, Número 35, 2014 – e-ISSN 1853 – 9777



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual  
4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

## COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE AGREGACIÓN Y PONDERACIÓN EVALUANDO LA PÉRDIDA DE INFORMACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE INDICADORES DEL DESARROLLO HUMANO DE PAÍSES LATINOAMERICANOS

MARIANA FUNES - JOSEFINA RACAGNI - HERNAN GUEVEL  
Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Córdoba. ARGENTINA  
mfunes@eco.unc.edu.ar - jracagni@gmail.com - heguevel@gmail.com

Fecha Recepción: Diciembre 2013 - Fecha Aceptación: Abril 2014

### RESUMEN

La necesidad de contar con medidas sintéticas del desempeño de diferentes unidades territoriales ha motivado un aumento en la construcción y publicación de Indicadores Compuestos con diferentes fines y empleando diversas metodologías.

El Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) calcula desde 1990 el denominado Índice de Desarrollo Humano (IDH), que si bien implicó un gran adelanto en la medición de este aspecto, también ha sido objeto de numerosas críticas.

En el presente trabajo empleamos distintos métodos de agregación y ponderación para construir índices alternativos al IDH y comparamos los mismos utilizando el concepto de pérdida de información propuesto por Zhou y Ang (2009) de manera de analizar si alguno de ellos resulta más apropiado en relación a este concepto.

Con el propósito de determinar intervalos de confianza para las medidas calculadas, se generaron muestras artificiales aplicando la técnica *bootstrap*.

**PALABRAS CLAVE:** Índice de Desarrollo Humano (IDH) – Métodos de Agregación – Métodos de Ponderación – Pérdida de Información – *Bootstrap*

### ABSTRACT

The need for establishing synthetic measures of the performance of different territorial units has prompted an increase in the construction and publication of composite indicators for different purposes and applying different methodologies.

The United Nations Program for Development (UNDP) publishes since 1990 the Human Development Index (HDI). Although it meant a breakthrough in measuring this subject has also been widely criticized.

In this paper we use different weighting and aggregation methods to construct alternative indices to the HDI and compare them using the concept of loss of information proposed by Zhou and Ang (2009) in order to analyze whether any of them is more appropriate in relation with this concept.

In order to establish confidence intervals for this measure, artificial samples using the Bootstrap technique were generated.

**KEY WORDS:** Human Development Index (HDI) – Aggregating Methods – Weighting Methods – Information Loss – Bootstrap.

## 1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de las últimas décadas, ha crecido en la comunidad científica la preocupación por avanzar en la mejora de los procedimientos para la construcción de Indicadores Compuestos (ICs), también llamados Complejos o Sintéticos, quizá en virtud de su amplia difusión como herramienta para la toma de decisiones, evaluación de políticas y comunicación de información, tanto en el sector público, como en el privado.

Estos instrumentos son el resultado de un proceso de agregación de sub-indicadores representativos de los atributos que caracterizan el aspecto que se desea estudiar y tienen la capacidad de resumir en una única medida el desempeño de un conjunto de unidades de características homogéneas, facilitando de este modo el estudio de fenómenos de naturaleza multidimensional.

La construcción de un Indicador Compuesto supone la adopción, por parte del analista, de una serie de decisiones de carácter subjetivo, que influirán en mayor o menor medida sobre los resultados y la utilidad del IC obtenido.

Estas decisiones están referidas al método que se utiliza para agregar en una medida singular los distintos subindicadores seleccionados como ejes de análisis<sup>1</sup>, al método que se emplea para establecer las ponderaciones de los

---

<sup>1</sup> La Teoría de la Decisión Multicriterio ha aportado una gran variedad de métodos que responden a las características de los datos, al número de alternativas bajo análisis, a la forma en la que se extrae u obtiene la información sobre las preferencias del evaluador, al número de evaluadores involucrados, etc.

subindicadores con la finalidad de reflejar la importancia relativa de los mismos<sup>2</sup> y al procedimiento de normalización que se aplique a los subindicadores con el propósito de transformarlos en valores relativos (sin unidad de medida)<sup>3</sup>.

En virtud de las diferentes alternativas de construcción de Indicadores Compuestos, surge la necesidad de establecer un procedimiento que permita compararlos de manera de determinar si alguno de ellos resulta más apropiado en virtud de la temática a tratar y los datos considerados. Al respecto, algunos autores han sugerido criterios a tener en cuenta al momento de seleccionar un método apropiado, tales como, el análisis de los fundamentos teóricos, la comprensibilidad, la facilidad de uso y la validez (Guitouni y Martel, 1998). Por su parte, Zhou *et al.* (2006) introdujeron un novedoso criterio asociado al concepto de “pérdida de información” y desarrollaron una medida objetiva que permite cuantificar la pérdida de información que se produce al pasar de los datos contenidos en los subindicadores individuales, al IC construido, a la que denominaron “Medida de Shannon – Spearman” (SSM).

Un ejemplo de indicador compuesto que ha atraído la atención de amplios sectores de la comunidad científica, lo constituye el Índice de Desarrollo Humano (IDH), elaborado y publicado anualmente por el PNUD desde el año 1990, desarrollado con la intención de reflejar la naturaleza multidimensional del desarrollo humano, a partir de reconocer que los indicadores económicos puros no resultan adecuados para reflejar apropiadamente este tipo de fenómeno<sup>4</sup>.

Si bien este Indicador ha representado un importante avance en la medición del Desarrollo Humano, ha sido blanco de numerosas críticas, referidas a la fuerte carga de subjetividad presente en la asignación de las ponderaciones de los subindicadores que se agregan, al tiempo que se ha sugerido la utilización de otros métodos de agregación de los subindicadores.

Tomando en cuenta las críticas mencionadas en el párrafo anterior, en el presente trabajo empleamos distintos métodos de agregación y ponderación para construir índices alternativos al IDH y comparamos los mismos utilizando la medida de Shannon-Spearman propuesta por los autores citados, con algunas modificaciones que discutiremos en la Sección 4.

Dado que se desconocen las propiedades estadísticas de esta medida de pérdida de información, estimaremos intervalos de confianza para la misma,

---

<sup>2</sup> Aunque se discute si el rol de los pesos en algunos métodos de agregación es el de reflejar importancias relativas (Munda y Nardo, 2005), en el presente trabajo no abordaremos esta cuestión.

<sup>3</sup> Ver Barba-Romero y Pomerol (1997) y Nardo *et al.* (2008).

