

Universidad Nacional de Córdoba  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo Especial de Licenciatura en Física  
**Sobre el concepto de Fuerza entre Agujeros  
Negros**

Autora: Macarena S. Chocan

Directora: María E. Gabach Clément



Sobre el concepto de Fuerza entre Agujeros Negros por Macarena S. Chocan se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina.

Marzo 2015

*A mi mamá Alejandra y a mi papá Eduardo, por su cariño y apoyo incondicional. A mis hermanos Lucía y Gonzalo, por el aguante y el entendimiento. A todos mis amigos, tanto a los de adentro como los de afuera FaMAF, por estar siempre a pesar de mis ausencias, y finalmente a mis compañeros, por enseñarme que siempre se puede aprender un poquito más y por haber compartido esta linda aventura juntos.*

## **Resumen**

Se estudia el concepto de fuerza entre agujeros negros relacionado a la presencia de singularidades cónicas, tanto en el caso de configuraciones axialmente simétricas, como sin simetría. Se obtienen desigualdades geométricas que contemplan los parámetros físicos del agujero, la constante cosmológica y las fuerzas de interacción para un sistema de múltiples agujeros negros.

## **Palabras Clave**

Relatividad General. Múltiples Agujeros Negros. Fuerza. Desigualdades

## **Tabla de Clasificación**

04.20.Cv Fundamental Problems and general formalism

## Resumen

En este trabajo se estudia el concepto de fuerza entre agujeros negros, asociado a singularidades cónicas. El objetivo general es entender la naturaleza de las interacciones entre agujeros negros y cómo afecta la presencia de una constante cosmológica a dicha interacción. Concretamente, se estudian las ecuaciones de Einstein-Maxwell con constante cosmológica distinta de cero. En primer lugar asumimos simetría axial, no sólo porque las ecuaciones y su tratamiento se simplifican, sino además porque se conoce una definición robusta de fuerza de interacción entre agujeros negros en este contexto. En segundo lugar generalizamos el concepto de fuerza, y estudiamos su modificación en presencia de constante cosmológica, al caso sin simetría axial. Se obtienen relaciones geométricas entre los parámetros físicos relevantes en el problema: la carga eléctrica, el área del horizonte de los agujeros, la constante cosmológica y las fuerzas de interacción.

## 1. Introducción

La cuestión de la existencia o no de equilibrio estático entre dos objetos con una dada masa, parece, a simple vista, no estar en duda. Sabemos de la teoría Newtoniana que dos objetos de masa no despreciable siempre se verán *atraídos* por una fuerza gravitacional, es decir no puede existir una configuración de equilibrio mecánico (sumatoria de fuerzas externas igual a cero) para este sistema. Sin embargo, si los objetos se encuentran cargados, pueden permanecer en reposo si se da la situación en que los valores de masas y cargas son iguales, es decir, para cada uno se cumple  $|Q_i| = m_i$ , en unidades apropiadas, y por lo tanto, se balancean las fuerzas gravitacional y eléctrica:

$$F_{Grav} = \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = F_{elec}$$

En Relatividad General, existe una *única* situación análoga de equilibrio entre múltiples agujeros negros. Nos referimos a la solución de Majumdar-Papapetrou (ver sección 2.6.1), la cual es hasta el día de hoy la única solución conocida con estas características, la cual consta de  $N$  agujeros negros de Reissner-Nordstrom extremos, agujeros negros con simetría esférica, cargados, donde para cada uno de ellos se cumple la igualdad  $Q_i = m_i$ , en unidades de  $G = c = 1$ . Más allá de esta solución, se espera que en general no exista una configuración de equilibrio para un sistema arbitrario de múltiples agujeros negros, debido a la intuición física que se posee sobre estos sistemas y a la particularidad de la solución de Majumdar-Papapetrou. Es más, se espera que la interacción entre los objetos sea de signo positivo, reflejando el carácter atractivo de la fuerza gravitacional, y que el sistema colapse, posiblemente, en la formación de un único agujero negro, pero no se lo sabe con exactitud. La existencia o no existencia de soluciones en equilibrio para distintos tipos y configuraciones de agujeros es considerado en varias publicaciones, donde para dos agujeros negros rotantes se pretende dar respuesta a la cuestión de si la repulsión spin-spin, es decir la interacción repulsiva entre los momentos angulares de cada objeto, puede contrarrestar la atracción gravitatoria entre ellos. En [1] se utiliza la desigualdad  $8\pi|J| \leq A$ , válida para cualquier agujero rotante axisimétrico estacionario de área  $A$  y momento angular  $J$ , para demostrar por contradicción que no existe una solución regular de 2 agujeros rotantes sobre un mismo eje, en equilibrio, pues al menos una de las componentes conectadas al horizonte de eventos viola la desigualdad. (ver también [2]). En otro enfoque, [3] conjetura que la doble solución de Kerr-NUT no puede describir equilibrio entre 2 agujeros negros rotantes, si estos

tienen masa de Komar positiva, lo cual es luego demostrado por [4] y [5] para una configuración simétrica de objetos (mismo «tamaño» e igual valor de velocidad angular de los horizontes). Esto mismo es demostrado también en [6].

Por otro lado, Manko y colaboradores [7] conjeturan que no existen estados de equilibrio para configuraciones de 2 agujeros de Kerr con un constituyente extremo ( $|J| = m^2$ ) y otro no extremo, tanto en el caso electrostático, como en los casos de vacío puro y electrovacío. Estos antecedentes dan indicio de la posible no existencia de situaciones de equilibrio para sistemas conformados por muchos agujeros y, por ende, de la presencia de interacciones entre ellos. Existen varias publicaciones hechas en el marco de soluciones de múltiples agujeros negros en las que está presente alguna clase de interacción entre los agujeros, reflejada en la no regularidad de la solución. Se destaca la solución obtenida por Bach y Weyl en 1921 [8], donde tratan el caso estático y axialmente simétrico, en el que las ecuaciones de vacío de Einstein se vuelven lineales fuera del eje de simetría y por lo tanto pueden superponerse dos soluciones tipo Schwarzschild. Ésto presenta la particularidad de la presencia de una obstrucción en forma de *singularidad cónica* sobre el eje que une a los dos cuerpos, lo que puede ser interpretado como una fuerza gravitacional, definiendo la fuerza de interacción como una cantidad proporcional al déficit de ángulo alrededor de la singularidad. En ese trabajo, se compara el resultado con fuerza gravitacional Newtoniana, y estas resultan ser iguales en el límite en que la distancia entre cuerpos es mucho mayor que la suma de sus masas (en unidades de  $G$  y  $c$  iguales a uno), y obviamente ambas atractivas. En otro enfoque, en el que se utiliza la equivalencia entre ecuaciones de Dirichlet para mapas armónicos del espacio euclidiano 3 dimensional al plano hiperbólico, y soluciones estacionarias, axialmente simétricas y asintóticamente planas a las ecuaciones de vacío de Einstein (las cuales representan agujeros negros rotantes en equilibrio), Weinstein [9], inspirándose en el trabajo recién mencionado, busca este tipo de soluciones, pero que contienen 1 o más componentes conectadas al horizonte de eventos (múltiples agujeros rotantes), considerando ciertas condiciones de borde para los mapas armónicos. En ese trabajo se demuestra que las soluciones son de equilibrio sólo *fuera del eje de simetría*, y que por lo tanto siempre habrá una singularidad cónica en el eje entre agujeros, y por ende una fuerza, en el sentido descrito en [8]. En este mismo trabajo, el autor prueba que la fuerza es positiva, y que además tiende a cero en el infinito, cuando la distancia entre objetos es muy grande. Varios de los trabajos antes descritos se basan en la relación entre presencia de singularidades cónicas y no equilibrio de la solución para el cálculo explí-

cito de la fuerza de interacción *gravitatoria* entre agujeros. En el caso de la doble solución de Kerr-NUT, una expresión exacta es obtenida en [10], la cual presenta el inconveniente de que no puede ser puesta en términos de los parámetros físicos de la solución, como las masas y los momentos angulares. Solo en el caso en que la solución presenta un tipo especial de simetría (simetría de reflexión  $z$ ,  $-z$  y  $\varphi$ ,  $-\varphi$ , siendo estas coordenadas de Weyl) puede ser expresada en términos de cantidades conocidas y adopta cierto sentido. Es, en general, bastante complicado obtener expresiones exactas para la fuerza, en particular en los casos que no presentan algún tipo de simetría.

La importancia del uso de la desigualdad  $A \geq 8\pi|J|$  para demostrar la no existencia de configuraciones de dos agujeros rotantes en equilibrio habla de la posibilidad de considerar otras desigualdades que involucran los parámetros de un agujero negro para probar determinadas hipótesis relacionadas con la presencia de singularidades cónicas en un dado espacio tiempo, y por ende el surgimiento de una interacción entre los agujeros. Es de gran interés en este trabajo, y se tiene como objetivo, involucrar las interacciones a estas desigualdades, con el fin de observar qué relación hay entre los parámetros conocidos de un agujero, y la interacción de este con horizontes disconexos vecinos, así como también hacer conjeturas sobre el equilibrio de una dada configuración de objetos, en casos simétricos y no simétricos, e investigar sobre el carácter repulsivo o atractivo de la fuerza, en el contexto de singularidades cónicas.

En particular, en este trabajo nos interesa estudiar la noción de Fuerza según Bach-Weyl-Weinstein, en contextos no estudiados antes, como son los casos de sistemas de múltiples agujeros negros en configuración no simétrica y en presencia de constante cosmológica, analizando la influencia de la constante cosmológica en las estimaciones para la magnitud de la interacción gravitatoria.

La manera en que se encara este objetivo es haciendo un tratamiento cuasi local de agujeros negros, mediante el uso de *superficies marginalmente atrapadas*, introduciendo las Ecuaciones de Einstein en presencia de constante cosmológica, y tensor de energía materia distinto de cero. Esto se hace para obtener nuevas desigualdades geométricas que modifiquen las ya existentes, involucrando Área del horizonte, masas de los objetos, carga (si es que poseen), interacción entre ellos y, en algunos casos, momento angular.

Para agujeros negros, el primer ejemplo de desigualdad geométrica es la desigualdad de Penrose [11], que relaciona el área  $A$  del horizonte con la masa total del espacio tiempo,

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m \quad (1)$$

Otro ejemplo es la desigualdad entre masa y momento angular  $J$  para agujeros negros axialmente simétricos,

$$|J| \leq m^2 \quad (2)$$

tratada de distintas maneras en [12],[13],[14]. Además, su generalización con carga,

$$m \geq \sqrt{\frac{|J|^2}{m^2} + Q_E^2 + Q_B^2} \quad (3)$$

presentada en [15], [16]. Físicamente, las desigualdades (1) y (2) están relacionadas a la conjetura del sensor cósmico débil, que establece que una singularidad no debe ser vista por un observador en el infinito, si no que debe estar oculta por el horizonte de eventos del agujero.

Cabe destacar nuevamente a la desigualdad

$$8\pi|J| \leq A \quad (4)$$

propuesta en [17] y demostrada en [18] mediante el uso de un dato inicial asintóticamente plano, de vacío y axialmente simétrico para las Ecuaciones de Einstein, donde  $A$  y  $J$  son área y momento angular de una componente conectada del horizonte aparente.

En cuanto a la obtención de desigualdades geométricas mediante *tratamientos cuasi locales* de horizontes de agujeros, podemos mencionar el resultado de [19], donde se demuestra que vale la desigualdad (4) sobre una superficie  $S$  cerrada axisimétrica, *marginalmente atrapada*, en un espacio tiempo donde es válida la condición de energía dominante (ver sección 2), con constante cosmológica estrictamente mayor a cero, y  $S$  satisfaciendo además la condición (adaptada a axisimetría) de ser «spacetime stably outermost» (ver definición 2.5.1). Por otro lado, en [20] se demuestra que en el caso sin simetría, para horizontes de agujeros negros dinámicos con carga eléctrica  $Q_E$  y magnética  $Q_B$ , y área  $A$ , se cumple la relación

$$A \geq 4\pi(Q_E^2 + Q_B^2) \quad (5)$$

Existe también la desigualdad

$$\left(\frac{A}{4\pi}\right)^2 \geq (2J)^2 + (Q_E^2 + Q_B^2)^2 \quad (6)$$

cuya validez es probada para un espacio tiempo genérico dinámico y no vacío en [21], mediante un acercamiento cuasi local, usando nuevamente superficies marginales atrapadas, bajo las mismas condiciones que en [22]. Puede verse también [23] para un estudio cuasi local de todas las desigualdades anteriores para el área del horizonte de un agujero negro, (4)-(6). Otro tipo de tratamiento de las desigualdades de área es estudiado en [24],[25],[26], para horizontes rodeados por materia cargada.

En un trabajo reciente, se han hecho algunos avances en incluir la interacción entre múltiples agujeros negros en las desigualdades para el área, y que involucran carga y momento angular de los agujeros, aunque no la constante cosmológica. Podemos destacar el trabajo de Gabach Clément [27], donde utilizando dos representaciones distintas de un agujero negro, en axisimetría, se demuestran las desigualdades

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_{i-1})(1 + 4\mathcal{F}_i)} \geq \frac{8\pi|J_i|}{A_i} \quad (7)$$

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_{i-1})(1 + 4\mathcal{F}_i)} \geq \sqrt{\frac{8\pi|J_i| + 4\pi(Q_{iE}^2 + Q_{iB}^2)^2}{A_i}} \quad (8)$$

siendo  $J_i$ ,  $A_i$ ,  $Q_{iE}$ ,  $Q_{iB}$  son el momento angular, área, y cargas eléctricas y magnéticas de cada horizonte, respectivamente.  $\mathcal{F}_i$  y  $\mathcal{F}_{i-1}$  son las fuerzas actuando sobre los horizontes a lo largo de las componentes del eje  $T_i$  y  $T_{i-1}$ . Las desigualdades (4)-(6) tienen como ingrediente principal la asunción de la regularidad en el eje de simetría. Esto está relacionado a la noción de equilibrio, como se remarcó anteriormente, aunque no lo implica, pues uno debe pedir también estacionariedad. La regularidad en el eje de simetría solo significa la ausencia de singularidades cónicas, por lo que una manera de incorporar la interacción a las desigualdades es relajando la condición de regularidad en el eje y por lo tanto, permitiendo la presencia de singularidades cónicas en él. El valor de la deficiencia de ángulo para una curva tomada alrededor de la singularidad estará relacionado a la fuerza entre agujeros.

Resulta de gran utilidad el uso de desigualdades geométricas con el objetivo de probar la positividad de esta fuerza, ya que así obtendremos cotas inferiores para ella en términos de los parámetros físicos de los agujeros, notando además que una desigualdad entre estas cantidades para un sistema múltiple de objetos nos permitiría conjeturar sobre la existencia o no de configuraciones de equilibrio.

Otro de los objetivos, como se explicó antes, es incorporar la constante cosmológica a las desigualdades de fuerza, introducida por Albert Einstein en

1915 a sus ecuaciones publicadas en 1905, con la idea de la existencia de un universo estático, idea que tuvo que ser desechada más tarde en 1929 debido al descubrimiento por parte de Edwin Hubble de la expansión del universo. Durante varios años, aproximadamente hasta principios de los años 90, la constante fue considerada nula por muchos cosmólogos, pero hoy en día es de gran importancia ya que es la manera más simple de expresar la existencia de materia oscura en el universo, la cual se cree que constituye el 70 % de la densidad de masa-energía total observada, habiendo surgido esto de observaciones de una expansión acelerada del universo.

La constante cosmológica  $\Lambda$  tiene el mismo efecto que una densidad de energía del vacío (así también como una presión del vacío). Tomando las ecuaciones de Einstein en su forma (9), definiendo  $\rho_{vacío} = \frac{\Lambda}{8\pi}$ , tenemos que  $\rho_{vacío} = -P_{vacío}$ , y por lo tanto un signo positivo para la constante implicaría una densidad de energía del vacío positiva y una presión negativa, y viceversa. Si este es el caso, tendríamos que la presión negativa derivaría en una expansión acelerada del universo, lo que coincide con lo observado actualmente. Se espera que en la realidad, la constante cosmológica sea positiva, debido a esta evidencia.

Incluir la constante en las desigualdades podría darnos una idea de cuán fuerte o débil es la interacción entre agujeros, y de si la expansión acelerada del universo contribuye o no a la repulsión o atracción entre ellos. Nos basamos principalmente en el trabajo de Walter Simon [28], especialmente para incorporar la constante cosmológica a la desigualdad de área y carga (5) en el caso de un sistema sin simetría axial, mediante un acercamiento cuasi local. Para incorporar la constante al caso sin carga, pero con momento angular, nos basamos en el trabajo de Gabach, Reiris y Simon [31], quienes prueban que sobre una MOTS (ver definición 2.2.2) estable axialmente simétrica y con constante positiva, el área  $A$  de la superficie y su momento angular  $J$  están relacionados por

$$\frac{A}{8\pi} \sqrt{\left(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi}\right) \left(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi}\right)} \geq |J| \quad (9)$$

En este trabajo, extendemos esta desigualdad para múltiples agujeros, al caso en que la métrica es no regular sobre el eje de axisimetría donde están ubicados los cuerpos.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Ecuaciones de Campo y Tensor de Energía momento

La ecuación de Einstein, con presencia de constante cosmológica tiene la forma

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (10)$$

donde  $G_{ab}$ , en un espacio de dimensión 4, es un tensor de 16 componentes, simétrico, condición que obviamente satisfacen también la métrica del espacio tiempo  $(M, g_{ab})$ , y el tensor de energía-materia  $T_{ab}$ . este es un sistema de 16 ecuaciones acopladas, en derivadas parciales, y en el caso en que exista alguna simetría en la variedad, pueden ser reducidas y simplificadas.

Cuando se trata con espacios tiempo en presencia de cargas, se utiliza el tensor electromagnético de Maxwell  $F_{ab}$  para expresar al tensor de energía-momento electromagnético, tal que se satisface

$$T_{ab}^{Maxwell} = \frac{1}{16\pi} (F_{ac}F_b^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}) \quad (11)$$

El tensor  $F_{ab}$  es un tensor antisimétrico y de traza nula, y en el caso de carga distinta de cero, satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{cases} \nabla_a F^{ab} = \mu_0 J^b \\ \nabla_a * F^{ab} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Existen distintas *condiciones de energía* que el Tensor de energía-momento (arbitrario) puede satisfacer, a saber [34]

1. Condición de *energía débil* : esta condición establece que la densidad de energía de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador en el espacio-tiempo, debe ser no negativa. Debido a que un observador con cuadrivelocidad  $v^\alpha$  mide una densidad de energía  $T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta$ , se debe tener

$$T_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq 0 \quad (13)$$

para cualquier vector temporal dirigido hacia el futuro  $v^\alpha$ . Esta condición puede ser traducida en

$$\rho + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3 \geq 0 \quad (14)$$

donde  $a, b, c$  son constantes arbitrarias,  $\rho$  la densidad de energía y  $p_i$  las presiones principales. Tomando valores para las constantes, y sabiendo que  $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$  (lo que implica que cada una de ellas es menor o igual a 1), tenemos que esta condición implica:  $\rho \geq 0, \rho + p_i \geq 0$ .

2. Condición de *energía nula*: reemplazando ahora al vector temporal  $v^\alpha$  por el vector nulo dirigido hacia el futuro  $k^\alpha$ , tenemos que

$$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0 \quad (15)$$

que se traduce en  $\rho + p_i \geq 0$ .

3. Condición de *energía fuerte*: esta condición establece que

$$(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta})v^\alpha v^\beta \geq 0 \quad (16)$$

donde  $v^\alpha$  es un vector temporal dirigido hacia el futuro, normalizado. Además se satisface  $\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0, \rho + p_i \geq 0$ .

4. Condición de *energía dominante*: esta condición plasma la noción de que la materia debe fluir a lo largo de líneas mundo nulas o temporales. Su afirmación precisa es que si  $v^\alpha$  es un campo vectorial temporal dirigido hacia el futuro, arbitrario, luego  $-T_\beta^\alpha v^\beta$  es un campo vectorial temporal o nulo, dirigido hacia el futuro. Esta cantidad es la densidad de momento de la materia, medida por un observador con cuadrivelocidad  $v^\alpha$ , la cual se requiere que sea nula o temporal. La condición implica que

$$\rho \geq 0, \rho \geq |p_i|. \quad (17)$$

## 2.2. Representación cuasi local de agujeros negros

El alcance de un agujero negro no está definido a través de cantidades definidas localmente. Es una propiedad global de la estructura causal de todo un espacio tiempo, y por lo tanto las descripciones que utilizan causalidad presentan ciertas dificultades.

