

---

# CONSTRUCCIÓN DE DISTANCIAS ENTRE ESTADOS CUÁNTICOS A PARTIR DE DIVERGENCIAS DE TIPO CSISZÁR

---

Diego G. Bussandri

Director: Tristán M. Osán

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN FÍSICA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA, ARGENTINA

ABRIL DE 2015





# Agradecimientos

Dios te libre, lector, de prólogos largos. La cita es de Borges y constituye el final de su prólogo más largo. Creo perfectamente extrapolable su intención: Ojalá no molesten, lector, con agradecimientos largos.

Mi más sincero deseo es la comunicación de mi gratitud para aquellas personas que, no sólo en la vida académica, se encargan de motivar día a día, mi día, incansablemente. Difícil tarea, puesto que el medio es completamente absurdo. Prefiero entonces, no dedicar ideas desde aquí que quedarán en algún rincón de la biblioteca de la facultad seguramente olvidadas y maltrechas. Opto por la vía personal, y te dedico un abrazo, y muchos más, a vos Mamá, a vos Papá, y a vos Tatito, en agradecimiento por el apoyo incondicional en esta empresa que constituye el recibirse.

En lo que respecta a la vida académica, las gracias, por la ayuda, paciencia y atención en todo momento, son para Tristán M. Osán y Pedro W. Lamberti, quienes también espero entiendan, con felicidad, que los voy a continuar molestando en los años venideros.



# Resumen

Las divergencias Csiszár o  $f$ -divergencias constituyen una importante clase de distancias la cual engloba a la mayoría de las medidas conocidas de discriminación entre distribuciones de probabilidad. En este trabajo nos propusimos analizar el problema relacionado con la posibilidad de obtener medidas de distancia entre estados cuánticos a partir de medidas generales de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad que puedan escribirse como una divergencia Csiszár. Dada la complejidad que presenta el análisis del problema general para estados cuánticos mixtos descritos por matrices densidad actuando sobre espacios de Hilbert de dimensión arbitraria, decidimos restringir nuestro análisis al caso de estados puros pertenecientes a espacios de Hilbert de dimensión dos. En este caso, hemos sido capaces de obtener expresiones generales para medidas de distancia entre estados cuánticos puros a partir de divergencias Csiszár que sean simétricas. Finalmente, analizamos en forma numérica bajo qué condiciones algunos ejemplos particulares de las distancias encontradas pueden transformarse en métricas para estados puros. Notablemente, encontramos que es posible construir una familia monoparamétrica de métricas para cada una de ellas.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Panorama general del trabajo final . . . . .	6
<b>2. Conceptos preliminares</b>	<b>7</b>
2.1. Información clásica . . . . .	7
2.2. Conceptos de mecánica cuántica . . . . .	14
2.2.1. Sobre espacios de Hilbert y operadores . . . . .	14
2.2.2. Estados en mecánica cuántica . . . . .	17
2.2.3. Operadores Autoadjuntos y observables . . . . .	21
2.2.4. Qubits . . . . .	21
2.2.5. Purificación . . . . .	23
2.2.6. Equivalencia de estados puros en un espacio de Hilbert . . . . .	24
2.2.7. Distancias entre operadores lineales . . . . .	26
2.3. Medidas de distinguibilidad entre estados en Mecánica Cuántica . . . . .	26
2.3.1. Distancia Traza . . . . .	27
2.3.2. Entropía relativa . . . . .	28
2.3.3. Divergencia de Jensen-Shannon Cuántica . . . . .	29
2.3.4. Fidelidad . . . . .	30
2.4. Distancias cuánticas entre estados puros . . . . .	32
2.4.1. Algunas propuestas . . . . .	34

---

<b>3. Distancias cuánticas a partir de divergencias Csiszár</b>	<b>37</b>
3.1. Planteo del problema propuesto . . . . .	38
3.2. Resultados . . . . .	40
3.2.1. Casos y comentarios particulares . . . . .	44
3.3. Nuevas distancias cuánticas en función de divergencias tipo Csiszár . . .	52
3.3.1. Distancias cuánticas particulares . . . . .	53
3.4. Conjunto de métricas en un espacio de Hilbert de dimensión de dos . . .	57
<b>4. Comentarios finales</b>	<b>71</b>
4.1. Resumen de los resultados obtenidos . . . . .	71
4.2. Posibles direcciones para futuras investigaciones . . . . .	72
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>