<sup>4</sup> Los enfoques clásicos de medición del desarrollo analizaban este aspecto a través de la observación del Producto Bruto Nacional o algún indicador similar como única medida.

en base al estudio de muestras artificiales generadas mediante la técnica *bootstrap*<sup>5</sup>.

La organización del trabajo se detalla a continuación. En la Sección 2 se presenta la notación empleada. En la Sección 3 se describe la metodología utilizada por el IDH y las metodologías alternativas de agregación y ponderación propuestas. En la Sección 4 se desarrolla el concepto de medida de Shannon - Spearman y las modificaciones con las que hemos trabajado. En las Secciones 5 y 6 se presentan, respectivamente, los resultados y las conclusiones.

## 2. NOTACIÓN

Antes de avanzar en el desarrollo del tema consideramos oportuno establecer la terminología y notación utilizada.

Sea **S** el conjunto de países a estudiar. Simbolizaremos con  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) a los elementos de este conjunto. Consideraremos que el desempeño de cada país depende de un conjunto **J** de  $n$  atributos, cada uno de los cuales está representado por un subindicador, o índice parcial o variable, a los que representaremos por  $I_j$ , de tal manera que  $a_{ij}$  representará el desempeño del país  $i$  respecto del subindicador  $j$ , para  $i: 1, 2, \dots, m$  y  $j: 1, 2, \dots, n$ .

El conjunto de datos será representado por la matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ . Cada vector fila de la matriz representará un país  $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$  y cada vector columna, un subindicador  $I_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]$ .

Se determinarán  $k$  Indicadores Compuestos  $IC_i^k$ , combinando diferentes métodos de agregación y de cálculo de ponderaciones. Estos Indicadores medirán el desempeño de cada unidad  $a_i$ , como una función de los correspondientes subindicadores. Es decir,  $IC_i^k = f_j(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}); \forall k$ .

El proceso de agregación de los subindicadores requiere la normalización de las evaluaciones, denotando con  $x_{ij}$  los valores normalizados de las evaluaciones del país  $a_i$  respecto del subindicador  $I_j$  y la matriz  $\mathbf{X} = [x_{ij}]$  será la matriz de los valores normalizados.

Dado que construiremos distintos ICs en base a diferentes combinaciones de métodos de ponderación y agregación, tendremos una matriz  $\mathbf{IC} = [IC_i^k]$  que contendrá a los diferentes Índices calculados para cada  $a_i$ . Finalmente, simbolizaremos con  $w_j$  a los pesos empleados para agregar los indicadores.

<sup>5</sup> En Funes et al. (2013) se presenta una primera versión de este trabajo con la realización de 2000 muestras, investigación que es ampliada en esta oportunidad.

### 3. METODOLOGÍA DE CÁLCULO DE LOS INDICADORES COMPUESTOS

#### 3.1. Índice de Desarrollo Humano

Este Índice se calcula como el promedio ponderado de tres atributos socioeconómicos:

1. Longevidad: reflejada por la Esperanza de Vida al nacer.
2. Estándar de vida: basado en el Producto Bruto Interno per cápita medido en Dólares de Paridad de Poder Adquisitivo.
3. Logros educativos: calculado como un promedio ponderado de otros dos indicadores: i) tasa de alfabetización de adultos; ii) tasa bruta combinada de matriculación primaria, secundaria y terciaria.

En virtud de emplear el método de agregación de Suma Ponderada, el Indicador compuesto se obtiene por aplicación de la fórmula:

$$IC_i = \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \quad (1)$$

El PNUD ha optado por asignar el mismo peso a los indicadores relacionados con cada atributo, y para elaborar el indicador representativo del atributo de Logros Educativos ha optado por asignar una ponderación de 2/3 a la tasa de alfabetización de adultos y 1/3 a la tasa bruta de matriculación.

Previo a la agregación, los indicadores se normalizan aplicando la fórmula:

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ij}^-}{a_{ij}^+ - a_{ij}^-} \quad (2)$$

donde  $a_{ij}^-$  y  $a_{ij}^+$  representan el menor y el mayor valor, respectivamente, del intervalo de variación del Indicador  $I_j$  correspondiente. Para la determinación de estos valores se pueden seguir dos caminos:

- a) Seleccionar el menor y el mayor valor observado para cada indicador entre los países a los cuales se les desea calcular el Indicador Compuesto, es decir,  $a_{ij}^-$  y  $a_{ij}^+$  serán los valores mínimo y máximo del vector  $[a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]$  asociado a cada subindicador  $I_j$ , en cuyo caso los  $IC$  calculados deberían ser considerados "índices relativos" al conjunto de los países bajo análisis.
- b) Elegir mínimos y máximos "teóricos" (fijados teniendo en cuenta lo que se podría considerar mínimos y máximos razonables para cada uno de ellos).

El PNUD aplica este último procedimiento, empleando i) para la Esperanza de vida al nacer en años:  $a_{ij}^- = 25$  y  $a_{ij}^+ = 85$ ; ii) para el Producto Bruto Interno per cápita en Dólares de Paridad de Poder Adquisitivo (PBIpcUSDPPA):  $a_{ij}^- = 100$  y  $a_{ij}^+ = 40.000$ ; iii) para las tasas de alfabetización y

de matriculación (justamente por tratarse de tasas) los valores mínimo y máximo serían, respectivamente, 0 y 100 (si los expresamos en porcentaje) o 0 y 1 (si lo expresamos como tanto por uno).

Cabe mencionar que el indicador PBIpcU\$DPPA, previo a la normalización, se somete a una transformación no lineal tomando su logaritmo<sup>6</sup>, con lo que se intenta introducir la propiedad generalmente aceptada de que la utilidad del ingreso tiene rendimientos decrecientes. En años anteriores se utilizaron otras transformaciones con el mismo objetivo, como por ejemplo, la fórmula propuesta por Atkinson (1970).

### 3.2. Metodologías alternativas

#### 3.2.1. Topsis

El método TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)<sup>7</sup>, basándose en el axioma de elección de Zeleny, (Zeleny, 1982) que es posible enunciar como: “es racional elegir una alternativa lo más próxima a la ideal o lo más alejada de la anti-ideal”<sup>8</sup>, construye un índice de similaridad a la alternativa ideal, combinando la proximidad a la alternativa ideal y la lejanía a la alternativa anti-ideal (según la métrica utilizada) que permite establecer una ordenación del conjunto de alternativas sujeto a evaluación, aplicando los siguientes pasos:

1. Determinada una matriz con las medidas del desempeño de cada alternativa “i” con respecto a cada indicador “j” ( $A = [a_{i,j}]$ ), normalizar las evaluaciones  $a_{i,j}$  y obtener la matriz de los valores normalizados  $x_{i,j}$ :

$$X = [x_{i,j}]$$

2. Determinar la ponderación asociada a cada subindicador,  $w_j$  (que puede considerarse como una medida de su importancia relativa).
3. Multiplicar la j-ésima columna de X por la ponderación correspondiente ( $w_j$ ), obteniendo la matriz V:

$$V = [w_j \cdot x_{i,j}] = [v_{i,j}]$$

<sup>6</sup> Aunque para reflejar esta característica es posible utilizar cualquier logaritmo del PBI con base mayor a uno, en el presente trabajo hemos optado por utilizar el logaritmo natural del indicador.

