Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática Astronomía y Física

Sistemas Axisimétricos de Múltiples Agujeros Negros

José Iván Nieva

Presentado ante la Facultad de Matemática Astronomía y Física como uno de los requisitos para obtener el grado de:

Licenciado en Física

Dirigida por:
M. E. Gabach Clément

Índice

Resumen

El problema de interacción entre agujeros negros se remonta a los orígenes de la relatividad general. Una solución que describe este tipo de sistemas es conocida y representa múltiples agujeros negros en equilibrio.

En este trabajo nos proponemos como objetivo concreto estudiar las ecuaciones de Einstein-Maxwell bajo la condición de estacionariedad. De esta forma queremos analizar si es posible mejorar las cotas halladas en algunos trabajos previos bajo esta hipótesis. Para ello y a fin de facilitar el estudio de estas ecuaciones, analizaremos las condiciones de borde de las funciones métricas involucradas. Esto nos llevará al límite de agujeros negros extremos, es decir, aquellos que están caracterizados por poseer la máxima cantidad de cargas y/o momento angular por unidad de masa en la familia.

Palabras Clave: Relatividad General, Fuerza entre múltiples Agujeros Negros, Integración de las ecuaciones de Einstein Estacionarias, Relaciones entre masa, fuerza y carga.

Clasificación:

- 04.20.-q Classical general relativity;
- 02.40.-k Geometry, differential geometry, and topology.

1. Introducción

1.1. Relatividad General

A principios del siglo XX el físico alemán de origen judío Albert Einstein (1879-1955) propone la Teoría de la Relatividad Especial. Esta teoría cuenta con solo dos postulados:

- Primer postulado (principio de relatividad).
  Las leyes físicas en el universo son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

- Segundo postulado (invariabilidad de c).
  En el vacío la luz se propaga a velocidad constante c que es independiente del movimiento de la fuente emisora y del estado de movimiento del observador.

Diez años después, en 1915 Einstein introduce la gravedad en su teoría y es así como plantea y enuncia la llamada Teoría de la Relatividad General que se resume en las ecuación de campo de Einstein.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Donde:

- $G_{\mu\nu}$ es el llamado tensor de curvatura de Einstein.
- $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci.
- R es el escalar de Ricci.
- $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico.
- $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento.

La Relatividad General es una teoría del espacio, el tiempo y la gravedad. Aquí se considera al espacio y al tiempo como partes de una misma estructura *espacio-tiempo* que es el marco teórico de la teoría (variedad Lorentziana cuadridimensional).
Esta nueva teoría difiere de la relatividad especial en el siguiente concepto: el *espacio-tiempo* no tiene necesariamente la forma plana que tenia en la teoría anterior, la presencia de materia en el espacio registrada en el tensor $T_{\mu\nu}$ es la responsable de la curvatura del *espacio-tiempo*, esta curvatura queda determinada en el tensor $G_{\mu\nu}$.

El problema central de la relatividad general es comprender cómo se curva el *espacio-tiempo* debida a la presencia de materia y energía localizadas en él, para esto es necesario resolver la ecuación de campo de Einstein que son un conjunto de diez ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales, la complejidad matemática de estas ecuaciones conlleva a que existan pocas soluciones exactas conocidas.

1.2. Agujeros Negros

El término agujero negro tiene un origen no muy remoto, fue acuñado en 1969 por el científico John Wheeler como la descripción gráfica de una idea que se remota hacia atrás un mínimo de doscientos años, a una época en que había dos teorías sobre la luz: una, preferida por Newton, que suponía que la luz estaba conformada por partículas, y la otra que asumía que estaba formada por ondas. Actualmente se sabe que ambas teorías son correctas. En la teoría de que la luz estaba formada por ondas, no quedaba claro como respondería ésta ante la gravedad. Pero si la luz estaba compuesta por partículas, se podría esperar que éstas fueran afectadas por la gravedad de la misma manera que lo hace con cualquier objeto material. Al principio, se pensaba que las partículas de luz viajaban con infinita rapidez de forma que la gravedad no hubiera sido capaz de frenarlas, pero el descubrimiento de Roemer de que la luz viaja a una velocidad finita, significó el que la gravedad pudiera tener un efecto importante sobre la luz.

Bajo esta suposición John Michell, escribió en 1783 un artículo en el *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* en el que señalaba que una estrella que fuera lo suficientemente masiva y compacta tendría un campo gravitatorio tan intenso que la luz no podría escapar: la luz emitida desde la superficie de la estrella sería arrastrada de vuelta hacia el centro por la atracción gravitatoria de la estrella, antes de que pudiera llegar muy lejos. Michell sugirió que podría haber un gran número de estrellas de este tipo. A pesar de que no podría ser posible observarlas debido a que la luz no alcanzaría a ningún observador, si sería posible detectar su campo gravitatorio. Estos objetos son lo que que actualmente son llamados agujeros negros.

Una sugerencia similar fue realizada unos pocos años después en 1795 por el científico francés Pierre-Simon de Laplace en su "Exposition du Système du Monde". Laplace textualmente comenta "*Un astro luminoso de la misma densidad que la Tierra, y cuyo diámetro fuera 250 veces mayor que el Sol, no dejaría en virtud de su atracción, que ninguno de sus rayos llegara hasta nosotros; es posible que los cuerpos luminosos mayores del universo, sean por su naturaleza invisibles.*"

En 1916, tan solo unos meses después de que Einstein diera a conocer su teoría, el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild (1873-1916) encuentra la primera solución exacta no trivial de las ecuaciones del campo gravitacional. La solución de Schwarzschild describe el espacio-tiempo exterior a un cuerpo estático y esféricamente simétrico de masa m. La particularidad de esta solución es que presenta una singularidad en el radio crítico $r = 2m$, esta singularidad impide que cualquier luz emitida hacia afuera desde el cuerpo pueda escapar, sera atraída nuevamente hacia el. Esto significa que cualquier objeto de masa m y radio menor que r sería oscuro y ningún observador podría verlo, sería entonces un Agujero Negro.

1.3. Objetivos Generales

El problema de interacción entre agujeros negros se remonta a los orígenes de la relatividad general. Una solución que describe este tipo de sistemas es conocida y representa múltiples agujeros negros en equilibrio.

Fue descubierta por Majumdar [14] y Papapetrou y consiste de N agujeros negros de Reissner-Nordström extremos (es decir, es un sistema estático en el que cada agujero negro tiene una carga eléctrica igual a su parámetro masa $Q_i = m_i$). Se espera en general que debe existir una fuerza entre las diferentes componentes del horizonte con el fin de evitar que el espacio-tiempo colapse, y por lo tanto, la solución de Majumdar-Papapetrou sería la única solución de electrovacío en que la fuerza neta entre agujeros negros es cero. No obstante, basándose en las ideas de Newton, una preocupación principal es la siguiente, dados dos agujeros negros, ¿podría la repulsión Coulombiana compensar la atracción gravitatoria y mantener el sistema en equilibrio?

Muchos intentos se han hecho desde entonces a fin de responder esta cuestión y en entender la naturaleza atractiva o repulsiva de la fuerza de interacción entre agujeros negros (ver [15] y referencias allí mencionadas). De hecho, hubo algunos resultados positivos en los que se encontró que la fuerza de interacción es atractiva, por ejemplo para el caso de dos agujeros negros iguales en vacío y axialmente simétricos [15]. De acuerdo a (ver [12] y sus referencias) sabemos que toda solución de las ecuaciones de Einstein de vacío, estacionaria, axialmente simétrica con horizonte disconexo y sólo *dos* componentes viola una desigualdad entre área y momento angular que se sabe válida en este contexto. Esta violación está relacionada con la existencia de una singularidad cónica en la porción conexa del eje de simetría entre los agujeros.

En este trabajo nos proponemos como objetivo concreto estudiar las ecuaciones de Einstein-Maxwell bajo la condición de estacionariedad. De esta forma queremos analizar si es posible mejorar las cotas halladas en [5] bajo esta hipótesis. Por otro lado, para facilitar el estudio de estas ecuaciones, analizaremos las condiciones de borde de las funciones métricas involucradas. Esto nos llevará al límite de agujeros negros extremos, es decir, aquellos que están caracterizados por poseer la máxima cantidad de cargas y/o momento angular por unidad de masa en la familia. Veremos que otra manera de caracterizarlos es a través de la naturaleza de sus horizontes, estando los agujeros negros extremos asociados con horizontes degenerados. Finalmente re-veremos un teorema, útil para nuestro resultado principal, que da la positividad de la masa en el caso de Einstein-Maxwell. Más precisamente, estudiaremos la cota inferior a la masa ADM de un dato inicial en términos de la carga electromagnética total del sistema de muchos agujeros negros.

2. Marco Teórico-Preliminares

2.1. Introducción

Un dato inicial para las ecuaciones de Einstein de vacío esta dado por el conjunto (S, h_{ij}, K_{ij}) donde S es una variedad 3-dimensional, h_{ij} una (definida positiva) métrica Riemaniana y K_{ij} un tensor simétrico en S de manera tal que las ecuaciones de vacío

$$D_j K^{ij} - D^i K = 0 \tag{2}$$

$$R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 0 \tag{3}$$

se satisfacen en S. D y R son la conexión de Levi-Civita y el escalar de Ricci asociado con h_{ij} y $K = K_{ij}K^{ij}$. En estas ecuaciones los índices se suben o bajan con las métrica h_{ij} o su inversa h^{ij}.

2.2. La γ Métrica

La γ métrica es una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein descubiertos por Darmois en 1927 y ha vuelto a ser investigada por diversos autores muchas veces desde aquel entonces (ver referencias citadas en [16] para más detalles). Conocida también como la métrica de Darmois-Voorhees-Zipoy, esta representa una interesante clase de espacio-tiempos estáticos axialmente simétricos. Por lo tanto, puede ser expresada en coordenadas cilíndricas Weyl-Lewis-Papapetrou en la forma:

$$ds^2 = -e^{2\sigma}dt^2 + e^{2(\psi-\sigma)}(dr^2 + dz^2) + r^2 e^{-2\sigma} d\phi^2 \tag{4}$$

Donde $\sigma = \sigma(r, z)$, $\psi = \psi(r, z)$ son funciones de r y z únicamente. Particularmente, la γ métrica es el elemento de linea (1) con:

$$\begin{aligned} e^{2\sigma} &= \left(\frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m}\right)^{\gamma} = f_1(r, z) \\ e^{2\psi} &= \left[\frac{(R_1 + R_2 - 2m)(R_1 + R_2 + 2m)}{4R_1R_2}\right]^{\gamma^2} = f_2(r, z) \end{aligned} \tag{5}$$

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z-m)^2} \quad R_2 = \sqrt{r^2 + (z+m)^2}$$

Las funciones $\sigma = \sigma(r,z)$, $\psi = \psi(r,z)$ satisfacen:

$$\Delta\sigma = \sigma_{zz} + \sigma_{rr} + r^{-1}\sigma_r = 0 \tag{6}$$

Y

$$\psi_z = 2r\sigma_z\sigma_r \tag{7}$$
$$\psi_r = r(\sigma_r^2 - \sigma_z^2) \tag{8}$$

Es posible construir un número infinito de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein utilizando diversos potenciales (realista) Newtonianos identificados con $\sigma(r,z)$. El caso $\gamma = 1$ corresponde a la métrica de Schawarzchild fuera del horizonte, esto queda mas evidente cuando se introducen las llamadas coordenadas esféricas ϱ, ϑ de Erez-Rozen dadas por la transformación:

$$r^2 = (\varrho^2 - 2m\varrho) = \sin^2\theta \qquad z = (\varrho - m)\cos\theta \tag{9}$$

2.3. Ecuaciones de Einstein Estacionarias

Consideremos un espacio-tiempo estacionario y axialmente simétrico (M, g). Las ecuaciones de Einstein-Maxwell son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu} \tag{10}$$
$$F = dA \tag{11}$$
$$d^*F = 0 \tag{12}$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y R el escalar de curvatura de la métrica g. $T_{\mu\nu}$ es, en este caso el tensor electromagnético (uno puede incluir materia satisfaciendo alguna condición de energía, pero por simplicidad restringimos la discusión a electrovacío).

Notemos que como ${T^\mu}_\mu = 0$, obtenemos $R = 0$ y entonces la ecuación (10) queda

$$R_{\mu\nu} = 2T_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Vamos a considerar soluciones asintoticamente planas, estacionarias y axialmente simétricas de las Ecuaciones de Einstein-Maxwell (3) y (4). Denotamos por K^μ, m^μ al campo vectorial de Killing correpondiente al caso estacionario y con simetría axial respectivamente.

De acuerdo a [21] una métrica g estacionaria y axialmente simétrica puede escribirse de la forma

$$ds^2 = -\rho^2 e^{2u}dt^2 + e^{-2u}(d\varphi - \bar{\omega}dt)^2 + e^{2\lambda}(d\rho^2 + dz^2) \tag{14}$$
$$A = -(\chi d\varphi + \theta dt) \tag{15}$$

y las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla(e^{2u}\nabla\psi) + 2e^{4u}\nabla\chi[\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi] = 0 \tag{16}$$

$$\nabla(e^{2u}\nabla\chi) - 2e^{4u}\nabla\psi[\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi] = 0 \tag{17}$$

y las dos ecuaciones de Einstein

$$\nabla[e^{4u}(\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)] = 0 \tag{18}$$

$$\Delta u - 2e^{4u}|(\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)|^2 - e^{2u}(|\nabla\chi|^2 + |\nabla\psi|^2) = 0. \tag{19}$$

De estas ecuaciones obtenemos unas solución $\Phi = (u, v, \chi, \psi)$. Las restantes funciones en la métrica y el potencial vector son obtenidas de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega &= 2(dv + \chi d\psi - \psi d\chi) & (20)\\ d\bar{\omega} &= e^{4u} i_\xi * \omega & (21)\\ d\theta &= e^{2u} i_\xi * d\psi - \omega d\chi & (22) \end{aligned}$$

$$d\lambda = -du + \rho[u_\rho^2 - u_z^2 + \frac{1}{4}e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2) + \psi_\rho^2 - \psi_z^2]d\rho + \tag{23}$$

$$2\rho[u_\rho u_z + \frac{1}{4}e^{4u}\omega_\rho\omega_z + e^{2u}(\chi_\rho\chi_z + \psi_\rho\psi_z)]dz. \tag{24}$$

En el caso estático y axialmente simétrico tenemos

$$ds^2 = -\rho^2 e^{2u} dt^2 + e^{-2u} d\varphi^2 + e^{2\lambda}(d\rho^2 + dz^2) \tag{25}$$

$$A = -(\chi d\varphi + \theta dt) \tag{26}$$

y las ecuaciones de Einstein-Maxwell

$$\nabla(e^{2u}\nabla\psi) + 2e^{4u}\nabla\chi[\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi] = 0 \tag{27}$$

$$\nabla(e^{2u}\nabla\chi) - 2e^{4u}\nabla\psi[\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi] = 0 \tag{28}$$

y las dos ecuaciones de Einstein

$$\nabla[e^{4u}(\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)] = 0 \tag{29}$$

$$\Delta u - 2e^{4u}|(\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)|^2 - e^{2u}(|\nabla\chi|^2 + |\nabla\psi|^2) = 0 \tag{30}$$

con

$$\omega = 0 = 2(dv + \chi d\psi - \psi d\chi) \tag{31}$$

$$d\bar{\omega} = 0 \tag{32}$$

$$d\theta = e^{2u} i_\xi * d\psi \tag{33}$$

$$d\lambda = dv + \rho[u_\rho^2 - u_z^2 + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2)]d\rho \tag{34}$$

$$2\rho[u_\rho u_z + e^{2u}(\chi_\rho \chi_z + \psi_\rho \psi_z)]dz \tag{35}$$

2.4. Fuerza entre Agujeros Negros

Como fue mencionado anteriormente, el problema de interacción entre agujeros negros se remonta a los orígenes de la relatividad general.

Weinstein [21] usando mapas armónicos muestra que existen soluciones asintoticamente planas, de vacío y axialmente simétricas para múltiples agujeros negros, aunque posiblemente con una singularidad cónica en la componente delimitada del eje de simetría. La aparición de esta singularidad cónica en el eje se vio claramente en la superposición de dos agujeros negros de Schwarzschild en los primeros trabajos de Bach y Weyl [2]. Las interacciones de largo alcance en las múltiples soluciones de agujeros negros son incapaces de proporcionar el equilibrio entre los distintos agujeros negros y la singularidad cónica se interpreta como una condición de contorno que mantiene los agujeros negros a una separación fija para prevenir el colapso del sistema.