# 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

El constante aumento en la potencia de procesamiento de las computadoras clásicas se debe al continuo incremento en la capacidad de miniaturización de los componentes electrónicos que componen los circuitos integrados responsables del procesamiento de la información. Sin embargo, esta miniaturización estará limitada finalmente por los efectos cuánticos, los cuales se vuelven importantes a escalas de decenas de nanómetros. Una ley empírica, comúnmente conocida como Ley de Moore [1], afirma que el número de transistores que pueden ser integrados en un circuito se duplica cada 18 meses, produciendo una duplicación en el tamaño de la memoria y en la velocidad de procesamiento (esto equivale a un factor 1000 cada 15 años). Una extrapolación de la ley de Moore para el 2020 implica que las dimensiones de los componentes electrónicos en un circuito integrado estarán en alrededor de 10 nanómetros de manera que las propiedades individuales de los átomos y los electrones se volverán predominantes. Así, es altamente probable que la ley de Moore deje de ser válida en pocos años [2]. En consecuencia, es esperable una seria limitación en la capacidad de incrementar la

potencia de procesamiento de las computadoras clásicas en el futuro cercano (Si bien la ley de Moore no está estrictamente basada en un modelo teórico, sino que es más bien empírica, se ha comprobado su validez práctica a lo largo de los últimos 40 años.

La Computación Cuántica y la Información Cuántica constituyen áreas de investigación relacionadas con la identificación y el uso de los recursos cuánticos particulares para el procesamiento y la transmisión de información [3, 4]. A lo largo de los últimos años, la Información Cuántica se ha convertido en una de las áreas más activas de investigación en física teórica y experimental, no sólo por las potenciales aplicaciones prácticas de los ordenadores cuánticos, sino también por la posibilidad de estudiar fenómenos físicos fundamentales.

La Computación Cuántica promete revolucionar muchas áreas de la ciencia al permitirnos resolver problemas complejos que escapan a la potencia de procesamiento de las actuales computadoras clásicas. En particular, una computadora cuántica sería una herramienta de suma utilidad para simular el comportamiento de otros sistemas mecánico-cuánticos complejos [5, 6]. En consecuencia, ha sido propuesta una cantidad significativa de nuevos algoritmos y protocolos de comunicación, conjuntamente con sugerencias de implementaciones físicas de los conceptos teóricos involucrados [4, 7–17].

Desde un punto de vista conceptual, la mayoría de los protocolos cuánticos de comunicación, tales como los de teleportación, codificación super-densa (incluyendo sus versiones coherentes) y distribución de entrelazamiento, no toman en cuenta la posible influencia de perturbaciones, es decir, suponen que hay disponibles determinados recursos cuánticos que no son afectados por la presencia ruido. Por ejemplo, el protocolo de distribución de entrelazamiento supone que existe un canal libre de ruido el cual puede generar un bit entrelazado libre de ruido (ebit). Este tipo de idealizaciones permite desarrollar los principales principios de funcionamiento de los protocolos cuánticos sin necesidad de tomar en cuenta ciertos factores que *a priori* podrían complicar el análisis. Sin embargo, es claro que en la práctica no es esperable que los protocolos cuánticos, en presencia de ruido, funcionen según los modelos teóricos idealizados.

A pesar de la existencia de estrategias tales como, *Códigos Correctores de Errores Cuánticos* y *Computación Cuántica Tolerante a Fallos* [4, 18–20], diseñadas para proteger a la información cuántica de interacciones no deseadas, en muchos casos prácticos es necesario contar con medios para cuantificar en qué medida un sistema cuántico es afectado por una perturbación, sin importar cuán pequeña esta pueda ser. En otras pa-

labras, es importante contar con un procedimiento para determinar cuán próximo a lo esperado está funcionando un sistema cuántico real. La manera más sencilla de efectuar esta tarea es comparar el estado de salida del sistema cuántico de interés, pensado como si fuera ideal, con el estado de salida del sistema real, utilizando alguna medida de distancia entre ellos. Por ejemplo, supongamos que un determinado protocolo de información cuántica debe producir, idealmente, un cierto estado cuántico representado por una matriz densidad  $\rho$ , pero el estado real de salida producido por el protocolo resulta ser un estado cuántico representado por una matriz densidad  $\sigma$ , entonces, sería deseable que existiera una medida de distinguibilidad  $D(\rho, \sigma)$  que nos indicara cuán cerca del estado ideal se encuentra el estado real producido por el protocolo.