<sup>7</sup> Ver Hwang, Ch-L.; Lai, Y-J; Liu, T-Y (1994)

<sup>8</sup> La traducción es nuestra.

Cada alternativa queda caracterizada por una fila de la matriz  $V$  representada por el vector  $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$

4. Definir los vectores asociados a las alternativas ideales ( $V^+$ ) y anti-ideal ( $V^-$ ):

$$v^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+) \quad \text{y} \quad v^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-)$$

donde  $v_j^-$  y  $v_j^+$  son los valores menos y más deseados, respectivamente, del vector columna de la matriz  $V$  asociado al subindicador  $I_j$  correspondiente.

5. Calcular las distancias de cada alternativa en evaluación a las alternativas Ideal y Anti-ideal:

$$D_i^+ = d(v_i, v^+) \quad \text{y} \quad D_i^- = d(v_i, v^-)$$

6. Calcular el “ratio de similitud a la alternativa ideal” como:

$$IC_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-} \tag{3}$$

Este indicador varía en el intervalo  $[0,1]$ , con  $IC_i = 0$  para  $a_i = a^-$  y  $IC_i = 1$  para  $a_i = a^+$ .

7. Ordenar las alternativas en orden decreciente del “ratio de similitud a la alternativa ideal  $IC_i$ ”.

Existen diferentes versiones del método que dependen:

- del procedimiento que se utilice para normalizar los datos, de manera que la suma de los diferentes indicadores tenga sentido,
- del método que se emplee para obtener los pesos relativos de los indicadores que se agregan,
- de la función de distancia seleccionada<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> Existen diferentes métricas para el cálculo de distancias, entre las que podemos citar Ciudad, Euclídea y Tchebicheff, entre otras.

### 3.2.2. Critic

El método CRITIC (Diakoulaki *et al.*, 1995), basándose en la importancia de la correlación entre indicadores, sugiere que el peso del indicador  $j$  se determine como:

$$w_j = s_j \sum_{k=1}^n (1 - r_{jk}) \quad (4)$$

Donde  $s_j$  es la desviación estándar de la columna  $j$  y  $r_{jk}$  es el coeficiente de correlación entre las columnas  $j$  y  $k$  de la matriz  $\mathbf{X}$ . Así, la importancia relativa del indicador es mayor cuando aporta información diferente a la de los otros indicadores y posee mayor varianza.

### 3.3. Índices Compuestos calculados

Con la intención de comparar los resultados obtenidos por el PNUD al calcular el Índice de Desarrollo Humano, con los determinados al utilizar los métodos de agregación y ponderación presentados en el apartado anterior, en la presente aplicación:

- Normalizamos los indicadores utilizando el mismo método de normalización empleado por el PNUD.
- Utilizamos dos conjuntos de ponderaciones para los subindicadores:
  - i) las ponderaciones del IDH
  - ii) las calculadas por aplicación del método CRITIC
- Emplearemos los métodos de agregación de Suma Ponderada y Topsis.
- En Topsis, calculamos distancias euclídea y ciudad a las alternativas ideal y anti-ideal, determinada considerando los valores teóricos establecidos por el PNUD para los subindicadores respectivos.

De esta manera establecimos seis alternativas de cálculo del Índice de Desarrollo Humano, que listamos en la TABLA 1.

**TABLA 1: Indicadores Compuestos según Método de agregación y ponderación**

Indicador Compuesto	Metodología de agregación	Ponderaciones
$IC^1$ (IDH)	Suma Ponderada	Propuestas por el PNUD
$IC^2$	Topsis con distancia Euclídea	Propuestas por el PNUD
$IC^3$	Topsis con distancia Ciudad	Propuestas por el PNUD
$IC^4$	Suma Ponderada	Resultantes de CRITIC
$IC^5$	Topsis con distancia Euclídea	Resultantes de CRITIC
$IC^6$	Topsis con distancia Ciudad	Resultantes de CRITIC

#### 4. MEDIDA DE LA PÉRDIDA DE INFORMACIÓN

El proceso de construcción de un Indicador Compuesto parte de una matriz de datos **A** (que contiene las evaluaciones de cada alternativa respecto de cada subindicador) para obtener, a través de un método de agregación, el IC correspondiente.

Con el propósito de establecer un mecanismo que permita comparar Indicadores Compuestos, Zhou *et al.* (2006), Zhou y Ang (2009) desarrollan lo que dan en llamar Medida de Shannon-Spearman (SSM), que busca determinar la discrepancia entre la información contenida en la matriz de datos **A** y en el vector del IC construido, refiriéndose a esta discrepancia como la “pérdida de información” al construir el Indicador Compuesto.

Esta medida se calcula considerando y cuantificando tres fuentes principales de información:

- El primer tipo de información proviene de la divergencia de las distintas alternativas con respecto a los *n* subindicadores y al IC derivado, que puede medirse mediante la entropía de Shannon (Zeleny, 1982). Si todas las alternativas tienen los mismos valores con respecto a algún subindicador, éste no proveerá información importante en la construcción del IC y, si todas las alternativas tienen los mismos valores con respecto al IC construido, este IC no permitirá discriminar las mismas.
- La segunda fuente de información resulta del conflicto entre el orden de las alternativas  $a_i$  con respecto a cada uno de los sub-indicadores y el orden de las mismas en el IC derivado. Para cuantificar este conflicto, los autores sugieren establecer un ordenamiento de referencia  $r_0 = (a_m, a_{m-1}, \dots, a_1)^T$  (Diakoulaki *et al.* 1995) y calcular el coeficiente de correlación de rango de Spearman entre este ordenamiento de referencia y los ordenamientos de cada subindicador ( $r_{sj}$ ) y entre  $r_0$  y el ordenamiento del IC construido ( $r_s$ ).
- La tercera fuente de información surge de los pesos asignados a los subindicadores previo a la agregación, que pueden ser tratados como “exógenos” y reflejar las preferencias de los sujetos decisores.