Existen definiciones alternativas y cuasi locales de agujeros negros, basadas en el concepto de *superficies atrapadas*: 2 superficies espaciales, cerradas, con la propiedad de que todas las geodésicas nulas que las intersectan ortogonalmente deben converger en el futuro (pensamos que la variedad, es decir el espacio tiempo, es orientable temporalmente y que existe una noción de

«futuro» y «pasado» en él, pudiendo tomar un cono de luz, al menos localmente, en cada punto de la variedad). Se denominan *horizontes* a los bordes de estas regiones, los cuales son necesariamente superficies marginalmente atrapadas: la expansión  $\theta$  de geodésicas nulas entrantes es negativa, pero la del conjunto de geodésicas salientes es nula (ver definición 2.2.2 de MOTS en esta sección). La existencia de superficies atrapadas implica, gracias a los diversos teoremas de singularidades debidos a Penrose y Hawking [37], la existencia de singularidades del espacio tiempo y , en regiones con una apropiada estructura causal, de horizontes de eventos. La importancia del uso de MOTS para caracterizar agujeros negros proviene del tratamiento numérico de la relatividad general, pudiendo localizar aproximadamente a los horizontes de eventos mediante simulaciones.

Hay diversas formas de describir agujeros negros, y en particular a sus horizontes de eventos: utilizando la estructura causal del espacio tiempo (definiendo un agujero negro en base a geodésicas nulas que nunca alcanzan el infinito nulo futuro), horizontes de Killing, y superficies atrapadas. Concentraremos la atención sobre estas últimas.

Tomamos una congruencia de geodésicas nulas en un espacio tiempo  $(M, g_{ab})$ , y por lo tanto 2 vectores nulos,  $(l^a, k^a)$  tal que sean ortogonales a la superficie  $S$ , con  $l^a$  saliente y  $k^a$  entrante. Tomamos a  $l^a$  como el vector tangente a las geodésicas nulas, y a  $k^a$  como un vector nulo auxiliar. Por ser vectores nulos, se cumple que  $l^\beta l_\beta = 0$ ,  $k^\gamma k_\gamma = 0$ . Estos vectores están normalizados como  $l_b k^b = -1$  de tal manera que la métrica 2D inducida sobre  $S$  tiene la forma  $h_{ab} = g_{ab} + 2k_{(a}l_{b)}$ . Se denota por  $\xi^a$  al vector desviación de geodésicas, tal que cumple:  $l^\beta \xi_\beta = k^\gamma \xi_\gamma = 0$ , es decir, este vector es perpendicular a ambos vectores nulos, y además está normalizado tal que  $h_{ab}\xi^a\xi^b = 1$ .

Las condiciones de nulidad del vector  $k^a$  y la normalización de este con respecto a  $l^a$  no determinan a  $k^a$  unívocamente, y por lo tanto la métrica transversa  $h_{ab}$  no es única, pero las cantidades definidas a continuación son las mismas para cualquier elección del vector  $k^a$  [34].

Se denominan por  $\theta^{(l)}$ ,  $\Omega_a^{(l)}$  y  $\sigma_{ab}^{(l)}$  a la expansión, torsión (o forma fundamental normal) y «shear» de  $l^a$ , tal que están definidos por las expresiones

$$\theta^{(l)} = h^{cd}\nabla_c l_d \quad (18)$$

$$\sigma_{ab}^{(l)} = h_a^c h_b^d \nabla_c l_d - \frac{1}{2}\theta^{(l)}h_{ab} \quad (19)$$

$$\Omega_a^{(l)} = -k^c h_a^d \nabla_d l_c \quad (20)$$

Cabe destacar que  $(\nabla_a l_b)h^{ac}\xi^b = B_b^c \xi^b = (\nabla_b \xi^c)l^b$  indica la falla de  $\xi^a$  de ser transportado paralelamente a lo largo de la congruencia. Estas tres cantidades recién definidas constituyen la base de la descripción de la dinámica de la congruencia de geodésicas nulas; la primera y segunda de ellas pueden interpretarse como el cambio fraccional de área de la sección transversal de la congruencia, por unidad de tiempo (parámetro afín de las curvas), y como esta área se distorsiona de su forma inicial, respectivamente. Además, el signo de  $\theta^{(l)}$  indica si la congruencia es convergente o divergente, y por lo tanto indica la presencia (o no) de una superficie atrapada.

### Definición 2.2.1: Superficie atrapada

Bajo las condiciones explicitadas anteriormente, tomamos 2 vectores nulos  $l^a$  y  $k^a$ , perpendiculares a la superficie, orientados hacia el futuro (es decir, yacen en el semicono de luz superior de algún punto P sobre S), siendo  $l^a$  el vector tangente a cada punto en una congruencia de geodésicas nulas.

Una *superficie atrapada* es aquella en la que la expansión de los vectores antes nombrados cumple

$$\theta^{(l)} = h^{cd}\nabla_c l_d < 0 \quad (21)$$

$$\theta^{(n)} = h^{cd}\nabla_c n_d < 0 \quad (22)$$

donde los vectores están normalizados tal que  $l^a n_a = -1$ , siendo  $l^a$  saliente, y  $n^a$  entrante.

Existen teoremas generales que establecen que las superficies atrapadas caracterizan los fuertes campos gravitacionales intuitivamente asociados con agujeros negros. Cabe destacar las siguientes proposiciones [35]

### Proposición 1

Sea  $(M, g_{ab})$  un espacio tiempo fuertemente asintóticamente predecible para el cual  $R_{ab}k^a k^b \geq 0$ , para todo vector  $k^a$  nulo, como será el caso si las ecuaciones de Einstein valen, con el tensor de energía-materia satisfaciendo la condición de energía nula. Supongamos que M contiene una superficie atrapada, S. Luego  $S \subset B$ , donde B denota la región del agujero negro en el espacio tiempo.

Esta proposición puede ser generalizada ligeramente para ser aplicada en superficies marginalmente atrapadas, definidas más abajo.

## Proposición 2

Sea  $S$  una superficie marginalmente atrapada en un espacio tiempo fuertemente asintóticamente predecible para el cual  $R_{ab}k^ak^b \geq 0$ , para todo vector  $k^a$  nulo. Luego  $S \subset B$ .

Además, encontrar una superficie atrapada en el espacio tiempo es suficiente para implicar la existencia de una singularidad (en forma de geodésicas incompletas) en alguna parte de su futuro causal, aunque esto no implique la existencia de un horizonte.

## Teorema 9.5.4 (Wald)

Supongamos que un espacio-tiempo  $(M, g_{ab})$  satisface las siguientes cuatro condiciones: (1)  $R_{ab}v^av^b \geq 0$  para todo vector temporal y nulo  $v^a$ , como será el caso si las ecuaciones de Einstein valen, con el tensor de energía-materia satisfaciendo la condición de energía fuerte. (2) Se satisfacen las condiciones genéricas nulas y espaciales, es decir se cumple que  $u_{[\alpha}R_{\rho]\mu\nu[\sigma}u_{\beta]}u^\mu u^\nu \neq 0$ , en algún punto de cada geodésica temporal o nula, con vector tangente  $u^\alpha$ . (3) No existen curvas temporales cerradas. (4) Al menos una de estas propiedades es válida: (a)  $(M, g_{ab})$  es un universo cerrado. (b)  $(M, g_{ab})$  contiene una superficie atrapada. (c) Existe un punto  $p \in M$  tal que la *expansión* de las geodésicas nulas futuras (o pasadas) que emanan desde  $p$ , se hace negativa a lo largo de cada geodésica en esta congruencia. Luego,  $(M, g_{ab})$  debe contener al menos una geodésica incompleta, nula o temporal.

Existen asimismo definiciones cuasi locales de agujeros negros, pudiendo nombrar por sus denominaciones en inglés, algunas como Isolated Horizon (IH), Marginally Outer trapped surface (MOTS), Marginally outer trapped tubes (MOTT), Marginally Trapped Surface (MTS), Marginally trapped tubes (MTT), Trapping Horizon (TH), Future Inner (Outer) Trapping Horizon (FITH, FOTH), Dynamical Horizon, etc. Nos interesa estudiar los conceptos de MOTS, MTS, MTT y MOTT (que no son independientes del resto de definiciones para un agujero negro).

## Definición 2.2.2: Marginally Outer Trapped Surface (MOTS)

Una *Superficie exterior marginalmente atrapada* (o Marginally Outer Trapped Surface, por sus siglas en inglés), es una superficie de dimensión 2, cerrada, tal que la expansión  $\theta^{(l)}$  con respecto a la normal nula *saliente*, se anula. Es decir:

$$\theta^{(l)} = h^{cd} \nabla_c l_d = 0 \quad (23)$$

**Definición 2.2.3: Marginally Trapped Surface (MTT)**

Una *superficie marginalmente atrapada* es una MOTS, en la que la expansión con respecto al vector nulo entrante es estrictamente menor a cero, es decir

$$\theta^{(n)} = h^{cd} \nabla_c n_d < 0 \quad (24)$$

**Definición 2.2.4: Marginally Outer Trapped Tube (MOTT)**

Un *tubo periférico marginalmente atrapado* es una 3 superficie, que puede ser enteramente foliada por MOTS.

**Definición 2.2.5: Marginally Trapped Tube**

Un *tubo periférico marginalmente atrapado* es un MOTT, en el que la expansión con respecto al vector nulo entrante es estrictamente menor a cero, es decir

$$\theta^{(n)} = h^{cd} \nabla_c n_d < 0 \quad (25)$$

**2.3. Estabilidad de MOTS**

**Definición 2.3.1: stably outermost**

Dada una Superficie exterior marginalmente atrapada S (MOTS), y un vector  $v^a$  ortogonal a ella, nos referiremos a S como «stably outermost» con respecto a la dirección  $v^a$  si y solo si existe una función  $\psi > 0$  sobre S tal que la variación de  $\theta^{(l)}$  con respecto a  $\psi v^a$  satisface la condición

$$\delta_{\psi v} \theta^{(l)} \geq 0 \quad (26)$$

Aquí  $\delta$  denota el operador variación asociado con la deformación de la superficie S [29].

### Definición 2.3.2: spacetime stably outermost

Una MOTS  $S$  se denomina «spacetime stably outermost» si existe un vector saliente (orientado en la dirección  $-k^a$ )  $x^a = \tilde{\gamma}l^a - k^a$ , con  $\tilde{\gamma} \geq 0$ , con respecto al cual  $S$  es «stably outermost».

Vamos a denotar por  $X^a$  al vector  $X^a = \psi x^a = \gamma l^a - \psi k^a$ , con  $\gamma = \tilde{\gamma}\psi$ , tal que  $\delta_X \theta^{(l)} \geq 0$ .

## 2.4. Simetría axial

### Definición 2.4.1

Una variedad  $(M, g_{ab})$  se dice que es axialmente simétrica si su grupo de isometrías contiene un subgrupo isomorfo a  $SO(2)$ .

### Definición 2.4.2

Sea  $S$  una 2 superficie en un espacio-tiempo  $(M, g_{ab})$ , con métrica inducida  $h_{ab}$ . Decimos que  $S$  es una superficie axisimétrica, si sobre  $S$  existe un campo vectorial de Killing  $\eta^a$  tal que

$$\mathcal{L}_\eta h_{ab} = 0 \quad (27)$$

donde el campo vectorial está normalizado tal que sus curvas integrales tienen largo  $2\pi$ . En otras palabras, la métrica es invariante ante el Killing  $\eta^a$ . Si además requerimos que sobre  $S$ , la forma fundamental normal  $\Omega_a^{(l)}$  sea axisimétrica, se debe satisfacer que

$$\mathcal{L}_\eta \Omega_a^{(l)} = 0 \quad (28)$$

Si hay presencia de campos electromagnéticos se pide también que sus proyecciones sobre la superficie (definidas en la siguiente sección) y el pullback del cuadrivector potencial  $A_a, \Pi(A_a)$ , satisfagan

$$\mathcal{L}_\eta E_\perp = \mathcal{L}_\eta B_\perp = \mathcal{L}_\eta \Pi(A_a) = 0 \quad (29)$$

es decir, todas estas cantidades se corresponden con la axisimetría.

En general, existe un sistema de coordenadas donde una métrica axialmente simétrica sobre una superficie  $S$  con topología esférica ( $S^2$ ) puede ser escrita como [30]

$$h_{ab}dx^a dx^b = e^\sigma(e^{2q}d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (30)$$

donde  $\sigma$  y  $q$  son funciones de la coordenada  $\theta$ , y requerimos que se cumpla, de aquí en adelante, la condición  $\sigma + q = c$ . Las coordenadas  $(\theta, \varphi)$  cubren la esfera  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . El vector de Killing para esta métrica es  $\eta^a = (\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$ , y su norma es  $\eta = e^\sigma \sin^2\theta$ . Por lo tanto, las condiciones (26)-(28) deben ser cumplidas respecto a este vector. Además, la constante  $c$  se relaciona con el área de la superficie como

$$A = \int_S \sqrt{\det g} d\theta d\varphi = \int_S e^{\sigma+q} \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi e^c \quad (31)$$

Los polos están dados por  $\theta = 0, \pi$ , los cuales vienen dados por la intersección de la superficie con el eje de simetría (definido como el conjunto de puntos que no son afectados por la isometría generada por el vector de Killing  $\eta^a = (\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$ , el cual se anula en estos puntos). No asumimos regularidad de la función  $q$  en los polos, es decir, **en general tendremos  $q|_{0,\pi}$  distinto de cero** (lo que luego estará relacionado al concepto de fuerza utilizado en este trabajo).

En las secciones 3.1 y 3.2 trabajaremos con una superficie axisimétrica cerrada  $S$ , donde vale la métrica (29), pero no cuando se trate el caso no simétrico, en la sección 4.

La derivada covariante  $D^a$ , el laplaciano  $\Delta_S$  y el escalar de curvatura  $R_S$  se refieren a  $S$  (el vector de Killing correspondiente a la axisimetría se denota por  $\eta^a$ , como ya nombramos).

## 2.5. Campos Electromagnéticos y Potenciales $\psi, \chi$ . Potencial $\omega$ y Momento angular

### 2.5.1. Campos eléctrico y magnético

Debido a que tratamos las ecuaciones de Einstein con materia del tipo electromagnética, y además consideramos momento angular en uno de los casos, definiremos algunas cantidades que nos serán de utilidad, en términos de ciertas funciones que denominaremos *potenciales*, debido a razones expuestas más abajo.

Se sabe que otra manera de expresar la primera ecuación de Maxwell  $\nabla_a F^{ab} = \mu_0 j^b$ , es en términos del cuadripotencial  $A_b$ , escribiendo  $F_{ab} = 2\nabla_{(a} A_{b)}$ , tal que las ecuaciones quedan escritas como

$$\nabla_a F^{ab} = \nabla_a [2g^{ac} g^{bd} \nabla_{(c} A_{d)}] = \mu_0 j^b \quad (32)$$

Los campos magnéticos y eléctricos se definen como

$$E = F^{ab} l_a k_b \quad B = *F^{ab} l_a k_b \quad (33)$$

donde los vectores  $l^a$  y  $k^a$  son los mismos vectores nulos dirigidos hacia el futuro, definidos en el marco de superficies atrapadas.

Recordamos del electromagnetismo que podemos escribir a los cuadvectores de campo eléctrico y magnético como  $E_\alpha = \partial_\alpha \phi - l_\alpha \partial_0 \phi - \partial_0 \tilde{A}_\alpha$  y  $B^\alpha = l_\beta \varepsilon^{\beta\alpha\delta\gamma} \partial_{(\delta} A_{\gamma)}$ . Entonces sobre una superficie  $S$  axisimétrica, con métrica (30), podemos definir las proyecciones de estos cuadvectores en términos de potenciales  $\psi$ ,  $\chi = A_\varphi$  (independientes de la coordenada azimutal, debido a la axisimetría) tal que

$$E_\perp = \frac{\psi'}{e^c \sin \theta} \quad (34)$$

$$B_\perp = \frac{1}{e^c \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{e^c \sin \theta} \chi' \quad (35)$$

Las cargas eléctricas y magnéticas sobre la superficie pueden ponerse en términos de los campos eléctrico y magnético (y de los potenciales) como

$$Q_E(S) = \frac{1}{4\pi} \int_S F_{ab} l^a k^b dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\psi'}{e^c \sin \theta} dS = \frac{1}{2} [\psi(0) - \psi(\pi)] \quad (36)$$

$$Q_B(S) = \frac{1}{4\pi} \int_S *F_{ab} l^a k^b dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\chi'}{e^c \sin \theta} dS = \frac{1}{2} [\chi(0) - \chi(\pi)] \quad (37)$$

Como los potenciales están definidos a menos de una constante, podemos tomar, sin pérdida de generalidad,  $Q_E(S) = \psi(0) = -\psi(\pi)$  y  $Q_B(S) = \chi(0) = -\chi(\pi)$ .

### 2.5.2. Potencial $\omega$ y Momento angular

De la sección anterior, sabemos que sobre una superficie *axisimétrica* existe un vector de Killing relacionado a este concepto, lo que es bien sabido que en Relatividad General da origen a una cantidad conservada (en el marco de geodésicas nulas y temporales). esta cantidad es el momento angular  $J$ , y sobre una superficie  $S$  axisimétrica con vector de Killing  $\eta^a$ , en ausencia de cargas, puede definirse como

$$J \equiv J(S) := -\frac{1}{8\pi} \int_S \Omega_a^{(l)} \eta^a dS \quad (38)$$

donde estamos tomando nuevamente una congruencia de geodésicas nulas, con vectores nulos  $l^a$  y  $k^a$  perpendiculares a la superficie  $S$ , y tangentes a las geodésicas, bajo las mismas condiciones que en la sección 2.2.  $\Omega_a^{(l)}$  es la forma fundamental normal o torsión de  $l^a$ . Es de suma importancia la suposición de axisimetría, pues no se conoce una definición exacta de momento angular fuera de este contexto.

Si  $\eta^a$  es la restricción a la superficie  $S$  de un vector axisimétrico del espacio tiempo global (4D), entonces se puede expresar  $J$  como

$$J(S) := -\frac{1}{8\pi} \int_S \nabla^b \eta^a dS_{ab} \quad (39)$$

donde  $dS_{ab} = 2l_{[a}k_{b]}dS$ . Esta cantidad se denomina *momento angular de Komar*.

Por el teorema de Hodge, existen campos escalares  $\tilde{\omega}$  y  $\lambda$ , definidos a menos de una constante, tal que

$$\Omega_a^{(l)} = \epsilon_{ab} D^b \tilde{\omega} + D_a \lambda \quad (40)$$

En axisimetría, estas funciones están expresadas solo en términos de  $\theta$ , y si estamos en presencia de materia cargada, recordando las definiciones de los campos en términos de  $\psi, \chi$ , definimos

$$\omega' = 2\eta\tilde{\omega}' - 2\chi\psi' + 2\chi'\psi \quad (41)$$

o equivalentemente  $\tilde{\omega}' = \frac{2\chi\psi' - 2\chi'\psi + \omega'}{2\eta}$ . Si no hay cargas, tomamos  $\tilde{\omega}' = \frac{\omega'}{2\eta}$ , es decir  $\psi, \chi$  nulos.

Esta cantidad está relacionada a la definición de momento angular (37), en ausencia de cargas, de la siguiente manera: debido a la axisimetría, tenemos que

$$\eta^a \Omega_a^{(l)} = \eta^a \epsilon_{ab} D^b \tilde{\omega}$$

Calculamos en la sección 7.2, asumiendo la métrica (29), que  $\Omega_a^{(l)} = (0, -e^{\sigma-c} \sin \theta \partial_\theta \tilde{\omega})$ , y por lo tanto  $\eta^a \Omega_a^{(l)} = -e^{\sigma-c} \sin \theta \partial_\theta \tilde{\omega} = \frac{-e^{\sigma-c} \sin \theta \partial_\theta \omega}{2\eta}$ , pues  $2\chi\psi' - 2\chi'\psi = 0$ . Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} J(S) &= \frac{1}{8\pi} \int_S \frac{-e^{\sigma-c} \sin \theta \partial_\theta \omega}{2\eta} e^c \sin \theta d\theta d\varphi = -\frac{1}{8\pi} \int_S \frac{e^{\sigma-c} \sin \theta \partial_\theta \omega}{2e^\sigma \sin^2 \theta} e^c \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{1}{8} [\omega(\pi) - \omega(0)] \end{aligned} \quad (42)$$

Es decir,  $J$  viene dado por el valor de la función  $\omega$  en los polos, así como antes las cargas eléctrica y magnética venían dadas por los valores de  $\psi, \chi$  en los polos.