Una de las características notables de la mecánica cuántica es que dos estados cuánticos arbitrarios no ortogonales no pueden ser discriminados con total certeza. Únicamente pueden ser distinguidos sin ninguna ambigüedad aquellos estados cuánticos que sean ortogonales. En consecuencia, con el fin de evaluar cuán satisfactoriamente está funcionando un dado protocolo cuántico, es necesario diseñar medidas de distinguibilidad que nos permitan cuantificar cuán cercanos son dos dados estados cuánticos o cuán similares resultan dos dados procesos cuánticos entre sí. Hasta el momento, han sido propuestas varias medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos, como la *distancia traza*, la *fidelidad*, la *distancia de Bures*, la *distancia de Hilbert-Schmidt*, la *distancia de Hellinger* y la *divergencia de Jensen-Shannon* cuántica, sólo por mencionar algunas de las más conocidas [4, 21, 23–28].

Una de las medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos más ampliamente utilizada en el ámbito del procesamiento de la información cuántica es la fidelidad. A partir de los valores proporcionados por la fidelidad se evalúan por ejemplo recursos cuánticos, procesos y técnicas de reconstrucción. Típicamente, valores de la fidelidad mayores que 0.9 ó 0.99 son considerados como evidencia suficiente para afirmar que dos estados son cercanos en el espacio de Hilbert. Sin embargo, recientemente Bina y colaboradores [29], en base a diversos ejemplos involucrando qubits y sistemas de variable continua, han demostrado que en muchos casos valores altos de la Fidelidad tales como los mencionados pueden producirse en el caso de pares de estados con propiedades físicas considerablemente diferentes, incluyendo estados separables y entrelazados, clásicos y no clásicos o estados con valores muy diferentes de discordancia cuántica o gaussiana. Bina *et al.* concluyen que la fidelidad, como herramienta para evaluar recursos cuánticos, debería utilizarse con precaución, posiblemente en combinación con

información adicional relacionada con posibles restricciones en el conjunto de estados que el sistema físico de interés puede alcanzar, como una figura de mérito global o como un mero resumen informativo acerca del resultado obtenido por medio de una reconstrucción tomográfica completa.

Por otra parte, una de las tareas centrales en el área del procesamiento de la información cuántica, es enviar información cuántica codificada en un cierto estado a través de un determinado canal cuántico. Dado que, evidentemente, los canales cuánticos no son perfectos, es importante conocer cuán bien se preserva la información que se envía a través de un canal cuántico, en presencia de ruido. Este problema ha sido estudiado por algunos autores los cuales concluyen que, en general, distintas medidas de distancia entre estados cuánticos poseen diferentes sensibilidades para detectar la presencia de ruido [30–32].

Actualmente, el estudio de la dinámica de los *sistemas cuánticos abiertos* es otra de las principales áreas de investigación en la cual encuentran aplicación medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos.

Un sistema cuántico real  $Q$ , como por ejemplo un sistema pensado para efectuar alguna tarea de procesamiento de información cuántica, se encuentra siempre en interacción con su entorno  $E$ . Esta interacción inevitablemente tiene influencia sobre el estado del sistema cuántico, causando pérdidas en la información codificada en el sistema. En estas condiciones, el sistema cuántico  $Q$  ya no puede ser tratado como un sistema cerrado. Este tipo de sistema es el que se conoce como *sistema cuántico abierto* [33, 34]. En general, la evolución temporal del sistema abierto  $Q$  ya no podrá ser descrita por medio de un operador unitario actuando sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_Q$  correspondiente al sistema  $Q$ . Sin embargo, debido a que el sistema total integrado por el sistema cuántico  $Q$  y el entorno  $E$  puede considerarse como un sistema cerrado, su evolución estará descrita por un operador unitario  $U(t)$  actuando sobre el espacio de Hilbert total  $\mathcal{H}_{QE} = \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_E$ . Dado que, en general, estaremos interesados en extraer información acerca del estado del sistema de interés  $Q$  correspondiente a algún instante de tiempo posterior  $t > 0$ , efectuaremos la traza parcial sobre los grados de libertad del entorno  $E$  con el fin de obtener el estado reducido  $\rho_Q(t)$  correspondiente al sistema  $Q$  exclusivamente [33, 34],

$$\rho_Q(t) = \text{Tr}_E [U(t)\rho_{QE}U^\dagger(t)] \quad (1.1)$$

Cuando el estado inicial del sistema cuántico abierto es estadísticamente independiente del estado del entorno, la evolución del sistema reducido puede ser descrita por medio de una familia de mapas dinámicos completamente positivos entre los estados del sistema reducido. La evolución más simple para estados inicialmente no correlacionados es descrita por medio de un proceso de Markov para el cual esta familia de mapas forma lo que se conoce con el nombre de *semi-grupo dinámico* [35–37]. Sin embargo, en muchos sistemas la descripción markoviana proporciona un panorama de la dinámica demasiado simplificado y a menudo resulta necesaria una descripción más rigurosa [34].