Combinando estos tres tipos de información, determinan SSM de la siguiente manera:

$$d_{SSM} = \left| \sum_{j=1}^n w_j (1 - e_j) r_{sj} - (1 - e) r_s \right| \quad (5)$$

donde  $e_j$  es la entropía del subindicador  $I_j$  y  $e$ , la entropía de IC.

Reemplazando  $e_j$  y  $e$  por sus iguales, podríamos reescribir (1) como:

$$d_{SSM} = \left| \sum_{j=1}^n w_j \left( 1 + \frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij} \right) r_{sj} - \left( 1 + \frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i \right) r_s \right| \quad (6)$$

donde:

$$p_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

$$y \quad p_i = \frac{IC_i}{\sum_{i=1}^m IC_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

En esencia,  $d_{SSM}$  es la diferencia de información en **A** y la información en **IC**. Intuitivamente, si un método MCDA siempre obtuviera un valor menor de  $d_{SSM}$ , es decir, presentara menor pérdida de información, podríamos referirnos al mismo como un mejor método de agregación, en lo que concierne a la pérdida de información. Respecto de esta medida:

- Si todas las alternativas  $a_i$  tienen los mismos valores respecto al subindicador  $I_j$ ,  $e_j = 1$  y el subindicador  $I_j$  no proveerá información para comparar las alternativas. Por tal motivo, un subindicador proveerá información significativa para el cálculo del IC cuanto menor sea  $e_j$  o mayor sea  $1 - e_j$ , toda vez que  $1 - e_j$  es el complemento de  $e_j$  dado que  $0 \leq e_j \leq 1$ . Es decir,  $1 - e_j$  es la medida de la divergencia, y mayor divergencia es una cualidad deseable del subindicador. Un análisis similar es válido para  $e$ , la entropía de IC.
- Los coeficientes de correlación de Spearman  $r_{sj}$  y  $r_s$  se emplean para medir el conflicto entre los ordenamientos del indicador de referencia y los de los subindicadores  $I_j$  y del IC, respectivamente. A mayor correlación menor conflicto, y menor conflicto es una cualidad deseable del IC correspondiente.

Un aspecto que consideramos importante destacar es que, en la construcción de  $d_{SSM}$ , los autores sugieren establecer un orden de referencia  $r_0$ , sin especificar las características que debiera reunir el mismo.

Nuestro propósito es comparar los Indicadores Compuestos obtenidos por aplicación de diferentes métodos de ponderación y agregación y consideramos no estar en condiciones de estipular cuál de ellos, u otro, podría emplearse como referente, en virtud de que tal ordenamiento debería elegirse en base a un criterio cuidadosamente seleccionado que permitiera identificarlo como "bueno" o "preferible" desde algún punto de vista.

Por tal motivo, proponemos realizar una modificación a la medida desarrollada por los autores, que consiste en considerar como ordenamiento de referencia, en cada caso, al Indicador Compuesto construido. Como  $r_0 = IC$ ,  $r_{sj}$  será el coeficiente de correlación de rangos de Spearman entre cada subindicador y el IC construido considerado, y  $r_s = 1$ .

Incorporando esta modificación en (5) y (6), planteamos la medida de pérdida de información en la construcción del Indicador Compuesto según (9) y (10) como:

$$d = \left| \sum_{j=1}^n w_j (1 - e_j) r_{sj} - (1 - e) \right| \quad (9)$$

$$d = \left| \sum_{j=1}^n w_j \left( 1 + \frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m p_{ij} \ln p_{ij} \right) r_{sj} - \left( 1 + \frac{1}{\ln m} \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i \right) \right| \quad (10)$$

Consideramos que  $d$  también representa una medida de la pérdida de información entre la matriz de datos  $\mathbf{A}$  y el vector del indicador compuesto construido (sin compararlo con un referente) y podríamos decir que un mejor IC, en términos de pérdida de información, sería aquel para el cual  $d$  sea menor.

## 5. APLICACIÓN A LA MEDICIÓN DEL DESARROLLO HUMANO DE PAÍSES LATINOAMERICANOS

Para la presente aplicación, hemos seleccionado como sistema bajo análisis a los países de América Latina que constituyen Estados soberanos, por lo que se excluyen Dominica, la Guayana francesa y demás dependencias de este país, y de Estados Unidos. En el ANEXO DE DATOS se presentan los datos de los subindicadores empleados correspondientes al Informe de Desarrollo Humano 2007-2008<sup>10</sup> publicado por el PNUD y los Indicadores Compuestos construidos para los países del sistema bajo análisis.

En las TABLAS 2 y 3 se presentan las medidas descriptivas, el valor de la entropía y la divergencia para los subindicadores empleados en la construcción de los ICs, y para los correspondientes Indicadores compuestos, respectivamente.

<sup>10</sup> Los datos corresponden al año 2005. Para la TAA, se refieren al período 1995-2005.

**TABLA 2: Medidas descriptivas, entropía y divergencia de los subindicadores**

	PBI	TAA	TBM	EVN
<b>Media</b>	6889,55	87,48	76,89	72,39
<b>Desv. Estándar</b>	3311,12	10,83	9,21	4,53
<b>Coef. de Variación</b>	0,4806	0,1238	0,1198	0,0626
<b>Rango</b>	12617	45	36,7	19
<b>Entropía</b>	0,9631	0,9974	0,9977	0,9994
<b>Diverg.</b>	0,0369	0,0026	0,0023	0,0006

**TABLA 3: Medidas descriptivas, entropía y divergencia de los Indicadores Compuestos**

	IC <sup>1</sup>	IC <sup>2</sup>	IC <sup>3</sup>	IC <sup>4</sup>	IC <sup>5</sup>	IC <sup>6</sup>
<b>Media</b>	0,7717	0,7541	0,7717	0,7755	0,761	0,7755
<b>Desv. estándar</b>	0,0808	0,0778	0,0808	0,0815	0,0781	0,0815
<b>Coef. de Variación</b>	0,1047	0,1032	0,1047	0,1051	0,1027	0,1051
<b>Rango</b>	0,3396	0,3263	0,3396	0,3557	0,3488	0,3557
<b>Entropía</b>	0,9982	0,9982	0,9982	0,9981	0,9982	0,9981
<b>Diverg.</b>	0,0018	0,0018	0,0018	0,0019	0,0018	0,0019

Analizando los valores de la divergencia para los subindicadores se puede advertir que el Producto Bruto Interno (PBI) es el subindicador que mayor información aporta a la construcción de los ICs, ya que el valor 0,0369 es significativamente mayor que el del resto de los subindicadores. En contraposición, la Esperanza de Vida al Nacer (EVN) registra el menor valor. Puede observarse que la divergencia está directamente relacionada con el Coeficiente de Variación (CV).