## 2.6. Soluciones conocidas de múltiples agujeros negros

### 2.6.1. Solución de Majumdar- Papapetrou

Es una solución estática y asintóticamente plana a las ecuaciones de electrovacío de Einstein-Maxwell, (10)-(12), sin constante cosmológica e incompleta geodésicamente (presenta singularidades). En 1972, Hartle y Hawking [34] la extendieron para que sea geodésicamente completa, descubriendo que la solución de Majumdar-Papapetrou (M-P) corresponde a un sistema de agujeros negros cargados, en equilibrio bajo sus fuerzas gravitacionales y eléctricas mutuas. Conjeturaron que las únicas soluciones estacionarias a las ecuaciones de electrovacío de Einstein-Maxwell con más de un agujero negro y sin singularidades desnudas (es decir, singularidades cubiertas por un horizonte de eventos) eran aquellas de M-P, las cuales corresponden a múltiples agujeros negros con  $|Q_i| = m_i$ .

La métrica para este sistema es

$$ds^2 = -U^{-2}(\vec{x}) dt^2 + U^2(\vec{x})(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (43)$$

con

$$U(\vec{x}) = 1 + \sum_i \frac{m_i}{r_i}, \quad r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

con  $\vec{x} = (x, y, z)$  y  $r_i$  la distancia entre la  $i$ -ésima carga y el punto campo.

La única componente del cuadvivector potencial  $A_\mu(\vec{x})$  que no se anula es el potencial electrostático  $\Phi(\vec{x})$ , cuya relación con la métrica es  $\Phi(\vec{x}) = A_t(\vec{x}) = U^{-1}(\vec{x})$ .

En el caso de una única carga puntual uno esperaría recuperar la solución de Reissner-Nordstrom extremo, con  $|Q| = m$ , que es lo que sucede.

*Notamos que no hay simetría en esta solución, y que los agujeros negros están en equilibrio, sin presencia de singularidades cónicas.*

### 2.6.2. 2 agujeros negros de Schwarzschild

esta solución es explicada con detalle en la sección 2.7.

### 2.6.3. Múltiples agujeros negros de Kerr

Es una solución a las ecuaciones de Einstein, estacionaria, axialmente simétrica y asintóticamente plana, de electrovacío. Presenta singularidades cónicas en el eje de simetría que une a los agujeros. [35].

Para un espacio tiempo estacionario, axialmente simétrico, electrovacío, uno puede siempre elegir un sistema de coordenadas en el cual la métrica adquiere la siguiente forma

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -V dt^2 + 2W d\varphi dt + X d\varphi^2 + \frac{X e^q}{\rho^2}(d\rho^2 + dz^2) \quad (44)$$

donde ninguna función depende de la coordenada azimutal. Además, vemos que existen dos campos vectoriales de Killing para esta métrica,  $T^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$  y  $K^a = (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ , que se corresponden con la estacionariedad y la axisimetría de este espacio tiempo. Se tiene que

$$V = -T^a T_a \quad (45)$$

$$X = K^a K_a \quad (46)$$

$$W = K^a T_a \quad (47)$$

El conjunto de puntos con  $\rho = 0, X = 0$  es el eje de simetría, mientras que el conjunto de puntos con  $\rho = 0, X > 0$ , es el horizonte de eventos, con  $N$  componentes conectadas al horizonte (es decir,  $N$  agujeros negros).

Como se mencionó en un principio, esta solución presenta singularidades cónicas en el espacio entre cada agujero, cuya presencia se manifiesta debido al valor no nulo de la función  $q$  en estas regiones. (Ver sección 2.7), y para dos agujeros rotantes, de igual masa  $M$ , con velocidades angulares de signo contrario y a distancia  $R$  entre ellos, la expresión para la fuerza de interacción (definida en función del déficit de ángulo alrededor de la singularidad entre agujeros) resulta ser [39]

$$F = \frac{M^2}{R^2 - 4M^2}, \quad R > 2M \quad (48)$$

Notamos que cuando la distancia entre los agujeros rotantes tiende a infinito, se obtiene la expresión Newtoniana para la fuerza entre dos objetos de masa  $M$ , ninguna dependiendo del momento angular. Además (48) coincide con la expresión para la fuerza entre dos agujeros de Schwarzschild con la misma masa, como se verá mas adelante.

Cabe destacar que la presencia de singularidades cónicas evidencia que la solución realista para dos agujeros negros no puede ser estacionaria (las singularidades cónicas surgen como una falla de imponer esta condición a un sistema que no puede ser estacionario). Pero al menos la solución estacionaria demuestra, cualitativamente, los efectos causados por la interacción de agujeros negros.

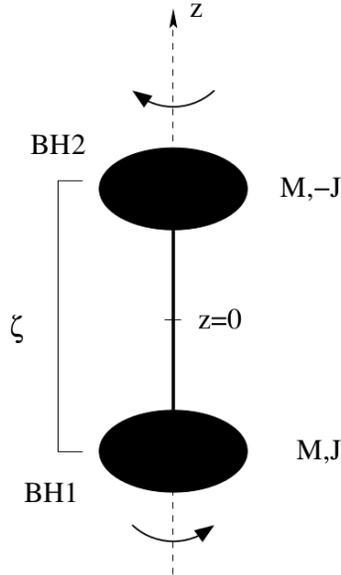


Figura: Dos agujeros negros rotantes, con velocidades angulares iguales y contrarias, y de la misma masa.

## 2.7. Fuerza entre agujeros negros en simetría axial: motivaciones

Ya que las definiciones de la sección siguiente estarán basadas en los trabajos [8] y [9], se procede a explicar en forma resumida lo que se trata en aquellos trabajos.

En [9] se propone encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein de vacío, asintóticamente plana, axialmente simétrica y estacionaria, con dos o más agujeros negros rotantes (Kerr), basándose en el trabajo de Bach-Weyl de 1920 [8], quienes resuelven las ecuaciones de Einstein de vacío también, y hallan una solución análoga, pero estática, para un sistema de 2 agujeros negros de Schwarzschild (no rotantes, sin carga) axialmente simétrico. Los autores resolvieron este problema debido al hecho de que fuera del eje de simetría, las ecuaciones de Einstein se vuelven lineales, pudiendo superponer soluciones. Además, para este caso, se demuestra que las ecuaciones de vacío se reducen a un problema axialmente simétrico para un dado mapa  $u$  entre una región del espacio tridimensional y el plano hiperbólico, que cumple la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, con dadas condiciones de

Borde (problema de Dirichlet). Para el caso de 2 agujeros de Schwarzschild, como solución al problema conjunto se obtiene, de la métrica de Schwarzschild (como el problema para  $u$  es lineal),  $u = u_1 + u_2$  de la forma

$$u = u_1 + u_2 = -\log\left(1 - \frac{2m_1}{r}\right) - \log\left(1 - \frac{2m_2}{r}\right) \quad (49)$$

y por lo tanto, la métrica 4D para este espacio *estacionario*, asintóticamente *plano* y *axialmente simétrico* es

$$g_{ab}dx^a dx^b = -V dt^2 + 2W d\varphi dt + X d\varphi^2 + e^{2\lambda}(d\rho^2 + dz^2) \quad (50)$$

donde todas las funciones son independientes de la coordenada  $\varphi$ ,  $X = \rho^2 e^u$  y  $\lambda = \frac{q}{2} + \frac{u}{2}$ .

Si pensamos a los agujeros puestos a distancia  $R$  entre ellos, *centrados* en  $z = 0$  y  $z = R$  respectivamente, los horizontes de cada uno se encuentran entre los valores de  $z$   $[-m_1, m_1]$  y  $[R - m_2, R + m_2]$ , para cada uno. Denominamos a las 3 regiones delimitadas por los objetos como

$$\Gamma_1 = \{\rho = 0, z \in (-\infty, -m_1]\} \quad (51)$$

$$\Gamma_2 = \{\rho = 0, z \in [m_1, R - m_2]\} \quad (52)$$

$$\Gamma_3 = \{\rho = 0, z \in [R + m_2, +\infty)\} \quad (53)$$

Ahora, el espacio tiempo (solución al problema) que se obtiene de la forma anterior no es regular en todos lados; es decir, habrá una singularidad, del tipo cónica, sobre alguna componente del eje. Más adelante, debido a que los agujeros se suponen a una distancia fija, y la solución que se obtiene es estacionaria, la presencia de la singularidad (la cual estará entre los agujeros) será interpretada como la causa de que los objetos se mantengan en una posición dada respecto del otro, y que el sistema no colapse.

La condición para que la solución sea regular en el eje es que la función  $q$  tienda a cero sobre él. Ésto puede verse como sigue: tomamos el cociente entre el perímetro (largo) de un círculo geodésico de radio  $\rho = \rho_0$  en el plano  $\rho - \varphi$ , y su radio ; este cociente debería tender a  $2\pi$  en el eje de simetría si la solución no presentase singularidades y fuese regular, es decir *en el eje*, y para esta métrica, debería suceder

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{Perimetro}{Radio} = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2\pi} \sqrt{\det(g(t_0, \rho_0, z_0))} d\varphi}{\int_0^{\rho_0} \sqrt{\det(g(t_0, z_0, \varphi_0))} d\rho} = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{\sqrt{X(\rho_0, z_0)}}{\int_0^{\rho_0} e^{\lambda} d\rho} \rightarrow 2\pi \quad (54)$$

Se elige que la función  $q$  se desvanezca en las componentes del eje no acotadas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  (es decir en el espacio del eje externa a los agujeros), haciendo que  $e^{2\lambda} \rightarrow 1$  (como es requerido para la métrica sea asintóticamente plana). Sin embargo, sin importar los valores que se le den a las masas y la distancia  $R$  entre agujeros,  $q$  no tiende a cero en el espacio entre agujeros  $\Gamma_2$ , y por lo tanto denominamos  $b = q(\Gamma_2)$ . Se demostrará que, debido a que la presencia de la singularidad entre agujeros (la cual surge porque  $q$  no es nula en esa región), existe una cantidad, que Weinstein denomina **fuerza, la cual es responsable de mantener a los agujeros a distancia fija**.

Para una superficie suave, con alguna métrica inducida sobre ella, la fórmula de Gauss Bonet se expresa

$$\int_{B_\rho} \frac{R_S}{2} dA = 2\pi - \int_{C_\rho} \kappa_g ds \quad (55)$$

donde  $\kappa = \frac{R_S}{2}$  es la curvatura de la superficie (calculada a partir de la métrica inducida),  $B_\rho$  una bola coordenada,  $C_\rho$  un círculo coordenado, y  $\kappa_g = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2}$  la curvatura geodésica. Si en la métrica (43) tomamos  $t = \text{cte}$  y  $z = \text{cte}$ , vemos que la métrica inducida en el plano  $\rho - \varphi$  es

$$h_{ab} dx^a dx^b = X d\varphi^2 + e^{2\lambda} d\rho^2 = \rho^2 e^u d\varphi^2 + e^{2\lambda} d\rho^2 \quad (56)$$

Calculando la curvatura geodésica se obtiene  $\kappa_g = e^{-\lambda}(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \rho})$  y por lo tanto, si  $\lambda = \frac{q}{2} + \frac{u}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{C_\rho} \kappa_g ds &= \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \sqrt{\det(h(\rho_0))} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-\lambda} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho e^{\frac{u}{2}} d\varphi \\ &= 2\pi e^{-\frac{q}{2}} \left( 1 + \frac{\rho}{2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad (57)$$

Se define  $\mu_\kappa(B_\rho) = \int_{B_\rho} \frac{R_{sup}}{2} dA = \int_{B_\rho} \kappa dA = 2\pi e^{-\frac{a}{2}} (1 + \frac{\rho}{2} \frac{\partial u}{\partial \rho})$ , donde el límite de  $\rho \rightarrow 0$  de  $\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}$  es -2 ; entonces se cumple

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_\kappa(B_\rho) = 2\pi(1 - e^{-\frac{b}{2}}) \quad (58)$$

Notamos que en el caso sin singularidades, este limite debería ser  $2\pi$ . Que la curvatura sea singular en el eje de simetría axial (por la presencia de la singularidad cónica sobre él, entre los agujeros) y usando las ecuaciones de Einstein, vemos que existe una especie de «materia ficticia» o materia singular que mantiene a los agujeros a una distancia dada ente ellos, sin que el sistema evolucione o colapse. Veamos esto:

$$T_{ab} = \frac{1}{8\pi} G_{ab} = \frac{1}{8\pi} (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) = \frac{1}{8\pi} (R_{ab} - \kappa g_{ab}) \quad (59)$$

Ahora, definimos a la fuerza como el stress por unidad de área, respecto a la componente  $T_{zz}$  del tensor energía momento, o sea

$$\mathcal{F} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_{\kappa(T_{zz})}(B_\rho) \quad (60)$$

Para  $T_{zz}$ , (52) es

$$\kappa = \frac{1}{g_{zz}} (R_{zz} - 8\pi T_{zz}) \quad (61)$$

donde , como la curvatura es singular,  $T_{zz} = \frac{-\kappa}{8\pi} + \text{parte regular}$ . Entonces, como la parte regular no contribuye (ya que en el límite en que  $\rho$  va a cero su integral es nula, porque el integrando es regular y la región de integración va a cero) resulta

$$\mathcal{F} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \mu_{\kappa(T_{zz})}(B_\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{B_\rho} \kappa dA = -8\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{B_\rho} T_{zz} dA = 2\pi(1 - e^{-\frac{b}{2}}) \quad (62)$$

y por lo tanto, finalmente se tiene, para el *caso axisimétrico*

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} (e^{-\frac{a}{2}} - 1) \quad (63)$$

donde se recuerda que  $e^{-b/2}$  es lo que de ahora en adelante llamaremos *déficit de ángulo*, pues es lo que resulta de calcular el cociente (54), el ángulo

faltante para lograr tener un círculo geodésico de ángulo  $2\pi$ , como sucedería en ausencia de singularidades cónicas entre los agujeros.

Si se realiza el cálculo del déficit de ángulo para la métrica estática, axialmente simétrica, de vacío y asintóticamente plana, se obtiene la fuerza de interacción entre dos agujeros negros no rotantes y sin carga, en configuración axisimétrica, de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, y a distancia  $R$  entre sí:

$$\mathcal{F} = \frac{m_1 m_2}{R^2 - (m_1 + m_2)^2}$$

esta expresión se reduce a la expresión Newtoniana para la interacción entre dos objetos de cierta masa, en el límite en que la distancia entre agujeros es muy grande.

Remarcamos que la solución obtenida por Bach y Weyl para el caso de dos agujeros negros de Schwarzschild, con una singularidad cónica en el eje entre los agujeros, se obtuvo en el marco de pedir que la solución fuese estacionaria, y la singularidad surgió debido a que la solución en realidad no puede serlo.

## 2.8. Fuerza entre agujeros negros en simetría axial

Consideramos un sistema de  $N$  agujeros negros, en configuración axisimétrica, con un eje de simetría privilegiado que los une. Focalizamos la atención sobre uno de ellos, y cómo interactúa con sus dos vecinos inmediatos. Se asume la existencia de singularidades cónicas en el horizonte del agujero negro observado, sobre el eje de simetría. Tomamos una curva circular geodésica que rodee a una singularidad dada, entonces:

Definimos el ángulo alrededor de la  $s$ -ésima singularidad cónica como  $\phi_s = \lim_{Radio \rightarrow 0} \frac{Perimetro}{Radio}$ , donde el perímetro del círculo geodésico se calcula mediante la fórmula

$$Perimetro = \int_0^{2\pi} \sqrt{\det \tilde{g}} d\phi \quad (64)$$

donde  $\tilde{g}$  es la métrica que se obtiene tomando  $\rho = \rho_0$  y  $z = z_0$  constantes en la métrica axialmente simétrica, en coordenadas cilíndricas,  $ds^2 = e^{\sigma+2q}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^\sigma d\phi^2$ .

El radio de la circunferencia se calcula de manera análoga, tomando  $\varphi$  y  $z$  constantes en la misma métrica, calculando la raíz de su determinante, e integrando la coordenada radial entre 0 y un radio fijo  $\rho_0$ .

### Definición 2.8.1

Decimos que existe una singularidad cónica sobre la superficie  $S$ , si el cociente

$$\phi_S = \lim_{Radio \rightarrow 0} \frac{Perimetro}{Radio} \quad (65)$$

es distinto de  $2\pi$ , donde el perímetro es el de una curva circular geodésica tomada al rededor de la singularidad.

Para el caso axisimétrico, asumimos que las singularidades están sobre el eje de simetría, que conecta a los agujeros.

El nombre para esta singularidad surge de lo siguiente: pensemos en una curva cerrada circular, en ausencia de singularidades cónicas. Entonces, la métrica será regular, y al calcular el límite anterior, el resultado sería  $2\pi$ . Sin embargo, en presencia de singularidades, la métrica sera no regular, y al tomar una curva alrededor de la singularidad, surgirá un déficit de ángulo que provocará que debido a su presencia, no se llegue a completar una curva cerrada, y por lo tanto, el límite (43) resultará distinto a  $2\pi$ .

Considerando entonces una métrica no regular, y al hacer lo comentado anteriormente para calcular perímetro y radio de la curva alrededor de la singularidad y hacer el cociente (43), obtenemos que para esta métrica, el ángulo alrededor de la singularidad  $\phi_S$  resulta

$$\phi_S = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi\rho_0 e^{\frac{\sigma(\rho_0)}{2}}}{\int_0^{\rho_0} e^{\frac{\sigma}{2}+q} d\rho} \quad (66)$$

Para tratar el denominador, procedemos a desarrollar en serie de Taylor el integrando:

$$\int_0^{\rho_0} e^{\frac{\sigma}{2}+q} d\rho = \int_0^{\rho_0} d\rho \left\{ e^{\frac{\sigma}{2}+q}|_0 + \partial_\rho \left( e^{\frac{\sigma}{2}+q} \right) |_0 \rho + \dots \right\} \quad (67)$$

Debido a que los término de orden lineal y superiores van a cero más rápido que el primer término cuando  $\rho_0 \rightarrow 0$ , se descartan, y por lo tanto

$$\int_0^{\rho_0} e^{\frac{\sigma}{2}+q} d\rho = \int_0^{\rho_0} (e^{\frac{\sigma}{2}+q}|_0) d\rho = e^{\frac{\sigma(0)}{2}+q(0)} \rho_0 \quad (68)$$

Finalmente entonces

$$\phi_S = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi\rho_0 e^{\frac{\sigma(\rho_0)}{2}}}{e^{\frac{\sigma(0)}{2} + q(0)} \rho_0} = 2\pi e^{-q(0)} \quad (69)$$

Notamos que, debido a que el Killing  $\eta^a = (\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$  cumple con la relación  $\sqrt{\eta} = \sqrt{\eta_a \eta^a} = \rho e^{\sigma/2}$ , podríamos haber escrito  $\phi_S$  como

$$\phi_S = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi \sqrt{\eta}|_{\rho_0}}{\int_0^{\rho_0} e^{\frac{\sigma}{2} + q} d\rho} \quad (70)$$

Por lo tanto, definiendo la **Fuerza** como una cantidad proporcional al **déficit de ángulo**  $\delta_s = 2\pi - \phi_s$ , **tenemos que, en el caso axisimétrico la fuerza queda definida por**

$$\mathcal{F}_s = \frac{1}{4}(e^{-q_s} - 1) \quad (71)$$

donde el subíndice  $s$  denota la componente conexas  $s$ -ésima en el eje de simetría.

## 2.9. Nociones de topología en la esfera

### 2.9.1. Topología esférica

Una esfera de radio  $r$  en el espacio real de  $n$  dimensiones, centrada en el origen de coordenadas de un dado sistema, se define como el conjunto de puntos que satisfacen la condición

$$\{x^1, \dots, x^n / (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r^2\} \quad (72)$$

y en coordenadas esféricas puede parametrizarse como  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , donde  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . En dos dimensiones ( $n = 2$ ), la métrica sobre la esfera  $S^2$  de radio  $r = R = cte$  en coordenadas esféricas puede escribirse como

$$g_{ab} dx^a dx^b = ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (73)$$

Por lo tanto, el diferencial de superficie es  $dS = \sqrt{\det g} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , y su área  $A = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2$ .

### **Definición 2.9.1**

Diremos que una superficie tiene topología esférica si la superficie es mapeable mediante un mapa invertible al borde de una bola en  $n+1$  dimensiones (borde de dimensión  $n$ ). Es decir que la superficie es mapeable a una esfera en  $n$  dimensiones.

La esfera  $S^2$  se caracteriza por ser una variedad topológica compacta, es decir cerrada y sin borde, de dimensión 2. Del cálculo del escalar de curvatura  $R = R_{ab}g^{ab}$  para la métrica (73) puede verse que sobre la esfera **este** escalar toma un valor constante. Las curvas de menor longitud sobre ella (geodésicas) son círculos máximos.