En años recientes han sido propuestos diferentes métodos para tratar problemas que presentan dinámicas no markovianas [38–45]. Sin embargo, los efectos de correlaciones iniciales han sido ignorados a menudo. La suposición de estados iniciales no correlacionados en general resulta justificada en problemas donde el sistema de interés y su entorno se encuentran débilmente acoplados, sin embargo ha sido argumentado que esta suposición resulta en general demasiado restrictiva [46, 47]. En consecuencia, la influencia de correlaciones iniciales en la dinámica de los sistemas cuánticos abiertos ha sido recientemente objeto de estudio intensivo [46–57]. Cuando son considerados estados iniciales del sistema total con diferentes correlaciones sistema-entorno, ocurre que en general la dinámica ya no puede ser descrita en términos de mapas dinámicos actuando sobre el espacio de estados reducido.

En trabajos recientes diversos autores han estudiado la aplicación de medidas de distinguibilidad entre estados cuánticos para caracterizar la dinámica del sistema reducido en presencia de correlaciones iniciales. Como resultado de esas investigaciones se ha demostrado que en algunos casos es posible detectar un aumento en la distinguibilidad entre dos estados del sistema reducido con respecto a su valor inicial. Este incremento puede interpretarse como un flujo de información desde el entorno hacia el sistema, el cual pone de manifiesto un carácter no markoviano de la dinámica del sistema reducido. Notablemente, se ha encontrado que no todas las medidas de distinguibilidad presentan la misma sensibilidad para la detección de correlaciones iniciales sistema-entorno [58–64].

Así, al presente, no existe una única medida “ideal” de distinguibilidad entre estados o procesos cuánticos universalmente aceptada. Mas aún, diferentes medidas de distancia resultan de mayor o menor utilidad dependiendo de la aplicación particular en donde se pretenda utilizarla, ya sea teórica, como en el caso de la búsqueda de cotas

para un determinado proceso físicamente posible, o la evaluación del funcionamiento de un protocolo cuántico implementado experimentalmente. En consecuencia, resulta de sumo interés contar con diferentes medidas de distancia entre estados y procesos cuánticos con el fin de poder determinar cuáles son las que ofrecen mejor desempeño en los diferentes contextos de interés [24, 29, 58, 60–66].

Las denominadas *divergencias Csiszár* constituyen una importante clase de distancias entre distribuciones de probabilidad clásicas que engloban en particular a la mayoría de las medidas de discriminación entre distribuciones de probabilidad conocidas. En este trabajo final nos planteamos el problema de obtener nuevas medidas de distancia entre estados cuánticos a partir de medidas clásicas de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad escritas en la forma general de una divergencia Csiszár.

## 1.2. Panorama general del trabajo final

Con la finalidad de facilitar la lectura del presente trabajo final, hemos intentado escribirlo de manera tal que sea lo más autocontenido posible, sin extender demasiado su longitud. En consecuencia, en el Capítulo 2 introducimos de forma sintética los conceptos teóricos que consideramos indispensables para la comprensión de este trabajo. El Capítulo 3 contiene el planteo de manera detallada y explícita del problema que nos propusimos resolver, seguidamente, realizamos un análisis del problema y presentamos los principales resultados obtenidos hasta el momento. Finalmente, en el Capítulo 4 presentamos un resumen de los principales resultados obtenidos en este trabajo final y discutimos posibles direcciones para continuar con las investigaciones.

# 2

## Conceptos preliminares

Aquí se sentarán las bases teóricas fundamentales para el desarrollo del capítulo 3 “Distancias cuánticas a partir de divergencias Csiszár”. En consecuencia, en primer lugar se establecen conceptos de teoría de información enfocados a la definición de  $f$ -divergencias estadísticas, distancias y métricas. Acotamos el estudio de la teoría de información sólo a las herramientas matemáticas de las cuales hicimos uso posteriormente, por lo que espero no alarme al lector la falta de información, valga la redundancia.

En segundo lugar, se dedicaron algunas páginas, por completitud, a describir los cimientos básicos de la teoría cuántica. Todo lo anterior sirve de introducción al capítulo 3, en el cual nos concentramos en las distancias cuánticas y en el problema de definir las en función de divergencias estadísticas.

### 2.1. Información clásica

Uno de los objetivos principales del trabajo es generar métricas en un espacio de Hilbert particular a partir de divergencias de tipo Csiszár entre distribuciones de pro-

bilidad. En efecto, desarrollaremos los conceptos de distribución de probabilidad, divergencia, distancia estadística y métrica. También se enumerarán las propiedades más importantes de tales conceptos y, por último, presentamos un resumen de las divergencias usuales y de mayor interés.