Para ser concretos, cuando consideremos $N \geq 1$ agujeros negros localizados en el eje de simetría, serán representados por segmentos en el caso no extremo y por "*punctures*" en el caso extremo. El eje $\rho = 0$ es denotado por Γ. Que contiene $N-1$ componentes acotadas denotadas por Γ_i, $i = 1, .., N-1$ y dos componentes no acotadas Γ_0 y Γ_N.
Cuando tenemos una singularidad cónica en el eje, esta puede ser interpretada como la fuerza necesaria para balancear la atracción gravitacional y mantener los cuerpos en equilibrio, esta puede ser expresada en términos de la constante q_i que es el valor de la función q en la *i-esima* componente conexa del eje, (ver [5] para mas detalles).

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{4}(e^{-q_i} - 1) \tag{36}$$

Uno esperaría que esta fuerza fuera positiva reflejando el hecho que una fuerza repulsiva es necesaria a fin de evitar que los agujeros negros tiendan a acercarse mutuamente.

Una fuerza positiva ha sido encontrada en algunas pocas situaciones, por ejemplo para el caso de dos agujeros negros iguales de Kerr en el límite en que en que uno de los agujeros negros se convierte en extremo y la distancia de uno al adyacente tiende a cero (ver [21] y sus referencias).

Por otro lado, Neugebauer y Hennig [15] han probado que no existe una solución de vacío estacionaria y regular que represente a dos agujeros negros. Su método se aplica solo a dos componentes conexas del horizonte y no se han encontrado generalizaciones a cualquier número de agujeros negros. Sin embargo, en este trabajo no se analiza el carácter atractivo o repulsivo de la interacción.

Hasta el momento no hay ninguna prueba general según la cual la fuerza es siempre positiva.

2.5. Análisis Funcional

En esta sección desarrollamos la teoría de análisis funcional que sera útil mas adelante, en particular en la demostración del teorema 3.6.

2.5.1. Espacios de Hölder

Asumamos $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $0 < \gamma \leq 1$. Recordemos previamente la clase de funciones continuas de Lipschitz $u : U \to \mathbb{R}$, que por definición satisface

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad (x, y \in U) \tag{37}$$

para alguna contante C. Es útil considerar también funciones u que satisfacen una variante de (37)

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad (x, y \in U) \tag{38}$$

para alguna constante C. Tales funciones se llaman funciones continuas de Hölder con exponente γ.

Definición 2.1. *(i) Si $u : U \to \mathbb{R}$ es acotada y continua, escribimos*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)|$$

(ii) La γ^{th}-Hölder seminorma de $u : U \to \mathbb{R}$ es

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{x,y \in U \ x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

y la γ^{th}-Hölder norma es

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

Definición 2.2. *El espacio de Hölder*

$$C^{k,\gamma}(\bar{U})$$

consiste de todas las funciones $u \in C^k(\bar{U})$ *para las cuales*

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \tag{39}$$

es finita.

Entonces, el espacio $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ consiste de aquellas funciones u que son k-veces continuamente diferenciales y cuya $k^{th}-$ derivada parcial son continuas de Hölder con exponente γ. Estas funciones están bien comportadas, ademas el espacio $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ posee en si mismo una buena estructura matemática.

2.5.2. Espacios de Sobolev

Los espacios de Hölder introducidos en la sección anterior por lo general no suelen ser adecuados para la teoría elemental de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Hay otros espacios que contienen funciones con propiedades menos suaves, estos se desarrollaran en esta sección.

Notación 2.3. *Denotamos por* $C_c^\infty(U)$ *el espacio de funciones infinitamentes diferenciables* $\phi : U \to \mathbb{R}$ *con soporte compacto en* U*. Llamaremos a* $\phi \in C_c^\infty(U)$ *una función de prueba.*

Definición 2.4. *Sean* $u, v \in L^1_{loc}(U)$ *y* α *un multi índice. Decimos que* v *es la* α^{th} *derivada parcial de* u*, escribimos*

$$D^\alpha u = v$$

probando

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx \tag{40}$$

para todas las funciones de pruebas $\phi \in C_c^\infty(U)$*.*

En otras palabras, si damos u y si pasa que existe una función v que verifica (40) para toda ϕ, decimos que $D^\alpha u = v$ en el sentido débil. Si no existe tal función v, entonces u no posee la α^{th} derivada parcial débil.

Lema 2.5. *(Unicidad de derivadas débiles). Una* α^{th} *derivada parcial débil de* u*, si existe, es única, definida en un conjunto de medida nula.*

Sea $\leq p \leq \infty$ y dado k un entero no negativo. Definimos ahora cierto espacio de funciones, cuyos miembros tienen varios ordenes de derivadas débiles viviendo en varios espacios L^p.

Definición 2.6. *El espacio de Sobolev*

$$W^{k,p}(U)$$

consiste de todas las funciones localmente sumables $u : U \to \Re$ tal que para multi índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en el sentido débil y pertenecen a $L^p(U)$.

Observaciones. *(i) Si $p = 2$, usualmente escribimos*

$$H^k(U) = W^{k,2}(U) \quad (k = 0, 1, ..)$$

La letra H es usada, por que $H^k(U)$ es un espacio de Hilbert. Notemos que $H^0(U) = L^2(U)$.

(ii) Ahora identificamos funciones en $W^{k,p}$ que estén de acuerdo a lo anterior.

Definición 2.7. *Si $u \in W^{k,p}(U)$, definimos su norma de acuerdo a*

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_U |D^{\alpha u}|^p dx\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha|\leq k} ess\sup_U |D^\alpha u| & (p = \infty) \end{cases}$$

Definición 2.8. *(i) $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, $u \in W^{k,p}(U)$. Decimos que u_m converge a u en $W^{k,p}(U)$ escribiendo*

$$u_m \to u \quad en\ W^{k,p}(U)$$

probando

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(U)} = 0$$

(ii) Escribimos

$$u_m \to u \quad en\ W^{k,p}_{loc}(U)$$

para significar

$$u_m \to u \quad en\ W^{k,p}(V)$$

para cada $V \subset\subset U$.

Definición 2.9. *Denotamos por*

$$W_0^{k,p}(U)$$

la clausura de $C_c^\infty(U)$ en $W^{k,p}(U)$. Así $u \in W_0^{k,p}(U)$ si y solo si existen funciones $u_m \in C_c^\infty(U)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(U)$. Interpretamos $W_0^{k,p}(U)$ como que comprende las funciones $u \in W^{k,p}(U)$ tal que

$$D^\alpha u = 0 \quad en\ \partial U \quad para\ todo\ |\alpha| \leq k - 1$$

Notación 2.10. *Es costumbre escribir*

$$H_0^k U = W_0^{k,2}(U)$$

2.5.3. Cálculo de Variaciones

Aquí introducimos algunas ideas acerca del calculo de variaciones, la idea inicial radica en el hecho de que queremos resolver alguna ecuación en derivadas parciales, por simplicidad, podemos escribir esto en forma abstracta de la forma

$$A[u] = 0 \tag{41}$$

En la expresión anterior $A[\cdot]$ denota un dado, posiblemente no-lineal operador en derivadas parciales y u es desconocida.

El cálculo de variaciones identifica una importante clase de tales problemas no lineales que pueden ser resueltos usando técnicas relativamente simples del análisis funcional. Esta es la clase de problemas variacionales, es decir, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la forma (41), donde el operador no-lineal $A[\cdot]$ es la "derivada"de una apropiada "energía"funcional $I[\cdot]$, simbólicamente esto se escribe

$$A[\cdot] = I'[\cdot]. \tag{42}$$

El problema (41) es

$$I'[u] = 0. \tag{43}$$

Ahora buscamos soluciones de (41) que sean puntos críticos de $I[\cdot]$. Esto en ciertas circunstancias puede ser relativamente fácil de encontrar: si por ejemplo el funcional $I[\cdot]$ tiene un mínimo en u, entonces (43) es valida y así es solución de problema original (41).

Primera variación, ecuaciones de Euler-Lagrange. Supongamos ahora $U \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto y acotado con borde ∂U suave y una dada función suave

$$L : \mathbb{R}^n \times R \times \bar{U} \to \mathbb{R}$$

Vamos a llamar a L Lagrangeana.

Notación 2.11. *Escribimos*

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, ..., p_n, z, x_1, ..., x_n)$$

para $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Así "p" es el nombre de la variable para la que sustituimos $D\omega(x)$ mas abajo y "z" es la variable para la que sustituiremos $\omega(x)$. También fijamos

$$\begin{aligned} D_pL &= (L_{p_1,...,L_{p_n}}) \\ D_zL &= L_z \\ D_xL &= (L_{x_1,...,L_{x_n}}) \end{aligned} \tag{44}$$

Ahora, para ser mas precisos con las ideas anteriores, asumimos que $I[\cdot]$ tiene la siguiente forma explicita

$$I[\omega] = \int_U L(D\omega(x), \omega(x), x)dx \tag{45}$$

para funciones suaves $\omega : \bar{U} \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la condición de borde

$$\omega = g \quad en \quad \partial U \tag{46}$$

Vamos a suponer ahora además alguna función suave u, satisfaciendo la condición de borde $u = g$ en ∂U, esta pasa a ser un minimizante de $I[\cdot]$ entre todas las funciones ω que satisfacen (46). Se demuestra que u es entonces automáticamente una solución de cierta ecuación no-lineal en derivadas parciales.

La ecuación de Euler-Lagrange asociada con la energía funcional $I[\cdot]$ definida por (45) es

$$-\sum_{i=1}^{n}(L_{p_i}(Du, u, x))_{x_i} + L_z(Du, u, x) = 0 \;\; en\ U \tag{47}$$

Existencia de Minimizantes Aquí vamos a identificar algunas condiciones en la Lagrangeana L que garanticen que el funcional $I[\cdot]$ tiene en realidad un minimizador, al menos dentro de un espacio de Sobolev apropiado.

Corsividad, Semicontinuidad Vamos a comenzar con algunas ideas en gran parte heurísticas en cuanto a el funcional

$$I[\omega] := \int_U L(D\omega(x), \omega(x), x)dx \tag{48}$$

definida para una apropiada función $\omega : U \to \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$\omega = g \;\; en\ \partial U \tag{49}$$

a. Corsividad

Notemos primero que alguna función suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, acotada inferiormente no necesariamente posee un ínfimo. Consideremos, para entender esto la función e^x o $(1+x^2)^{-1}$. Estos ejemplos sugieren que en general necesitamos alguna hipótesis para controlar $I[\omega]$ para funciones "grandes"ω. La forma más eficaz para asegurar esto, seria la hipótesis que $I[\omega]$ "crece rápido a medida que $|\omega| \to \infty$".

Mas específicamente, supongamos

$$1 < q < \infty \tag{50}$$

esta fijo, entonces vamos a suponer

$$\begin{cases} \text{existen constantes} \quad \alpha > 0,\ \beta \geq 0 \text{ tal que} \\ L(p,z,x) \geq \alpha|p|^q - \beta \\ \forall p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in U. \end{cases} \tag{51}$$

Por lo tanto

$$I[\omega] \geq \alpha \|D\omega\|^q_{L^q(U)} - \gamma \tag{52}$$

para $\gamma := \beta|U|$. Así $I[\omega] \to \infty$ como $\|D\omega\|_{L^q} \to \infty$. Es costumbre llamar a (52) condición de corcividad en $I[\cdot]$.

b. Semicontinuidad

Observemos que si bien una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la condición de corcividad, en efecto, alcanza su ínfimo pero en general $I[\cdot]$ no lo hará. Para entender esto, sea

$$m := \inf_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega] \tag{53}$$

y elegimos funciones $u_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, ...)$ tal que

$$I[u_k] \to m \quad \text{cuando} \quad k \to \infty. \tag{54}$$

Llamamos a $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ una secuencia minimizante.

Ahora queremos mostrar que alguna subsecuencia de $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ converge al actual minimizante. Para esto, sin embargo, necesitamos algún tipo de compacidad, y esto es sin duda un problema ya que el espacio $W^{1,q}(U)$ es de dimensión infinita. De hecho, si utilizamos la desigualdad de corcividad (52), resulta que sólo podemos concluir que la secuencia de minimización se encuentra en un conjunto acotado de $W^{1,q}(U)$. Pero esto no implica que exista alguna subsecuencia que converge en $W^{1,q}(U)$.

Por lo tanto, dirigimos nuestra atención a la "topología débil". Desde que estamos suponiendo $1 < q < \infty$, por lo que $L^q(u)$ es reflexiva, llegamos a la conclusión de que existe una subsecuencia $\{u_{k_j}\}_{k=1}^\infty$ y una función $u \in W^{1,q}(U)$ tal que

$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup \text{ débilmente en } L^q(U) \\ Du_{k_j} \rightharpoonup Du \text{ débilmente en } L^q(U;\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{55}$$

Desplazando a la topología débil se recupera la suficiente compacidad, de la desigualdad de corcividad (52) se deduce (55) para una subsecuencia apropiada. Pero ahora surge otra dificultad, pues en prácticamente todos los casos de interés el funcional $I[\cdot]$ no es continuo con respecto a la convergencia débil. Esto es, no podemos deducir de (54) y (55) que

$$I[u] = \lim_{j\to\infty} I[u_{k_j}] \tag{56}$$

y entonces u es un minimizante. El problema es que $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ no implica $Du_{k_j} \to Du$ es muy posible, por ejemplo, que los gradientes Du_{k_j} aunque son acotados en L^q, están oscilando más y más violentamente cuando $k_j \to \infty$.

Lo que nos ayuda es la observación clave de que realmente no necesitamos completamente (56). Bastaría en lugar saber sólo que

$$I[u] \leq \lim_{j\to\infty} I[u_{k_j}]. \tag{57}$$

Entonces, de (54) podríamos deducir $I[u] \leq m$. Pero debido a (53), $m \leq I[u]$. En consecuencia, u es un minimizante.

Definición 2.12. *Decimos que una función $I[\cdot]$ es (secuencialmente) débilmente semicontinua inferiormente en $W^{1,q}(U)$, teniendo*

$$I[u] \leq \liminf_{k\to\infty} I[u_k]$$

siempre que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \textit{débilmente en } W^{1,q}(U)$$

Por lo tanto, nuestro objetivo ahora es identificar condiciones razonables a la no linealidad de L que aseguren que $I[\cdot]$ es débilmente semicontinua inferiormente.

Los teoremas de existencia y unicidad del minimizante nos garantizan que en efecto, que para el funcional $I[\cdot]$ existe u en el que toma el valor mínimo.

3. Resultados

En este capítulo comenzamos enunciando y analizando soluciones de agujeros negros conocidos, buscamos ver el comportamiento de las soluciones estacionarias conocidas. Para este análisis usaremos las coordenadas de Weyl.

Cuando sea posible miraremos el limite para el caso extremo, en particular estamos interesados en ver el comportamiento de la función q. Para el caso de agujeros negros no extremos, el horizonte estará representado por un segmento sobre el eje de simetría y en el limite extremo, este segmento se reduce a un punto, en este limite, las coordenadas de Weyl coinciden con las isotrópicas. También mostramos algunos de los resultados mas importantes de este trabajo en la sección (3.2) donde enunciamos y demostramos los principales teoremas del trabajo.

3.1. Análisis de soluciones de Agujeros Negros conocidos.

3.1.1. Schwarzchild

La métrica de Schwarzchild es la primera solución encontrada de las ecuaciones de campo de Einstein en vacío, esta representa un espacio-tiempo que contiene un agujero negro estático y asintóticamente plano. Su exterior describe también el espacio generado por una distribución de masa uniforme y esféricamente simétrica.

La métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas tiene la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{58}$$

donde M es la masa del agujero negro cuyo horizonte de eventos está ubicado en $r = 2M$ (radio de Schwarzchild) y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Mediante el cambio de coordenadas siguiente

$$\rho^2 = (r^2 - 2lr)\sin^2(\theta) \tag{59}$$

$$z = (r - m)\cos(\theta) \tag{60}$$

obtenemos la métrica axialmente simétrica en las coordenadas de Weyl-Lewis-Papapetrou:

$$ds^2 = -e^{-\sigma}dt^2 + e^{\sigma}(e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2) \tag{61}$$

Donde las coordenadas toman los valores $\rho \in [0, \infty]$; $z, t \in R$; $\phi \in [0, 2\pi)$. Ademas, como sabemos, σ y q son funciones de z y ρ únicamente

$$\sigma = \sigma(\rho, z); \quad q = q(\rho, z). \tag{62}$$

Escribiendo las ecuaciones de Einstein de vacío $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} = 0$ se obtiene que σ satisface:

$$\Delta\sigma = \sigma_{\rho\rho} + \rho^{-1}\sigma_\rho + \sigma_{zz} = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial(\rho\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\sigma_\rho)}{\partial\rho}\right\} = 0 \tag{63}$$

(σ_z, σ_ρ son las derivadas con respecto a z y ρ respectivamente), mientras que q satisface

$$q_z = \frac{\rho}{2}\sigma_z\sigma_\rho; \quad q_\rho = \frac{\rho}{4}(\sigma_\rho^2 - \sigma_z^2) \tag{64}$$

y a partir de (63)-(64) tenemos

$$\bar{\Delta}q + \frac{(\partial\sigma)^2}{4} = 0 \tag{65}$$

donde $\bar{\Delta} = \partial_{\rho\rho} + \partial_{zz}$.