### **2.9.2. Genus y característica de Euler, Teorema de Gauss Bonet para superficies regulares**

#### **Teorema 2.9.2: Teorema de Gauss Bonet (regular)**

Sea  $M$  una variedad de Riemann compacta, orientable y de dimensión 2, con borde  $\partial M$ . Denótese por  $K$  la curvatura gaussiana,  $K = \frac{R}{2}$ , en los puntos de  $M$  y por  $\kappa_g$  la curvatura geodésica en los puntos de  $\partial M$ . Entonces

$$\frac{1}{2} \int_M R dA + \int_{\partial M} \kappa_g ds = 2\pi\chi(M) \quad (74)$$

donde  $\chi(M)$  es la característica de Euler de  $M$ ,  $\chi(M) = (2 - 2g)$ , siendo  $g$  el genus de la variedad de dimensión 2 (superficie), es decir el número de «agujeros» que posee.

El teorema se puede aplicar en particular si la variedad no tiene borde, en cuyo caso la integral  $\int_{\partial M} \kappa_g ds$  puede ser omitida.

Para la esfera  $S^2$ , el genus es cero, pues no tiene agujeros (a diferencia del toro por ejemplo, cuyo genus es igual a 1). Por lo tanto su característica de Euler es positiva. *La esfera es la única superficie sin borde cuya característica de Euler es positiva.*

## 2.10. Desigualdades matemáticas

- *Desigualdad de Holder*

Para funciones integrables  $f$  y  $h$ , la desigualdad de Holder está dada por

$$\int_S fh dS \geq \left( \int_S f^2 dS \right)^{1/2} \left( \int_S h^2 dS \right)^{1/2} \quad (75)$$

Si tomamos  $h=1$ , obtenemos

$$\int_S f dS \geq \left( \int_S f^2 dS \right)^{1/2} A^{1/2} \quad (76)$$

Elevando al cuadrado ambos lados

$$\left( \int_S f dS \right)^2 \geq \left( \int_S f^2 dS \right) A \quad (77)$$

siendo  $A$  el área de  $S$ .

- *Desigualdad de Young*

Sean  $a, b \geq 0$ ,  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (78)$$

### 3. Resultados en simetría axial

Consideramos un sistema de múltiples agujeros, ubicados a lo largo de un mismo eje, de tal manera que el sistema total tiene simetría axial. Nos preguntamos sobre la posibilidad de mantener tal sistema en equilibrio, y en caso de que la respuesta sea negativa, qué carácter tiene la fuerza que los hace interactuar, es decir, si es repulsiva o atractiva.

Para tratar este problema, podríamos intentar plantear las ecuaciones de Einstein para el sistema en su conjunto, proponiendo alguna forma para la métrica en términos de funciones desconocidas, y basándonos en suposiciones sobre la estructura global del espacio tiempo (estacionariedad, que sea asintóticamente plano, que contenga carga, que el sistema sea axialmente simétrico, esféricamente simétrico, entre muchas condiciones que podríamos pedir). Luego, resolveríamos las ecuaciones para esta métrica (mediante algún método), y obtendríamos la descripción geométrica de este espacio tiempo donde se encuentran los distintos agujeros. Sin embargo, es obvio que debido a que las ecuaciones son no lineales y están acopladas, es en extremo difícil construir una solución al problema de esta manera, además de que posiblemente resultaría una métrica singular, ya que debemos relajar la condición de regularidad en el eje si pretendemos que aparezca alguna interacción entre agujeros (en el sentido en que la definen Weyl-Weinstein, entre otros). Además no estamos interesados en lo que ocurre globalmente con este sistema, al menos por el momento, y para construir una solución exacta debemos considerar esta estructura, lo cual tampoco es simple.

Otra opción es tratar cada agujero por separado, posando la atención en uno de ellos en particular, y observando cómo interactúa con los demás. Nos inclinamos por esta opción, y representamos a cada agujero por una MOTS axisimétrica estable, definidas en la sección anterior, estudiando algunas de sus propiedades para determinar las fuerzas a las que se ve sometida.

Como se mencionó antes, asociamos las fuerzas con la presencia de singularidades cónicas, y por lo tanto permitimos su existencia sobre el eje de simetría del sistema, donde están ubicados los objetos.

Nos interesa también el rol que pueda llegar a tener la constante cosmológica y la presencia de campo electromagnético en la estimación de la magnitud de la fuerza. Por esto tomamos  $\Lambda \neq 0$ , y un tensor de energía materia cuyas contribuciones vendrán de la presencia de materia neutra y de materia cargada, es decir, lo primero nos da un  $T_{ab}^{Materia}$  y lo segundo nos obliga a utilizar el tensor electromagnético  $T_{ab}^{Maxwell}$ , siendo el tensor de energía materia total la suma de estos dos términos. Para la parte de materia no

cargada, asumimos que esta cumple con la condición de energía dominante, definida en la sección 2.1, y notamos que el Tensor de Maxwell la cumple de por si. Esta condición es, de entre todas, la más lógica y físicamente razonable de asumir, pues establece que la densidad de materia es estrictamente positiva, y que sobre todo, esta es mayor a la presión que ejerce la materia (ya sea cargada o no).

Con respecto a la constante cosmológica, no utilizamos signo alguno para los teoremas 3.1 y 4.1, en un principio, pero asumimos que  $\Lambda > 0$  en el teorema 3.2. Reiteramos que, debido a lo dicho anteriormente de la relación entre  $\Lambda$  y la presencia de materia oscura en el universo, un valor positivo de esta constante nos da un universo que se expande aceleradamente, y un valor negativo, uno que esté contrayéndose, por lo que parece más plausible tomar  $\Lambda > 0$ , debido a las observaciones astronómicas de un universo en expansión.

### 3.1. Desigualdad entre Área, Carga, constante cosmológica y Fuerza

#### Teorema 3.1

*Sea  $S$  una 2-superficie, MOTS estable, axisimétrica, con topología esférica, en un espacio-tiempo 4 dimensional  $(M, g_{ab})$  en presencia de un campo electromagnético, donde el tensor de Einstein  $G_{ab}$  y el tensor de energía-momento  $T_{ab}^{TOTAL} = T_{ab}^{Maxwell} + T_{ab}^{Materia}$  satisfacen la ecuación (9), con constante cosmológica no nula, sin signo predeterminado para ella. Si además  $T_{ab}^{Materia}$  satisface la condición de energía dominante, entonces se cumple que*

$$8\pi(\mathcal{F}_\pi + \mathcal{F}_0) \geq \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 - 4\pi \quad (79)$$

donde  $A$  es el área sobre la superficie  $S$ ,  $Q^2 = Q_E^2 + Q_B^2$  (cargas eléctrica y magnética respectivamente), y  $(F_\pi, F_0)$  las fuerzas asociadas a la presencia de singularidades cónicas sobre el eje, en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$

#### Discusión y Análisis

Notamos que  $\Lambda$  no tiene signo predeterminado. Queremos asumir que la superficie  $S$  tiene topología esférica, y en el caso de que  $\Lambda > 0$ , esto se deduciría del teorema de Gauss Bonnet, si la superficie NO contuviera singularidades cónicas, de la siguiente manera: tomemos la ecuación (96), escrita más abajo, la cual es

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \left\{ \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b + \Lambda \right\} dS \quad (80)$$

Ahora, por el teorema de Gauss Bonet, se cumple que

$$\frac{1}{2} \int_S R_S dS = 2\pi\chi \quad (81)$$

donde  $\chi = 2 - 2g$ , donde  $g$  es el genus (o numero de «huecos») de la superficie  $S$ ,  $\chi$  la característica de Euler. Por lo tanto resulta

$$\chi \geq \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b + \Lambda \right\} dS \quad (82)$$

Como se detalla en la demostración, debido a que la signatura de la 2 métrica  $h_{ab}$  es estrictamente positiva, el primer término es un cuadrado y por lo tanto su integral es mayor a cero. Además, como  $T_{ab}^{Maxwell}$  cumple la condición de energía dominante, y si  $\Lambda > 0$ , entonces sale de (82) que  $\chi \geq 0$ , y en particular, ya que al menos  $\Lambda$  es no nula (y su integral sobre la superficie es  $\Lambda A$ , con  $A$  el área de  $S$ ),  $\chi > 0$ . Pero las *únicas superficies orientadas cerradas con Característica de Euler positiva son esferas*. Por lo tanto  $S$  debe ser topológicamente una esfera. Pero **la superficie contiene singularidades**, por lo tanto **esto no es aplicable, así que tanto si  $\Lambda > 0$  como si  $\Lambda < 0$ , la topología esférica se asume** de ahora en más.

Analizamos ahora las hipótesis que asumimos en este teorema y las cantidades que aparecen en el resultado:

- Condición de energía dominante para  $T_{ab}^{Materia}$ : como explicamos antes, es la condición mas razonable que se puede pedir, además permite que en la desigualdad final (79) no aparezca la materia neutra explícitamente. Resaltamos que si no pidiéramos esta condición, aparecería un término correspondiente a  $T_{ab}^{Materia}$  en la desigualdad, y por lo tanto, podríamos mejorar la cota para la fuerza.
- Axisimetría: pedir esto parece una condición necesaria para poder utilizar la definición de fuerza dada en 2.8 ; sin embargo, vamos a extender este concepto para el caso sin simetría. Ver teorema 4.1
- Fuerza no nula en los polos  $\theta = 0, \pi$ : Como asumimos que existen singularidades cónicas sobre el eje que une a los agujeros, y los agujeros

están colocados sobre este eje, de simetría, las singularidades cónicas aparecen sobre el horizonte del agujero (con topología esférica) en que posamos la atención, una en cada polo, manifestando la presencia de otros 2 agujeros por encima y por debajo del que se observa. estas fuerzas son las responsables de intentar mantener al sistema en equilibrio. Notamos que si no hay otros agujeros además del que se trata, la fuerza se anula.

- Carga electromagnética  $Q$ : en la desigualdad (79), la carga aparece como  $Q^2$ , por lo que no podemos observar el efecto del signo de la carga en cada agujero sobre la interacción con otros. Recordamos que la solución de Majumdar-Papapetrou, única solución de equilibrio para múltiples agujeros, estática y axialmente simétrica, contempla muchos agujeros cargados, en los que para cada uno se cumple que  $Q = m_i$ , las cargas de todos ellos iguales entre sí. Uno podría pensar que entonces la repulsión coulombiana y la atracción gravitatoria se compensan entre sí, y por esto ocurre el equilibrio. En el caso de esta desigualdad, no podríamos decir algo similar, pues el signo de la carga no es tenido en cuenta; ese dato se pierde por la presencia de la carga al cuadrado. Además, notamos que en las desigualdades (3),(5),(6),(7) y (8), que no contemplan fuerza, la carga aparece de la misma forma, por lo que podemos conjeturar que es un aspecto general de esta clase de desigualdades.
- Signo de  $\Lambda$ : Comparando los casos con constante positiva y negativa, vemos que en el primer caso la cota para la fuerza es de mayor magnitud que en el segundo caso, pero aun así no podemos asegurar que será positiva (atractiva), debido al término  $4\pi$  que está restando a las otras cantidades. A pesar de esto, en el caso  $\Lambda > 0$ , y si se cumple  $\Lambda A + \frac{16\pi^2}{A}Q^2 \gg 4\pi$ , podremos asegurar que la fuerza, alguna de las dos que allí aparecen, será positiva. En el caso que la constante sea nula, obtenemos

$$8\pi(\mathcal{F}_\pi + \mathcal{F}_0) \geq \frac{16\pi^2}{A}Q^2 - 4\pi \quad (83)$$

Evidentemente, la cota para fuerza es menor que cuando  $\Lambda \neq 0$ , y será positiva, nuevamente, cuando  $\frac{16\pi^2}{A}Q^2 \gg 4\pi$ . Observamos que hay una diferencia entre (79) y la expresión (8),

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_{i-1})(1 + 4\mathcal{F}_i)} \geq \frac{1}{A_i} \sqrt{(8\pi|J_i|)^2 + 16\pi^2(Q_{iE}^2 + Q_{iB}^2)^2} \quad (84)$$

(además de la presencia de momento angular en esta desigualdad) pues la fuerza aparece de manera distinta en ambas ecuaciones; matemáticamente, la diferencia se debe a que para obtener (79), se toma  $\alpha = 1$  en la demostración (ver más abajo), y en el caso de (8), se elige tomar  $\alpha = e^{c-\frac{\sigma}{2}}$ . Se intentó una demostración para el Teorema 3.1 usando este valor de la función, pero debido a la presencia de  $\mathcal{A}$ , no obtenemos un resultado «cerrado» para la desigualdad (Ver el análisis de este caso en la subsección 5.1.1). Conjeturamos que para cada elección de  $\alpha$  se obtendrá una desigualdad distinta.

- La presencia de singularidades cónicas es lo que mantiene a los agujeros negros a distancia fija entre ellos, y puede verse como una especie de obstrucción. Aquí NO estamos asumiendo estacionariedad, por lo tanto no sabemos realmente si estas singularidades cónicas existen, solo lo suponemos. Recordamos que, para el caso de 2 agujeros de Schwarzschild, la singularidad cónica sobre el eje de simetría entre ellos surgió por haber pedido que la solución sea estacionaria, por lo que si no pedimos esta condición, no tendremos certeza de que la solución para el sistema completo de múltiples agujeros contenga singularidades cónicas. Además, en ausencia de estas singularidades, no podríamos decir que el sistema se encuentra en equilibrio, por que no sería estacionario; sin singularidades cónicas que los mantengan a distancia fija los agujeros colapsarían en un único agujero, posiblemente rotante, pero sería un sistema en evolución, y no en equilibrio.

Para la demostración del teorema, se utiliza la definición de MOTS estable explícitamente (y todas las cantidades relacionadas), acotando superiormente la desigualdad que se desprende de la definición, y desechando todos aquellos términos mayores o iguales a cero. Pedimos que  $\gamma, \psi$  que aparecen en la definición de MOTS estable, sean funciones axisimétricas, al igual que  $\Omega_a^{(l)}$ . Se utiliza la métrica (30), inducida sobre S.

### 3.1.1. Demostración del Teorema 3.1

Partimos de la condición de estabilidad de las MOTS; sea  $\alpha$  una función axisimétrica. Multiplicamos por  $\frac{\alpha^2}{\psi}$  a esta condición, y debido a que  $\psi > 0$ , se tiene que

$$\frac{\alpha^2}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} = \alpha^2 [-\Delta_S \ln \psi + D^a \Omega_a^{(l)} - D^a \ln \psi D_a \ln \psi + 2D^a \ln \psi \Omega_a^{(l)} -$$

$$-\Omega_c^{(l)}\Omega^{c(l)} + \frac{R_s}{2} - \frac{\gamma}{\psi}(\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)} + G_{abl^a}l^b) - G_{ab}k^al^b \geq 0 \quad (85)$$

Integramos (10) sobre S, tratando algunos de los términos con integración por partes:

$$\int_S \alpha^2 D^a (D_a \ln \psi) dS = \alpha^2 D^a \ln \psi|_S - \int_S (2\alpha D_a \alpha D^a \ln \psi) dS \quad (86)$$

$$\int_S \alpha^2 D^a \Omega_a^{(l)} dS = \alpha^2 \Omega_a^{(l)}|_S - \int_S 2\alpha D^a \alpha \Omega_a^{(l)} dS \quad (87)$$

donde los términos de borde se anulan. Entonces lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_S \left\{ -\alpha\beta[\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)} + G_{abl^a}l^b] + \alpha^2[-\Omega_a^{(l)}\Omega^{a(l)} + \frac{R_s}{2} - G_{ab}k^al^b] \right\} dS + \\ + \int_S [2\alpha D^a \alpha D^a \ln \psi - \alpha^2 D_a \ln \psi D^a \ln \psi] dS - \\ - \int_S [2\alpha D_a \alpha \Omega_a^{(l)} + 2\alpha^2 D^a (\ln \psi) \Omega_a^{(l)}] dS \end{aligned} \quad (88)$$

donde  $\beta = \frac{\alpha\gamma}{\psi}$

Ahora recordamos que estamos considerando simetría axial, y por lo tanto las funciones  $\psi, \beta, \gamma$  y  $\alpha$  dependen solo de  $\theta$ ; que si el vector de Killing para esta métrica es  $(\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ , entonces se cumple que  $\mathcal{L}_\eta h_{ab} = 0$  (métrica axialmente simétrica) y que, como estamos tomando una congruencia de geodésicas nulas, la congruencia es perpendicular a la superficie, y por lo tanto el vector desviación de geodésicas  $\xi^a$  es tangente a la superficie S y perpendicular a  $l^a$  y  $k^a$  nulos. Entonces si tomamos  $\xi^a$  ortogonal a  $\eta^a$ , se cumple que  $\eta^a \xi_a = \xi_a l^a = \xi_a k^a = 0$ . Además tomamos a  $\xi^a \xi_a = 1$ .

Podemos escribir entonces a la métrica inducida sobre S como  $h_{ab} = \frac{1}{\eta} \eta_a \eta_b + \xi_a \xi_b$  [22], con  $\eta = \eta^a \eta_a$ , de tal manera que

$$\Omega_a^{(l)} = \Omega_a^{(\eta)} + \Omega_a^{(\xi)} \quad (89)$$

siendo cada uno de los términos ortogonales entre sí, definidos por  $\Omega_a^{(\eta)} = \eta^b \Omega_b^{(l)} \frac{\eta_a}{\eta}$  y  $\Omega_a^{(\xi)} = \xi^b \Omega_b^{(l)} \xi_a$ .

Por ende se tiene que

$$\Omega_a^{(l)}\Omega^{a(l)} = h_{ab}\Omega^{a(l)}\Omega^{b(l)} = h_{ab}(\Omega^{a(\xi)} + \Omega^{a(\eta)})(\Omega^{b(\xi)} + \Omega^{b(\eta)}) = \Omega^{a(\xi)}\Omega_a^{(\xi)} + \Omega^{a(\eta)}\Omega_a^{(\eta)} \quad (90)$$

donde los términos cruzados se anulan por ortogonalidad.

Continuando con la cuenta anterior, miramos el término  $2\alpha\Omega_a^{(l)}D_a\alpha = (\Omega_a^{(\eta)} + \Omega_a^{(\xi)})2\alpha D_a\alpha$ . Ya que  $\alpha$  es axisimétrico,  $\Omega_a^{(\eta)}D_a\alpha = 0$ , y por lo tanto  $2\alpha\Omega_a^{(l)}D_a\alpha = 2\alpha\Omega_a^{(\xi)}D_a\alpha$ . El término  $2\alpha^2D^a(\ln\psi)\Omega_a^{(l)}$  se trata de manera análoga:  $2\alpha^2D^a(\ln\psi)\Omega_a^{(l)} = 2\alpha^2D^a(\ln\psi)\Omega_a^{(\xi)}$ . Entonces, introduciendo esto en la ecuación (19) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_S \left\{ -\alpha\beta[\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)} + G_{ab}l^al^b] + \alpha^2[-\Omega_a^{(l)}\Omega^{a(l)} + \frac{RS}{2} - G_{ab}k^ak^b] \right\} dS + \\ & + \int_S [2\alpha D^a\alpha D^a \ln\psi - \alpha^2 D_a \ln\psi D^a \ln\psi] dS - \\ & - \int_S [2\alpha D_a\alpha\Omega_a^{(\xi)} + 2\alpha^2 D^a(\ln\psi)\Omega_a^{(\xi)}] dS \quad (91) \end{aligned}$$

Reacomodando los términos, y descomponiendo  $\Omega_a^{(l)}$

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_S \frac{\alpha^2}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} dS \leq \int_S \left\{ -\alpha\beta[\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)} + G_{ab}l^al^b] + \alpha^2[-\Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)} + \frac{RS}{2} - G_{ab}k^ak^b] \right\} dS \\ + \int_S \left\{ 2D_a\alpha(\alpha D^a \ln\psi - \alpha\Omega_a^{(\xi)}) - |\alpha\Omega_a^{(\xi)} - \alpha D^a \ln\psi|^2 \right\} dS \quad (92) \end{aligned}$$

Utilizamos ahora la desigualdad de Young (78)

$$2D_a\alpha(\alpha D^a \ln\psi - \alpha\Omega_a^{(\xi)}) - |\alpha\Omega_a^{(\xi)} - \alpha D^a \ln\psi|^2 \leq |D^a\alpha|^2 \quad (93)$$

en la ecuación (90), y resulta

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_S \frac{\alpha^2}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} dS &\leq \int_S \left\{ -\alpha\beta[\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)} + G_{ab}l^al^b] + \right. \\
&\left. + \alpha^2[-\Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)} + \frac{R_S}{2} - G_{ab}k^al^b] + |D^a\alpha|^2 \right\} dS \quad (94)
\end{aligned}$$

o análogamente

$$\begin{aligned}
\int_S \left\{ |D^a\alpha|^2 + \alpha^2 \frac{R_S}{2} \right\} dS &\geq \int_S \left\{ \alpha\beta[\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)} + G_{ab}l^al^b] + \right. \\
&\left. + \alpha^2[\Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)} + G_{ab}k^al^b] \right\} dS \quad (95)
\end{aligned}$$

Una vez obtenida esta desigualdad, procedemos a tomar  $\alpha = 1$ , y descartar el término  $\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)}$ , por ser mayor o igual a cero, debido a la signatura positiva de la métrica, resultando

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \left\{ \frac{\gamma}{\psi} G_{ab}l^al^b + \Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)} + G_{ab}k^al^b \right\} dS \quad (96)$$

con  $dS = \sqrt{e^{2c-\sigma}e^\sigma \sin\theta} d\theta d\varphi = e^c \sin\theta d\theta d\varphi$ .