Por otra parte, los bajos valores de divergencia para los ICs sugieren que estos ICs, si bien permiten ordenar los países del conjunto considerado, no evidencian una diferencia muy marcada en el poder de discriminación entre ellos. Esta circunstancia se puede observar, también, a través del rango de variación de sus valores. Si bien los Indicadores Compuestos pueden variar entre 0 y 1, los rangos de variación de los mismos oscilan entre 0,32 y 0,36.

Los resultados de calcular la medida de pérdida de información propuesta para los diferentes ICs calculados se presentan en la TABLA 4.

TABLA 4: Medida de la pérdida de información entre A e IC

IC <sup>k</sup>	IC <sup>1</sup>	IC <sup>2</sup>	IC <sup>3</sup>	IC <sup>4</sup>	IC <sup>5</sup>	IC <sup>6</sup>
<i>d</i> (IC <sup>k</sup> )	0,010263	0,010608	0,010263	0,008008	0,008097	0,008008
<i>Ranking</i>	4	6	4	1	3	1

Según estos resultados, la menor pérdida de información se observa para los ICs construidos utilizando los pesos determinados con CRITIC, y de éstos, los que agregan los subindicadores empleando los métodos de Suma Ponderada y Topsis con distancia ciudad. Encontramos una relación similar para la pérdida de información entre los métodos de agregación que utilizan los ponderadores determinados por el PNUD. Analizando la diferencia relativa en los valores de *d*, la misma no es significativa entre el mejor valor (correspondiente a *d*(IC<sup>4</sup>) y *d*(IC<sup>6</sup>)), y el siguiente (*d*(IC<sup>5</sup>)), mientras que supera en un 28,16% a *d*(IC<sup>1</sup>) y *d*(IC<sup>3</sup>), y en un 32,47% a *d*(IC<sup>2</sup>) (el peor valor observado).

Lo expresado en el párrafo anterior apoyaría las críticas que se hacen al empleo de los pesos utilizados en la construcción del IDH, enfatizando la naturaleza subjetiva y un tanto arbitraria de la selección de los mismos, desde que su utilización se ve reflejada en una mayor pérdida de información.

### 5.1. Intervalos de confianza para *d*(IC<sup>k</sup>)

Como un valor individual no provee información acerca de la precisión y confiabilidad de *d*(IC<sup>k</sup>) y se desconocen las propiedades estadísticas de esta medida, Zou y Ang (ibídem), sugieren determinar intervalos de confianza para la misma. Con este propósito, empleamos la técnica no paramétrica *bootstrap* (Peña, 2001).

La técnica *bootstrap* o estimación de Monte Carlo, ampliamente utilizada, fue propuesta por Bradley Efron en 1979 y consiste en, dada una muestra con *n* observaciones, tratar a dicha muestra como si fuera toda la población, extrayendo de la misma *B* muestras con reemplazo, calculando para cada una de ellas el valor de la medida que se desea estudiar, en nuestro caso, *d*(IC<sup>k</sup>).

Este enfoque proporciona una buena aproximación de la distribución de los estimadores, permitiendo describir algunas de sus propiedades muestrales, el cálculo de intervalos de confianza y la realización de tests de hipótesis.

El número de muestras a determinar dependerá del problema. Para el cálculo de intervalos de confianza Efron y Tibshirani (1986) recomiendan obtener como mínimo, 1000 muestras.

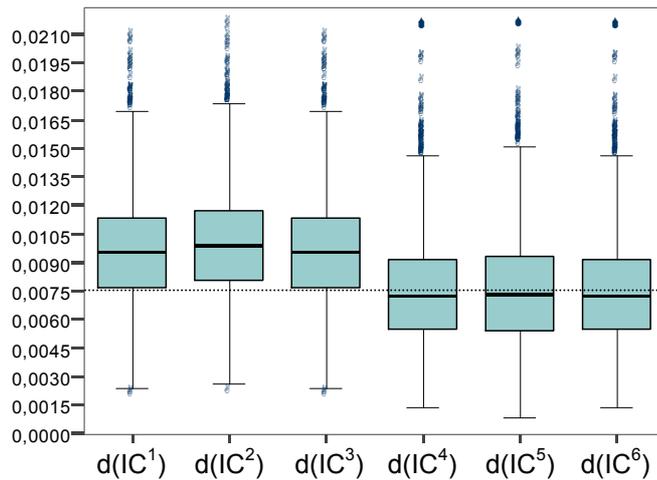
En nuestro caso, decidimos generar 2000 muestras de 20 observaciones cada una a los fines de estimar tales intervalos para la medida de pérdida de información de los ICs construidos, dado el desconocimiento de las propiedades estadísticas de  $d$ , que mencionamos oportunamente.

La TABLA 5 resume las medidas descriptivas para las  $d(IC^k)$  calculadas en base a las 2000 muestras, y en la FIGURA 1, presentamos sus diagramas de caja y brazos (la línea punteada en esta figura representa el valor de la menor  $d(IC^k)$  media).

TABLA 5: Medidas Descriptivas para  $d(IC^k)$  para 2000 muestras

	$d(IC^1)$	$d(IC^2)$	$d(IC^3)$	$d(IC^4)$	$d(IC^5)$	$d(IC^6)$
Media	0,00966	0,01000	0,00966	0,00751	0,00761	0,00751
Desviación Estándar	0,00287	0,00289	0,00287	0,00283	0,00301	0,00283
Coefficiente variación	0,29706	0,28866	0,29706	0,37684	0,39490	0,37684
Rango	0,01886	0,01935	0,01886	0,02013	0,02078	0,02013

FIGURA 1: Diagramas de Caja y Brazos para  $d(IC^k)$



En virtud de que el cálculo de intervalos de confianza estándar asume una distribución normal de los datos, con el propósito de aproximarnos a esta distribución ampliamos el número de muestras, repitiendo 1000 veces la generación de 2000 muestras, desarrollando una macro en una planilla de cálculo Excel. Este número resultó de aplicar la fórmula (11):

$$n = \left( \frac{z_{(1-\alpha)} \sigma}{e} \right)^2 \tag{11}$$

donde n es el número de réplicas a realizar, z el valor de la Tabla Normal para un nivel de confianza dado,  $\sigma$ , la desviación estándar poblacional y e, el nivel de error de estimación deseado.