Para resolver el sistema anterior debo dar condiciones de borde (en ∞ y sobre los agujeros negros). En este caso, el agujero negro es representado por un segmento de longitud $2l$ ubicado en el eje z y centrado en el origen.

Es importante notar que la longitud del segmento que representa al agujero negro coincide con el radio de Schwarzchild, es decir $l = m$.

Las soluciones para σ y q son:

$$\sigma = -\log\frac{r_1+r_2-2l}{r_1+r_2+2l} \tag{66}$$

$$q = \frac{1}{2}\log\frac{(r_1+r_2)^2-4l^2}{4r_1r_2} \tag{67}$$

Donde r_1 y r_2 son las distancias (calculadas en el espacio Euclideo) de un punto P a P_1 y P_2 (extremos del segmento que representa el agujero negro) y están dadas de acuerdo a:

$$r_1 = \sqrt{\rho^2+(z+l)^2} \tag{68}$$

$$r_2 = \sqrt{\rho^2+(z-l)^2} \tag{69}$$

En lo que sigue, hacemos nuestro propio análisis a fin de entender el comportamiento de σ, q para algunos casos de interés.

- Si analizamos el caso $l \to 0$, tenemos que para esta situación $r_1 = r_2$ con lo cual vemos que:

  $$\sigma = -\log\frac{r_1+r_2}{r_1+r_2} = 0 \tag{70}$$

  $$q = \frac{1}{2}\log\frac{(r_1+r_2)^2}{4r_1r_2} = 0 \tag{71}$$

  Entonces la métrica toma la forma

  $$ds^2 = -dt^2 - (d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\phi^2) \tag{72}$$

  que corresponde a la métrica del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cilíndricas. Este es un resultado que esta de acuerdo a lo esperado teniendo en cuenta que el límite $l \to 0$ corresponde al límite en el que la masa del agujero negro va a cero, $m \to 0$.

- Analizamos que sucede si $\rho \to \infty$, en ese caso $r_1 \approx r_2 = \rho$ con lo cual tenemos que

  $$\sigma = -\log\frac{2\rho-2l}{2\rho+2l} \to 0$$

  $$q = \frac{1}{2}\log\frac{(2\rho)^2-(2l)^2}{(2\rho)^2} \to 0$$

  en el limite.

  Entonces nuevamente vemos que nuestra métrica se reduce a la de Minkoski. De nuevo este resultado es esperado ya que el espacio-tiempo descripto por la métrica de Schwarzchild es asintóticamente plano.

- Ahora buscamos ver los ordenes principales de σ y q cerca del horizonte, para ello hemos calculado $\partial_\rho q$ y realizando los desarrollos de Taylor necesarios vamos a obtener la información buscada, este análisis lo realizamos de esta manera teniendo en cuenta que $\partial_\rho q$ sera un termino que aparecerá en la integración de $\bar{\Delta} q$ y este a su vez nos brindará información acerca de la interacción que existe entre agujeros negros cuando consideremos un sistema de muchos de estos objetos.

  Comenzamos calculando la derivada de σ respecto de ρ.

$$\partial_\rho \sigma = -\frac{4l\rho}{(r_1+r_2)^2-4l^2}\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right) \tag{73}$$

  Veamos que sucede en el limite al horizonte, esto es cuando $\rho \to 0$, $|z|<l$. Primero desarrollamos en Taylor alrededor de $\rho=0$ tanto a $(r_+ + r_-)$ como a $(r_- r_+)$.

$$\begin{aligned} r_1+r_2 &= 2l+\frac{l}{l^2-z^2}\rho^2+\mathcal{O}(\rho^4) && (74)\\ r_1 r_2 &= l^2-z^2+\mathcal{O}(\rho^2) && (75)\end{aligned}$$

  Notemos que estos desarrollos son solo válidos lejos de los extremos del segmento $l=|z|$ que representa al horizonte.

  A partir de esto, tenemos que cuando $\rho \to 0$, $|z|<l$.

$$\rho\sigma_\rho \to -2 \tag{76}$$

  Si de la misma manera anterior analizamos ahora el comportamiento de σ sobre el eje pero fuera del horizonte, es decir cuando $\rho \to 0$, $|z|>l$ tenemos que los desarrollos de Taylor ahora son

$$r_1+r_2 = 2z+\frac{z}{z^2-l^2}\rho^2+\mathcal{O}(\rho^4) \tag{77}$$

$$r_1 r_2 = z^2-l^2+\mathcal{O}(\rho^2) \tag{78}$$

  y a partir de ello se deduce que si $\rho \to 0$, $|z|>l$

$$\rho\sigma_\rho = 0. \tag{79}$$

  Buscamos ver ahora el comportamiento de q, para ello, hacemos lo mismo que hicimos anteriormente.
  Calculando $\partial_\rho q$.

$$\partial_\rho q = \frac{\rho}{2r_1^2 r_2^2[(r_1+r_2)^2-4l^2]}\left[-(r_1^2-r_2^2)^2+4l^2(r_1+r_2)^2\right] \tag{80}$$

  y usando los desarrollos de Taylor correspondientes podemos afirmar que cuando $\rho \to 0$, $|z|>l$ es decir, cuando estamos fuera del horizonte,

q es regular.

$$\rho\partial_\rho q = 0 \tag{81}$$

Mientras que cuando estamos en el horizonte, $\rho \to 0$, $|z| < l$ tenemos que

$$\rho q_\rho \to \frac{4l^2}{l^2 - z^2} \tag{82}$$

donde nuevamente, el desarrollo vale lejos de los extremos del segmento.

Resumimos todo lo anterior diciendo:

$$\sigma_\rho = \mathcal{O}(\rho^{-1}) \quad \text{cuando } \rho \to 0,\ |z| < l \tag{83}$$

$$q_\rho = \mathcal{O}(\rho^{-1}) \quad \text{cuando } \rho \to 0,\ |z| < l \tag{84}$$

Por último hacemos notar que

$$q = \mathcal{O}(\ln\rho)\text{cuando } \rho \to 0,\ |z| < l. \tag{85}$$

Buscamos ver a continuación si la ecuación (65) puede ser integrada en todo el espacio. Recordemos que la idea es, a partir del comportamiento observado en agujeros negros conocidos, obtener estimaciones a priori de la interacción entre agujeros negros estacionarios en simetría axial.

Denotaremos por H el horizonte de eventos, es decir, el segmento $|z| \leq l$. Entonces tenemos:

$$\int_{R^3\setminus H} \bar{\Delta} q\rho d\rho dz = -\frac{1}{4}\int_{R^3\setminus H} (\partial\sigma)^2 \rho d\rho dz \tag{86}$$

Integrando por partes el lado izquierdo de (86) obtenemos

$$\int_{R^3\setminus H} \bar{\Delta} q\rho d\rho dz = \int (\rho q_\rho)|_{\rho=0}^{\infty} dz + \int (\rho q_z)|_{z=-\infty}^{\infty} d\rho - \int q|_{\rho=0}^{\infty} dz \tag{87}$$

En la expresión anterior el primer termino es finito de acuerdo a lo que vimos en (84), pero de (85) vemos que q diverge en el horizonte como $\ln\rho$ y por lo tanto el último término no está acotado.

Se llega al mismo resultado (no acotado) si calculamos el lado derecho de la ecuación (86).

Este análisis nos permite ver que la integral de los diferentes términos de la ecuación de Einstein estática de vacío para un agujero negro de Schwarzchild, (65), no es acotada.

3.1.2. Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-Nordström puede considerarse como una generalización de la métrica de Schwarzschild, esta es una solución exacta con simetría esférica de las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo gravitatorio y electromagnético de un cuerpo masivo con carga neta diferente de cero. Así como en Schwarzschild esta métrica bajo ciertas condiciones describe un agujero negro, el agujero negro de Reissner-Nordström que es estático, con simetría esférica y con carga eléctrica Q, viene definido por dos parámetros: la masa M y la carga eléctrica Q.

La métrica de Reissner-Nordström en coordenadas estándar esta dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{88}$$

O bien, puede reescribirse como:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{89}$$

Donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 \tag{90}$$

A partir de la métrica (89) se puede observar que existen tres singularidades. La primera corresponde al punto $r = 0$ y es una singularidad no-removible similar al caso $r = 0$ en Schwarzschild. Las otras dos singularidades se encuentran en los puntos donde $\Delta = 0$ y estos son:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{91}$$

De la expresión anterior, podemos distinguir tres casos de interés.

- Reissner-Nordström súper extremo $M < |Q|$.
  Si $M < |Q|$ los valores de $r_\pm$ no son reales. La función Δ es siempre positiva y la métrica no posee singularidades en $r_\pm$. Como no existen horizontes la singularidad en $r = 0$ esta desnuda. De acuerdo con la conjetura del censor cósmico, podemos considerar que este caso no se presenta físicamente.

- Reissner-Nordström sub extremo $M > |Q|$.
  Si $M > |Q|$ los valores de $r_\pm$ son reales y la función Δ se vuelve cero allí. De esta forma, Δ es positiva para $r > r_+$ y para $r < r_-$, y toma valores negativos para $r_- < r < r_+$. Aquí la singularidad en $r = 0$ no es desnuda, pues tenemos dos horizontes que la ocultan. Aquí tenemos que el horizonte de eventos del agujero negro de Reissner-Nordström se encuentra en $r = r_+$

- Reissner-Nordström extremo $M = |Q|$.
  En el caso extremo en el cual $M = |Q|$ se tiene $r_- = r_+ = M$. Es decir, los horizontes que tenia lugar en el caso sub extremo coinciden.

Haciendo el siguiente cambio de coordenadas:

$$\rho^2 = (r^2 - 2Mr + Q^2)\sin^2\theta \tag{92}$$

$$z = (r - M)\cos(\theta) \tag{93}$$

Obtenemos la métrica de Reissner-Nordström en las coordenadas de Weyl.

$$ds^2 = -e^{-\sigma}dt^2 + e^{\sigma}(e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2) \tag{94}$$

Donde:

$$e^{-\sigma} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2}{(r_1 + r_2 + 2M)^2} \tag{95}$$

$$e^{2q} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4l^2}{4r_1 r_2} \tag{96}$$

$$l := \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{97}$$

En estas coordenadas, el horizonte de eventos se encuentra en el eje de simetría, representado por el segmento $|z| \leq l$

Las ecuaciones de Einstein-Maxwell que satisfacen estas funciones son:

$$\Delta\sigma = -\frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 - 2\bar{\Delta}q \tag{98}$$

$$\Delta\sigma = -2e^{\sigma}(\partial\Phi)^2 \tag{99}$$

$$q_z = \frac{\rho}{2}\sigma_z\sigma_\rho - 2\rho e^{\sigma}\Phi_\rho\Phi_z \tag{100}$$

$$q_\rho = \frac{\rho}{4}(\sigma_\rho^2 - \sigma_z^2) + \rho\sigma(\Phi_\rho^2 - \Phi_z^2) \tag{101}$$

$$\Delta\Phi = -\nabla\sigma\nabla\Phi \tag{102}$$

Además a su vez tenemos que las distancias de un punto (ρ, z) a los externos del segmento, r_1 y r_2 están dadas por:

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z + l)^2} = \bar{r} - M + \sqrt{M^2 - Q^2}\cos\theta \tag{103}$$

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z - l)^2} = \bar{r} - M - \sqrt{M^2 - Q^2}\cos\theta \tag{104}$$

En lo que sigue, realizamos nuestro propio análisis de manera igual a lo hecho anteriormente en Schwarzschild, es decir vamos a analizar los ordenes de σ y de q cerca del horizonte.

Comenzamos viendo que sucede cuando $\rho \to 0$; $|z| \leq l = \sqrt{M^2 - Q^2}$, calculamos $\partial_\rho \sigma$.

$$\partial_\rho \sigma = -\frac{4\rho(r_1 + r_2)(M(r_1 + r_2) + 2l^2)}{r_1 r_2 (r_1 + r_2 - 2l)(r_1 + r_2 + 2l)(2M + r_1 + r_2)} \tag{105}$$

Los desarrollos en Taylor ahora toman la forma:

$$r_1 + r_2 = 2l + \frac{l}{l^2 - z^2}\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \tag{106}$$

$$r_1 r_2 = l^2 - z^2 + \mathcal{O}(\rho^2) \tag{107}$$

A partir de esto, podemos ver que cuando $\rho \to 0$, $|z| \leq l$ tenemos:

$$\rho \sigma_\rho \to -2 \tag{108}$$

Ahora miremos que sucede con σ cuando estamos fuera del horizonte, es decir cuando $\rho \to 0$, $|z| > l$. En este caso, usamos que,

$$r_1 + r_2 = 2z + \frac{z}{z^2 - l^2}\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \tag{109}$$

$$r_1 r_2 = z^2 - l^2 + \mathcal{O}(\rho^2) \tag{110}$$

y vemos que

$$\rho \sigma_\rho = 0. \tag{111}$$

Ahora analizamos el comportamiento de q, calculamos q_ρ obteniendo:

$$q_\rho = \frac{2l^2 \rho (z^2 - \rho^2 - l^2)}{(r_1 r_2)^2 (r_1 r_2 + z^2 + \rho^2 - l^2)} \tag{112}$$

Y a partir de ello, podemos ver que si $\rho \to 0$, $|z| > l$

$$q_\rho = 0 \tag{113}$$

Mientras que si $\rho \to 0$, $|z| \leq l$ tenemos

$$\rho q_\rho \to \frac{2l^2}{z^2 - l^2} \tag{114}$$

Notamos que el comportamiento de la solución de RN subextremo es similar al que vimos para Schwarzchild, por lo que esperamos que la integral de la ecuación (100) no sea integrable.

Reissner-Nordström extremo

Como se menciono anteriormente, la familia de agujeros negros de Reissner-Nordström posee un límite especial llamado *extremo*, este se obtiene al tomar el valor máximo permitido para la carga, es decir $Q \to M$. Valores más grandes para la carga producirían una singularidad desnuda en lugar de un agujero negro. Notemos que este límite se corresponde con tomar el límite en que la longitud del segmento que representa al horizonte en las coordenadas de Weyl va a cero, esto es, $l \to 0$ y por lo tanto, $r_1, r_2 \to r$

En este límite, las funciones métricas toman la forma simple siguiente:

$$\sigma = -2\log\frac{r}{r+M} \quad (115)$$

$$q = 0 \quad (116)$$

Con el horizonte esta ubicado en $r = 0$.

Se puede ver fácilmente que es posible, en el caso extremo, integrar las ecuaciones de Einstein-Maxwell estacionarias (100) obteniendo en particular,

$$\int_{R^3\setminus H} \bar{\Delta} q dV = 0 \quad (117)$$

$$\int_{R^3\setminus H} \Delta\sigma dV = -\frac{1}{2}\int_{R^3\setminus H} (\partial\sigma)^2 dV = -8\pi M \quad (118)$$

con $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$.

Esto nos dice que al tomar el límite extremo en la solución de Reissner-Nordström, las divergencias en la integración de las ecuaciones desaparecen. Como se vera más adelante, esta observación será crucial en parte de nuestros resultados.

3.1.3. Kerr

En el contexto astrofísico es conocido que la mayoría de los objetos estelares rotan pero no tiene carga eléctrica neta apreciable. El espacio-tiempo que describe el comportamiento exterior de uno de estos objetos corresponde a la métrica de Kerr la cual esta descripta únicamente por dos parámetros, la masa M y su momento angular J.