Ahora

$$G_{ab}l^al^b = (8\pi T_{ab}^{TOTAL} - \Lambda g_{ab})l^al^b = 8\pi T_{ab}^{TOTAL}l^al^b - \Lambda l^al_a = 8\pi T_{ab}^{TOTAL}l^al^b \geq 0 \quad (97)$$

ya que como  $T_{ab}^{Maxwell}$  satisface de por sí la condición de energía dominante, y se supone que  $T_{ab}^{Materia}$  lo cumple, el tensor completo satisface la condición; además el último término desaparece por ser  $l^a$  un vector nulo. Por lo tanto  $\int_S G_{ab}l^al^b dS = \int_S 8\pi T_{ab}^{TOTAL}l^al^b dS \geq 0$ , así que se descarta este término. Además, notamos que

$$G_{ab}k^ak^b = k^ak^b(8\pi T_{ab}^{TOTAL} - \Lambda g_{ab}) = 8\pi T_{ab}^{TOTAL}k^ak^b + \Lambda \quad (98)$$

ya que  $l^bk_b = -1$ . Entonces

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \left\{ \Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)} + 8\pi T_{ab}^{TOTAL}k^ak^b + \Lambda \right\} dS \quad (99)$$

Otra vez utilizamos que  $T_{ab}^{Materia}$  satisface la condición de energía dominante, y por lo tanto  $T_{ab}^{Materia}k^ak^b \geq 0$ , permaneciendo únicamente el término  $T_{ab}^{Maxwell}k^ak^b = \frac{1}{8\pi}[(l^ak^bF_{ab})^2 + (l^ak^b * F_{ab})^2]$  [20], convirtiendo (95) en

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \left\{ \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a k^b + \Lambda \right\} dS \quad (100)$$

Ahora, usamos el teorema de Holder (75) sobre S, para el término que contiene al tensor  $T_{ab}^{Maxwell}$  en (96); tomando  $h = 1$  en esa desigualdad, elevando al cuadrado ambos miembros, y si  $f = l^ak^bF_{ab}$  o  $f = l^ak^b * F_{ab}$  según corresponda, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_S \left\{ 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a k^b \right\} dS &= \int_S \left[ (l^ak^bF_{ab})^2 + (l^ak^b * F_{ab})^2 \right] dS \geq \\ &\geq \frac{1}{A} \left[ \left( \int_S l^ak^bF_{ab} dS \right)^2 + \left( \int_S l^ak^b * F_{ab} dS \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (101)$$

Notamos ahora que en términos de los vectores nulos  $l^a, k^a$  podemos escribir las cargas eléctrica y magnética sobre S como

$$Q_E(S) = \frac{1}{4\pi} \int_S F_{ab} l^a k^b dS \quad (102)$$

$$Q_B(S) = \frac{1}{4\pi} \int_S *F_{ab} l^a k^b dS \quad (103)$$

y por lo tanto podemos reescribir (97) como

$$\int_S \left\{ 8\pi T_{ab}^{Max} k^a k^b \right\} dS \geq \frac{16\pi^2}{A} (Q_E^2 + Q_B^2) = \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (104)$$

por lo que (96) queda

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \left\{ \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + \Lambda \right\} dS + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 = \int_S \left\{ \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} \right\} dS + \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (105)$$

donde integramos el término que contiene a la constante cosmológica, con  $A = 4\pi e^c$ .

Miramos el término  $\Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)}$ ;  $\Omega_a^{(\eta)}$  representa la proyección de  $\Omega_a^{(l)}$  a lo largo del vector de Killing  $\eta^a$ , definido anteriormente. De la cuenta realizada en el Apéndice 7.2, se tiene que

$$\Omega_a^{(\eta)} = \left( \Omega_\theta^{(\eta)}, \Omega_\varphi^{(\eta)} \right) = (0, -e^{\sigma-c} \sin \theta \tilde{\omega}') \quad (106)$$

cuya norma, en función de  $\omega'$  es  $\Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)} = e^{\sigma-2c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2}$ , y el primado significa derivada respecto a  $\theta$ .

Entonces (101) queda

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \left\{ e^{\sigma-2c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2} \right\} dS + \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (107)$$

donde  $Q^2$  es la suma de los cuadrados de las cargas eléctrica y magnética de la superficie S. Tratamos el lado derecho de esta última desigualdad; el cálculo explícito del escalar de Ricci con la métrica axisimétrica resulta

$$R = \frac{e^{\sigma-2c}}{\sin \theta} (2q' \cos \theta + \sin \theta \sigma' q' + 2 \sin \theta - \cos \theta \sigma' - \sin \theta \sigma'') \quad (108)$$

o en términos de la función q (tal que  $q + \sigma = c$ )

$$R = \frac{e^{-q-c}}{\sin \theta} (2q' \cos \theta - \sin \theta q'^2 + 2 \sin \theta + \cos \theta q' + \sin \theta q'') \quad (109)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_S \frac{R_S}{2} dS &= \int_S \frac{R_S}{2} e^c \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left[ -3 (e^{-q})' \cos \theta + 2e^{-q} \sin \theta - \sin \theta \partial_\theta^2 (e^{-q}) \right] d\theta d\varphi = \end{aligned} \quad (110)$$

$$= \pi \int_0^\pi \left[ -3 (e^{-q})' \cos \theta + 2e^{-q} \sin \theta - \sin \theta (\partial_\theta e^{-q})' \right] d\theta \quad (111)$$

Integramos por partes el primer y tercer término, respectivamente:

$$\begin{aligned}
-3 \int_0^{\pi} (e^{-q})' \cos \theta d\theta &= -3 \left[ e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-q} d\theta \right] - \int_0^{\pi} \sin \theta (\partial_{\theta} e^{-q})' d\theta = \\
&= - \left[ (e^{-q})' \sin \theta \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos \theta (e^{-q})' d\theta \right] \\
&= - \left[ (e^{-q})' \sin \theta \Big|_0^{\pi} - \left( e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-q} d\theta \right) \right] \quad (112)
\end{aligned}$$

Introduciendo estos resultados en la ecuación (106), y suponiendo que la derivada de  $e^{-q}$  decaen a cero más lentamente que  $(\sin \theta)^{-1}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_S \frac{R_S}{2} dS = \\
&= \pi \left\{ \int_0^{\pi} 2e^{-q} \sin \theta d\theta - 3 \left[ e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-q} d\theta \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[ (e^{-q})' \sin \theta \Big|_0^{\pi} - \left( e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-q} d\theta \right) \right] \right\} = \quad (113) \\
&= \pi \left\{ 2 \int_0^{\pi} e^{-q} \sin \theta d\theta - 3e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} - 3 \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-q} d\theta + e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin \theta e^{-q} d\theta \right\}
\end{aligned}$$

$$= \pi \{ -3e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} + e^{-q} \cos \theta \Big|_0^{\pi} \}$$

$$= 2\pi(e^{-q(\pi)} + e^{-q(0)}) \quad (114)$$

Volviendo a la ecuación (103), y reemplazando en el miembro derecho,

$$2\pi(e^{-q(\pi)} + e^{-q(0)}) \geq \int_S \left\{ e^{\sigma-2c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2} \right\} dS + \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (115)$$

Finalmente, siendo el primer término del lado derecho de la desigualdad mayor o igual a cero, se descarta, y por lo tanto resulta

$$2\pi(e^{-q(\pi)} + e^{-q(0)}) \geq \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (116)$$

o , en términos de la definición de fuerza para el caso axisimétrico,

$$8\pi(\mathcal{F}_\pi + \mathcal{F}_0) \geq \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 - 4\pi \quad (117)$$

lo que demuestra el teorema.

### 3.2. Desigualdad entre Área, Momento angular, Constante cosmológica y Fuerza

Las MOTS a las que aquí nos referimos cumplen con la definición 2.3.3, en el contexto de congruencia de geodésicas nulas descripto previamente a la definición.

#### Teorema 3.2

*Sea  $S$  una MOTS, axialmente simétrica, estable, inmersa en una variedad  $(M, g_{ab})$  4 dimensional, axialmente simétrica, de electrovacío. Requerimos que sobre este espacio tiempo valgan las ecuaciones de Einstein en su forma (1), con  $\Lambda > 0$ , y el tensor de energía-materia satisfaciendo la condición de energía dominante. Suponiendo la presencia de singularidades cónicas, el momento angular  $J$  y el área  $A$  de  $S$ , junto con la fuerza  $\mathcal{F}$ , satisfacen*

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \geq \frac{|J|}{\frac{A}{8\pi} \sqrt{(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi})(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi})}} \quad (118)$$

donde nuevamente  $(\mathcal{F}_\pi, \mathcal{F}_0)$  las fuerzas debido a la presencia de singularidades cónicas sobre el eje de axisimetría, en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ .

## Discusión y Análisis

- Se tiene topología  $S^2$  por hipótesis, independientemente del signo de  $\Lambda$ . Demostrar esta desigualdad cuando  $\Lambda < 0$  no fue posible, debido a que ni siquiera se conoce una expresión para la desigualdad que involucra momento angular y constante cosmológica negativa, sin fuerza, aunque si se han conjeturado posibles resultados (Ver [31]).
- Que la superficie sea axialmente simétrica es esencial para poder utilizar momento angular, pues, como se dijo anteriormente, no existe consenso sobre una definición para  $J$  cuando se está fuera del contexto de simetría axial.
- En cuanto a la materia, no consideramos materia cargada, solo materia neutra, cuya presencia no se manifiesta en la desigualdad, debido a que cumple con la condición de energía dominante. Existen conjeturas sobre la forma de la desigualdad (9) en el caso sin fuerza, con  $\Lambda < 0$  y con materia cargada [31], pero complicadas de demostrar, ya que el método utilizado para probar (9) no sirve si la constante cosmológica es negativa, por lo que se deben desarrollar otros métodos.
- Notar que, como sucedía anteriormente con la carga, el signo de  $J$  (es decir, el sentido de rotación del agujero) no se manifiesta en la desigualdad (112). En el caso de que se manifestase, esperaríamos que la interacción (fuerza) sea mayor, y quizá atractiva, en el caso en que los agujeros rotaran en sentido contrario, y repulsiva en caso de que ambos rotaran en igual sentido (repulsión spin-spin).
- La cota inferior mayor para la fuerza ocurre cuando  $\Lambda \rightarrow 0$  (valores muy pequeños), tal que  $\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \geq \frac{|J|}{8\pi}$ . Observar que en el caso sin fuerza, y sin constante, recuperamos la desigualdad (4).
- Además notemos la cota inferior universal para la fuerza, dada por

$$\mathcal{F}_i \geq -\frac{1}{4}$$

lo que muestra que es posible que la fuerza alcance valores negativos, y por lo tanto ser repulsiva.

El esquema de la demostración sigue los lineamientos generales de la demostración del teorema 3.1, pero presenta diferencias importantes debido a

la presencia de momento angular. La forma de la métrica que suponemos es nuevamente (30), por estar trabajando sobre una superficie axisimétrica. Partimos de la condición de estabilidad multiplicada por una función  $\alpha$  axialmente simétrica (y elegida estratégicamente para este caso, basándonos en que la familia de horizontes de Kerr extremo deSitter satura la desigualdad en ausencia de singularidades cónicas), integrándola por partes. Se arriba a una desigualdad análoga a la ecuación (93), ya que estamos en un caso axialmente simétrico, donde a partir de allí se utiliza que, debido a la ausencia de cargas, y ya que el tensor de energía-materia satisface la condición de energía dominante, el término  $T_{ab}^{Materia} k^a l^b$  es mayor o igual a cero, y el término  $T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b = \frac{1}{8\pi} [(l^a k^b F_{ab})^2 + (l^a k^b * F_{ab})^2]$  es nulo directamente. La función axisimétrica  $\alpha$  se toma distinta a 1, por lo que se deben calcular sus derivadas. Se descarta el término  $\alpha\beta\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)}$  por ser mayor o igual a cero, y se calcula el escalar  $\Omega_a^{(\eta)}\Omega^{a(\eta)}$  de la misma forma que antes, donde  $\Omega_a^{(\eta)}$  proviene de la descomposición de  $\Omega_a^{(l)}$  en sus proyecciones respecto al vector de Killing  $\eta^a$ , que nos da la axisimetría, y el vector desviación de geodésicas  $\xi^a$ , ortogonal al vector de Killing. Del resultado de estas manipulaciones construimos un funcional  $M(\sigma, \omega, A, a)$ , donde el parámetro  $a$  proviene de la elección particular de la función  $\alpha$ , siendo  $a$  arbitraria hasta este momento. Luego tomamos  $a$  como el valor que toma en el caso de Kerr extremo dS, y hacemos un cambio de variables en las funciones  $\sigma$  y  $\omega$ , como así también en los parámetros J y A, para poder utilizar un resultado obtenido en el trabajo de Gabach-Reiris-Simon [31], y acotar el funcional. A partir de allí, usando otro resultado obtenido en el trabajo nombrado anteriormente, se sigue fácilmente la desigualdad (112).

### 3.2.1. Demostración del Teorema 3.2

Partimos de la condición de estabilidad de las MOTS; sea  $\alpha$  una función axisimétrica. Multiplicamos por  $\frac{\alpha^2}{\psi}$  a esta condición, y debido a que  $\psi > 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} &= \alpha^2 [-\Delta_S \ln \psi + D^a \Omega_a^{(l)} - D^a \ln \psi D_a \ln \psi + 2D^a \ln \psi \Omega_a^{(l)} - \\ &- \Omega_c^{(l)} \Omega^{c(l)} + \frac{R_s}{2} - \frac{\gamma}{\psi} (\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{abl^a l^b}) - G_{ab} k^a l^b] \geq 0 \end{aligned} \quad (119)$$

Seguimos los mismos pasos de la demostración del Teorema 3.1, hasta la ecuación

$$\int_S \left\{ |D^a \alpha|^2 + \alpha^2 \frac{R_S}{2} \right\} dS \geq \int_S \left\{ \alpha \beta [\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b] + \right. \\ \left. + \alpha^2 [\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + G_{ab} k^a l^b] \right\} dS \quad (120)$$

En esta instancia, tomamos  $\alpha = \chi^{1/2} e^{-\frac{\sigma}{2}}$  (donde  $\chi$  es la función que aparece en la métrica de Kerr extremo dS, ecuación (183)) y procedemos a calcular los dos términos del lado izquierdo de esta ecuación.  $D^a$  denota el operador derivada respecto a la métrica inducida  $h_{ab}$  en la superficie:

1.  $|D^a \alpha|^2 = (D^a \alpha)(D_a \alpha) = (\partial_\varphi \alpha)(\partial_\varphi \alpha) h^{\varphi\varphi} + (\partial_\theta \alpha)(\partial_\theta \alpha) h^{\theta\theta} = (\frac{1}{2} \chi^{-\frac{1}{2}} \chi' e^{-\frac{\sigma}{2}} - \chi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\sigma}{2}} \frac{\sigma'}{2})^2 e^{-2q-\sigma} = \frac{e^{-2c}}{4\chi} (\chi' - \chi \sigma')^2 = e^{-2c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} - \frac{\chi' \sigma'}{2} + \frac{\chi \sigma'^2}{4} \right)$
2.  $\alpha^2 \frac{R_S}{2} = \frac{\chi e^{-\sigma}}{2} \frac{e^{\sigma-2c}}{\sin \theta} (-2\sigma' \cos \theta - \sin \theta \sigma'^2 + 2 \sin \theta - (\sin \theta \sigma')')$

Integramos estos términos sobre S, tratando la integral en la coordenada polar por partes, siendo  $dS = e^c \sin \theta d\theta d\varphi$ :

$$\int_S \alpha^2 \frac{R_S}{2} dS = \int_S \left\{ \frac{\chi e^{-c}}{2} (2q' \cos \theta + \sin \theta \sigma' q' + 2 \sin \theta - (\sin \theta \sigma')') \right\} d\theta d\varphi \\ = 2\pi \left\{ \frac{e^{-c}}{2} \int_0^\pi [\chi (2q' \cos \theta + \sin \theta \sigma' q' + 2 \sin \theta - (\sin \theta \sigma')')] d\theta \right\} \\ = \frac{(2\pi) e^{-2}}{2} \left\{ -2(\chi \cos \theta \sigma)|_0^\pi - \int_0^\pi (\chi \cos \theta)' \sigma d\theta - \int_0^\pi \chi \sin \theta \sigma'^2 d\theta + \right. \\ \left. + 2 \int_0^\pi \chi \sin \theta d\theta - (\chi \sin \theta \sigma')|_0^\pi - \int_0^\pi \sin \theta \chi' \sigma' d\theta \right\} \quad (121)$$

Por otra parte

$$\int_S |D^a \alpha|^2 dS = 2\pi e^{-c} \int_0^\pi \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} - \frac{\chi' \sigma'}{2} + \frac{\chi \sigma'^2}{4} \right) \sin \theta d\theta \quad (122)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_S (|D^a \alpha|^2 + \alpha^2 \frac{RS}{2}) dS &= \int_0^\pi e^{-c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} - \frac{\chi' \sigma'}{2} + \frac{\chi \sigma'^2}{4} \right) \sin \theta d\theta + \\
&+ \frac{e^{-c}}{2} \left\{ -2(\chi \cos \theta \sigma)|_0^\pi - \int_0^\pi (\chi \cos \theta)' \sigma d\theta - \int_0^\pi \chi \sin \theta \sigma'^2 d\theta + \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^\pi \chi \sin \theta d\theta - (\chi \sin \theta \sigma')|_0^\pi - \int_0^\pi \sin \theta \chi' \sigma' d\theta \right\} = \\
&= \int_0^\pi e^{-c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} + \chi \right) \sin \theta d\theta - \frac{e^{-c}}{4} \int_0^\pi \chi \sigma'^2 \sin \theta d\theta + \\
&+ e^{-c} \int_0^\pi (\chi \cos \theta)' \sigma d\theta - e^{-c} \chi \cos \theta \sigma|_0^\pi - e^{-c} \chi \sin \theta \sigma'|_0^\pi \quad (123)
\end{aligned}$$

Ahora, notamos que el integrando del tercer término de la última igualdad es

$$(\chi \cos \theta)' = \left[ \cos \theta \left( 1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \right) \right]' = -(1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta$$

y por lo tanto

$$e^{-c} \int_0^\pi (\chi \cos \theta)' \sigma d\theta = -e^{-c} \int_0^\pi (1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta) \sigma \sin \theta d\theta$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_S (|D^a \alpha|^2 + \alpha^2 \frac{RS}{2}) dS = \int_0^\pi e^{-c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} + \chi \right) \sin \theta d\theta - \frac{e^{-c}}{4} \int_0^\pi \chi \sigma'^2 \sin \theta d\theta -$$

$$-e^{-c} \int_0^\pi (1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta) \sigma \sin \theta d\theta - e^{-c} \chi \cos \theta \sigma|_0^\pi - e^{-c} \chi \sin \theta \sigma'|_0^\pi =$$

Omitiendo algunos pasos intermedios, reacomodando términos y recordando que  $\sigma + q = c$  (para poner el resultado del tercer término en función de  $q$ ), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_S (|D^a \alpha|^2 + \alpha^2 \frac{R_S}{2}) dS = e^{-c} \left\{ \int_0^\pi e^{-c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} + \chi \right) \sin \theta d\theta - \right. \\ \left. \int_0^\pi \sin \theta \left( \chi \frac{\sigma'^2}{4} + (1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta) \sigma \right) d\theta + \kappa(2c - q(\pi) - q(0)) \right\} \quad (124) \end{aligned}$$

donde  $\kappa = (1 + \frac{\Lambda a^2}{3})$  y  $c = \ln(\frac{A}{4\pi})$ .