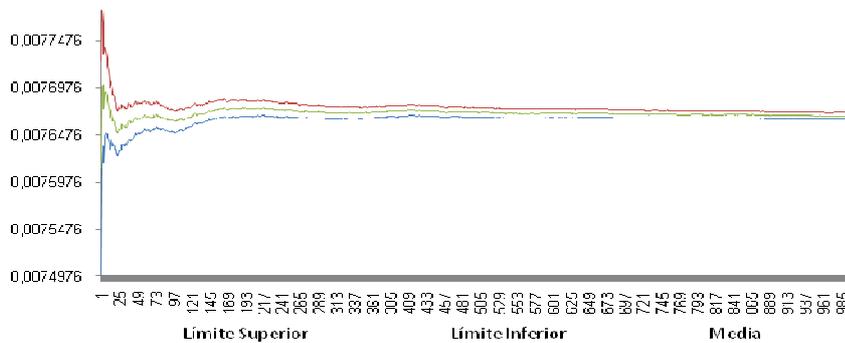
En la TABLA 6, se presenta el número de réplicas a realizar asociado a un nivel de confianza del 95%, para un error del 1%, 2% y 5% del valor del estimador y  $\sigma$  estimada en función de las primeras 2000 muestras. En función de estos resultados, optamos por realizar 1000 réplicas que corresponden a un error aproximado del 2% para la medida de pérdida de información con mayor número de réplicas determinadas.

**TABLA 6: Número de réplicas a realizar para cada d(ICk) según el tamaño de error de estimación deseado**

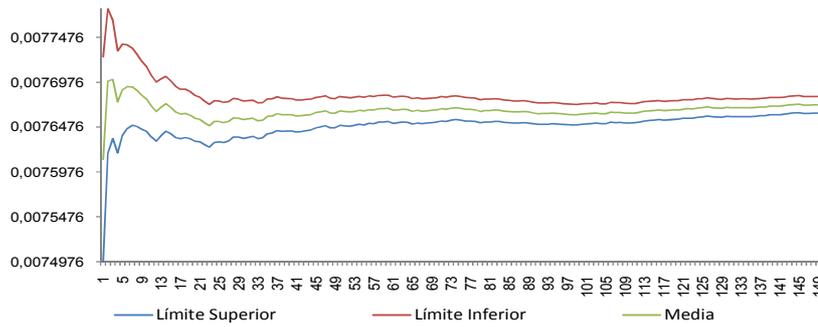
	d(IC <sup>1</sup> )	d(IC <sup>2</sup> )	d(IC <sup>3</sup> )	d(IC <sup>4</sup> )	d(IC <sup>5</sup> )	d(IC <sup>6</sup> )
<b>1%</b>	2388	2255	2388	3843	4220	3843
<b>2%</b>	597	564	597	961	1055	961
<b>5%</b>	96	90	96	154	169	154

En la FIGURA 2 (a) graficamos el comportamiento de los intervalos de confianza para las 1000 réplicas de d(IC<sup>5</sup>) (medida de pérdida de información con mayor variabilidad) y en la FIGURA 2 (b) presentamos el comportamiento de ésta para las primeras 150 réplicas, a los efectos de facilitar su visualización. Por otra parte, en la FIGURA 2 (c), graficamos el comportamiento del error de estimación de esta medida durante el proceso de simulación. Cabe mencionar que el valor de sigma empleado para el cálculo del error fue el resultante de la desviación estándar promedio de las 1000 réplicas.

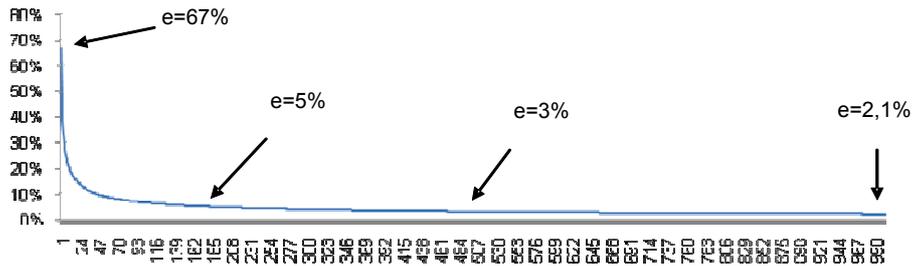
**FIGURA 2: Comportamiento del intervalo de confianza y el error de acción para d(IC5)**



**a) Comportamiento del intervalo de confianza para las 1000 réplicas**



b) Comportamiento del intervalo de confianza para las 150 réplicas



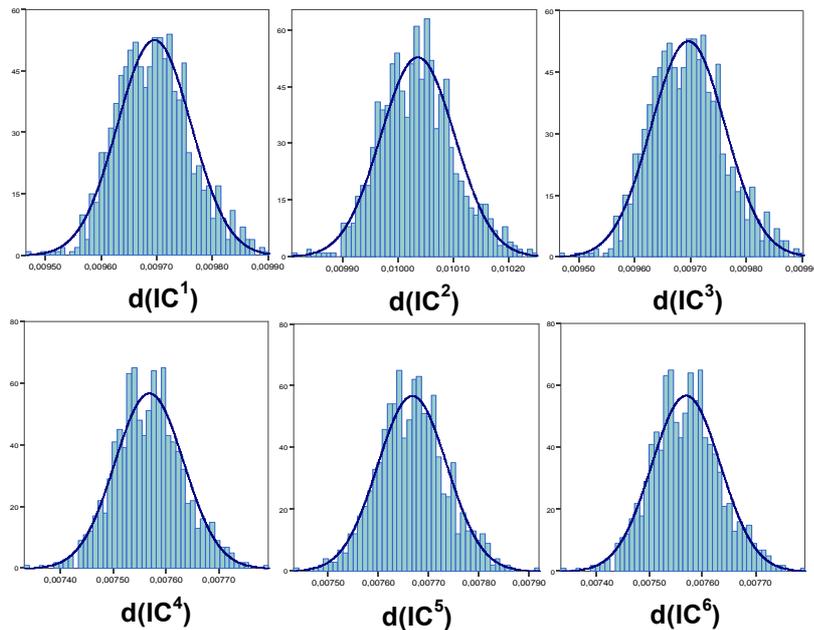
c) Error de estimación durante la simulación

La TABLA 7 resume las medidas descriptivas y los intervalos de confianza construidos para las seis medidas de pérdida de información calculadas en función de las 1000 réplicas realizadas. En la FIGURA 3 se presentan los histogramas de las distribuciones de estas medidas.