El elemento de linea de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist tiene la forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M\bar{r}}{\Sigma^2}\right)dt^2 - \frac{2Ma\bar{r}\sin^2\theta}{\Sigma^2}(dtd\phi + d\phi dt) + \frac{\Sigma^2}{\Delta}d\bar{r}^2 + \quad (119)$$

$$+\Sigma^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(\bar{r}^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta]d\phi^2$$

Donde tenemos que:

$$\Delta(\bar{r}) = \bar{r}^2 - 2M\bar{r} + a^2$$

$$\Sigma^2(\bar{r},\theta) = \bar{r}^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$a = J/M$$

Al igual que en el caso de Reissner-Nordström la solución de Kerr pose tres singularidades, una singularidad física en $\Sigma = 0$ y dos singularidades de coordenadas cuando $\Delta = 0$, esta última sucede en:

$$\bar{r}_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \tag{120}$$

La métrica de Kerr describe un agujero negro cuyo horizonte de eventos está ubicado en $\bar{r} = \bar{r}_+$.

Nuevamente como en Reissner-Nordström tenemos tres casos de interés.

- Kerr super extremo $M < a$.
  En este caso los dos valores $\bar{r}_{\pm}$ son complejos, es decir que Δ no tiene ceros reales y por ello no existen las dos singularidades coordenadas. Sin embargo, la singularidad esencial $\Sigma = 0$ si existe.

- Kerr sub extremo $M > a$.
  En este caso, la singularidad esencial $\Sigma = 0$ existe, pero además, los valores de $\bar{r}_{\pm}$ son reales y por lo tanto existen dos singularidades coordenadas en $\Delta = 0$. Se puede observar que la función Δ es positiva para $\bar{r} > \bar{r}_+$ y para $\bar{r} < \bar{r}_-$, mientras que toma valores negativos para $\bar{r}_- < \bar{r} < \bar{r}_+$.

- Kerr extremo $M = a$.
  Para la métrica de Kerr extrema, se tiene que $\bar{r}_+ = \bar{r}_- = M$ y aquí los dos horizontes que tenían lugar en el caso sub extremo coinciden.

Haciendo la siguiente transformación de coordenadas:

$$\rho = \sqrt{\bar{r}^2 - 2m\bar{r} + a^2}\sin\theta \ ; \ z = (\bar{r} - m)\cos\theta$$

Obtenemos la la métrica de Kerr en las coordenadas de Weyl,

$$ds^2 = -f(dt - wd\phi)^2 + f^{-1}(e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2) \tag{121}$$

donde

$$f = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4M^2 + \frac{a^2}{l^2}(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2 + 2M)^2 + \frac{a^2}{l^2}(r_1 + r_2)^2} \tag{122}$$

$$e^{2\gamma} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - 4M^2 + \frac{a^2}{l^2}(r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2} \tag{123}$$

$$w = \frac{2aM\left(M + \frac{r_1 r_2}{2}\right)\left(1 - \frac{(r_1 - r_2)^2}{4l^2}\right)}{\frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 - M^2 + a^2\frac{(r_1 - r_2)^2}{4l^2}} \tag{124}$$

$$l := \sqrt{M^2 - a^2} \tag{125}$$

con $a := J/M$, a su vez r_1, r_2 están dados por:

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (z+l)^2} = \bar{r} - M + \sqrt{M^2 - Q^2}\cos\theta \tag{126}$$

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + (z-l)^2} = \bar{r} - M - \sqrt{M^2 - Q^2}\cos\theta \tag{127}$$

De acuerdo a los cálculos realizados para Reissner-Nordström y para su límite extremo, en esta sección nos limitaremos a analizar sólo el comportamiento de la solución que describe a Kerr extremo cerca del horizonte.

Kerr Extremo

Veamos el caso de Kerr extremo, esto ocurre cuando $J = m^2$; $a = m$
La métrica queda:

$$ds^2 = -\frac{\Delta \sin^2\theta}{\eta}dt^2 + \eta(d\phi - \Omega dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}d\bar{r}^2 + \Sigma d\theta^2 \tag{128}$$

Donde:

$$\eta = \frac{(\bar{r}^2 + m^2)^2 - m^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta \tag{129}$$

$$\Sigma = \bar{r}^2 + m^2\cos^2\theta \tag{130}$$

$$\Delta = (\bar{r} - m)^2 \tag{131}$$

$$\Omega = \frac{2m^2\bar{r}\sin^2\theta}{\eta\Sigma} \tag{132}$$

Vamos a comenzar nuestro análisis tomando una Hipersuperficie $t = t_0 = cte$, tenemos entonces:

$$ds^2 = \eta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}d\bar{r}^2 + \Sigma d\theta^2 = e^\sigma\left(e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2\right) \tag{133}$$

Haciendo el cambio a coordenadas isotrópicas
$r = \bar{r} - m$; $\rho = r\sin\theta$; $z = r\cos\theta$ vemos que

$$dr = d\bar{r} \tag{134}$$

$$d\rho = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta \tag{135}$$

$$dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \tag{136}$$

con lo cual vemos que:

$$d\rho^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta \tag{137}$$

Teniendo esto en cuenta y mirando nuevamente el elemento de linea

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^\sigma\left(e^{2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2\right) \\ &= e^\sigma e^{2q}dr^2 + e^\sigma e^{2q}r^2 d\theta^2 + e^\sigma r^2\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \tag{138}$$

hacemos la siguiente asociación:

$$
\begin{aligned}
e^{\sigma} e^{2q} &= \frac{\Sigma}{\Delta} &\quad (139)\\
e^{\sigma} e^{2q} r^2 &= \Sigma &\quad (140)\\
e^{\sigma} r^2 \sin^2\theta &= \eta &\quad (141)
\end{aligned}
$$

De la ultima ecuación obtenemos que

$$e^{\sigma} = \frac{\eta}{\rho^2} \tag{142}$$

y mirando la primera vemos que

$$e^{2q} = \frac{\Sigma}{\Delta} e^{-\sigma} = \frac{\Sigma}{\Delta}\frac{\rho^2}{\eta} = \frac{\Sigma r^2 \sin^2\theta}{r^2\eta} = \frac{\Sigma \sin^2\theta}{\eta} \tag{143}$$

es decir

$$e^{2q} = \frac{(\bar{r}^2 + m^2\cos^2\theta)^2}{(\bar{r}^2 + m^2)^2 - m^2 r^2 \sin^2\theta}. \tag{144}$$

Es importante tener en cuenta que en las coordenadas isotrópicas, el horizonte de eventos se encuentra en $r = 0$. Las ecuaciones de Einstein de vacío estacionarias son:

$$\Delta\sigma = -\frac{(\partial\omega)^2}{\eta^2} \tag{145}$$

$$\bar{\Delta} q = 3\frac{(\partial\omega)^2}{4\eta^2} - \frac{(\partial\sigma)^2}{4} \tag{146}$$

Veamos ahora el comportamiento de las funciones σ, q y sus derivadas cerca del horizonte $r = 0$. Tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} e^{2q} &= \frac{(1+\cos^2\theta)^2}{4} &\quad (147)\\
\lim_{r\to 0} r^2 e^{\sigma} &= \frac{4m^2}{1+\cos^2\theta} &\quad (148)\\
\lim_{r\to 0} r\partial_r\sigma &= -2 &\quad (149)\\
\lim_{r\to 0} \partial_r q &= -\frac{1+2\cos^2\theta}{m(1+\cos^2\theta)} &\quad (150)
\end{aligned}
$$

El comportamiento de estas funciones cerca del horizonte nos indica que la integral de cada término de (146) es finita.

3.1.4. Discusión

En esta sección hemos estudiado las soluciones estacionarias de electrovacío para las ecuaciones de Einstein en coordenadas de Weyl. Hemos hallado que en todos los casos analizados, la integral directa de las ecuaciones en todo el 3-espacio no se puede realizar para dos agujeros negros subextremos (uno podría conconsider al espaciotiempo de Minkowski como el límite *extremo* del agujero negro *sub-extremo* de Schwarzchild). Esto se debe a divergencias en la región próxima al horizonte de eventos, representada por un segmento ubicado en el eje de simetría axial. Sin embargo, hemos observado que tanto para el agujero negro de Reissner-Nordström extremo como de Kerr extremo, estas divergencias desaparecen. En el límite extremo, las coordenadas de Weyl están directamente relacionadas con las coordenadas isotrópicas y el horizonte queda representado por un punto en el espacio. La integral de las ecuaciones estacionarias de Einstein-Maxwell se puede realizar sin mayores dificultades resultando en cantidades finitas relacionadas con los parámetros del sistema como M, Q, J. Estas observaciones serán puestas en práctica en la siguiente sección.

3.2. Integración de las ecuaciones Axisimétricas Estacionarias de Einstein.

En esta sección centramos nuestro estudio en las ecuaciones de Einstein estacionarias para uno y múltiples agujeros negros y ver su posible integración en todo el espacio. Para tal fin es necesario definir condiciones de borde para las distintas funciones que intervienen en las ecuaciones. La elección de éstas estará motivada por lo analizado en la sección anterior sobre el análisis de soluciones conocidas para un agujero negro. Concretamente nos restringiremos al estudio de las ecuaciones de Einstein para soluciones que describan agujeros negros extremos en el sentido de que las funciones métricas tendrán un comportamiento asintótico cerca del horizonte similar al observado en Reissner-Nordström y Kerr extremos.

Como vimos en la sección 2.3, la métrica de un espacio-tiempo estacionario, axialmente simétrico en electro-vacío se puede escribir en la forma:

$$ds^2 = -\rho e^{-\sigma} dt^2 + e^{\sigma} \rho^2 (d\phi - w dt)^2 + e^{2q+\sigma}(d\rho^2 + dz^2) \tag{151}$$

Definiendo $u = -\sigma/2 - \log \rho$, $\lambda = q + \sigma/2$ las ecuaciones de Einstein-Maxwell son

$$\nabla(e^{2u} \nabla\psi) + e^{4u} \nabla\chi \cdot \nabla\omega = 0 \tag{152}$$

$$\nabla(e^{2u} \nabla\chi) - e^{4u} \nabla\psi \nabla\omega = 0 \tag{153}$$

$$\nabla[e^{2u} \nabla\omega] = 0 \tag{154}$$

$$\Delta u - e^{2u}|\nabla\omega|^2 - e^{2u}(|\nabla\chi|^2 + |\nabla\psi|^2) = 0 \tag{155}$$

donde denotamos $\nabla\omega := 2(\nabla v + \chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)$. Además, las ecuaciones para la función q son

$$\begin{aligned} dq &= d\sigma + \rho[u_\rho^2 - u_z^2 + \frac{1}{4}e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2) + \psi_\rho^2 - \psi_z^2]d\rho + \\ &+ 2\rho[u_\rho u_z + \frac{1}{4}e^{4u}\omega_\rho\omega_z + e^{2u}(\chi_\rho\chi_z + \psi_\rho\psi_z)]dz \end{aligned} \tag{156}$$

Teniendo en cuenta que en simetría axial la fuerza entre agujeros negros se relaciona de forma directa con el valor de la función q en el eje de simetría entre los agujeros, estudiaremos en primer lugar las ecuaciones dadas para q. Para lograr simplificar el análisis convertiremos las dos ecuaciones de primer orden para q dadas en (156) en una única ecuación de segundo orden. Luego de esto estudiaremos la integrabilidad de dicha ecuación en todo el espacio.

3.2.1. Tratamiento a la Li-Tian-Weinstein

Uno de los primeros resultados que muestran la naturaleza atractiva de la interacción gravitatoria se debe a Li-Tian [12]. El sistema que ellos consideran es el de dos agujeros negros iguales rotantes, en vacío, ubicados en el eje de simetría, en $z = \pm a$. Siguiendo la idea de Li-Tian vamos a realizar el mismo procedimiento realizado por ellos al caso que nos interesa a nosotros. Integramos la ecuación (156) para $z = 0$ (entre los agujeros negros), sobre una línea que va desde $\rho = 0$ a $\rho = \infty$. La simetría ante reflexión debida al hecho de que los agujeros son idénticos nos permite descartar algunas derivadas parciales con respecto a z en la ecuación para $\partial_\rho q$. Más precisamente tenemos.

$$q_\rho = \rho[u_\rho^2 - u_z^2 + \frac{1}{4}e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2)] \tag{157}$$

Evaluando en $z = 0$ y usando la simetría alrededor del plano $z = 0$, la ecuación anterior queda.

$$q_\rho|_{z=0} = \rho[u_\rho^2 + \frac{1}{4}e^{4u}\omega_\rho^2] \tag{158}$$

Integrando entre $\rho = 0$ a ∞ y usando el hecho de que la solución es asintóticamente plana obtenemos

$$q_i = -\int_0^\infty \rho[u_\rho^2 + \frac{1}{4}e^{4u}\omega_\rho^2]d\rho \leq 0 \tag{159}$$

donde no hemos escrito explícitamente el subíndice $z = 0$ en el lado izquierdo ya que el valor de la función q es constante sobre cada porción conexa del eje. Recordemos que un valor negativo para q_i implica un valor positivo para

la fuerza $\mathcal{F}_i = \frac{1}{4}(e^{-q_i} - 1)$.
Este es el mismo resultado que Li y Tian encontraron para dos agujeros rotantes idénticos: el argumento debe de valer en el caso de agujeros negros diferentes ya que las derivadas con respecto a z, que aparecen con el signo inapropiado en la ecuación, no se pueden cancelar.

Einstein-Maxwell

El procedimeinto anterior de Li-Tian en el caso en que hay campo electromagnético parece ser directo si los agujeros negros se mantienen iguales. Más aún, incluso en el caso en que haya un número par arbitrario de agujeros negros, no necesariamente todos iguales, pero ubicados de manera tal que el sistema completo posee simetría con respecto a reflexión por el plano $z = const.$, en base a esto, hemos logrado obtener el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Consideremos un sistema de N agujeros negros, axisimétrico, que satisfaga las ecuaciones estacionarias de Einstein-Maxwell, que posea simetría de reflexión por el plano $z = C = const.$, donde z denota la dirección de simetría axial, entonces la fuerza calculada como la intensidad de la singularidad cónica en el eje, en $z = C$ es atractiva, es decir*

$$\mathcal{F}_C \geq 0 \tag{160}$$

Una ventaja de este enfoque es que en sistemas con simetría de reflexión por un plano, se obtiene que la fuerza de interacción entre los agujeros negros a ambos lados del plano, es positiva. Sin embargo no se conoce una estimación de la misma en términos de parámetros físicos del sistema.

Notemos que la fuerza positiva implica que la singularidad cónica está asociada con una fuerza repulsiva necesaria para mantener a los agujeros negros a una distancia fija, y por lo tanto, interpretamos a esto como que los agujeros negros poseen una interacción atractiva.

En las secciones 3.3.2 y 3.2.3 veremos otra manera de integrar las ecuaciones de Einstein que nos dará estimaciones para la fuerza en términos de cantidades propias del sistema.