**Definición** Sean  $(\Omega, F, P)$  y  $(\Omega, F, Q)$  dos espacios probabilísticos con  $\Omega$  el conjunto total de eventos,  $F$  una  $\sigma$ -álgebra de Borel y  $P : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$  dos probabilidades distintas. Consideremos  $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variable aleatoria discreta, es decir,  $\mathbb{X}(\Omega)$  finito numerable,  $|\mathbb{X}(\Omega)| = n \in \mathbb{N}$ .

Definimos  $p_i$  y  $q_i$  con  $i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$  como sigue,

$$\mathbb{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (2.1)$$

$$p(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin \mathbb{X}(\Omega) \\ P(X = x_i) = p_i & \text{si } y = x_i, \text{ con } i \in [1, n] \subset \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$q(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin \mathbb{X}(\Omega) \\ Q(X = x_i) = q_i & \text{si } y = x_i, \text{ con } i \in [1, n] \subset \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.3)$$

Las funciones  $p$  y  $q$  se denominan distribuciones de probabilidad.

**Definición** A la cantidad

$$D(p, q) = \sum_{i=1}^n q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad (2.4)$$

con  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa,  $f(1) = 0$  y  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0) \in \mathbb{R}$ , la denominamos divergencia Csiszár o una  $f$ -divergencia entre  $p$  y  $q$ <sup>1</sup>

En lo que sigue, el conjunto de las funciones  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  convexas tales que,  $\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0) \in \mathbb{R}$  (continuas en cero) y  $f(1) = 0$ , lo denominamos  $F_c$ .

**Definición** Sea  $S$  el espacio de todas las distribuciones de probabilidad definidas sobre  $\Omega$  y  $F$ . Sean  $p, q, r \in S$ . Entonces, el funcional  $D(\cdot, \cdot) : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$  recibe los siguientes nombres:

- Si  $D(p, q) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $D(p, q) \Leftrightarrow p = q$ , se denomina divergencia entre  $p$  y  $q$
- Si  $D(p, q)$  es una divergencia y que además cumple  $D(p, q) = D(q, p)$  entonces se llama distancia entre  $p$  y  $q$

<sup>1</sup>Definición de Csiszár (1963), Ali, Silvey (1966).



- Si  $D(p, q)$  es una distancia que cumple con  $D(p, r) \leq D(p, q) + D(q, r)$  le decimos métrica

Notemos que el conjunto de todas las divergencias entre dos distribuciones de probabilidad es más amplio que el conjunto de las  $f$ -divergencias.

Algunas de las propiedades más importantes de las  $f$ -divergencias y las funciones  $f$  se enuncian en los siguientes teoremas:

**Teorema 2.1.1 (Unicidad)** Sean  $f, g \in F_c$ .  $D_g(p, q) = D_f(p, q)$  para cualquier  $p, q$  bien definidas  $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} / g(u) - f(u) = c(u - 1)$

En el teorema anterior,

$$D_f(p, q) = \sum_{i=1}^n q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad (2.5)$$

$$D_g(p, q) = \sum_{i=1}^n q_i g\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad (2.6)$$

Con lo cual, el teorema de unicidad indica que a una única divergencia Csiszár corresponden más de un elemento de  $F_c$ .

**Teorema 2.1.2 (Simetría)** Sea  $f \in F_c$ .  $D(p, q) = D(q, p)$  para cualquier  $p, q$  bien definidas  $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} / uf(1/u) - f(u) = c(u - 1)$

Este teorema discrimina una  $f$ -divergencia de una distancia estadística. Si la función  $f \in F_c$  es tal que cumple el resultado de simetría, entonces, la  $f$ -divergencia será una distancia. La propiedad siguiente, cuyo nombre es *Rango de valores*, establece las costas inferior y superior de una divergencia de tipo Csiszár, para cualquier  $p$  y  $q$  que consideremos. Entendemos que vale aclarar que la cota inferior corresponde a un caso en que las distribuciones de probabilidad coincidan, mientras que la superior a uno en que las distribuciones de probabilidad son ortogonales.

**Teorema 2.1.3 (Rango de valores)** Sea  $f \in F_c$ . Entonces,  $f(1) \leq D(p, q) \leq f(0) + \lim_{u \rightarrow 0} uf(1/u)$  para cualquier  $p, q$  bien definidas

En nuestro caso, definimos  $f(1) = 0$ , por lo que la cota inferior es cero, pero también vale para funciones  $f$  no nulas en la unidad.