TABLA 7: Medidas Descriptivas para  $d(IC_k)$  para 1000 réplicas de 2000 muestras

	$d(IC^1)$	$d(IC^2)$	$d(IC^3)$	$d(IC^4)$	$d(IC^5)$	$d(IC^6)$
<b>Media</b>	0,009695	0,010036	0,009695	0,007568	0,007667	0,007568
<b>Mediana</b>	0,009695	0,010034	0,009695	0,007568	0,007667	0,007568
<b>Desviación Estándar</b>	0,000066	0,000067	0,000066	0,000065	0,000069	0,000065
<b>Coefficiente de variación</b>	0,006835	0,006672	0,006835	0,008588	0,008980	0,008588
<b>Rango</b>	0,000436	0,000443	0,000436	0,000461	0,000489	0,000461
<b>Lím. Inf. Inter. de conf. al 95%</b>	0,009691	0,010031	0,009690	0,007563	0,007662	0,007563
<b>Lím. Sup. Inter. de conf. al 95%</b>	0,009699	0,010039	0,009699	0,007572	0,007671	0,007572

FIGURA 3: Histogramas de las distribuciones de las  $d(IC^k)$  para las 1000 réplicas de 2000 muestras



Para las 1000 réplicas de 2000 muestras, también se mantienen las relaciones de ordenación y las diferencias relativas en los valores de las  $d(IC^k)$  presentes en los datos originales. Puede observarse, como era esperable, una disminución en la variabilidad de las medidas de pérdida de información, reflejadas en las Desviaciones Estándar y los Coeficientes de Variación de las mismas. Cabe mencionar que las  $d(IC^k)$  para  $k = 4, 5, 6$  registran mayor variabilidad, atribuible al hecho de que los pesos obtenidos con CRITIC varían para cada muestra, mientras que los pesos empleados en los cálculos de los  $IC^k$  para  $k = 1, 2, 3$  son constantes.

Estos resultados confirman que los Indicadores Compuestos calculados con los pesos obtenidos por aplicación de CRITIC registran menor pérdida de información, y de éstos, los que se construyen utilizando los métodos de suma ponderada y Topsis con distancia ciudad. En este sentido, sería recomendable utilizar como medida del desarrollo humano de los países latinoamericanos los Indicadores Compuestos 4 ó 6.

Cabe mencionar, respecto de los intervalos de confianza, que el valor del límite superior de  $d(IC^4)$  y  $d(IC^6)$ , 0,007572, es inferior al valor del límite inferior de  $d(IC^5)$ , 0,007662. Esta misma circunstancia se observa al comparar los límites de los intervalos de  $d(IC^5)$  con los de  $d(IC^1)$  y  $d(IC^3)$ , y al comparar éstos últimos con los de  $d(IC^2)$ .

Es decir que con una confianza del 95% los valores de la medida de pérdida de información para cada uno de los IC<sup>k</sup> construidos estarán comprendidos dentro de estos intervalos y que existe una baja probabilidad de que las medidas de pérdida de información de los Indicadores Compuestos 1, 2, 3 y 5 sean menores a las de los ICs 4 ó 6.

En la TABLA 7 se presenta para cada país, el valor del IC construido empleando los pesos según CRITIC y el método de agregación de suma ponderada (o Topsis con distancia ciudad), la posición en el *ranking* determinada por este indicador y, con fines comparativos, los valores que resultan del IDH construido por el PNUD y su correspondiente *ranking*.

Analizando la información de la TABLA 8, se puede observar que, si bien la mayoría de los países cambian sus posiciones en el *ranking*, estos cambios solo significan aumentar o disminuir un lugar, salvo en los casos de Brasil, que mejora respecto del IDH dos posiciones y Bolivia y Perú que lo hacen en tres. Volvemos a resaltar la importancia de determinar con cuidado los pesos a asignar a los distintos subindicadores, ya que los mismos tienen gran influencia en los Indicadores compuestos construidos.

**TABLA 8: Comparación de los Indicadores Compuestos IC<sup>4</sup> e IC<sup>6</sup> con IC<sup>1</sup> y respectivos rankings**

	IC <sup>4,6</sup>	Ranking (IC <sup>4,6</sup> )	IC <sup>1</sup>	Ranking (IC <sup>1</sup> )
Argentina	0,8826	1	0,8684	1
Bolivia	0,7403	15	0,6945	18
Brasil	0,8217	6	0,8001	8
Chile	0,8629	3	0,8674	2
Colombia	0,7906	11	0,7912	10
Costa Rica	0,8249	5	0,8464	4
Cuba	0,8531	4	0,8397	5
Ecuador	0,7707	13	0,7714	13
El Salvador	0,7299	16	0,735	15
Guatemala	0,6822	19	0,6893	19
Haití	0,5268	20	0,5287	20
Honduras	0,7053	18	0,7002	17
Méjico	0,8177	7	0,8289	6
Nicaragua	0,7073	17	0,7099	16
Panamá	0,8126	8	0,8119	7
Paraguay	0,7507	14	0,7553	14
Perú	0,7968	9	0,7727	12
República Dominicana	0,7767	12	0,7793	11
Uruguay	0,8667	2	0,8527	3
Venezuela	0,7909	10	0,7917	9

## 6. CONCLUSIONES

En los últimos años, los Métodos de Apoyo a la Decisión Multicriterio se han utilizado ampliamente en la construcción de Indicadores Compuestos. Un problema que enfrentamos quienes hacemos uso de los mismos es el de determinar qué método de agregación, ponderación o normalización (de corresponder) resulta más apropiado frente al problema que se evalúa.

En este sentido, la medida de Shannon – Spearman propuesta por Zhou *et al.* (2006) resulta una alternativa de comparación objetiva de los diferentes ICs construidos en términos de la pérdida de información que se produce de la matriz de datos de los subindicadores considerados, a la contenida en el Indicador Compuesto correspondiente. Consideramos que las modificaciones que se proponen en el cálculo de la misma aportan una opción igualmente útil.

La aplicación de la misma a la comparación de índices alternativos al IDH construidos a partir de diferentes métodos de agregación y ponderación permitió identificar la existencia de menor pérdida de información en la utilización de ponderaciones obtenidas objetivamente a partir del uso del método CRITIC.

El empleo de la técnica *Bootstrap* con la que se obtuvieron 1000 réplicas de 2000 muestras a partir de las cuales se calcularon los Indicadores Compuestos y se determinaron las medidas de pérdida de información correspondientes, permitió confirmar los resultados obtenidos al calcular los Indicadores Compuestos empleando los datos originales.

Los resultados obtenidos nos alientan a continuar nuestra investigación aplicando la medida de pérdida de información propuesta frente a variaciones en los métodos de normalización, utilizando otros métodos de agregación y ponderación, con el propósito de analizar el impacto que estos tienen en la construcción de los Indicadores Compuestos.