Demostración. Tenemos que la componente ρ de la ecuación (156) en el caso electromagnético es

$$\partial_\rho q = \rho \left[u_\rho^2 - u_z^2 + \frac{1}{4} e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2) + \psi_\rho^2 - \psi_z^2 \right] \tag{161}$$

Por simetría de reflexión, las derivadas con respecto a z en $z = C$ deben anularse, lo que nos deja.

$$\partial_\rho q|_{z=C} = \rho \left[u_\rho^2 + \frac{1}{4} e^{4u}\omega_\rho^2 + e^{2u}(\chi_\rho^2 + \psi_\rho^2) \right]_{z=C} \tag{162}$$

Integramos esta ecuación desde $\rho = 0$ a $\rho \to \infty$ y usamos el hecho de que la métrica es asintóticamente plana para descartar la contribución $q_{\rho\to\infty}$, resultando en

$$-q|_{z=C} = \int_0^\infty \rho \left[u_\rho^2 + \frac{1}{4} e^{4u} \omega_\rho^2 + e^{2u}(\chi_\rho^2 + \psi_\rho^2) \right]_{z=C} d\rho. \tag{163}$$

Pero el lado derecho de esta ecuación es siempre positivo, lo que resulta en

$$q_C \leq 0. \tag{164}$$

Finalmente, usando

$$\mathcal{F}_C = \frac{1}{4}\left(e^{-q_C} - 1\right) \geq 0 \tag{165}$$

queda demostrado el teorema. □

3.2.2. Ecuación de segundo orden para la función q

En esta sección vamos a trabajar con las ecuaciones (152)-(156) para obtener una ecuación de segundo orden para q. Descomponiendo la 1-forma dq de (156) en componentes tenemos

$$q_\rho = \rho[u_\rho^2 - u_z^2 + \frac{1}{4} e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2)] \tag{166}$$

y su derivada

$$\begin{aligned} q_{\rho\rho} &= [u_\rho^2 - u_z^2 + \frac{1}{4} e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2)] \\ &+ \rho[2u_\rho u_{\rho\rho} - 2u_z u_{z\rho} + u_\rho e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + \frac{1}{4} e^{4u}(2\omega_\rho \omega_{\rho\rho} - 2\omega_z \omega_{z\rho}) \\ &+ 2u_\rho e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2) \\ &+ e^{2u}(2\chi_\rho \chi_{\rho\rho} - 2\chi_z \chi_{z\rho} + 2\psi_\rho \psi_{\rho\rho} - 2\psi_z \psi_{z\rho})]. \end{aligned} \tag{167}$$

De igual manera tenemos que

$$q_z = 2\rho[u_\rho u_z + \frac{1}{4} e^{4u} w_\rho w_z + e^{2u}(\chi_\rho \chi_z + \psi_\rho \psi_z)] \tag{168}$$

$$\begin{aligned} q_{zz} &= 2\rho[u_{\rho z} u_z + u_\rho u_{zz} + u_z e^{4u} w_\rho w_z + \frac{1}{4} e^{4u}(w_{\rho z} w_z + w_\rho w_{zz}) \\ &+ e^{2u}(\chi_{\rho z}\chi_z + \chi_\rho \chi_{zz} + \psi_{\rho z}\psi_z + \psi_\rho \psi_{zz}) \\ &+ 2e^{2u} u_z(\chi_\rho \chi_z + \psi_\rho \psi_z)]. \end{aligned} \tag{169}$$

Teniendo en cuenta que

$$\bar{\Delta} = \partial_\rho^2 + \partial_z^2 \tag{170}$$

calculamos

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} q &= (u_\rho^2 - u_z^2) + \frac{1}{4} e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2) + 2\rho u_\rho \bar{\Delta} u \\
&+ \rho u_\rho e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + \frac{\rho}{2} e^{4u}\omega_\rho \bar{\Delta}\omega + 2\rho u_\rho e^{2u}(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2) + 2\rho e^{2u}\chi_\rho \bar{\Delta}\chi \\
&+ 2\rho e^{2u}\psi_\rho \bar{\Delta}\psi + 2\rho u_z e^{4u}\omega_\rho \omega_z + 4\rho e^{2u} u_z(\chi_\rho \chi_z + \psi_\rho \psi_z) \qquad (171)
\end{aligned}$$

que reordenando un poco estos términos llegamos a:

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} q &= (u_\rho^2 - u_z^2) + e^{2u}(1 + 2\rho u_\rho)(\chi_\rho^2 - \chi_z^2 + \psi_\rho^2 - \psi_z^2) \\
&+ 2\rho u_\rho \bar{\Delta} u + (\frac{1}{4} + \rho u_\rho) e^{4u}(\omega_\rho^2 - \omega_z^2) + \frac{\rho}{2} e^{4u}\omega_\rho \bar{\Delta}\omega + 2\rho e^{2u}\chi_\rho \bar{\Delta}\chi \\
&+ 2\rho e^{2u}\psi_\rho \bar{\Delta}\psi + 2\rho u_z e^{4u}\omega_\rho \omega_z + 4\rho e^{2u} u_z(\chi_\rho \chi_z + \psi_\rho \psi_z) \qquad (172)
\end{aligned}$$

Usando

$$\nabla^2 = \Delta = \bar{\Delta} + \frac{1}{\rho}\partial_\rho$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} q &= \Delta u 2\rho u_\rho - (u_\rho^2 + u_z^2) - \frac{u_\rho}{\rho} \\
&- e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] + 2\rho e^{2u}\chi_\rho[u_\rho \chi_\rho + 2u_z \chi_z + \Delta\chi] \\
&+ 2\rho u_\rho e^{2u}\psi_\rho[u_\rho \psi_\rho + 2u_z \psi_z + \Delta\psi] \\
&- 2\rho u_\rho e^{2u}(\chi_z^2 + \psi_z^2) - \frac{1}{4} e^{4u}(\partial\omega)^2 \\
&+ \frac{\rho}{2}\omega_\rho e^{4u}[\Delta\omega + 2\rho u_\rho \omega_\rho + 4u_z \omega_z] - \rho u_\rho e^{4u}\omega_z^2 \qquad (173)
\end{aligned}$$

Usamos las ecuaciones (152), (153) y (154)

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} q &= \Delta u 2\rho u_\rho - (u_\rho^2 + u_z^2) - \frac{u_\rho}{\rho} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] \\
&+ 2\rho e^{2u}\chi_\rho[2e^{2u}\nabla\psi\nabla\omega - u_\rho \chi_\rho] + 2\rho e^{2u}\psi_\rho[-2e^{2u}\nabla\chi\nabla\omega - u_\rho \psi_\rho] \\
&- 2\rho u_\rho e^{2u}(\chi_z^2 + \psi_z^2) - \frac{1}{4} e^{4u}(\partial\omega)^2 \\
&+ \frac{\rho}{2}\omega_\rho e^{4u}[-2u_\rho \omega_\rho] - \rho u_\rho e^{4u}\omega_z^2 \qquad (174)
\end{aligned}$$

reordenando una vez mas:

$$\bar{\Delta} q = \Delta u 2\rho u_\rho - (u_\rho^2 + u_z^2) - \frac{u_\rho}{\rho} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] \qquad (175)$$

$$+4\rho e^{4u}\chi_\rho \nabla\chi\nabla w - 2\rho e^{2u} u_\rho[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - 4\rho\psi_\rho e^{4u}\nabla\chi\nabla\omega \qquad (176)$$

$$-\frac{1}{4} e^{4u}(\partial w)^2 - \rho u_\rho e^{4u}(\partial w)^2 \qquad (177)$$

Un paso mas y vemos que:

$$\bar{\Delta}q = \Delta u 2\rho u_\rho - (\partial u)^2 - \frac{u_\rho}{\rho} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2](1 + 2\rho u_\rho) \tag{178}$$

$$-\frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2(1 + 4\rho u_\rho) + 4\rho e^{4u}(\chi_\rho \nabla\psi\nabla w - \psi_\rho\nabla\chi\nabla w) \tag{179}$$

$$\bar{\Delta}q = 2\rho u_\rho[\Delta u - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \frac{1}{2}e^{4u}(\partial w)^2] \tag{180}$$

$$-(\partial u)^2 - \frac{u_\rho}{\rho} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2 \tag{181}$$

$$+2\rho e^{4u}(\chi_\rho\nabla\psi\nabla w - \psi_\rho\nabla\chi\nabla w) \tag{182}$$

Con lo cual finalmente obtenemos,

$$\bar{\Delta}q = -(\partial u)^2 - \frac{u_\rho}{\rho} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2 \tag{183}$$

$$+2\rho e^{4u}(\chi_\rho\nabla\psi\nabla w - \psi_\rho\nabla\chi\nabla w). \tag{184}$$

por otro lado como

$$u = -\frac{\sigma}{2} - \ln\rho$$

vemos que

$$\bar{\Delta}q = -(\partial u)^2 - \frac{u_\rho}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2 \tag{185}$$

$$+2\rho e^{4u}(\chi_\rho\nabla\psi\nabla w - \psi_\rho\nabla\chi\nabla w)$$

Donde finalmente obtenemos la ecuación de segundo orden buscada para q.

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}q &= -\frac{(\partial\sigma)^2}{4} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2 \\ &+ 2\rho e^{4u}(\chi_\rho\nabla\psi\nabla w - \psi_\rho\nabla\chi\nabla w)\end{aligned} \tag{186}$$

Discusión

Resulta llamativo el último término que aparece en esta ecuación, debido a que no aparece, por ejemplo, cuando se estudian datos iniciales maximales de electrovacío. Notamos que este término está relacionado con la expresión para el vector de Poynting en electromagnetismo, es decir, el vector $\mathbf{S} = \mathbf{B} \times \mathbf{E}$, que en nuestro caso se traduce a las derivadas primeras, cruzadas de los potenciales electromagnéticos ψ y χ.

3.2.3. Integración de $\bar{\Delta}q$.

En esta sección centramos nuestra atención en la integral de $\bar{\Delta}q$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{a}_i\}$ (el lado derecho de (186)), como mencionamos anteriormente, esperamos que nos brinde información acerca de la interacción entre agujeros negros. En la siguiente sección analizaremos el lado derecho de la ecuación (186).

Para poder realizar dicha integral, como mencionamos anteriormente, es necesario definir condiciones de borde para las funciones involucradas. Imponemos que la solución describa un espacio asintóticamente plano en infinito y que sea integrable. Las condiciones más delicadas se encuentran en el eje de simetría. Nos concentramos en agujeros negros extremos.

Obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.2. *Consideremos una solución de las ecuaciones estacionarias de Einstein en simetría axial y electrovacío, asintóticamente plana que describa a uno o mas agujeros negros ubicados en el eje de simetría en* $\mathbf{a}_i$*. Suponemos que* q *es regular fuera del eje, acotada y* $\partial q = o(\rho^{-1})$ *cerca del eje* $\rho = 0$*. Además denotamos por* L_i *la longitud euclidea de la porción* $\mathcal{L}_i$ *del eje entre dos agujeros adyacentes y* $q_i = q|_{\mathcal{L}_i}$*. Luego*

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{a}_i\}} \bar{\Delta} q dx^3 = \sum_i L_i q_i. \tag{187}$$

Discusión y Análisis.

- Como muestra (187), la integración se realiza sobre la 3-superficie espacial maximal $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{a}_i\}$ que tomamos como una superficie $t = const.$ en el espaciotiempo $(\mathcal{V}, g)$.

- El punto clave de esta proposición es el tipo de agujeros negros considerados. El enunciado se refiere a agujeros negros representados por "punctures" sobre el eje de simetría, es decir, los horizontes de los agujeros negros son segmentos de longitud cero. Estos horizontes se llaman horizontes degenerados y están directamente relacionados con los agujeros negros extremos en el sentido de máximas cargas/momento angular por unidad de masa, como vimos en la sección anterior.

- Claramente, lo que determina que la integral del Laplaciano de q sea finita o no es el tipo de condiciones de borde que satisface q. Aquí es donde usamos lo estudiado en la sección anterior. Vimos, por ejemplo que al realizar la integral del Laplaciano para un agujero negro de RN subextremo, ésta diverge debido a que q diverge en el horizonte. Sin embargo, vimos también que en el límite extremo, $q \to 0$, por lo que el lado izquierdo de (187) es cero. Esto es consistente con el hecho de que la solución de Reissner-Nordström es regular, describe a un único agujero negro y no presenta singularidades cónicas en el eje de simetría. Debido a que estamos considerando soluciones asintóticamente planas, el valor de q en las porciones no acotadas del eje es cero (ver [21]). Luego estudiaremos también las condiciones de contorno para las demás funciones (σ, ψ χ) para determinar si las ecuaciones estacionarias de Einstein se pueden integrar sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{a}_i\}$.

- Como sabemos, en simetría axial la fuerza está relacionada de forma directa con el valor de la función q en el eje de simetría. Por lo tanto, si q_i y L_i son finitos, esperamos que la interacción entre los agujeros negros sea acotada.
- La proposición también se aplica al caso de soluciones regulares, como Reissner-Nordström extremo o Kerr extremo, En dichos casos, la integral del Laplaciano de q es cero, ya que $q_i = 0$.
- Si vemos el limite $L \to \infty$ que correspondería al caso en que los agujeros negros están lo suficientemente alejados uno de otros, esperamos que la fuerza vaya a cero con lo cual debemos tener que $q_i \to 0$.
- En el caso en que $L \to 0$ es decir, los agujeros negros suficientemente próximos y asumiendo que q_i se mantiene acotada, entonces $\int \bar{\Delta} q dx^3 \to 0$.

Demostración. Realizamos la integración en coordenadas cilíndricas y tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{a}_i\}} \bar{\Delta} q\rho d\rho dz = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int [(\partial_\rho q)\rho]\,|_{\rho=\epsilon}^{\rho=\infty} dz - \int q|_{\rho=\epsilon}^{\rho=\infty} dz\right] - \tag{188}$$

$$- \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{a}_i\}} (\partial_z q)\rho|_{z=-\infty}^{z=+\infty} d\rho \tag{189}$$

El primer término es cero por la condición $\partial q = o(\rho^{-1})$. El tercer término es cero por la condición de asintóticamente plano, la regularidad fuera del eje y la condición $\partial q = o(\rho^{-1})$. Finalmente, el segundo término contribuye debido a los valores no nulos de q en $\mathcal{L}_i$

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{a}_i\}} \bar{\Delta} q\rho d\rho dz = -\sum_i \int_{\mathcal{L}_i} q dz = -\sum_i L_i q_i \tag{190}$$

Lo que demuestra el enunciado. □

3.2.4. Relaciones entre Fuerza, Masa y Carga.

En esta sección buscamos obtener cotas para el valor de la fuerza. El tratamiento que tomaremos es la integración de la ecuación de segundo orden para q.

Basados en lo que vimos en la sección anterior, y con el fin de simplificar el análisis, para integrar la ecuación para $\bar{\Delta}q$ (186), vamos a hacer la suposición de que la 3-superficie de integración corresponde a un *dato inicial maximal estacionario*. En este caso tenemos la ecuación más simple

$$\bar{\Delta}q = -\frac{(\partial\sigma)^2}{4} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2 - \Delta\sigma \tag{191}$$

Remarcamos que esta ecuación, obtenida a partir de las ecuaciones completas de Einstein estacionarias, se corresponde con la ecuación Hamiltoniana, parte de las ecuaciones de vínculo de Einstein.

Integramos la ecuación de segundo orden para q, (191), en todo el espacio y usamos el resultado de la sección anterior obtenemos

$$\begin{aligned} -\sum_i L_i q_i &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{a}_i\}} \bar{\Delta}q d^3x = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{a}_i\}} \left\{ -\frac{(\partial\sigma)^2}{4} - e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2] - \right. \\ &- \left. \frac{1}{4}e^{4u}(\partial w)^2 - \Delta\sigma \right\} d^3x \end{aligned} \tag{192}$$

Antes de analizar esta ecuación, introducimos la siguiente notación

Definición 3.3.

$$\alpha : = \int \frac{1}{4}e^{4u}(\partial\omega)^2 dx^3 \tag{193}$$

$$M_0 : = \frac{1}{32\pi}\int [(\partial\sigma)^2 + 4e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2]]dx^3 \tag{194}$$

Notemos que la toda la información acerca del potencial ω está incluida en la cantidad α, no interviniendo en el funcional M_0.

Luego, la ecuación (192) queda

$$\sum_i L_i q_i = \alpha + 8\pi M_0 + \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{\mathbf{a}_i\}} \Delta\sigma\ d^3x \tag{195}$$

Ahora sí, podemos presentar la primera desigualdad entre los parámetros físicos del sistema

Teorema 3.4. *Consideremos una solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell estacionaria y axialmente simétrica que describa N agujeros negros ubicados en la posición $\mathbf{a}_i$ sobre el eje de simetría. Suponemos que q es regular fuera del eje, acotada y $\partial q = o(\rho^{-1})$ cerca del eje $\rho = 0$. Además $e^\sigma = O(r_i^{-1/2})$ cerca de cada puncture. Los potenciales ω, ψ, χ son acotados y sus derivadas se anulan cuando $\rho \to 0$.*
Sea $\mathcal{F}_i = 1/4(e^{-q_i} - 1)$ la fuerza entre dos agujeros negros, entonces tenemos

$$\sum_i \frac{L_i}{8\pi}\ln(1 + 4\mathcal{F}_i) \geq \sum_i |Q_i| - m \tag{196}$$

donde m es la masa ADM, Q_i la carga y L_i la longitud de la i-esima componente conexa del horizonte.

Discusión y Análisis

- Es esperable que esta desigualdad pueda obtenerse también sin considerar las ecuaciones de Einstein completas, solo considerando un dato inicial maximal ya que no aprovecha la condición de estacionariedad. La relevancia de las ecuaciones estacionarias estuvo en obtener la ecuación (191) como una igualdad. Recordemos que en el caso dinámico general, la ecuación (191) resulta en realidad una desigualdad. Sin embargo, al utilizar el principio variacional, perdemos esta mejora en la cota, y por lo tanto, no podemos establecer la positividad de la fuerza en general, ni siquiera para un caso con una simetría extra como la de reflexión. Parece ser que para poder mejorar la cota en el teorema anterior es necesario un principio variacional diferente u otro método de prueba, quizas integrando las ecuaciones para q de primer orden, a la Li-Tian, quizás aprovechando la ecuación para $\partial_z q$.