En gran cantidad de ocasiones trabajamos con funciones  $f \in F_c$ , que cumplen con el resultado de simetría para  $c = 0$ . Si este es el caso,  $uf(1/u) = f(u)$ , por lo que,

$\lim_{u \rightarrow 0} uf(1/u) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = f(0)$ . La última igualdad se cumple por cómo está definida la  $f$ -divergencia. Entonces,

$$uf(1/u) = f(u) \Rightarrow f(1) \leq D(p, q) \leq 2f(0) \quad (2.7)$$

Otras propiedades de las  $f$  que satisfacen las condiciones del teorema de simetría son,

$${}_0f\left(\frac{0}{0}\right) = 0 \quad (2.8)$$

$${}_0f\left(\frac{a}{0}\right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} tf\left(\frac{a}{t}\right) = a \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}, \quad \forall a > 0 \quad (2.9)$$

Una vez presentes las características básicas de las  $f$ -divergencias, nos queda una principal herramienta sobre la construcción de métricas construidas en función de tales divergencias, ver [71].

**Teorema 2.1.4 ( $f$ -divergencia métrica)** Sea  $f \in F_c$ .  $D(p, q)$  una  $f$ -divergencia para cualquier  $p, q$  bien definidas, y que además cumple con el resultado de simetría 2.1.2. Sea  $\alpha \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Si la función

$$h(u) = \frac{(1 - u^\alpha)^{1/\alpha}}{f(u)} \quad (2.10)$$

con  $u \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  es no creciente, entonces  $d_\alpha(p, q) = D(p, q)^\alpha$  cumple con la identidad del triángulo por lo que es una métrica <sup>2</sup> en el espacio de las distribuciones de probabilidad.

Este teorema es de suma importancia en nuestro trabajo. Postula que una  $f$ -divergencia que satisface sus hipótesis, genera directamente un conjunto infinito de métricas parametrizado por  $\alpha$ . En la sección resultados, hacemos uso de esta característica.

Como cierre de las propiedades de  $f \in F_c$  expondremos algunas características sobre su derivabilidad, de las cuales haremos uso en posteriores demostraciones.

### Sobre $f(u) = uf(1/u)$ derivable

Si asumimos  $f \in F_c$  dos veces derivable y además que cumple con el resultado de simetría para  $c = 0$ , tenemos algunas propiedades básicas adicionales que son importantes aclarar puesto que se utilizan en futuras demostraciones,

<sup>2</sup>es mayor que cero por la definición de la  $f$ , cumple con la simetría y la identidad del triángulo

- $f'(u) = f(1/u) - \frac{1}{u}f'(1/u)$  con  $f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$  Esta expresión se obtiene derivando directamente  $f$  en la ecuación  $f(u) = uf(1/u)$

- $f'(1) = 0$

Para obtener  $f'(1) = 0$  sólo debemos poner  $u = 1$  en  $f'(u) = f(1/u) - \frac{1}{u}f'(1/u)$

- $f'(u) \leq (\geq) 0$  para  $u \leq (\geq) 1$

La propiedad anterior se basa en que  $f$  es convexa

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Por último,  $f$  siempre es positiva o nula ya que podemos deducir que en  $u = 1$  tiene un mínimo global

## $f$ -Divergencias usuales

Habiendo mencionado ya las propiedades de  $f \in F_c$ , daremos a continuación un breve resumen de aquellas que son usuales en trabajos sobre información, mecánica cuántica, estadística, etc. Algunas de estas son,

- **Distancia Hellinger**

La distancia Hellinger  $D_H(\cdot, \cdot)$  está definida por,

$$D_H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i}|^2 \quad (2.11)$$

La función  $f_H$  es,

$$f_H(t) = \frac{1}{2} (\sqrt{t} - 1)^2 \quad (2.12)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+ + \{0\}$ . Esta divergencia particular también cumple con el teorema de simetría por lo que la denominamos *distancia*

- **Discriminación triangular**

La discriminación triangular  $D_T(\cdot, \cdot)$  está definida como,

$$D_T(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|p_i - q_i|^2}{p_i + q_i} \quad (2.13)$$

La función  $f_T$  es,

$$f_T(t) = \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2}{t+1} \quad (2.14)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+ + \{0\}$ . Esta divergencia  $D - T$  es también una *distancia*

■ **Distancia variacional**

La distancia variacional, también conocida como distancia traza,  $D_V(\cdot, \cdot)$  está definida por,

$$D_V(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |p_i - q_i| \quad (2.15)$$

La correspondiente función  $f_V$  es,

$$f_V(t) = \frac{1}{2}|t - 1| \quad (2.16)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+ + \{0\}$ . Esta divergencia cumple con el teorema de simetría por lo que la denominamos *distancia*

Aquí corresponde hacer una salvedad. En los párrafos anteriores se definió el concepto de *métrica*. Considerando todo el conjunto de  $f$ -divergencias, no cualquiera puede ser una métrica [73]. Veamos el siguiente teorema y corolario posterior,