7. ANEXO DATOS

TABLA 9: Matriz de datos e Indicadores Compuestos

Paises	A					IC					
	PBI	TAA	TBM	EVN		IC <sup>1</sup>	IC <sup>2</sup>	IC <sup>3</sup>	IC <sup>4</sup>	IC <sup>5</sup>	IC <sup>6</sup>
Argentina	14.280	97,2	89,7	74,8		0,8684	0,8486	0,8684	0,8826	0,8723	0,8826
Bolivia	2.819	86,7	86	64,7		0,6945	0,6559	0,6945	0,7403	0,7226	0,7403
Brasil	8.402	88,6	87,5	71,7		0,8001	0,7812	0,8001	0,8217	0,8149	0,8217
Chile	12.027	95,7	82,9	78,3		0,8674	0,853	0,8674	0,8629	0,8477	0,8629
Colombia	7.304	92,8	75,1	72,3		0,7912	0,7741	0,7912	0,7906	0,7752	0,7906
Costa Rica	10.180	94,9	73	78,5		0,8464	0,8341	0,8464	0,8249	0,7994	0,8249
Cuba	6.000	99,8	87,6	77,7		0,8397	0,7955	0,8397	0,8531	0,8181	0,8531
Ecuador	4.341	91	75	74,7		0,7714	0,7449	0,7714	0,7707	0,7483	0,7707
El Salvador	5.255	80,6	70,4	71,3		0,735	0,7274	0,735	0,7299	0,721	0,7299
Guatemala	4.568	69,1	67,3	69,7		0,6893	0,6886	0,6893	0,6822	0,6772	0,6822
Haití	1.663	54,8	53	59,5		0,5287	0,5267	0,5287	0,5268	0,5235	0,5268
Honduras	3.430	80	71,2	69,4		0,7002	0,6845	0,7002	0,7053	0,6951	0,7053
Méjico	10.751	91,6	75,6	75,6		0,8289	0,822	0,8289	0,8177	0,8037	0,8177
Nicaragua	3.674	76,7	70,6	71,9		0,7099	0,6985	0,7099	0,7073	0,6968	0,7073
Panamá	7.605	91,9	79,5	75,1		0,8119	0,7944	0,8119	0,8126	0,7982	0,8126
Paraguay	4.642	3,5	69,1	71,3		0,7553	0,7321	0,7553	0,7507	0,7278	0,7507
Perú	6.039	87,9	85,8	70,7		0,7727	0,7492	0,7727	0,7968	0,7865	0,7968
República Dominicana	8.217	87	74,1	71,5		0,7793	0,7713	0,7793	0,7767	0,7684	0,7767
Uruguay	9.962	96,8	88,9	75,9		0,8527	0,8276	0,8527	0,8667	0,8502	0,8667
Venezuela	6.632	93	75,5	73,2		0,7917	0,7724	0,7917	0,7909	0,7736	0,7909

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATKINSON, B. (1970): "ON THE MEASUREMENT OF INEQUALITY". Journal of Economic Theory, Vol. 2, pp 244-263.
- BARBA-ROMERO, S.; POMEROL, J-C., (1997): "DECISIONES MULTICRITERIO: FUNDAMENTOS TEÓRICOS Y UTILIZACIÓN PRÁCTICA". Universidad de Alcalá, España.
- DIAKOULAKI, D.; MAVROTAS, G.; PAPAYANNAKIS, L. (1995): "DETERMING OBJECTIVE WEIGHTS IN MULTIPLE CRITERIA PROBLEMS: THE CRITIC METHOD". Computers Operations Research, 22, N° 7, 763-770.
- EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. (1986): "BOOTSTRAP METHODS FOR STANDARD ERRORS, CONFIDENCE INTERVALS, AND OTHER MEASURES OF STATISTICAL ACCURACY". Statistical Science, Vol. 1, N° 1, 54-75.
- FUNES, M.; RACAGNI, J.; GUEVEL, H. (2013): "COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE AGREGACIÓN Y PONDERACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE UN INDICADOR DEL DESARROLLO HUMANO DE PAÍSES LATINOAMERICANOS". XXVI Encuentro Nacional de Docentes en Investigación Operativa (ENDIO) - XXIV Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa (EPIO), Córdoba, República Argentina.
- GUITOUNI, A.; MARTEL, J. (1998): "TENTATIVE GUIDELINES TO HELP CHOOSING AN APPROPRIATE MCDA METHOD". European Journal of Operational Research 109, pp 501-521.
- HWANG, C.; LAI, Y.J.; LIU, T.Y. (1994): "TOPSIS FOR MODM". European Journal of Operation Research, Vol. 76. pp 486-500.
- MUNDA, G.; NARDO, M. (2005): "CONSTRUCTING CONSISTENT COMPOSITE INDICATORS: THE ISSUE OF WEIGHTS". European Commission, Directorate-General Joint Research Centre, Institute for the Protection and Security of the Citizen.
- NARDO, M.; SAISANA, M.; SALTELLI, A.; TARANTOLA, S.; HOFFMAN, A.; GIOVANNINI, E. (2008): "HANDBOOK ON CONSTRUCTIG COMPOSITE INDICATORS: METODOLOGY AND USER GUIDE". OECD Statistics Working Paper – STD/DOC.
- PEÑA, D. (2001): "FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA". Alianza Editorial, España.

- PNUD (PROGRAMA DE LA NACIONES UNIDAS PARA EL DESARROLLO): "INFORME SOBRE DESARROLLO HUMANO 2007-2008". Disponible en:  
[http://hdr.undp.org/en/media/HDR\\_20072008\\_SP\\_Complete.pdf](http://hdr.undp.org/en/media/HDR_20072008_SP_Complete.pdf).
- ZHOU, P.; ANG, B. W.; POH, K. L. (2006): "COMPARING AGGREGATING METHODS FOR CONSTRUCTING THE COMPOSITE ENVIRONMENTAL INDEX: AN OBJECTIVE MEASURE". *Ecological Economics* 59, pp 305-311.
- ZHOU, P.; ANG, B. W. (2009): "COMPARING MCDA AGGREGATION METHODS IN CONSTRUCTING COMPOSITE INDICATORS USING THE SHANNON-SPEARMAN MEASURE". *Soc Indic Res* (2009) 94, pp 83-96.
- ZELENY, M. (1982): "MULTIPLE CRITERIA DECISION MAKING". McGraw-Hill Book Company, New York, USA.