- Notemos que otro factor que interviene en la precisión de la cota anterior es el término que involucra a ω, y que despreciamos por ser no negativo. Es importante destacar que si incluimos ω en el funcional M_0, no podríamos obtener una cota explícita para la fuerza en términos de cantidades físicas como m, Q_i, J_i ya que no se conoce un minimizante o mínimo explícito para M_0, y esa es la base de la prueba del teorema. Sin embargo, para el caso en que no incluimos ω en el funcional, este minimizante sí se conoce y de hecho es la solución axisimétrica de Majumdar-Papapetrou.

- La condición de simetría axial es necesaria debido a que la fuerza de Weinstein fue definida bajo esta suposición. Por otro lado la métrica axialmente simétrica es mas simple de tratar ya que tiene una forma general en término de unas pocas funciones libres.

- El comportamiento de las funciones métricas y de los potenciales es necesario para poder integrar las ecuaciones de Einstein estacionarias. Esto esta relacionado con los agujeros negros extremos. Como mencionamos anteriormente, los agujeros negros extremos son puntos en estas coordenadas, no segmentos como en los casos sub-extremos analizados en la sección 3.1 (horizonte degenerado).

- Notemos que el caso de Majumdar-Papapetrou esta contemplado en esta desigualdad, recordemos que que para este caso en el que $Q_i = m_i$, la fuerza neta entre los agujeros negros es cero.

- De la expresión para $\mathcal{F}_i$ vemos que $\mathcal{F}_i > -\frac{1}{4}$, esta es una cota universal para la fuerza que sale del hecho de que el máximo valor negativo que puede tomar es $-\frac{1}{4}$ y se alcanza cuando $Q_i \to \infty$.
- Si $\sum_i Q_i > m$ debemos tener que

  $$\sum_i \frac{L_i}{8\pi}(1 + 4\mathcal{F}_i) > 0$$

  y si consideramos $N = 2$ entonces

  $$\frac{L}{8\pi}\log(1 + 4\mathcal{F}) > 0 \Rightarrow \mathcal{F} > 0$$

  es decir, la fuerza en atractiva.
  En el caso de que $N = 3$ vemos que

  $$\frac{L_1}{8\pi}(1 + 4\mathcal{F}_1) + \frac{L_2}{8\pi}(1 + 4\mathcal{F}_2) > 0$$

  y aquí no podemos garantizar que toda $\mathcal{F}_i > 0$ pero al menos una lo sera.

Demostración. Partimos de la relación entre la masa ADM y la integral de volumen del laplaciano de la función σ

$$\int \Delta\sigma \; d^3x = -8\pi m \tag{197}$$

por lo tanto

$$\sum_i L_i q_i = \alpha + 8\pi M_0 - 8\pi m \tag{198}$$

Con esto tenemos

$$\sum_i L_i q_i = 8\pi M_0 - 8\pi m \tag{199}$$

es decir

$$8\pi m = 8\pi M_0 - \sum_i L_i q_i. \tag{200}$$

En la sección 3.3, teorema 3.6 probamos que

$$M_0 \geq \sum_i |Q_i| \tag{201}$$

donde Q_i son las cargas eléctricas de cada agujero negro. Esto nos lleva a

$$8\pi m \geq 8\pi \sum_i |Q_i| - \sum_i L_i q_i \tag{202}$$

Usando la relación entre los valores q_i y las fuerzas

$$F_i = \frac{1}{4}(e^{-q_i} - 1) \tag{203}$$

queda demostrado el teorema. □

Corolario 3.5. *Para una solución regular axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein que represente muchos agujeros negros ubicados en el eje de simetría se tiene*

$$m \geq \sum_i |Q_i| \tag{204}$$

donde m es la masa ADM de la solución y Q_i son las cargas individuales de los agujeros negros.

Mencionamos este resultado aparte del anterior porque como veremos en la sección siguiente, es válido para sistemas más generales que los incluidos en el teorema 3.4. Más aún, este teorema, que muestra la positividad de la masa en el caso electromagnético, será probado utilizando una técnica diferente.

Demostración. Partimos de (195) al ser regular tenemos que $\int \bar{\Delta} q dx^3 = 0$. Luego podemos escribir

$$8\pi m = 8\pi M_0 + \alpha. \tag{205}$$

Teniendo en cuenta el teorema 3.6 vemos:

$$m \geq M_0 \geq \sum_i |Q_i| \tag{206}$$

□

3.3. Desigualdad $M_0 \geq \sum_i |Q_i|$

En esta sección nos dedicamos a probar el teorema que fue mencionado con anterioridad basándonos en un artículo de Dain [8]. Antes de enunciar el teorema, precisemos la terminología adecuada.

Sea B_R la bola de radio R en $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen.
Definimos el anillo $A = B_R \setminus B_\varepsilon$ donde $R > \varepsilon > 0$ son dos constantes arbitrarias.
Sea el funcional M_0 definido como:

$$M_0 = \frac{1}{32\pi} \int_A [(\partial\sigma)^2 + 4e^{2u}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2]] dx^3 \tag{207}$$

O bien:

$$M_0 = \frac{1}{32\pi} \int_A [(\partial\sigma)^2 + 4e^{-\sigma-h}[(\partial\chi)^2 + (\partial\psi)^2]] dx^3 \tag{208}$$

Sea $H_0^1(A)$ el espacio estándar de Sobolev en A, que es la clausura de $C_0^\infty(A)$ bajo la norma

$$\|\alpha\|_{1;A} = \left(\int_A |\partial\alpha|^2 d\mu\right)^{1/2}. \tag{209}$$

Y definimos el espacio de Sobolev pesado $H^1_{0,h}(A)$ como la clausura de $C_0^\infty(A \setminus \Gamma)$ bajo la norma

$$\|y\|_{1,h;A} = \left(\int_A e^{-2h} |\partial y|^2 d\mu \right). \tag{210}$$

Teorema 3.6. *Considere N agujeros negros ubicados sobre el eje de simetría axial con cargas eléctricas Q_{Ei} y magnéticas Q_{Mi}. Se tiene*

$$M_0 \geq \sum_i |Q_i| \tag{211}$$

La prueba de este resultado se realiza siguiendo los argumentos de Dain [8] y está estructurada en los lemas presentados abajo.

Lema 3.7. *Consideremos el funcional definido por (208) en el anillo A, sea $h = 2\log(\rho)$. Dados σ_0, ψ_0, χ_0 la solución de Reissner–Nordström extremo. Entonces existen:*

$$\alpha_0 \in H^1_0(A), \quad y_0 \in H^1_{0,h}(A), \quad z_0 \in H_{0,h}(A) \tag{212}$$

Tal que:

$$M_A(\sigma_0 + \alpha, \chi_0 + y, \psi_0 + z) \geq M_A(\sigma_0 + \alpha_0, \chi_0 + y_0, \psi_0 + z_0) \tag{213}$$

Para toda $\alpha \in H^1_0(A)$ e $y, z \in H^1_{0,h}(A)$. Por otra parte, el mínimo (α_0, y_0, z_0) satisface:

$$\alpha_0 \in L^\infty(A), \quad e^{-h/2} y_0 \in L^\infty(A), \quad e^{-h/2} z_0 \in L^\infty(A) \tag{214}$$

y las funciones

$$X = e^{h+\sigma_0+\alpha_0}, \quad \chi = \chi_0 + y_0, \quad \psi = \psi_0 + z_0 \tag{215}$$

definen un mapa harmónico de $(X, \chi, \psi) : A \setminus \Gamma \to \mathbb{H}^2$ que satisface las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\Delta \log(X) = -\frac{|\partial \chi|^2}{X^2} \tag{216}$$

$$\Delta \chi = 2 \frac{\partial \chi \partial X}{X} \tag{217}$$

En $A \setminus \Gamma$.

Demostración. Comenzamos definiendo:

$$m_0 = \inf_{\alpha \in H^1_0(A), y, z \in H^1_{0,h}(A)} M_A(\alpha, y, z) \tag{218}$$

Como M es acotada inferiormente, m_0 es finito.
Sea (α_n, y_n, z_n) una secuencia minimizante, esto es:

$$M_A(\alpha_n, y_n, z_n) \to m_0 \text{ cuando } n \to \infty \tag{219}$$

Para probar la existencia de un mínimo, vamos a probar que existe alguna subsecuencia de (α_n, y_n, z_n) que converge al actual minimizador (α_0, y_0, z_0). Para probar esto, vamos a mostrar que para toda secuencia minimizante es posible construir otra secuencia minimizante tal que α_n es uniformemente acotada.
Definimos σ_n, χ_n, ψ_n por:

$$\sigma_n = \sigma_0 + \alpha_n, \quad \chi_n = \chi_0 + y_n, \quad \psi_n = \psi_0 + z_n \tag{220}$$

Primero obtenemos una cota inferior para σ_n.

$$C_1 = \min_{\partial A} \sigma_0 \tag{221}$$

la constante C_1 depende de R y ε, en particular C_1 no esta definido cuando $\varepsilon \to 0$ por que σ_0 no esta definido en el origen. Dada $(\sigma_n, \chi_n, \psi_n)$ definimos una nueva secuencia $(\sigma_n^{'}, \chi_n, \psi_n)$ como $\sigma_n^{'} = \max\{\sigma_n, C_1\}$. Uno puede chequear que $M(\alpha_n', y_n, z_n) \leq M(\alpha_n, y_n, z_n)$.
Por otra parte, $\alpha_n^{'} \in H_0^1(A)$. Esto da una cota inferior para $\alpha_n^{'}$ en A.

$$\alpha_n^{'} \geq C_1 - \sigma_0 \geq C_1 - \max_A \sigma_0 = C_1^{'} \tag{222}$$

Usando la cota inferior vamos a probar que la secuencia minimizante puede ser elegida de tal manera que $\alpha_n \in C_0^\infty(A)$ e $y_n, z_n \in (A \setminus \Gamma)$.
Definimos el conjunto $\mathcal{H}$ como el subconjunto de $H_0^1(A)$ tal que la cota inferior (222) es satisfecha. El funcional M_A es acotado para toda función $y, z \in H_{0,h}^1(A)$ y $\alpha \in \mathcal{H}$.
Por definición, para toda $\alpha \in H_0^1(A)$ e $y, z \in H_{0,h}^1(A)$ existe una secuencia $\alpha_n \in C_0^\infty(A)$ e $y_n, z_n \in C_0^\infty(A \setminus \Gamma)$ tal que $\alpha_n \to \alpha$, $y_n \to y$ y $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$ en las normas (209) y (210) respectivamente.
Si $\alpha \in \mathcal{H}$, entonces por el lema 5.1 podemos tomar α_n tal que $\alpha_n \in \mathcal{H}$ para toda n. Para tal secuencia afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} M_A(\alpha_n, y_n, z_n) = M_A(\alpha, y, z). \tag{223}$$

Para probar esto, calculamos

$$|M_A(\alpha_n, y_n, z_n) - M_A(\alpha, y, z)| \leq I_1 + I_2 + I_3 \tag{224}$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{32\pi} \int_A ||\partial\sigma_n|^2 - |\partial\sigma|^2| du \tag{225}$$

$$I_2 = \frac{1}{32\pi} \int_A 4e^{-h} \left|e^{-\sigma_n}(\partial\chi_n)^2 - e^{\sigma}(\partial\chi)^2\right| dx^3 \tag{226}$$

$$I_3 = \frac{1}{32\pi} \int_A 4e^{-h} \left|e^{-\sigma_n}(\partial\psi_n)^2 - e^{\sigma}(\partial\psi)^2\right| dx^3. \tag{227}$$

Veamos estas integrales, para I_1 tenemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{32\pi}\int_A ||\partial\sigma_n|^2 - |\partial\sigma|^2|du = \frac{1}{32\pi}\int_A |\partial(\sigma_n+\sigma)(\sigma_n-\sigma)|dx^3 \qquad (228)\\
&\le \left[\frac{1}{32\pi}\int [\partial(\sigma_n+\sigma)]^2 dx^3\right]^{1/2}\left[\frac{1}{32\pi}\int [\partial(\sigma_n-\sigma)]^2\, dx^3\right]^{1/2}\\
&\le \left[\frac{2}{32\pi}\int (\partial\sigma_n)^2 + (\partial\sigma)^2 dx^3\right]^{1/2}\left[\frac{1}{32\pi}\int [\partial(\sigma_n-\sigma)]^2\, dx^3\right]^{1/2}\\
&\le \left[\frac{2}{32\pi}\int_A \Big[(\partial\sigma_n)^2 + 4(\partial\psi_n)^2 e^{-h-\sigma} + 4(\partial\chi_n)^2 e^{-h-\sigma} + (\partial\sigma)^2\right.\\
&+ \left.4(\partial\psi)^2 e^{-h-\sigma} + 4(\partial\chi)^2 e^{-h-\sigma}\Big] dx^3\right]^{1/2}\cdot\left[\frac{1}{32\pi}\int_A [\partial(\sigma_n-\sigma)]^2\, dx^3\right]^{1/2}\\
&\le \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32\pi}}\Big(M_A^{1/2}(\alpha_n,y_n,z_n) + M_A^{1/2}(\alpha,y,z\Big)\ ||\ \alpha-\alpha_n\ ||_{1;A} \qquad (229)
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la desigualdad de Hölder. El primer factor en la expresión anterior es acotado para toda n y $\alpha_n \to \alpha$ en $H_0^1(A)$ entonces tenemos que $I_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Veamos ahora I_2, un cálculo similar al anterior nos conduce a

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}\left|e^{-\sigma_n}(\partial\chi_n)^2 - e^{\sigma}(\partial\chi)^2\right| dx^3\\
&= \frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}\left|e^{-\sigma_n}|(\partial\chi_n)|^2 - e^{\sigma}|(\partial\chi)|^2\right| dx^3\\
&= \frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}\left|(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n + e^{\frac{\sigma}{2}}\partial\chi)(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n - e^{\frac{\sigma}{2}}\partial\chi)\right| dx^3\\
&\le \left[\frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n + e^{-\frac{\sigma}{2}}\partial\chi)^2 dx^3\right]^{1/2}\cdot\\
&\quad \left[\frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n - e^{-\frac{\sigma}{2}}\partial\chi)^2 dx^3\right]^{1/2}\\
&\le \left[\frac{2}{32\pi}\int_A 4e^{-h}[e^{-\sigma_n}(\partial\chi_n)^2 + e^{-\sigma}(\partial\chi)^2] dx^3\right]^{1/2}\cdot\\
&\quad \left[\frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n - e^{-\frac{\sigma}{2}}\partial\chi)^2 dx^3\right]^{1/2} \qquad (230)
\end{aligned}$$

el primer termino de la última expresión lo trabajamos como sigue

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{2}{32\pi}\int_A 4e^{-h}[e^{-\sigma_n}(\partial\chi_n)^2+e^{-\sigma}(\partial\chi)^2]dx^3\right]^{1/2}\\
\leq\ &\left[\frac{2}{32\pi}\int_A\Bigg((\partial\sigma)^2+(\partial\sigma_n)^2+4e^{-h}[e^{-\sigma}(\partial\psi)^2+e^{-\sigma_n}(\partial\psi_n)^2]\right.\\
+\ &\left.4e^{-h}[e^{-\sigma_n}(\partial\chi_n)^2+e^{-\sigma}(\partial\chi)^2]\Bigg)dx^3\right]^{1/2}\\
=\ &\sqrt{2}[M(\sigma_n,\chi_n,\psi_n)+M(\sigma,\chi,\psi)]^{1/2}\\
\leq\ &\sqrt{2}\left(M^{1/2}(\sigma_n,\chi_n,\psi_n)+M^{1/2}(\sigma,\chi,\psi)\right) \qquad (231)
\end{aligned}$$

mientras que el otro termino queda

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n-e^{-\frac{\sigma}{2}}\partial\chi)^2dx^3\right]^{1/2} \qquad (232)\\
=\ &\left[\frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}\left(e^{-\frac{\sigma_n}{2}}\partial\chi_n-e^{-\frac{\sigma}{2}}\partial\chi+\partial\chi e^{-\frac{\sigma_0}{2}-\frac{\alpha_n}{2}}-\partial\chi e^{-\frac{\sigma_0}{2}-\frac{\alpha_n}{2}}\right)^2dx^3\right]^{1/2}
\end{aligned}$$

recordando que $\sigma_n=\sigma_0+\alpha_n$; $\sigma=\sigma_0+\alpha$, vemos que la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{32\pi}\int_A 4e^{-h}\left(e^{-\frac{\sigma_0}{2}}(\partial\chi)(e^{-\frac{\alpha_n}{2}}-e^{\frac{\alpha}{2}})+e^{-\frac{\sigma_0}{2}-\frac{\alpha}{2}}(\partial\chi_n-\partial\chi)\right)^2dx^3\right]^{1/2}\\
\leq\ &\left[\frac{2}{32\pi}\int_A\left(4e^{-h-\sigma_0}(\partial\chi)^2(e^{-\frac{\alpha_n}{2}}-e^{\frac{\alpha}{2}})^2+4e^{-h-\sigma_0-\alpha_n}(\partial\chi_n-\partial\chi)^2\right)dx^3\right]^{1/2}\\
\leq\ &\left[\frac{2}{32\pi}\int_A 4e^{-h-\sigma_0}|\partial\chi|^2|e^{-\frac{\alpha_n}{2}}-e^{\frac{\alpha}{2}}|^2dx^3\right]^{1/2}\\
+\ &\left[\frac{2}{32\pi}\int_A 4e^{-h-\sigma_0-\alpha_n}|\partial\chi_n-\partial\chi|^2dx^3\right]^{1/2} \qquad (233)
\end{aligned}$$

y de todo lo anterior, vemos entonces que

$$I_2\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32\pi}}\left(M_A^{1/2}(\sigma_n,\chi_n,\psi_n)+M_A^{1/2}(\sigma,\chi,\psi)\right)(I_{2,1}+I_{2,2}) \qquad (234)$$

donde

$$\begin{aligned}
I_{2,1}\ &=\ \left[\int_A 4e^{-h-\sigma_0}|\partial\chi|^2|e^{-\frac{\alpha_n}{2}}-e^{\frac{\alpha}{2}}|^2dx^3\right]^{1/2} \qquad (235)\\
I_{2,2}\ &=\ \left[\int_A 4e^{-h-\sigma_0-\alpha_n}|\partial\chi_n-\partial\chi|^2dx^3\right]^{1/2}. \qquad (236)
\end{aligned}$$