**Teorema 2.1.5** Una  $f$ -divergencia que satisface la identidad del triángulo y la identidad de indiscernibles<sup>3</sup> es, sí y sólo sí, de la forma,

$$f(t) = \begin{cases} \alpha(t - 1) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \beta(t - 1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

Entonces tenemos que,

**Corolario** Una  $f$ -divergencia que satisface la identidad del triángulo y la identidad de indiscernibles es, sí y sólo sí, un múltiplo positivo de la distancia variacional

En conclusión, de todas las  $f$ -divergencias, sólo los múltiplos positivos de la distancia variacional son métricas.

■ **Divergencia de Kullback-Leibler**

La divergencia de Kullback-Leibler  $D_{KL}(\cdot, \cdot)$  está definida como,

$$D_{KL}(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \log \left( \frac{p_i}{q_i} \right) \quad (2.18)$$

La función  $f_{KL}$  es,

$$f_{KL}(t) = t \log(t) \quad (2.19)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+ + \{0\}$ . Esta es una divergencia propiamente dicha, en el sentido de que no cumple con el resultado de simetría

<sup>3</sup>Identidad de indiscernibles:  $D(p, q) = 0 \Rightarrow p = q$

- **Divergencia de Jensen-Shannon**

La divergencia de Jensen-Shannon  $D_{JS}(\cdot, \cdot)$  está definida por,

$$D_{JS}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ D_{KL} \left( p, \frac{p+q}{2} \right) + D_{KL} \left( q, \frac{p+q}{2} \right) \right] \quad (2.20)$$

La correspondiente función  $f_{JS}$  es,

$$f_{JS}(t) = \frac{1}{2} [1 + t + t \log_2(t) - (t+1) \log_2(t+1)] \quad (2.21)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+$ . Esta divergencia cumple con el teorema de simetría por lo que la denominamos *distancia*

- **Divergencia  $\chi^2$**

La divergencia  $\chi^2$  (chi-cuadrado)  $D_{\chi^2}(\cdot, \cdot)$  está definida como,

$$D_{\chi^2}(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i} \quad (2.22)$$

La función  $f_{\chi^2}$  es,

$$f_{\chi^2}(t) = (t - 1)^2 \quad (2.23)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+ + \{0\}$ . Evidentemente, es sólo una divergencia (no es una distancia)

- **Entropía de Rényi**

La entropía de Rényi de orden  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \neq 1$ ),  $D_{R,\alpha}(\cdot, \cdot)$  está definida como,

$$D_{R,\alpha}(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i^\alpha q_i^{(1-\alpha)} \quad (2.24)$$

La función  $f_{R,\alpha}$  es,

$$f_{R,\alpha}(t) = t^\alpha \quad (2.25)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+$ . Sólo el caso  $\alpha = \frac{1}{2}$  es una distancia, dando lugar al siguiente caso particular

- **Distancia Bhattacharyya**

Los coeficientes Bhattacharyya,  $BC(\cdot, \cdot)$  están dados por la expresión,

$$BC(p, q) = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i q_i} \quad (2.26)$$

La función  $f_{BC}$  es,

$$f_{BC}(t) = \sqrt{t} \quad (2.27)$$

con  $t \in \mathbb{R}_+$ . Como lo indica su nombre, estos coeficientes son una distancia con  $c = 0$ . Además es un caso particular de la entropía de Renyi con  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

La distancia Bhattacharyya esta definida como,

$$D_{BC}(p, q) = -\log [BC(p, q)] \quad (2.28)$$

## Distancia Wootters

Otra cantidad relevante en desarrollos posteriores es el caso de la distancia Wootters  $D_W(\cdot, \cdot)$ , que tiene propiedades de distancia pero como no existe una función  $f$  tal que admita el desarrollo de una  $f$ -divergencia la excluimos del grupo anterior. Su expresión es,

$$D_W(p, q) = \arccos \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i q_i} \right) \quad (2.29)$$

o en función de los coeficientes Bhattacharyya

$$D_W(p, q) = \arccos [BC(p, q)] \quad (2.30)$$

De esta manera, definimos aquí las divergencias y distancias estadísticas que formarán parte de desarrollos posteriores.

## 2.2. Conceptos de mecánica cuántica

Comenzamos la síntesis de herramientas de la física cuántica con un resumen de la estructura matemática que la sostiene, en particular, nos concentramos en espacios de Hilbert y operadores lineales.