Miramos ahora el lado derecho de la desigualdad (120); recordando que  $\beta = \frac{\alpha\gamma}{\psi}$ , donde todas estas funciones son positivas, descartamos la integral de  $\alpha\beta\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)}$  sobre S, ya que es estrictamente positivo. Además  $G_{ab}l^al^b = (8\pi T_{ab}^{materia} - \Lambda g_{ab})l^al^b = 8\pi T_{ab}^{materia}l^al^b - \Lambda l^al_a = 8\pi T_{ab}^{materia}l^al^b \geq 0$ , ya que el tensor de energía momento satisface la condición de energía dominante, y  $l^a$  es un vector nulo; por lo tanto se descarta la integral de ese término. También  $G_{ab}k^ak^b = k^ak^b(8\pi T_{ab}^{materia} - \Lambda g_{ab}) = 8\pi T_{ab}^{materia}k^ak^b + \Lambda$ , ya que  $l^bk_b = -1$ . Nuevamente descartamos la integral de  $8\pi T_{ab}^{materia}k^ak^b$  por cumplirse la condición de energía dominante. Por lo tanto

$$-\frac{1}{2\pi} \left[ \int_S \alpha^2 (\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + G_{ab} k^a l^b) dS \right] = -\frac{1}{2\pi} \left[ \int_S \alpha^2 (\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + \Lambda) dS \right] \quad (125)$$

Nuevamente, debido a que seguimos utilizando la misma métrica, y aún vale simetría axial sobre S,  $\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} = e^{\sigma - 2c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2}$ , entonces

$$-\frac{1}{2\pi} \left[ \int_S \alpha^2(\Omega_a^{(\eta)}) \Omega^{a(\eta)} + \Lambda) dS \right] = - \left[ \int_0^\pi \chi e^{-c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2} \sin \theta d\theta + \Lambda e^c \int_0^\pi \chi e^{-\sigma} \sin \theta d\theta \right] \quad (126)$$

Juntando todos los resultados,

$$0 \leq e^{-c} \left\{ \int_0^\pi e^{-c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} + \chi \right) \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \left( \chi \frac{\sigma'^2}{4} + (1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta) \sigma \right) d\theta + \kappa(2c - q(\pi) - q(0)) \right\} - \quad (127)$$

$$- \left[ \int_0^\pi \chi e^{-c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2} \sin \theta d\theta + \Lambda e^c \int_0^\pi \chi e^{-\sigma} \sin \theta d\theta \right] \quad (128)$$

Multiplicando ambos lados por  $e^c$ , y denominando ahora  $\beta = \int_0^\pi e^{-c} \left( \frac{\chi'^2}{4\chi} + \chi \right) \sin \theta d\theta$ , tenemos

$$-\frac{\beta}{4} \leq -\frac{1}{4} \left\{ \int_0^\pi [\chi \sigma'^2 + 4\sigma(1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta)] \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \chi \frac{\omega'^2}{\eta^2} \sin \theta d\theta + 4\Lambda e^{2c} \int_0^\pi \chi e^{-\sigma} \sin \theta d\theta \right\} + 2\kappa \ln\left(\frac{A}{4\pi}\right) - \kappa(q(\pi) + q(0)) \quad (129)$$

o análogamente, definiendo

$$M(\sigma, \omega, A, a) = \int_0^\pi \left[ \sigma'^2 + \frac{4\sigma}{\chi} (1 + \Lambda a^2 \cos^2 \theta) + \frac{\omega'^2}{\eta^2} + 4\Lambda \left( \frac{A}{4\pi} \right)^2 e^{-\sigma} \right] \chi \sin \theta d\theta \quad (130)$$

se tiene que

$$\frac{M(\sigma, \omega, A, a) - \beta}{4} \leq 2\kappa \ln\left(\frac{A}{4\pi}\right) - \kappa(q(\pi) + q(0)) \quad (131)$$

Utilizando la definición de fuerza (71), resulta

$$e^{\frac{M(\sigma, \omega, A, a) - \beta}{8\kappa}} \leq \frac{A}{4\pi} \sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \quad (132)$$

Necesitamos acotar al funcional M; utilizamos el siguiente resultado, obtenido en [31]:

**Teorema** Para cualquier MOTS dada con área A, constante cosmológica  $\Lambda$  y momento angular J, existe una única solución de Kerr extremo dS con área  $\hat{A}$ , constante cosmológica  $\Lambda$  y momento angular  $\hat{J}$ , tal que

$$\frac{|J|}{A^2} = \frac{|\hat{J}|}{\hat{A}^2}$$

y  $\Lambda \hat{A} \leq 4\pi$ . Además, la desigualdad  $|J| \leq \varepsilon(A) = \frac{A}{8\pi} \sqrt{(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi})(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi})}$  es equivalente a la desigualdad  $\hat{A} \geq A$ .

Para poder usar este resultado, necesitamos tomar a la constante  $a$ , que era arbitraria hasta ahora, como el valor que toma en el caso de un agujero de Kerr extremo dS con momento angular  $\hat{J}$ , y denominamos a este valor  $\hat{a}$ . Además hacemos el siguiente cambio de variables:  $\hat{A} = \lambda A$ ,  $|\hat{J}| = \lambda^2 |J|$ , donde  $\lambda$  es una constante. Denominamos  $(\hat{\kappa}, \hat{\beta}, \hat{\chi})$  a los valores de  $\kappa, \beta, \chi$  cuando  $a$  toma el valor de KdS extremo y definimos

$$\hat{\sigma} = \sigma + 2 \ln \lambda, \quad \hat{\omega} = \lambda^2 \omega$$

Al realizar este reemplazo dentro del funcional  $M$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} M(\sigma, \omega, A, \hat{a}) &= \int_0^\pi [\sigma'^2 + \frac{4\sigma}{\chi} (1 + \Lambda \hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \frac{\omega'^2}{\eta^2} + 4\Lambda (\frac{A}{4\pi})^2 e^{-\sigma}] \chi \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi [\hat{\sigma}'^2 + \frac{4(\hat{\sigma} - 2 \ln \lambda)}{\hat{\chi}} (1 + \Lambda \hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \frac{\hat{\omega}'^2}{\lambda^4 \sin^4 \theta e^{2(\hat{\sigma} - 2 \ln \lambda)}} + \\ &\quad + 4\Lambda (\frac{\hat{A}}{4\pi})^2 \frac{e^{-(\hat{\sigma} - 2 \ln \lambda)}}{\lambda^2}] \hat{\chi} \sin \theta d\theta = \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi [\hat{\sigma}'^2 + \frac{4\hat{\sigma}}{\hat{\chi}}(1 + \Lambda\hat{a}^2 \cos^2 \theta) + \frac{\hat{\omega}'^2}{\hat{\eta}^2} + 4\Lambda(\frac{\hat{A}}{4\pi})^2 e^{-\hat{\sigma}}] \hat{\chi} \sin \theta d\theta - \\
&\quad - 8 \ln \lambda \int_0^\pi (1 + \Lambda\hat{a}^2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \tag{134}
\end{aligned}$$

$$= M(\hat{\sigma}, \hat{\omega}, \hat{A}, \hat{a}) - 16 \ln \lambda \kappa \tag{135}$$

Insertamos este resultado en (125),

$$\frac{A}{4\pi} \sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \geq e^{\frac{M(\sigma, \omega, A, a) - \beta}{8\kappa}} = e^{\frac{M(\hat{\sigma}, \hat{\omega}, \hat{A}, \hat{a}) - \hat{\beta}}{8\hat{\kappa}}} \left(\frac{A}{\hat{A}}\right)^2 \tag{136}$$

Se sabe (ver Apéndice 7.4) que para Kerr extremo dS vale que si  $\hat{J}$  es el momento angular para este agujero, se cumple  $|\hat{J}| = \varepsilon(\hat{A}) = \frac{\hat{A}}{8\pi} \sqrt{(1 - \frac{\Lambda\hat{A}}{4\pi})(1 - \frac{\Lambda\hat{A}}{12\pi})}$ . Además, por el teorema 4.1 enunciado antes, si  $\hat{A} = \lambda A > A$  y como  $\frac{\varepsilon(\lambda A)}{\lambda}$  es monotonamente decreciente con  $\lambda$  ( $\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{\varepsilon(\lambda A)}{\lambda} \right\} < 0$ ), se cumple que  $\frac{\varepsilon(\lambda A)}{\lambda} \leq \varepsilon(A)$ . Despejamos ahora el lado izquierdo de la desigualdad (127) y acotamos la exponencial del funcional por la proposición 4.3 de [31]:

**Proposición** En el contexto explicado antes se cumple que

$$e^{\frac{M(\hat{\sigma}, \hat{\omega}, \hat{A}, \hat{a}) - \hat{\beta}}{8\hat{\kappa}}} \geq \frac{\hat{A}}{4\pi} \tag{137}$$

Entonces

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \geq e^{\frac{M(\hat{\sigma}, \hat{\omega}, \hat{A}, \hat{a}) - \hat{\beta}}{8\hat{\kappa}}} \left(\frac{A}{\hat{A}}\right)^2 \frac{4\pi}{A} \geq \frac{\hat{A}}{4\pi} \left(\frac{A}{\hat{A}}\right)^2 \frac{4\pi}{A} = \left(\frac{A}{\hat{A}}\right)^2 \frac{\hat{A}}{A} \tag{138}$$

Ahora  $\frac{\hat{A}}{A} = \lambda$  y  $\left(\frac{A}{\hat{A}}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{|J|}{|\hat{J}|} = \frac{|J|}{|\varepsilon(\hat{A})|}$ ; además  $\frac{\varepsilon(\hat{A})}{\lambda} = \frac{\varepsilon(\lambda A)}{\lambda} \leq \varepsilon(A)$ , por lo que finalmente obtenemos

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \geq \frac{|J|}{|\varepsilon(A)|} \tag{139}$$

o lo que es igual

$$|J| \leq \frac{A}{8\pi} \sqrt{\left(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi}\right)\left(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi}\right)} \sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \quad (140)$$

demostrando el resultado de este teorema.

## 4. Resultados fuera de simetría axial

Pensamos en el caso de un sistema de agujeros negros, en el que el sistema por completo no tiene simetría axial. El concepto de fuerza y equilibrio fuera de simetría axial tiene sentido si consideramos la solución de Majumdar-Papapetrou, en la cual no importa la configuración de posiciones de los agujeros, siempre y cuando se cumpla la igualdad entre el valor de carga y el valor de masa para cada agujero, y mientras todas las cargas sean del mismo signo. Ahora, nos preguntamos: ¿Existen otras soluciones en equilibrio sin simetría? ¿Se puede definir una noción de fuerza o interacción entre los agujeros negros en ese caso?

Algunos ejemplos que pueden considerarse son el de un sistema inicialmente axisimétrico de dos agujeros negros (2 agujeros de Schwarzschild, quizá, cada uno de ellos con simetría esférica) en el que a uno de los cuales se le deforma la superficie, perdiéndose la simetría del sistema, y del agujero en sí. Otro ejemplo podría ser un sistema de varios agujeros de Majumdar-Papapetrou, en equilibrio estático, sin simetría, en el que se quita carga a uno de los agujeros, de tal manera que ya no se cumple  $|q| = m$  para él, y por lo tanto se rompe la situación de equilibrio. ¿Qué esperamos que suceda en estos casos? Más allá de que, una vez que el sistema empieza a evolucionar luego de las perturbaciones, el movimiento de los agujeros puede ser muy complicado, es esperable que en ambos casos los agujeros se vean atraídos, y empiecen a acercarse, interactuando a través de una fuerza. En el caso axialmente simétrico, los agujeros se acercan siguiendo la línea que los une, y que coincide con el eje de simetría. Sin embargo, en los dos ejemplos anteriores no hay un eje privilegiado, por la ausencia de simetría, haciendo que el movimiento subsecuente de coalescencia sea muy complejo. Este es un problema que no analizaremos. Lo que nos preguntamos es si tiene sentido medir la interacción de los agujeros negros a través de singularidades cónicas que aparecen cuando se fuerza a que el sistema sea estacionario. Basándonos en el caso con simetría axial, la respuesta es que esperamos que al intentar mantener en reposo a un sistema M-P perturbado (como el del ejemplo anterior) aparezcan singularidades. Desconocemos si las singularidades son cónicas o no, pero no hay ninguna razón para asociar este tipo de singularidades a espacios axialmente simétricos, por lo que, si aparecen en presencia de simetría, es probable que aparezcan en su ausencia.

Siguiendo la línea de trabajo de las secciones anteriores, lo que haremos en esta sección es buscar estimaciones a priori de singularidades cónicas que aparezcan en las superficies representantes de los agujeros negros no axialmente

simétricos. Nuevamente, el enfoque es cuasi local, es decir, consideraremos MOTS estables no axialmente simétricas permitiendo la presencia de singularidades cónicas en ella. No haremos suposiciones acerca de la ubicación sobre la superficie, ya que no hay un eje de simetría. El primer obstáculo que nos encontramos es que la definición original de fuerza dada por Weinstein, Weyl, etc, esta planteada para espacios con simetría axial. Por lo tanto, para estudiar los problemas mencionados antes, necesitamos generalizar esta definición.

En la sección 2.8 vimos que la fuerza entre dos agujeros negros axisimétricos esta dada por el valor de la función  $q$  que aparece en la métrica, en los polos, sobre el eje de simetría, es decir que en **simetría axial**

$$\mathcal{F}_i = -\frac{1}{4}(e^{-q_i} - 1), \quad ds^2 = e^\sigma(e^{2q}d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (141)$$

Como en ausencia de simetría la métrica en (137) ya no es valida, la fuerza calculada así tampoco. Para definir esta cantidad usaremos su relación mas básica con la singularidad cónica. Es decir

#### Definición 4.1

*Dada una superficie  $S$ , arbitraria, con singularidades cónicas, definimos la cantidad*

$$\mathcal{F}_S \equiv \frac{-\delta_s}{8\pi} = \frac{-(2\pi - \phi_s)}{8\pi} \quad (142)$$

*donde  $\phi_s$  es el ángulo alrededor de la singularidad, y  $\delta_s$  el déficit de ángulo (lo que falta para obtener un ángulo de  $2\pi$  al rededor de la singularidad).*

Esta cantidad es cuasi local, se reduce a la definición usual en el caso de simetría y está únicamente determinada por la singularidad cónica sobre la superficie.

#### Sin Simetría: Teorema 4.1

*Sea  $S$  una 2-superficie orientada, MOTS estable, con topología esférica, en un espacio-tiempo 4 dimensional  $(M, g_{ab})$  en presencia de un campo electromagnético, donde el tensor de Einstein  $G_{ab}$  y el tensor de energía-momento*

$T_{ab}^{TOTAL}$  cumplen las mismas ecuaciones e hipótesis del Teorema 3.1. Suponemos que  $S$  tiene un número  $p$  de singularidades cónicas en su interior, en una dada región. Entonces se cumple

$$4\pi + 8\pi \sum_{s=1}^p \mathcal{F}_s \geq \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (143)$$

donde  $A$  es el área sobre  $S$ , y  $Q^2 = Q_E^2 + Q_B^2$  la suma de los cuadrados de las cargas eléctrica y magnética de  $S$ .

### Discusión del Teorema y su demostración

- La topología esférica se asume para cualquier signo que pueda tener  $\Lambda$ , no pudiendo aplicarse el teorema de Gauss Bonet para justificarlo.
- Se asume la presencia de cargas eléctricas y magnéticas sobre la superficie, donde las cargas se definen según las ecuaciones (36) y (37). El tensor  $T_{ab}^{Materia}$  para materia no cargada cumple la condición de energía dominante, por hipótesis, y aunque el tensor  $T_{ab}^{Maxwell}$  también la cumple, ignoramos este hecho, ya que queremos obtener una desigualdad con carga, y aplicar la condición provocaría lo contrario.
- Desconocemos dónde se encuentran las singularidades cónicas, pero suponemos que existen en la superficie, reflejando las interacciones entre los múltiples agujeros. Se espera que, aunque no exista un eje de simetría, las singularidades estén presentes sobre alguna línea que una los agujeros.
- Notamos que la desigualdad (143) es prácticamente la misma que se obtuvo en el caso con simetría y sin momento angular, por lo que podría inferirse que, a la hora de estimar la magnitud de las cotas para la suma de las fuerzas, que el sistema tenga o no simetría no sería relevante, pues se obtiene el mismo resultado. Además, vemos que en el caso sin simetría, la cantidad de singularidades que puede haber en cada superficie es arbitraria, mientras que para el caso simétrico, suponemos dos singularidades por agujero (pensando que a cada lado de él hay otro más presente, siendo las singularidades la forma de interaccionar con sus vecinos); sin embargo, la cota para la suma de las fuerza es siempre la misma, y esto es un aspecto remarcable, ya que podría especularse con que la cantidad de singularidades sobre la superficie esté determinada por la simetría del sistema.

- Valen las mismas conjeturas sobre el signo de  $\Lambda$  que en el caso de la desigualdad (78) y cuando la constante es nula.
- Como se mencionó anteriormente, la regularidad de la solución (métrica) y el imponer estacionariedad (o aun más, estaticidad) implican la existencia de configuraciones de equilibrio para el sistema, recordando la solución de Majumdar-Papapetrou. Aquí las singularidades cónicas surgen, por lo tanto, como una falla de imponer la segunda de las condiciones a un sistema que no puede ser estacionario. Como se mencionó antes, las singularidades mantienen a los agujeros en reposo, es una «obstrucción» entre ellos, trata de mantenerlos a una distancia fija.

La prueba de este teorema es esencialmente similar al caso axialmente simétrico, por lo tanto partimos de la desigualdad de estabilidad, utilizando desde un principio  $\alpha = 1$ . Para tratar el escalar de Ricci, y como la métrica usada en el caso de simetría axial y en función de  $\sigma$  y  $q$  ya no sirve, podríamos utilizar una expresión para la métrica general, sin ninguna simetría o suposición de la estructura del espacio tiempo. Como ésto no lleva a ningún lado, utilizamos el teorema de Gauss Bonet generalizado, para superficies con singularidades cónicas en su interior, sin borde, suponiendo topología esférica, para tratar el término que contiene al escalar. Aún sin poder contar con una métrica explícita, sabemos que la signatura en relatividad general es convencionalmente (- + + +), por lo tanto la signatura de la métrica inducida 2 dimensional sobre la superficie espacial será estrictamente positiva (+ +), por lo que aún podemos desechar términos cuadráticos, siempre que sea posible. Remarcamos que, independientemente del signo de  $\Lambda$ , la topología esférica se asume siempre.

El teorema de Gauss Bonet generalizado es

### Teorema de Gauss Bonet Generalizado

Sea  $r \subset S$  una región de una superficie orientada  $S$ , que contiene un número  $p$  de singularidades cónicas en su interior. Sean  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  las curvas simples, cerradas, regulares a trozos que forman el borde de  $r$ . Supongamos que cada  $C_i$  esta orientada positivamente, y sean  $\theta_l$ ,  $l = 1, \dots, v$  el conjunto de todos los ángulos externos de las curvas  $C_i$ . Entonces se cumple que

$$\frac{1}{2} \iint_r R_S dS + \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \sum_{s=1}^p \delta_s = 2\pi\chi(r)$$

donde  $\kappa_g(s)$  denota la curvatura geodésica con respecto a la longitud de arco  $s$  de  $C_i$ , la integral sobre  $C_i$  significa la suma de integrales en cada arco regular de  $C_i$ ,  $\chi(r)$  es la característica de Euler de la región  $r$ , y  $\delta_s = 2\pi - \phi_s$  es el déficit de ángulo de una singularidad cónica.

#### 4.0.2. Demostración Teorema 4.1

Partimos de la condición de estabilidad, y debido a que  $\psi > 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} &= -\psi^{-1} \Delta_S \psi + D^a \Omega_a^{(l)} + 2\psi^{-1} \Omega^{a(l)} D_a \psi - \Omega_c^{(l)} \Omega^{c(l)} + \frac{R_s}{2} - \\ &\quad - \frac{\gamma}{\psi} (\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b) - G_{ab} k^a l^b \geq 0 \end{aligned} \quad (144)$$

o análogamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} &= -\Delta_S \ln \psi + D^a \Omega_a^{(l)} - D^a \ln \psi D_a \ln \psi + 2D^a \ln \psi \Omega_a^{(l)} - \Omega_c^{(l)} \Omega^{c(l)} + \frac{R_s}{2} - \\ &\quad - \frac{\gamma}{\psi} (\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b) - G_{ab} k^a l^b \geq 0 \end{aligned} \quad (145)$$

donde el laplaciano  $\Delta_S$ , el operador derivada  $D^a$  y el escalar de curvatura  $R_S$  se refieren a la superficie  $S$ . Reescribimos esto como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} &= -D^a (D_a \ln \psi + \Omega_a^{(l)}) - (D^a \ln \psi - \Omega_a^{(l)}) (D_a \ln \psi - \Omega^{a(l)}) + \frac{R_s}{2} - \\ &\quad - \frac{\gamma}{\psi} (\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b) - G_{ab} k^a l^b \geq 0 \end{aligned} \quad (146)$$

Integramos esto sobre  $S$ ,

$$\begin{aligned} \int_S \frac{1}{\psi} \delta_X \theta^{(l)} dS &= - \int_S D^a (D_a \ln \psi + \Omega_a^{(l)}) dS - \int_S (D^a \ln \psi - \Omega_a^{(l)}) (D_a \ln \psi - \Omega^{a(l)}) dS + \\ &\quad + \int_S \left\{ \frac{R_s}{2} - \frac{\gamma}{\psi} (\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b) - G_{ab} k^a l^b \right\} dS \geq 0 \end{aligned} \quad (147)$$

El primer término es una divergencia total, por lo que al utilizar el teorema de Gauss sobre esta integral, y debido a que suponemos topología esférica (es decir, tenemos una superficie sin borde), éste término se anula. Con respecto al segundo término, es siempre positivo, por ser un cuadrado perfecto, por lo tanto podemos desechar su integral, debido al signo negativo delante de él. Hasta este punto tenemos

$$\int_S \left\{ \frac{R_s}{2} - \frac{\gamma}{\psi} (\sigma_{ab}^{(l)}) \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b - G_{ab} k^a l^b \right\} dS \geq 0 \quad (148)$$

Ahora, nuevamente debido a la signatura positiva de la métrica, resulta que la integral del término  $\frac{\gamma}{\psi} \sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)}$  es estrictamente positiva, por lo cual podemos desecharla. El tratamiento de los términos que contienen al tensor de Einstein es análogo al realizado en las dos demostraciones anteriores, pues  $l^a, k^a$  siguen siendo campos vectoriales nulos, y sigue valiendo la condición de energía dominante. Por lo tanto (148) resulta en

$$\int_S \frac{R_s}{2} dS \geq \int_S \left\{ \Lambda + 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b \right\} dS \quad (149)$$

donde, por lo establecido en [20],  $T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b = \frac{1}{8\pi} [(l^a k^b F_{ab})^2 + (l^a k^b * F_{ab})^2]$ .