La función σ_0 es positiva en A, entonces puede ser acotada por $e^{-\sigma_0} \leq 1$ y por lo tanto suprimida de la definición de $I_{2,1}$ y $I_{2,2}$. Los cálculos para I_3 son iguales a los hechos hasta aquí para I_2.
Tenemos que $\alpha_n \in \mathcal{H}$, entonces el integrando de $I_{2,1}$ es acotado por una función sumable para todo n. Como $\alpha_n \to \alpha$ podemos aplicar el teorema de la convergencia dominante para concluir que $I_{2,1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Para $I_{2,2}$ usamos nuevamente que $\alpha_n \in \mathcal{H}$ para acotar el factor exponencial e^{α_n} para todo n y con la hipótesis $y_n \to y$ en $H^1_{0,h}(A)$ concluimos que $I_{2,2} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Con estos mismos argumentos tenemos así mismo que $I_{3,1} \to 0$, $I_{3,2} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto hemos probado (223).

Dada $\alpha_k \in H^1_0(A)$, $y_k, z_k \in H^1_{0,h}(A)$ una secuencia minimizante. Sea $\alpha_{k,n} \in C_0^\infty(A)$ y $y_{k,n}$, $z_{k,n} \in C_0^\infty(A \setminus \Gamma)$ tal que $\alpha_{k,n} \to \alpha_k$, $y_{k,n} \to \alpha_k$ y $z_{n,k} \to z_k$ cuando $n \to \infty$.
Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |M_A(\alpha_{k,n}, y_{k,n}, z_{k,n}) - m_0| &\leq |M_A(\alpha_{k,n}, y_{k,n}, z_{k,n}) - M_A(\alpha_k, y_k, z_k)| \\ &+ |M_A(\alpha_k, y_k, z_k) - m_0| \end{aligned} \tag{237}$$

Para un ϵ arbitrario, por (218) existe k tal que:

$$|M_A(\alpha_k, y_k, z_k) - m_0| \leq \epsilon/2 \tag{238}$$

Para este k, por (223) existe n tal que

$$|M_A(\alpha_{k,n}, y_{k,n}, z_{k,n}) - M_A(\alpha_k, y_k, z_k)| \leq \epsilon/2. \tag{239}$$

Por lo tanto concluimos que

$$m_0 = \inf_{k,n \in N} M_A(\alpha_{k,n}, y_{k,n}, z_{k,n}). \tag{240}$$

Ahora queremos ver cotas superiores, para este fin, definimos las siguientes inversiones.

$$\bar{X} = \frac{X}{(X + \psi^2)^2} \tag{241}$$

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{X + \psi^2} \tag{242}$$

De lo anterior tenemos que

$$\frac{(\partial X)^2}{X^2} + \frac{4(\partial \psi)^2}{X} = \frac{(\partial \bar{X})^2}{\bar{X}^2} + \frac{4(\partial \bar{\psi})^2}{\bar{X}}. \tag{243}$$

Sea $\bar{h}$ una función harmónica arbitraria, definimos $\bar{\sigma}$ por

$$\bar{X} = e^{\bar{h} + \bar{\sigma}}. \tag{244}$$

Usando la siguiente identidad

$$M_A = \bar{M}_A + \oint_{\partial A} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial n}(\bar{h} + 2\bar{\sigma}) - \frac{\partial h}{\partial n}(h + 2\sigma) \right) ds \tag{245}$$

donde $\bar{M}_A = M_A(\bar{\sigma}, \bar{\chi}, \bar{\psi})$; que se obtiene de la siguiente manera, es claro que

$$(\partial \bar{X})^2 = e^{2\bar{h}+2\bar{\sigma}}(\partial \bar{h} + \partial \bar{\sigma})^2 \tag{246}$$

y del hecho de que h es una función armónica en el dominio A en $\mathbb{R}^3$ tenemos la identidad

$$M_A = M_A' - \oint_{\partial A} \frac{\partial h}{\partial n}(h + 2\sigma) ds \tag{247}$$

donde

$$M_A' = \frac{1}{32\pi} \int_A \left(\frac{(\partial X)^2}{X^2} + 4\frac{|\partial \chi|^2 + |\partial \psi|^2}{X} \right) dx^3 \tag{248}$$

y partir de (243) y (247) tenemos (245). Tomemos $h = \bar{h}$. Denotamos por K_δ el cilindro $\rho \leq \delta$. Como h es singular en el eje, con el fin de realizar las integrales, vamos a considerar el dominio $A_\delta = A \setminus K_\delta$ para algún pequeño $\delta > 0$ y luego tomamos el limite $\delta \to 0$.
La integral de borde en (245) se reduce a:

$$C_A = \lim_{\delta \to 0} \oint_{\partial A_\delta} 2\frac{\partial h}{\partial n}(\bar{\sigma} - \sigma) ds \tag{249}$$

De (241) y (244) tenemos que:

$$\bar{\sigma} - \sigma = -2\log(e^{h+\sigma} + \psi^2) \tag{250}$$

Entonces, recordando que $h = 2\log\rho$ vemos que

$$\lim_{\rho \to 0}(\bar{\sigma} - \sigma) = -2\log \psi_0^2 = -4\log|\psi_b| \tag{251}$$

donde usamos que $z \in C_0^\infty(A \setminus \Gamma)$ y $\psi^2 = \psi_b^2$ en Γ.
Y así obtenemos que

$$M_A = \bar{M}_A + C_A$$

donde

$$C_A = -16\pi(R - \epsilon)\log(\psi_b) - \oint_{\partial A} 2\frac{\partial h}{\partial n}\log(e^{h+\sigma} + \psi_b^2) ds \tag{252}$$

El punto importante es que C_A es finita.
Vamos a usar el mismo argumento anterior para obtener un limite inferior para la función $\bar{\sigma}$ en A. Tomamos

$$C_2 = \min_{\partial A} \bar{\sigma} = \min_{\partial A}\{\sigma_0 - 2\log(e^{h+\sigma_0} + \psi_b^2)\} \tag{253}$$

Como en el caso de C_1, C_2 no esta definido cuando $\epsilon \to 0$. Notemos que C_1 y C_2 son independiente de α y z.
Definimos una nueva función $\sigma' = \text{máx}\{\bar{\sigma}, C_2\}$, la energía de $\bar{\sigma}'$ es menor o igual a la energía de $\bar{\sigma}$. Entonces $\bar{\sigma}' \geq C_2$. En lo que sigue redefinimos $\bar{\sigma}'$ por $\bar{\sigma}$. De (241) tenemos que:

$$\bar{X} \leq \frac{1}{X} \tag{254}$$

y entonces

$$e^{\sigma} \leq e^{-2h-\bar{\sigma}} \leq e^{-2h-C_2} \tag{255}$$

en A. También, de (241) vemos

$$\bar{X}^{1/2} \leq \frac{X^{1/2}}{\psi^2} \tag{256}$$

Deduciendo que

$$\psi^2 \leq \frac{X^{1/2}}{\bar{X}^{1/2}} = \frac{e^{\frac{h}{2}+\frac{\sigma}{2}}}{e^{\frac{\bar{h}}{2}+\frac{\bar{\sigma}}{2}}} \leq \frac{e^{\frac{h}{2}-h-\frac{\bar{\sigma}}{2}}}{e^{\frac{h}{2}+\frac{\bar{\sigma}}{2}}} \leq e^{-h-\bar{\sigma}} \leq e^{-h-C_2}. \tag{257}$$

Estas cotas encontrados en (255) y (257) son singulares en el eje. Para obtener limites en una vecindad del eje, vamos a dividir esta vecindad en dos dominios desconectados, una parte superior y una inferior.
Fijamos $\delta > 0$ (hacemos notar que no vamos a tomar el limite $\delta \to 0$ como antes). Definimos $K_+ = A \cap K_\delta \cap \{z \geq \epsilon\}$ y $K_- = A \cap K_\delta \cap \{z \leq \epsilon\}$ buscamos estimaciones para K_+ y K_- independientemente.
En K_+ definimos las siguientes inversiones modificadas:

$$\bar{X} = \frac{X}{\left(X + (\psi - \psi_b)^2\right)^2} \tag{258}$$

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{X + (\psi - \psi_b)^2} \tag{259}$$

Tomamos $\bar{h} = -h$ e integramos (245) sobre K_+. El termino de borde estará dado entonces por

$$C_{K_+} = -2 \oint_{\partial K_+} \frac{\partial h}{\partial n}(\bar{\sigma} + \sigma) ds \tag{260}$$

donde

$$\bar{\sigma} = -2 \log \left(e^{\frac{\sigma}{2}} + e^{-h-\frac{\sigma}{2}} (\psi - \psi_b)^2 \right) \tag{261}$$

Vamos a probar que C_{K_+} es finita, la dificultad de esto esta en que h es singular en Γ.
Descomponemos el borde ∂K_+ en dos partes, la primera intersecta al eje y

esta dada por $\partial^1 = \partial K_+ \cap \partial A$.
La segunda no intersecta al eje y esta dada por $\partial^2 = \partial K_+ \cap \partial K_\delta$. En ∂^2 la función h es regular por lo cual la integral es finita. En ∂^1 tenemos que $z = \alpha = 0$. Usando el hecho que z se anula cerca del eje y el siguiente limite

$$\lim_{\rho \to 0} e^{-h} (\psi_0 - \psi_b)^2 = 0 \tag{262}$$

concluimos que la integral es también es finita.

Nuevamente usamos la misma idea anterior para obtener limites superiores.

$$C_3 = \min_{\partial K_+} \bar{\sigma} = \min_{\partial K_+} \{-2 \log \left(e^{\frac{\sigma}{2}} + e^{-h - \frac{\sigma}{2}} (\psi - \psi_b)^2 \right)\} \tag{263}$$

Por (262) tenemos que esta constante es finita. Entonces obtenemos que $\sigma \geq C_3$ en K_+ y podemos utilizar la inversión para obtener cotas superiores para $\bar{\sigma}$ en K_+. Sin embargo, aquí C_3 no depende de α y z porque estas funciones no se anulan en ∂^2.
El punto clave es que sin embargo podemos obtener cotas inferiores para C_3 que no dependen de α y z.
Con el fin de ver esto, vamos a hacerlo usando las definiciones previas de las constantes C_2 y C_1. Las estimaciones se realizan en ∂^1 y ∂^2 independientemente.
Descomponemos $C_3 = C_3^1 + C_3^2$ donde

$$C_3^1 = \min_{\partial^1} \bar{\sigma} = \min_{\partial K_+} \{-2 \log \left(e^{\frac{\sigma}{2}} + e^{-h - \frac{\sigma}{2}} (\psi + \psi_b)^2 \right)\} \tag{264}$$

$$C_3^2 = \min_{\partial^2} \bar{\sigma} = \min_{\partial K_+} \{-2 \log \left(e^{\frac{\sigma}{2}} + e^{-h - \frac{\sigma}{2}} (\psi - \psi_b)^2 \right)\} \tag{265}$$

La constante C_3^1 no depende de α y z. Para C_3^2 usamos la estimación previa (255)

$$C_3^2 \geq \tilde{C}_3^2 \tag{266}$$

donde

$$\tilde{C}_3^2 = -2 \log \left[\delta^{-2} \left(e^{-\frac{C_2}{2}} + e^{-\frac{C_1}{2}} (2\delta^{-2} e^{-C_2} + 2\psi_b^2) \right) \right] \tag{267}$$

no depende de α y z. Esto es deducido a partir de lo siguiente.
En ∂^2 $\rho = \delta$, de esto y (255) tenemos entonces que:

$$e^{\frac{\sigma}{2}} \leq e^{-h - \frac{C_2}{2}} = \delta^{-2} e^{-\frac{C_2}{2}} \tag{268}$$

Usando que

$$(\psi - \psi_b)^2 \leq 2\psi^2 + 2\psi_b^2 \tag{269}$$

por (257)

$$\psi^2 \leq e^{-h - C_2} = \delta^{-2} e^{-C_2} \tag{270}$$

de (221) tenemos

$$\frac{\sigma}{2} \geq \frac{C_1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{\sigma}{2}} \leq e^{-\frac{\sigma}{2}} \leq e^{\frac{C_1}{2}} \tag{271}$$

Con esto se tiene que $\tilde{C}_3^2$ no depende de α y z. Entonces tenemos que $C_3 = C_3^1 + C_3^2 \geq C_3^1 + \tilde{C}_3^1$, por lo tanto, en K_+ tenemos

$$e^{\sigma} \leq e^{-\bar{\sigma}} \leq e^{-C_3} \leq e^{-(C_3^1+\tilde{C}_3^2)} \tag{272}$$

$$(\psi - \psi_b)^2 \leq e^{\frac{\sigma}{2}-\frac{\bar{\sigma}}{2}+h} \leq e^{\frac{\bar{\sigma}}{2}-\frac{\bar{\sigma}}{2}+h} \leq e^{-\bar{\sigma}+h} \leq e^{-C_3+h} \leq e^{-(C_3^1+\tilde{C}_3^2)}e^{h} \tag{273}$$

Recordando que $z = \psi - \psi_0$ tenemos:

$$z \leq \psi - \psi_0 \leq |\psi - \psi_0| \leq e^{-\frac{1}{2}(C_3^1+\tilde{C}_3^2)}e^{\frac{h}{2}} \tag{274}$$

Conluyendo que $ze^{-\frac{h}{2}}$ es acotado.
El procedimiento es el mismo para la integración en K_-. □

Centramos nuestra atención ahora en ver unicidad.
Dados (σ, ψ, χ), $(\sigma_0, \psi_0, \chi_0)$ dos mapas harmónicos de $A \setminus \Gamma \Rightarrow \mathbb{H}^2$.
La distancia d entre estos dos puntos esta dada por

$$\cosh d = 1 + \delta \tag{275}$$

donde

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(2\chi_0\psi_1 - 2\chi_1\psi_0)^2 + \left((\chi_0-\chi_1)^2 + (\psi_0-\psi_1)\right)^2}{2\sigma_1\sigma_1} \\ &+ \left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_0}\right)\left[(\chi_0-\chi_1)^2 + (\psi_0-\psi_1)^2\right] + \frac{(\sigma_0-\sigma_1)^2}{2\sigma_0\sigma_1} \end{aligned} \tag{276}$$

Como las funciones σ, ψ, χ son regulares en A, d define una función $d : A \to \mathbb{R}$
Usando las siguientes dos desigualdades probadas en [18]

$$\Delta d^2 \geq 0 \tag{277}$$

y

$$\Delta\sigma \geq 0 \tag{278}$$

se deduce que

$$\Delta\delta \geq 0 \tag{279}$$

por que δ es una función convexa de d^2.

Lema 3.8. *La solución encontrada en el Lema 3.7 es única y esta dada por* $(0,0,0)$.