Ahora, usamos el teorema de Holder sobre S, para el término que contiene al tensor  $T_{ab}^{Maxwell}$  en (140) en su forma (76); si  $f = l^a k^b F_{ab}$  o  $f = l^a k^b * F_{ab}$  según corresponda, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_S \left\{ 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b \right\} dS &= \int_S \left[ (l^a k^b F_{ab})^2 + (l^a k^b * F_{ab})^2 \right] dS \geq \\ &\geq \frac{1}{A} \left[ \left( \int_S l^a k^b F_{ab} dS \right)^2 + \left( \int_S l^a k^b * F_{ab} dS \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (150)$$

Recordando las definiciones de las cargas eléctrica y magnética en término del tensor electromagnético y los vectores nulos, reescribimos (141) como

$$\int_S \left\{ 8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b \right\} dS \geq \frac{16\pi^2}{A} (Q_E^2 + Q_B^2) = \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (151)$$

por lo que (140) queda

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS \geq \int_S \Lambda dS + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 = \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (152)$$

donde integramos el término que contiene a la constante cosmológica, con  $A = 4\pi e^c$ .

Utilizamos ahora el teorema de Gauss Bonet generalizado para tratar el miembro izquierdo de la última desigualdad: considerando topología esférica, si la característica de Euler para una esfera es  $\chi(S) = 2$ , y esta no presenta bordes, resulta que

$$\int_S \frac{R_S}{2} dS = 2\pi\chi(S) - \sum_{s=1}^p \delta_s = 4\pi - \sum_{s=1}^p \delta_s \quad (153)$$

donde  $p$  es el número de singularidades cónicas en el interior de la superficie, y  $\delta_s$  el déficit de ángulo alrededor de las singularidades. Por lo tanto, obviando momento angular, se tiene que

$$4\pi - \sum_{s=1}^p \delta_s \geq \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (154)$$

o en términos de la definición general de fuerza,

$$4\pi + 8\pi \sum_{s=1}^p \mathcal{F}_s \geq \Lambda A + \frac{16\pi^2}{A} Q^2 \quad (155)$$

lo que demuestra el teorema.

## 5. Otros

### 5.1. Un principio variacional para $M(\psi, \chi, \sigma, \omega)$ en simetría axial

En un principio, se intentó otro acercamiento para obtener la desigualdad (43), en el caso de simetría axial. Siguiendo los pasos de [32], se pretendía utilizar un proceso de minimización de un dado funcional, en términos de la constante cosmológica, para encontrar una cota para la fuerza entre agujeros cargados, sin considerar momento angular. Esta metodología fue desechada debido a que el procedimiento resultó ser en extremo complicado, debido a la presencia de  $\Lambda$  en las ecuaciones de Euler Lagrange para el funcional. Sin embargo, se conjetura que así como el minimizante del funcional  $M(\psi, \chi, \sigma, \omega)$  que aparece en (31) son las funciones  $\psi, \chi, \sigma, \omega$  del espacio tiempo de Kerr-Newman (agujero negro rotante y cargado), en el caso de un agujero cargado, en un espacio tiempo en presencia de constante cosmológica, el minimizante debería ser el conjunto de funciones  $\psi, \chi, \sigma, \omega$  Reisner-Nordstrom dS o AdS (para  $\Lambda > 0$  o  $\Lambda < 0$ , respectivamente). Esto no ha podido ser demostrado en este trabajo, pero se detallan los pasos de la obtención de una desigualdad análoga a (79), y un pequeño ejemplo del principio variacional para  $M$  en el caso con carga pero sin constante cosmológica, en el cual el minimizante resulta ser, como se esperaba, Reisner-Norsdtrom.

#### 5.1.1. Detalles del cálculo de $M(\psi, \chi, \sigma, \omega)$

Debido a que es un caso axialmente simétrico, pueden reproducirse los pasos exactos de la demostración del Teorema 3.1, hasta la desigualdad (54), donde la diferencia es que ahora se utiliza  $\alpha = e^{c-\sigma/2}$ , y las funciones dependen solo de la coordenada polar. La métrica es nuevamente (30), y sigue valiendo la condición  $q + \sigma = c$ . Las hipótesis asumidas son las mismas que en el Teorema 3.1. Por lo tanto se tiene que,

$$\int_S \left\{ |D^a \alpha|^2 + \alpha^2 \frac{R_S}{2} \right\} dS \geq \int_S \left\{ \alpha \beta [\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b] + \alpha^2 [\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + G_{ab} k^a l^b] \right\} dS \quad (156)$$

donde  $|D^a \alpha|^2 = (D_a \alpha) (D_b \alpha) h^{ab} = \frac{\sigma'^2}{4}$ ,  $\alpha^2 \frac{R_S}{2} = \frac{1}{2 \sin \theta} (2q' \cos \theta + \sin \theta \sigma' q' + 2 \sin \theta - (\sin \theta \sigma)')$ , con  $dS = e^c \sin \theta d\theta d\varphi$ . Integramos por partes el lado derecho de la desigualdad, y usamos que  $q + \sigma = c$ , obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_S \left\{ |D^a \alpha|^2 + \alpha^2 \frac{R_S}{2} \right\} &= \int_S \frac{\sigma'^2}{4} dS + \frac{2\pi}{2} e^c \left[ 2(q \cos \theta)|_0^\pi + 2 \int_0^\pi q \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \sigma'^2 d\theta + 4 \right] \\
&= 2\pi \int_0^\pi \frac{(\sigma')^2}{4} e^c \sin \theta d\theta + 2\pi e^c [q \cos \theta|_0^\pi + \int_0^\pi (c - \sigma) \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \frac{\sigma'^2}{2} d\theta + 2] \\
&= 2\pi \int_0^\pi \frac{(\sigma')^2}{4} e^c \sin \theta d\theta + 2\pi e^c [-q(\pi) - q(0) + 2c - \int_0^\pi \sigma \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \sin \theta \frac{\sigma'^2}{2} d\theta + 2] \\
&= 2\pi e^c [-q(\pi) - q(0) + 2c + 2] - 2\pi e^c \left[ \int_0^\pi \frac{\sigma'^2}{4} \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \sigma \sin \theta d\theta \right] \quad (157)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&2\pi e^c [-q(\pi) - q(0) + 2c + 2] - 2\pi e^c \left[ \int_0^\pi \frac{\sigma'^2}{4} \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \sigma \sin \theta d\theta \right] \geq \\
&\geq \int_S \left\{ \alpha \beta [\sigma_{ab}^{(l)} \sigma^{ab(l)} + G_{ab} l^a l^b] + \alpha^2 [\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + G_{ab} k^a l^b] \right\} dS \quad (158)
\end{aligned}$$

Ahora si  $G_{ab} l^a l^b = (8\pi T_{ab}^{TOTAL} - \Lambda g_{ab}) l^a l^b = 8\pi T_{ab}^{TOTAL} l^a l^b - \Lambda l^a l_a$  y  $G_{ab} l^a k^b = 8\pi T_{ab}^{TOT} l^a k^b - \Lambda l^a k_a = 8\pi T_{ab}^{TOT} l^a k^b + \Lambda$ , y el tensor  $T_{ab}^{Materia}$  cumple la condición de energía dominante, siendo  $l^a, k^a$  vectores nulos y normalizados tal que  $l^a k_a = -1$ , (158) resulta en

$$2\pi e^c [-q(\pi) - q(0) + 2c + 2] - 2\pi e^c \left[ \int_0^\pi \frac{\sigma'^2}{4} \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \sigma \sin \theta d\theta \right] \geq$$

$$\geq \int_S \left\{ \alpha^2 \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + \alpha^2 (8\pi T_{ab}^{Maxwell} l^a k^b + \Lambda) \right\} dS \quad (159)$$

donde desechamos la integral del término  $\alpha\beta\sigma_{ab}^{(l)}\sigma^{ab(l)}$  por ser  $\geq 0$ . Utilizamos ahora que  $\int_S \{8\pi T_{ab}^{Maxwell} k^a l^b\} dS = \int_S [(l^a k^b F_{ab})^2 + (l^a k^b * F_{ab})^2] dS$ , entonces, recordando las definiciones (27) para los campos electromagnéticos,

$$\begin{aligned} & 2\pi e^c [-q(\pi) - q(0) + 2c + 2] - 2\pi e^c \left[ + \int_0^\pi \frac{\sigma'^2}{4} \sin \theta d\theta + \int_0^\pi \sigma \sin \theta d\theta \right] \geq \\ & \geq \int_S \left\{ \alpha^2 \Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} + \alpha^2 (\Lambda + E_\perp^2 + B_\perp^2) \right\} dS \end{aligned} \quad (160)$$

Introduciendo a la desigualdad el resultado  $\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} = e^{\sigma-2c} \frac{(\omega' + 2\chi\psi' - 2\psi\chi')^2}{4\eta^2}$ , y las definiciones de los campos en términos de  $\psi, \chi$  (28) y (29)

$$\begin{aligned} & 2\pi e^c [-q(\pi) - q(0) + 2c + 2] - e^c \left[ \int_S \left( \frac{\sigma'^2}{4} + \sigma \right) dS_0 \right] \geq \\ & \geq \int_S \left\{ \frac{(\omega' + 2\chi\psi' - 2\psi\chi')^2}{4\eta^2} + \alpha^2 \Lambda + e^{2c-\sigma} \left( \frac{\psi'^2}{e^{2c} \sin^2 \theta} + \frac{\chi'^2}{e^{2c} \sin^2 \theta} \right) \right\} dS \end{aligned} \quad (161)$$

o , simplificando y reordenando términos, usando que  $\eta = \eta^a \eta_a = e^\sigma \sin \theta$

$$\begin{aligned} & 2\pi [-q(\pi) - q(0) + 2c + 2] \geq \frac{1}{4} \int_S \left\{ \sigma'^2 + 4\sigma + \right. \\ & \left. \frac{(\omega' + 2\chi\psi' - 2\psi\chi')^2}{\eta^2} + 4\alpha^2 \Lambda + 4 \frac{\psi'^2 + \chi'^2}{\eta} \right\} dS_0 \end{aligned} \quad (162)$$

Definimos ahora al funcional  $M^\Lambda(\psi, \chi, \sigma, \omega)$  como

$$M^\Lambda(\psi, \chi, \sigma, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left\{ \sigma'^2 + 4\sigma + \frac{(\omega' + 2\chi\psi' - 2\psi\chi')^2}{\eta^2} + \right.$$

$$+ 4\alpha^2\Lambda + 4\frac{\psi'^2 + \chi'^2}{\eta} \Big\} dS_0 \quad (163)$$

y por lo tanto (162) queda

$$- q(\pi) - q(0) + 2c \geq \frac{M^\Lambda(\psi, \chi, \sigma, \omega) - 8}{4} \quad (164)$$

Utilizamos ahora las definiciones de fuerza en simetría axial, y que el área de la superficie considerada es  $A = 4\pi e^c$ , para obtener finalmente

$$\sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \geq \frac{4\pi}{A} e^{\frac{M^\Lambda(\psi, \chi, \sigma, \omega) - 8}{4}} \quad (165)$$

### 5.1.2. Un cálculo variacional para $M^\Lambda(\psi, \chi, \sigma, \omega)$

Citando nuevamente el trabajo [32], se prueba allí que si  $D_0 = (\sigma_0, \omega_0, \psi_0, \chi_0)$  es un conjunto regular sobre  $S^2$  con valores fijados de  $J, Q_E, Q_M$ , luego se cumple que  $e^{\frac{M(\psi, \chi, \sigma, \omega) - 8}{4}} \geq 4J^2 + (Q_E^2 + Q_B^2)^2$ , y que la esfera de Kerr-Newman extrema (en un espacio tiempo con presencia de materia cargada y momento angular no nulo), con valores dados para el conjunto  $D_0$ , es el *único* caso que satura esta desigualdad. Esto se demuestra aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre  $M(\psi, \chi, \sigma, \omega)$ , funcional definido análogamente a (163) pero con constante cosmológica nula, con variaciones respecto al conjunto  $D_0$ .

A modo de ejemplo, se realiza este proceso para el caso sin constante cosmológica ni momento angular, donde los valores de  $\psi, \chi, \sigma, \omega$  para ese caso son deducibles de los derivados para el caso de Kerr-Newman, lo mismo que las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La métrica del espacio tiempo 4D para las soluciones de Kerr-Newman, en coordenadas de Boyer-Lindquist, está dada por

$$\begin{aligned} g_{ab}dx^a dx^b = & -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Sigma} (r^2 + a^2 - \Delta) dt d\phi + \\ & + \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \end{aligned} \quad (166)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2mr$$

El parámetro  $a = J/m$  es el momento angular por unidad de masa y nuevamente  $Q^2 = Q_E^2 + Q_B^2$ , es la suma de los cuadrados de las cargas eléctrica y magnética. El potencial vector es

$$A_a = -\frac{Q_E r}{\Sigma} [(dt)_a - a \sin^2 \theta (d\phi)_a] + \frac{Q_M \cos \theta}{\Sigma} [a(dt)_a - (r^2 + a^2)(d\phi)_a]$$

Los agujeros negros *extremos* de Kerr-Newman son aquellas soluciones con  $m^2 = \frac{Q^2 + \sqrt{4J^2 + Q^4}}{2}$ . Para ellos, la métrica inducida sobre una tajada temporal  $t = \text{cte}$  es

$$h_T = \frac{4J^2 + Q^4}{\Sigma_0} \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma_0 d\tilde{r}^2 + \Sigma_0 d\theta^2 \quad (167)$$

donde se realiza el cambio de coordenadas  $\tilde{r}(r) = \int_{r_H}^r \frac{1}{\sqrt{\Delta(\tilde{r})}} d\tilde{r}$ , con  $r_H$  la raíz mayor de  $\Delta$ , la cual corresponde al horizonte de eventos en el caso no extremo.

Para este caso, las funciones en la esfera de de Kerr-Newman extremo se obtienen de la siguiente manera: tomamos  $\tilde{r} = 0$  en (167), obtenemos la 2 métrica de la esfera de Kerr-Newman extremo

$$ds^2 = \frac{4J^2 + Q^4}{\Sigma_0} \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma_0 d\theta^2 \quad (168)$$

De la métrica sobre cualquier superficie axisimétrica con topología esférica obtenemos el valor de  $\sigma$ , por simple comparación entre la forma de esta métrica con (30). Utilizando las definiciones (28) y (29), mas la definición del potencial vector, obtenemos  $\psi$  y  $\chi$ . El cálculo de  $\omega$  es más complicado y no lo detallamos aquí. Finalmente, se obtienen los valores

$$\sigma_0 = \ln \frac{(2a_0^2 + Q^2)^2}{\Sigma_0} \quad (169)$$

$$\omega_0 = -4J \frac{2a_0^2 + Q^2}{\Sigma_0} \cos \theta \quad (170)$$

$$\psi_0 = -\frac{Q_E(2a_0^2 + Q^2) \cos \theta - Q_M a_0 \sqrt{a_0^2 + Q^2} \sin^2 \theta}{\Sigma_0} \quad (171)$$

$$\chi_0 = -\frac{Q_M(2a_0^2 + Q^2) \cos \theta + Q_E a_0 \sqrt{a_0^2 + Q^2} \sin^2 \theta}{\Sigma_0} \quad (172)$$

con  $J = a_0 m_0 = a_0 \sqrt{a_0^2 + Q^2}$ ,  $m_0 = \sqrt{\frac{Q^2 + \sqrt{4J^2 + Q^4}}{2}}$ ,  $\Sigma_0 = Q^2 + a_0^2(1 + \cos^2 \theta)$ .

Ahora, para el caso de Reiner-Nordstrom extremo, sin momento angular, con carga eléctrica únicamente, y donde  $m = Q$ , podemos deducir de las relaciones anteriores, aplicando  $J = 0$ , los valores

$$\sigma_0 = \ln(Q^2) \quad (173)$$

$$\omega_0 = 0 \quad (174)$$

$$\psi_0 = -Q_E \cos \theta \quad (175)$$

$$\chi_0 = 0 \quad (176)$$

Las ecuaciones de Euler Lagrange para el funcional  $M(\sigma_0, \psi_0, \chi_0)$  resultan ser

$$\Delta \sigma - 2 + \frac{2}{\eta} (\psi')^2 = 0 \quad (177)$$

$$D_a \left( \frac{D^a \psi}{\eta} \right) = 0 \quad (178)$$

donde los índices se mueven con la métrica estándar de la 2 esfera (notar que el funcional (163) está integrado sobre la esfera unitaria),  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  y  $\eta = e^\sigma \sin^2 \theta$  es la norma cuadrada del vector de Killing.

Tomando los valores (169)-(172) para las funciones del conjunto  $D_0$ , se ve que

$$-2 + \frac{2}{e^\sigma \sin^2 \theta} (Q_E \sin \theta)^2 = 0$$

$$\Delta \psi - \frac{\nabla \eta \nabla \psi}{\eta} = \partial_\theta^2 \psi - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta \psi = 0$$

y por lo tanto, Reiner-Nordstrom extremo es un extremo para  $M(\sigma_0, \psi_0, \chi_0)$ . Para demostrar que es el único, y que en efecto es un mínimo, puede repetirse la prueba de unicidad de [32], que aquí no explicitamos.

## 6. Conclusión y Discusión

En este trabajo se estudió el concepto de fuerza definido por primera vez por Weyl y Weinstein en sus trabajos [8] y [9], pero en presencia de constante cosmológica, y extendiéndolo al caso sin simetría axial. Se utilizó un acercamiento cuasi local, observando de a un objeto por vez, utilizando los conceptos de superficie atrapada y superficie marginalmente atrapada exterior, con carga, y en el caso axialmente simétrico, con momento angular, obteniendo como resultado cotas para la interacción entre los múltiples agujeros que supusimos presentes.

Cabe remarcar que los espacios tiempo donde las superficies marginales se encuentran embebidas son generalmente dinámicos (es decir no estacionarios ni estáticos), por eso las cotas que obtenemos son a priori de saber si verdaderamente las singularidades cónicas existirán o no.

En el primer teorema que planteamos, obtuvimos una desigualdad para una MOTS estable axisimétrica de área  $A$ , con carga  $Q$ , en un espacio tiempo en presencia de constante cosmológica, cuyo signo no fue determinado en un principio, por lo que el resultado es válido en ambos casos. Se utilizó que  $S$  tenía la topología de la 2 esfera, y se supuso la existencia de singularidades cónicas en la superficie, sobre el eje de simetría que unía a la MOTS observada con las otras (otros agujeros), donde esto daba origen al concepto de fuerza en el sentido estudiado por Weyl y Weinstein, sin asumir estacionariedad. Se planteó que la fuerza era no nula en los polos, y que suponíamos dos agujeros en los laterales del que estudiábamos, uno por encima de este, y otro por debajo, dando origen a  $\mathcal{F}_0$  y  $\mathcal{F}_\pi$ . Además, se dijo que estas fuerzas, o al menos una de ellas, era mayor cuando  $\Lambda > 0$ , y disminuía en magnitud si  $\Lambda < 0$ , pudiendo asegurar que en el primer caso, si  $\Lambda A + \frac{16\pi^2}{A}Q^2 \gg 4\pi$ , la fuerza será positiva, pero solo bajo estas condiciones y no en general. Se remarcó además el hecho de que la carga aparezca como un cuadrado, no pudiendo apreciar el efecto de su signo en las estimaciones de la magnitud de  $F$ .

Con respecto a la carga, y yendo al plano de lo que verdaderamente se observa en el universo, no se espera que un agujero negro real contenga carga, pues debido a la materia no neutra absorbida por él, esta carga se vería neutralizada tarde o temprano. Sin embargo, sí es probable que el agujero negro rote, por lo que parece mejor considerar momento angular y no carga. Aun así, suponer un agujero negro con carga y estudiar lo que sucede con ella es mucho más simple que estudiar el momento angular, y además da pistas o indicios de como aparece  $J$  en las desigualdades, ya que

puede notarse que se manifiestan en forma parecida.

En cuanto al segundo teorema, también en simetría axial y considerando momento angular, se obtuvo una cota inferior para la fuerza en los polos de la superficie (intersección con el eje de simetría) en términos de  $J$ ,  $A$  y la constante cosmológica  $\Lambda$ , aunque sin carga. En [31] se conjetura que, considerando una superficie regular (sin singularidades), la desigualdad entre momento angular, área de la superficie y carga, con constante cosmológica positiva, sería

$$J^2 \leq \frac{A^2}{64\pi^2} \left[ \left(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi}\right) \left(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi}\right) - \frac{2\Lambda Q^2}{3} \right] - \frac{Q^4}{4} \quad (179)$$

De la misma forma, se cree fuertemente que la misma desigualdad, para el caso de una superficie no regular en interacción con otras, tendrá la forma

$$\frac{J^2}{\frac{A^2}{64\pi^2} \left[ \left(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi}\right) \left(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi}\right) - \frac{2\Lambda Q^2}{3} \right] - \frac{Q^4}{4}} \leq \sqrt{(1 + 4\mathcal{F}_\pi)(1 + 4\mathcal{F}_0)} \quad (180)$$

ya que, debido a la experiencia adquirida en la prueba de las desigualdades anteriores, creemos que incorporar la carga a la desigualdad (143) no provocará que tenga que cambiarse la función  $\alpha$  usada en la demostración, y que además eso no modificará el lado derecho de esta desigualdad, donde figura la fuerza, pues la carga se manifiesta a través de las ecuaciones de Einstein que aplicamos en la prueba, del lado izquierdo.

Tener una desigualdad para la fuerza en los polos en función de la carga mejora la cota obtenida anteriormente, pero sigue sin alcanzar para probar si la fuerza debido a la singularidad es en efecto repulsiva (positiva) o atractiva (negativa). Vemos que nuevamente, si la forma de (180) es correcta, el signo de  $J$  y  $Q$  aún no aparece, como en el caso sin carga, pero se piensa, basados en trabajos anteriores [10], que si tenemos *dos* agujeros rotantes, con la misma masa y momentos angulares opuestos y con una dada carga, no es posible hallar una configuración de equilibrio entre los objetos, debido a que no existen valores de  $Q$  y/o  $J$  que contrarresten lo repulsivo de la interacción spin-spin y lo atractivo/repulsivo de la fuerza eléctrica. Que la superficie sea axialmente simétrica es la suposición más importante para poder utilizar el concepto de momento angular como fue expresado en (38).

El tercer y último de los teoremas que se enunciaron está enmarcado fuera del contexto de simetría axial. Se definió un concepto de fuerza *general* para

superficies no necesariamente axisimétricas, utilizando el déficit de ángulo que ocurre al tomar una curva alrededor de la singularidad, y que coincide perfectamente con la definición 2.8.1 para el caso con simetría.

Cuando no se tiene una superficie axialmente simétrica, no podemos inferir la cantidad de singularidades que esta tendrá, al considerar su interacción con otras superficies (agujeros). Aun teniendo una cantidad arbitraria de singularidades, la desigualdad obtenida en este caso presenta la particularidad de que la cota para la suma de las fuerzas es la misma, independientemente de la simetría, y de la cantidad de singularidades. Desconocemos dónde estarán ubicadas las mismas, pero suponemos que, análogamente al caso axisimétrico, será sobre la superficie del agujero, en alguna línea que lo conecte a cada uno de sus vecinos adyacentes.

Recordamos que las singularidades cónicas surgen como una falla de imponer la condición de estacionariedad a un sistema que no puede serlo, y que aquí no estamos imponiendo esa condición; por lo tanto, la estimación para las cotas es a priori, pues no sabemos realmente si las singularidades existen sobre las superficies, solo suponemos su existencia, y de ahí calculamos lo que necesitamos.

Se hace notar que sólo en el caso en que se consideró momento angular, la manera en que la fuerza se manifiesta en la desigualdad (y la cota que se obtuvo para ella) es distinta, debido a los ligeramente diferentes acercamientos que se usaron para obtenerlas. La desigualdad con momento angular y constante cosmológica (de signo arbitrario), y su generalización con carga no ha podido ser probada todavía, debido a que los métodos existentes no parecen funcionar, siendo ésta la más compleja de todas las desigualdades, pues contempla más parámetros que determinarán posiblemente cómo será la interacción entre agujeros.

Como se mencionó antes, no se espera que en la realidad un agujero negro contenga carga pero si momento angular, por lo que la desigualdad (87) es la más relevante que encontramos aquí, aunque no puede inferirse de ella si la fuerza será atractiva o repulsiva según el sentido de rotación de los agujeros.

Las definiciones de fuerza que se explicitan en este trabajo son definiciones cuasi locales, y no globales, ya que no se tuvo en cuenta la estructura completa del espacio tiempo donde están embebidas las MOTS que se consideran como representación de un agujero negro. Existen otras definiciones de fuerza que si tienen en cuenta esta estructura, pero presentan una mayor complejidad que las tratadas aquí, y por ese motivo no se utilizan, además de que, reiteramos, se hizo un tratamiento *cuasi local* de los agujeros, y no global, y por lo tanto estas definiciones no son aplicables aquí. En el caso

global, sería interesante estudiar el centro de masa del sistema para el caso sin simetría, definido por ejemplo en [33], y analizar su implementación para la localización de las singularidades cónicas. Este tratamiento excede el alcance del presente trabajo.

Finalmente, y con perspectivas a futuro, se pretende contestar algunas preguntas, y resolver problemas más generales asociados a la temática de interacción en un sistema de múltiples agujeros: ¿Cuál es la naturaleza de la interacción entre agujeros negros? ¿Es posible probar que en general la interacción será repulsiva/attractiva? ¿Existe una configuración de equilibrio entre más de dos agujeros negros, además de la de Majumdar-Papapetrou? En general ¿Qué papel juegan la carga y el momento angular en la interacción entre agujeros? ¿Puede la atracción gravitatoria compensar la repulsión spin-spin en algún caso? ¿Existe alguna configuración especial de agujeros o valores de carga y momento angular que provoquen una situación de equilibrio? ¿Cómo afecta la constante cosmológica a la interacción? Todas estas preguntas dejan puertas abiertas para la posibilidad de nuevos trabajos.

## 7. Apéndice: Cálculos anexos

### 7.1. Equivalencia $h_{ab} = \frac{1}{\eta}\eta_a\eta_b + \xi_a\xi_b$ para el caso de simetría axial

La métrica axisimétrica sobre la superficie S tiene la forma

$$h_{ab}dx^a dx^b = e^{2c-\sigma}d\theta^2 + e^\sigma \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (181)$$

El vector de Killing para esta métrica es, debido a la independencia en  $\varphi$  de las componentes,  $\eta^a = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^a$ , cuya norma respecto a la métrica sobre la superficie es  $\eta = h_{ab}\eta^a\eta^b = e^\sigma \sin^2\theta$ . Ahora, se desconocen las componentes explícitas del vector desviación de geodésicas  $\xi^a$ , pero si se sabe que es perpendicular a  $\eta^a$  (y que por lo tanto no puede tener componente en la dirección del vector  $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ ), y que además está normalizado como  $h_{ab}\xi^a\xi^b = 1$ . Con estos datos, la componente en la dirección  $\frac{\partial}{\partial\theta}$  puede deducirse de la siguiente manera:

Partimos de la condición de normalización,

$$\begin{aligned} 1 &= h_{ab}\xi^a\xi^b \\ &= h_{\theta\theta}\xi^\theta\xi^\theta \\ &= e^{2c-\sigma}(\xi^\theta)^2 \end{aligned} \quad (182)$$

y por lo tanto  $\xi^\theta = \pm e^{\frac{\sigma}{2}-c}, \xi^\varphi = 0$ ; teniendo esto, se obtiene que  $\xi_\theta = \pm e^{-\frac{\sigma}{2}+c}$ . Se elige el signo positivo para la única componente del vector desviación, pues cualquiera de las dos elecciones nos da una norma igual a 1. Además  $\eta_\varphi = e^\sigma \sin^2\theta$ .

Conociendo esto, tenemos que, de la ecuación  $h_{ab} = \frac{1}{\eta}\eta_a\eta_b + \xi_a\xi_b$ ,

$$h_{\theta\theta} = \frac{1}{\eta}\eta_\theta\eta_\theta + \xi_\theta\xi_\theta = e^{2c-\sigma} \quad (183)$$

$$h_{\theta\varphi} = h_{\varphi\theta} = 0 \quad (184)$$

$$h_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\eta}\eta_\varphi\eta_\varphi + \xi_\varphi\xi_\varphi = e^{2\sigma} \sin^4\theta / e^\sigma \sin^2\theta = e^\sigma \sin^2\theta \quad (185)$$

por lo que las métricas, en sus distintas expresiones, coinciden.

## 7.2. Cálculo de $\Omega_a^{(\eta)}$

Por lo explicitado en el marco teórico, y debido a la topología  $S^2$  de la superficie, sabemos que se puede expresar a la forma fundamental normal  $\Omega_a^{(l)}$  en su descomposición de Hodge,  $\Omega_a^{(l)} = \epsilon_{ab} D^b \tilde{\omega} + D_a \lambda$ , con  $\tilde{\omega}$  y  $\lambda$  funciones fijadas a menos de una constante, donde el primer término tiene divergencia nula, y el segundo es una forma exacta. Debido a que requerimos que  $\Omega_a^{(l)}$  sea axisimétrico (y por lo tanto  $\tilde{\omega}$  y  $\lambda$  lo son) y por la descomposición de la forma fundamental hecha anteriormente (teorema 3.1), concluimos que  $\Omega_a^{(\eta)} = \epsilon_{ab} D^b \tilde{\omega}$  y  $\Omega_a^{(\xi)} = D_a \lambda$ . Por lo tanto procedemos a calcular la primera de estas cantidades:

$$\begin{aligned}\Omega_\theta^{(\eta)} &= \epsilon_{\theta b} D^b \tilde{\omega} = \epsilon_{\theta\varphi} D^\varphi \tilde{\omega} = \epsilon_{\theta\varphi} \partial^\varphi \tilde{\omega} = 0 \\ \Omega_\varphi^{(\eta)} &= \epsilon_{\varphi b} D^b \tilde{\omega} = \epsilon_{\varphi\theta} D^\theta \tilde{\omega} = \epsilon_{\varphi\theta} \partial^\theta \tilde{\omega} = -\sqrt{\det(h)} h^{\theta\theta} \partial_\theta \tilde{\omega} = \\ &= -(e^c \sin \theta) e^{-2c+\sigma} \partial_\theta \tilde{\omega} = -e^{\sigma-c} \sin \theta \partial_\theta \tilde{\omega}\end{aligned}\quad (186)$$

La norma de este vector es

$$\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} = h^{\varphi\varphi} \Omega_\varphi^{(\eta)} \Omega_\varphi^{(\eta)} = e^{\sigma-2c} (\tilde{\omega}')^2 \quad (187)$$

Usando la definición de  $\tilde{\omega}'$  en función de  $\omega'$ , y sabiendo que  $2\chi\psi' - 2\chi'\psi = 2(-B_\perp e^c \cos \theta E_\perp e^c \sin \theta + B_\perp e^c \sin \theta E_\perp e^c \cos \theta) = 0$ , se tiene que  $\tilde{\omega}' = \frac{\omega'}{2\eta}$ , y por lo tanto

$$\Omega_a^{(\eta)} \Omega^{a(\eta)} = e^{\sigma-2c} \frac{\omega'^2}{4\eta^2} \quad (188)$$

## 7.3. Sobre Kerr deSitter y Kerr deSitter extremo

En coordenadas de Boyer-Lindquist, la métrica de Kerr dS es

$$ds^2 = -\frac{\zeta}{\rho^2} \left( dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\kappa} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\zeta} dr^2 + \frac{\rho^2}{\chi} d\theta^2 + \frac{\chi \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( a dt - \frac{r^2 + a^2}{\kappa} d\phi \right)^2 \quad (189)$$

donde

$$\zeta = (r^2 + a^2)\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) - 2mr \quad (190)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (191)$$

$$\kappa = \left(1 + \frac{\Lambda a^2}{3}\right) \quad (192)$$

$$\chi = 1 + \frac{\Lambda a^2 \cos^2 \theta}{3} \quad (193)$$

Además  $m \geq 0$  y  $0 \leq a^2 \leq \Lambda^{-1}3(2 - \sqrt{3})^2$ .

Como función de  $r$ ,  $\zeta$  tiene una raíz negativa y 3 raíces positivas (contando multiplicidades). La raíz mas grande,  $r_{ch}$ , indica el horizonte cosmológico, mientras que la segunda raíz mas grande,  $r_h$ , marca el horizonte de eventos.

En el horizonte de eventos, la métrica inducida sobre esta superficie 2 dimensional es ( $r = r_h = cte$ ,  $t = cte$ )

$$d\tilde{s}^2 = \frac{\rho_h^2}{\chi} d\theta^2 + \frac{\chi \sin^2 \theta (r_h^2 + a^2)^2}{\rho_h^2 \kappa^2} d^2 \phi \quad (194)$$

donde la función  $\zeta_h$  vale cero sobre el horizonte, pues  $r_h$  es raíz de esta función.

Si denominamos  $\mu_h^2 = \chi(r_h^2 + a^2)^2$ ,  $\rho_h = r_h^2 + a^2 \cos^2 \theta$ , la métrica queda escrita como

$$d\tilde{s}^2 = \frac{\rho_h^2}{\chi} d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho_h^2} \frac{\mu_h^2}{\kappa^2} d^2 \phi \quad (195)$$

Podemos expresar fácilmente esta métrica en la forma utilizada en todo este trabajo, en el caso de simetría axial, es decir  $ds^2 = e^\sigma (e^{2q} d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ , de la siguiente manera:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{\rho_h^2} \frac{\mu_h^2}{\kappa^2} \left( \frac{\kappa^2 \rho_h^4}{\chi \mu_h^2} d\theta^2 + \sin^2 \theta d^2 \phi \right) \quad (196)$$

y por lo tanto podemos denominar  $e^\sigma = \frac{1}{\rho_h^2} \frac{\mu_h^2}{\kappa^2}$  y  $e^{2q} = \frac{\kappa^2 \rho_h^4}{\chi \mu_h^2}$ , cumpliéndose que

$$e^{\sigma+q} = \frac{1}{\rho_h^2} \frac{\mu_h^2}{\kappa^2} \frac{\kappa \rho_h^2}{\chi^{1/2} \mu_h} = \frac{\mu_h}{\kappa \chi^{1/2}} = \frac{(r_h^2 + a^2)}{\kappa} = e^c = \text{constante} \quad (197)$$

y por lo tanto  $\sigma + q = c$ , donde , debido a que  $A = \int_S dS = \int_S e^c \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi e^c$ ,  $c = \ln(\frac{A}{4\pi})$ .

Del cálculo del potencial  $\omega$  para esta métrica [31], se desprende que  $J = \frac{am}{\kappa^2}$ . Puede suceder que al menos 2 de las 3 raíces no negativas de  $\zeta(r)$  coincidan (una de las cuales debe ser necesariamente  $r_h$ ). En ese caso, el horizonte se llama *extremal*, y podemos derivar la siguiente relación entre  $J, m, \Lambda$  y  $A$ , usando que, además de satisfacerse la ecuación  $\zeta(r_e) = 0$ , se cumple que  $\frac{1}{2} \frac{d\zeta(r)}{dr} \Big|_{r_e} = 0$ , donde  $r_e$  es el radio de la esfera del horizonte extremo:

$$|J| = \varepsilon(A) = \frac{A}{8\pi} \sqrt{\left(1 - \frac{\Lambda A}{4\pi}\right) \left(1 - \frac{\Lambda A}{12\pi}\right)} \quad (198)$$

## 8. Bibliografía

- [1] G Neugebauer, J Henning, Gen. Rel. Grav. 41 n°9, 2113-2130 MR MR 2534657, arXiv:0905.4179 (2009)
- [2] G Neugebauer, J Hennig, Journal of Geometry and Physics 62, 3, 613-630, arXiv:1105.5830 (2012)
- [3] C Hoenselaer, Prog. Theor. Phys 72, 761 (1984)
- [4] W Dietz, C Hoenselaers, Annals of Physics, 165, 2, 319-383 (1985)
- [5] G Krenzer : Schwarze Löcher als Randwertprobleme der axisymmetrisch-stationären Einstein- Gleichungen. PhD Thesis, University of Jena (2000)
- [6] V S Manko, E Ruiz Class. Quantum Grav 18 L11 (2001)
- [7] V S Manko, E Ruiz, J D Sanabria Gómez 2000 Class. Quantum Grav. 17 3881-3898
- [8] R Bach, H Weyl Math.Z 13 132145 (1921)
- [9] G Weinstein, Comm. on Pure and Applied Math. 43, 7, 903-948 (1990)
- [10] C A R Herdeiro, C Rebelo, Journ. of High Energy Phys. 10, 017 (2008)
- [11] R Penrose, Ann. N. Y. Acad. Sci. 224, 125-134 (1973)
- [12] S Dain. J. Differential Geometry, 79(1):33-67, (2008),
- [13] S Dain. Phys. Rev. Lett., 96:101101, (2006)
- [14] P T Chrúsciel, Y Li, G Weinstein, Ann. Phys., 323(10):2591-2613, (2008).

- [15] P T Chrúsciel, J Lopes Costa, *Class. Quant. Grav.*, 26:235013 (2009)
- [16] J Lopes Costa, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(28):285202 (2010)
- [17] S. Dain, *Phys. Rev. D*, 82 (10), 104010, arXiv: 1008.0019 (2010)
- [18] A. Aceña, S. Dain, M. E. Gabach Clément *Class., Quantum Grav.* 28, 105014, 1012.2413 (2011)
- [19] JL Jaramillo, M Reiris, S Dain, *Phys. Rev. D* 84, 121503(R) (2011), arXiv: 1106.3743
- [20] S Dain, J L Jaramillo, M Reiris, Area-Charge inequality for black holes, arXiv:1109.5602 (2011)
- [21] M E Gabach, J L Jaramillo, *Phys. Rev. D* 86, 064021 (2012)
- [22] JL Jaramillo, M Reiris, S Dain, *Phys. Rev. D* 84, 121503(R) (2011), arXiv:1106.3743
- [23] JL Jaramillo, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 26, 139-161 (2013) arXiv:1201.2054
- [24] M Ansorg, J Henning, C Cederbaum, *Gen. Rel. Grav.* 43 1205-10 (2011)
- [25] J Henning, M Ansorg, C Cederbaum, *Class. Quantum Grav* 25 162002 (2008)
- [26] J Henning, C Cederbaum, M Ansorg *Commun. Math. Phys.* 293 449-67 (2010)
- [27] M E Gabach Clément, *Class. Quantum Grav.* 29 165008 (2012)
- [28] W Simon, *Class. Quantum Grav.* 29 062001 (2012)

- [29] I Booth, S Fairhurst, *Phys. Rev. D* 75, 084019 (2007)
- [30] S Dain, M Reiris, *Phys. Rev. Lett.* 107, 051101 (2011)
- [31] M E Gabach, M Reiris, W Simon, arXiv: 1501.07243 (2015)
- [32] M E Gabach, J L Jaramillo, M Reiris, *Class. Quantum Grav.* 30 065017 (2013)
- [33] O M Moreschi, *Class. Quantum Grav.* 21 5409 (2004)
- [34] J B Hartle, S W Hawking, *Commun. math. Phys.* 26, 87—101 (1972)
- [35] G. Varzugin, *Theor. Math. Phys.*, 111, 667 (1997)
- [36] E Poisson, *A relativistic's Toolkit*, Cambridge University Press, 2004
- [37] R M Wald, *General Relativity*, The University Chicago Press, 1984
- [38] S W Hawking, G F R Ellis, *The Large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1975
- [39] G. Varzugin, *Theor. Math. Phys.*, 116, 3 (1998)