Demostración. Dado $(\sigma_0, \chi_0, \psi_0)$ la solución extrema de Reissner-Nordström y sea $(\sigma_1, \chi_1, \psi_1)$ otra solución del mapa de ecuaciones harmónicas (216)-(217) en $A \setminus \Gamma$, que satisfacen (215), (212) y (214). Como es usual, sean σ_0, σ_1 y σ_2 dados por

$$
\begin{aligned}
X_0 &= e^{h+\sigma_0} && (280)\\
X_1 &= e^{h+\sigma_1} && (281)\\
X_2 &= e^{h+\sigma_2} && (282)
\end{aligned}
$$

y definimos

$$
\begin{aligned}
y &= \chi_1 - \chi_0 && (283)\\
z &= \psi_1 - \psi_0 && (284)\\
\alpha &= \sigma_1 - \sigma_0. && (285)
\end{aligned}
$$

Sea δ dada por (276)

$$\delta = \delta_x + \delta_y + \delta_z \tag{286}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\delta_x &= \cosh\alpha - 1 && (287)\\
\delta_y &= \frac{1}{2} y^2 e^{-2h-2\sigma_0-\alpha} && (288)\\
\delta_z &= \frac{1}{2} z^2 e^{-2h-2\sigma_0-\alpha} && (289)
\end{aligned}
$$

Notemos que por hipótesis $\delta = 0$ en ∂A. Abajo probaremos que $\delta \in H^1(A)$, asumimos que esto es cierto. Ya que δ satisface (279) en $A \setminus \Gamma$, podemos aplicar el lema 5.3 para concluir que (279) se satisface en A. Por lo tanto, podemos usar el principio del máximo débil para soluciones débiles en A (ver [11]). La función δ es no negativa en A y se anula en el borde, entonces el principio del máximo débil implica que $\delta = 0$ en A y por lo tanto tenemos lo que queriamos ver.
Queda por demostrar que $\delta \in H^1(A)$. Para esto, probamos un resultado mas fuerte: $\delta \in H^1(A) \cap L^\infty(A)$. Recordemos que σ_0 y α son acotados en A. Entonces se sigue que $\delta_x \in A$. De (287) tenemos

$$\partial\delta_x = \sinh\alpha\partial\alpha \tag{290}$$

ya que $\alpha \in H^1(A)$ se sigue que $\delta_x \in H^1(A)$.
Consideremos δ_y. Dado que σ_1 y $e^{-h}y$ son acotados en A se concluye que $\delta_y \in L^\infty(A)$. Su derivada esta dada por

$$\partial\delta_y = y\partial y e^{-2h-2\sigma_0-\alpha} - y^2(\partial h + \partial\sigma_0 + \frac{1}{2}\partial\alpha)e^{-2h-\sigma_0-\alpha} \tag{291}$$

Entonces tenemos

$$|\partial\delta_y| \leq C\left(|\partial y|^2 e^{-2h} + (|\partial\sigma_0|^2 + \frac{1}{2}|\partial\alpha|^2) - y^4 e^{-4h}|\partial h|^2\right) \tag{292}$$

Donde la constante C depende únicamente de la norma L^∞ de α, σ_0 y ye^{-h}. Cuando realizamos la integral, los primeros tres términos son acotados por que $y \in H^1_{0,X_0}(R^3 \setminus \Gamma)$ y α, σ_0 están en $H^1(A)$. Para el último termino, usamos una desigualdad tipo Poincaré (ver lema 1 de [20] y lema 2.2 en [17]). Podemos concluir que δ_y, y entonces δ, esta en $H^1(A) \cap L^\infty(A)$. Lo mismo vale para δ_z. $\square$

Lema 3.9. *Sea (X, χ) una solución del mapa harmónico* (216)-(217) *en $\mathbb{R} \setminus \Gamma$. Definimos (α, y) por $X = e^{\frac{h}{2}+\frac{\sigma}{2}}$, $\chi = \chi_0 + y$, $\sigma = \sigma_0 + 2\alpha$. Asumiendo que $\alpha \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, $y \in H^1_{0,X_0}(\mathbb{R}^3/\Gamma)$, $yX_0^{-1}, \alpha^- \in L^\infty\mathbb{R}^3$ y que $\alpha, yX_0^{-1} \to 0$ cuando $r \to \infty$. Entonces, $\alpha = 0$ e $y = 0$.*

Demostración. Analicemos la función δ_y que en términos de X_0 esta dada por

$$\delta_y = \frac{y^2 e^{-\alpha}}{2X_0^2} \leq \frac{y^2 e^{-\alpha^-}}{2X_0^2}. \tag{293}$$

Usando la hipótesis yX_0^{-1}, $\alpha^- \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ obtenemos $\delta_y \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Tomamos una bola B_R en $\mathbb{R}^3$ y consideremos las derivadas de δ_y en B_R

$$\partial\delta_y = e^{-\alpha}\left(\frac{y\partial y}{X_0^2} - \frac{y^2\partial\alpha}{2X_0^2} - \frac{y^2\partial X_0}{X_0^3}\right). \tag{294}$$

Usando nuestros supuestos concluimos que el primer termino del lado derecho en la ecuación anterior esta en $L^2(B_R)$. Para el tercer termino usamos que $yX_0^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ y la desigualdad de Poincaré dada en el lema 5.4. Entonces, concluimos que δ_y esta en $H^1(B_R)$.
Usando la desigualdad $d \leq |\alpha| + C$ (donde la constante C depende solo de la norma L^∞ de δ_y en $\mathbb{R}^3$) se sigue que $\sigma \in L^2(B_R)$, entonces usando que $|\partial\sigma|^2 \leq 2(|\partial\alpha|^2 + |\partial\delta_y|^2)$ obtenemos $\sigma \in H^1(B_R)$. Aplicando el principio del máximo a la desigualdad $\Delta\sigma \geq 0$ tenemos

$$\sup_{\partial B_R} \geq \sup_{B_R} \geq 1. \tag{295}$$

Usando las condiciones de decaimiento tenemos que $\sup_{\partial B_R}\sigma \to 1$ cuando $R \to \infty$. Entonces se sigue que $d = 0$, y por lo tanto $\alpha = y = 0$. $\square$

Con todo lo anterior tenemos las herramientas necesarias para la prueba que nos interesa.

Demostración.

Sea $\alpha \in H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ e $y \in H^1_{0,X_0}(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$. Por definición, entonces existe una secuencia $y_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ tal que $y_n \to y$ en $H^1_{0,X_0}(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$ cuando $n \to \infty$. Sea R el radio de una bola que contiene el soporte de y_n. El radio R depende de n y tenemos que $R \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Para $\epsilon = 1/R$ sea $\chi_{\epsilon,R}$ la función de corte que sera definida en el apéndice.
$\alpha_n = \alpha\chi_{\epsilon,R}$, esta función tiene soporte compacto contenido en el anillo $A_n = B_R \setminus B_\epsilon$ y $\alpha_n \in H_0^1(A_n)$. Por el lema 5.2 tenemos que $\alpha_n \to \alpha$ en $H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ cuando $n \to \infty$. Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} M(\alpha_n, y_n) = M(\alpha, y) \tag{296}$$

Esto es similar a la ecuación (223) en la prueba del lema 3.7. Reemplazando el dominio A por $\mathbb{R}^3$, definimos las mismas integrales que en las ecuaciones (225)-(226).
Usando (228)-(229) concluimos que $I_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Para las integrales $I_{2,1}$ y $I_{2,2}$ usamos la hipótesis $\alpha^- \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (que juega el mismo rol que la cota inferior (222) en la prueba del lema 3.7) y

$$e^{-\alpha_n} = e^{-\alpha^+\chi_{\epsilon,R} - \alpha^-\chi_{\epsilon,R}} \leq e^{-\alpha^-\chi_{\epsilon,R}} \leq e^{-\alpha^-} \tag{297}$$

acota el termino con $e^{-\alpha_n}$ por constantes independientes de n. Usando la hipótesis $y \in H^1_{0,X_0}(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ concluimos que estas dos integrales tienen a cero cuando $n \to \infty$ y por lo tanto hemos probado (296).
Usando un argumento similar como en la prueba del lema 3.7, de la ecuación (296) concluimos que la secuencia minimizante (α_n, y_n) se puede tomar entre funciones con soporte compacto en el anillo A_n.
Aplicando el lema 3.7 y el lema 3.8 en A_n. Tenemos

$$M_{A_n}(x_0 + \alpha_n, \chi_0 + y_n) \geq M_{A_n}(x_0, Y_0). \tag{298}$$

Usando esta desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} M(x_0 + \alpha_n, \chi_0 + y_n) &= M_{\mathbb{R}^3\setminus A_n}(x_0, \chi_0) + M_{A_n}(x_0 + \alpha_n, \chi_0 + y_n) \qquad (299) \\ &\geq M_{\mathbb{R}^3\setminus A_n}(x_0, \chi_0) + M_{A_n}(x_0, \chi_0) \\ &= M(x_0, \chi_0) \\ &= \sqrt{|Q|} \end{aligned}$$

que es lo que buscábamos ver.
Veamos ahora la parte de rigidez. Asumimos que existe $\alpha \in H_0^1(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ e $y \in H^1_{0,X_0}(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma)$ tal que

$$M(x_0 + \alpha, \chi_0 + y) = M(x_0, \chi_0) = \sqrt{|Q|}. \tag{300}$$

Entonces se sigue que (α, y) es una mínimo de M, por lo tanto satisface las ecuaciones del mapa harmónico. Usando el lema 3.9 concluimos que $\alpha = y = 0$. $\square$

4. Conclusión

En este trabajo se han estudiado las ecuaciones de Einstein-Maxwell bajo la condición de estacionariedad, del análisis realizado en la sección 3 encontramos que en todos los casos analizados la integración directa de las ecuaciones (usando coordenadas de Weyl) en todo el 3-espacio no puede realizarse para dos agujeros negros subextremos. Esto es debido a que tenemos divergencias en la región próxima al al horizonte de eventos.
Sin embargo vemos que para el caso del agujero negro de Reissner-Nordström extremo como así también para el agujero negro de Kerr extremo estas divergencias desaparecen y entonces la integral de las ecuaciones de Einstein-Maxwell pueden ser integradas sin mayores dificultades y van a resultar en cantidades finitas que se relacionan con los parámetros físicos del sistema como la masa, el momento angular, la carga.

De los trabajos de Li-Tian conjuntamente con el análisis realizado de la manera en que proceden en sus artículos vemos que en el caso de Einstein-Maxwell nos indica que al tener una fuerza positiva implica que la singularidad cónica esa asociada con una fuerza repulsiva para mantener a los agujeros negros a una distancia fija con lo cual interpretamos que los mismo poseen una interacción positiva.

Al realizar la integración de las ecuaciones de Einstein-Maxwell tomando una 3-superficie espacial maximal ($t = cte$) vemos que lo que determina que la integral del Laplaciano de q sea finita o no es el tipo de condiciones de borde que satisface q. La observación clave en esto es representar a los agujeros negros por “punctures” en el eje de simetría.

En la sección 3.2.4 logramos ver algunas cotas para el valor de la fuerza, esto lo realizamos haciendo la integración de la ecuación de segundo orden para q. Es importante que destaquemos que los resultados allí obtenidos se lograron sin considerar la ecuaciones de Einstein completas, solo considerando una dato inicial maximal ya que no se aprovecha la condición de estacionariedad.

Recordemos que en el caso dinámico general, la ecuación (191) resulta en realidad una desigualdad. Sin embargo, al utilizar el principio variacional, perdemos esta mejora en la cota, y por lo tanto, no podemos establecer la positividad de la fuerza en general, ni siquiera para un caso con una simetría extra como la de reflexión. Otro factor que interviene en la precisión de la cota anterior es el término que involucra a ω, y que despreciamos por ser no negativo. Es importante destacar que si incluimos ω en el funcional M_0, no podríamos obtener una cota explítica para la fuerza en términos de cantidades físicas como m, Q_i, J_i ya que no se conoce un minimizante o mínimo explícito para M_0, y esa es la base de la prueba del teorema de la sección 3.3. Sin embargo, para el caso en que no incluimos ω en el funcional, este minimizante sí se conoce y de hecho es la solución axisimétrica de Majumdar-Papapetrou.

5. Apéndices

Lema 5.1. *Sea* Ω *un dominio acotado en* $\mathbb{R}^n$ *con* C^1 *borde* $\partial\Omega$. *Supongamos que* $u \in H_0^1(\Omega)$ *y*

$$u \geq K \tag{301}$$

casi en todas partes en Ω, *donde* $K \leq 0$ *es una constante. Entonces, existe unas secuencia* $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$u_n \geq K, \tag{302}$$

para todo n *y* $u_n \to u$ *en la norma* $H_0^1(\Omega)$.

Lema 5.2. *Sea* $u \in H^1(\Omega)$ *una solución débil de la ecuación de Laplace en* $\Omega \setminus \Gamma$. *Entonces,* u *es también una subsolución débil de la ecuación de Laplace en* Ω.

Lema 5.3. *Sea* $u \in H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. *Entonces la función* $u_{\epsilon,R} = u\chi_{\epsilon,R}$ *donde* $\chi_{\epsilon,R}$ *es la función de corte definida como* $(\chi_{\epsilon,R(r)} = \chi_R(r) + \chi_\epsilon(r) - 1)$ *converge a* u *en la norma* $H_0^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ *cuando* $R \to \infty$, $\epsilon \to 0$.

Lema 5.4. *Sea* $y \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \Gamma)$ *y* χ_0, X_0. *Entonces la siguiente desigualdad es válida*

$$\int_{\mathbb{R}^3} X_0^{-2} |\partial y|^2 du \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(|\partial \chi_0|^2 + |\partial X_0|^2)}{X_0^4} y^2 d\mu \tag{303}$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\partial X_0|^2}{X_0^4} y^2 d\mu. \tag{304}$$

Referencias

[1] A. Acena, S. Dain, and M. E. Gabach Clement. Horizon area-angular momentum inequality for a class of axially symmetric black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 28(10):105014, May 2011.

[2] Rudolf Bach and H. Weyl. Neue loesungen der einsteinschen gravitationsgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 13(52):134–145, 1922.

[3] Piotr T. Chrusciel. Mass and angular-momentum inequalities for axisimmetric initial data sets. Positivity of mass. *Annals. Phys*, 323:2566–2590, 2008.

[4] Piotr T. Chrusciel and Weinstein G. Yanyan Li. Mass and angular-momentum inequalities for axi-simmetric initial data sets. Angular momentum. *Annals. Phys*, 323:2591–2613, 2008.

[5] Maria E. Gabach Clement. Bounds on the force between black holes. *Class.Quant.Grav.*, 29:165008, 2012.

[6] Maria E. Gabach Clement, Jose Luis Jaramillo, and Martin Reiris. Proof of the area-angular momentum-charge inequality for axisymmetric black holes. *Class.Quant.Grav.*, 30:065017, 2013.

[7] S. Dain and Maria E. Gabach Clement. Small deformations of extreme Kerr black hole initial data. *Class.Quant.Grav.*, 28:075003, 2011.

[8] Sergio Dain. Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *J.Diff.Geom.*, 79:33–67, 2008.

[9] Sergio Dain. Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *J. Differential Geom.*, 79(1):33–67, 2008.

[10] Lawrence C. Evans. Partial Differential Equations. *Volumen 19 de Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[11] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.

[12] Y. Li and Tiang G. *Manuscripta Math.*, 73:83–89, (1991).

[13] Y. Li and Tiang G. *Comm. Math. Phys*, 149:1–30, (1992).

[14] Sudhansu. D Majumdar. A Class of Exact Solutions of Einstein Field Equations . *Phys.Rev*, 72(5):390–398, 1947.

[15] Gernot Neugebauer and Jörg Hennig. Non-existence of stationary two-black-hole configurations. *Gen. Relativity Gravitation*, 41(9):2113–2130, 2009.

[16] L. Richterer. Einstein-Maxwell field generated from the gamma metric and their limits. 2002.

[17] Dain S. Proof of the (local) angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *Class. Quantum. Grav.*, 23(1):6857–6855, 2006.

[18] R. Schoen and Yau S. T. Compact group actions and the topology of manifolds with nonpositive curvature. *Topology*, 18(4):361–380, 1979.

[19] Gilbert Weinstein. On Rotating Black Holes in Equilibrium in General Relativity. *Commun.Pure.App.Math.*, 43:903–948, 1990.

[20] Gilbert Weinstein. The stationary axisymmetric two-body problem in general relativity. *Commun.Pure.App.Math.*, 45:1183–1203, 1992.

[21] Gilbert Weinstein. N black hole stationary and axially symmetric solutions of the Einstein-Maxwell equations. *Commun.Part.Diff.Eq.*, 21:1389–1430, 1996.

[10] [4] [3] [7] [1] [9] [6] [19] [13]