### 2.2.1. Sobre espacios de Hilbert y operadores

En esta sección se enumeran los resultados matemáticos que se utilizarán en futuras aplicaciones. Tales resultados están relacionados sólo a la estructura matemática de espacios de Hilbert  $\mathcal{H}$  y operadores lineales actuando sobre él. El conjunto de tales operadores lo simbolizamos con  $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ .

**Definición** Un espacio con producto interior o pre-Hilbert es un espacio vectorial  $X$  en el que se define una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  con las siguientes propiedades:

1.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  (aditividad);
2.  $\langle \alpha x, y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$  con  $\alpha \in \mathbb{K}$ , y  $\bar{\alpha}$  conjugado de  $\alpha$  (homogénea);
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (hermítica)<sup>4 5</sup>;
4.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (definida positiva)

Todo espacio pre-Hilbert es en particular normado, donde la norma asociada se define como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , y por tanto es también métrico, con la distancia natural  $D(x, y) = \|x - y\|$ . Esto motiva la siguiente definición,

**Definición** Un espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo, es decir, un espacio métrico ( $d$ ) donde toda sucesión de Cauchy es convergente

Los axiomas anteriores fueron primero establecidos por Von Neumann en 1930 en sus trabajos sobre fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica. En su definición se incluía también la separabilidad del espacio, axioma posteriormente eliminado cuando Lowing, Rellig y F. Riesz mostraron que en la práctica era innecesaria dicha restricción. Por lo que en este trabajo no haremos referencia a la separabilidad de nuestros espacios de Hilbert.

A partir de la definición axiomática de espacio de Hilbert como la que enunciamos anteriormente, se desprende gran cantidad de información y propiedades sobre la estructura propiamente dicha del espacio en cuestión. A fines prácticos, no es preciso profundizar en ese camino. Por lo que vamos a asumir un mínimo conocimiento en el área y nos limitaremos a resumir las propiedades de las cuales haremos uso posteriormente.

**Teorema 2.2.1** Si  $X$  es un espacio pre-Hilbert de dimensión  $n$ , entonces  $X$  es congruente con  $\mathbb{C}^n$ , es decir existe un isomorfismo isométrico entre  $X$  y  $\mathbb{C}^n$

**Teorema 2.2.2** Si  $X$  es un espacio de Hilbert de dimensión infinita, entonces  $X$  es congruente con  $l^2$ <sup>6</sup>, es decir existe un isomorfismo isométrico entre  $X$  y  $l^2$

<sup>4</sup>Toda aplicación que cumpla con (1), (2) y (3) se denomina sesquilineal hermítica

<sup>5</sup>Esta propiedad implica que,  $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

<sup>6</sup>Conjunto de todas las funciones de módulo cuadrado integrable

**Teorema 2.2.3** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de dimensión finita  $n \in \mathbb{N}$ . Cualquier conjunto de  $n$  elementos ortonormales de  $\mathcal{H}$  es una base

**Definición** Un operador  $A : X \rightarrow Y$ , con  $X, Y$  espacios pre-Hilbert, es una isometría sí y sólo sí  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  para todo  $x, y \in X$

**Definición** Sea  $T \in B(\mathcal{H})$  un operador lineal  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . El adjunto de  $T$  es  $T^*$  y cumple con  $\langle \psi, T\psi \rangle = \langle T^*\psi, \psi \rangle$  para todo  $\psi \in \mathcal{H}$

**Proposición 2.2.1**  $A \in B(\mathcal{H})$  es una isometría sí y sólo sí  $A^*A = I$ , con  $A^*$  adjunto de  $A$

**Definición**  $N \in B(\mathcal{H})$  es normal si  $N^*N = NN^*$

**Definición**  $T \in B(\mathcal{H})$  es autoadjunto si  $T^* = T$

**Definición** Un operador  $T : X \rightarrow Y$ , con  $X, Y$  espacios pre-Hilbert, es unitario sí y sólo sí es una isometría sobreyectiva, es decir, para todo  $y \in Y$ ,  $\exists x \in X$  tal que  $Tx = y$

**Proposición 2.2.2** Todo operador  $T \in B(\mathcal{H})$  se puede escribir como  $T = A + iB$  con  $A$  y  $B$  autoadjuntos

La siguiente proposición parece encontrarse donde no debe, pero tiene estrecha relación con el producto escalar entre dos vectores en un espacio de Hilbert de dimensión finita, como veremos más adelante.

**Proposición 2.2.3 (Desigualdad de números complejos)** Sean  $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ ,  $i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$ . Entonces,

$$\left| \sum_{i=1}^n \overline{w_i} z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| \quad (2.31)$$

La contraparte cuántica del resultado anterior se obtiene directamente:

**Proposición 2.2.4 (Desigualdad del producto escalar)** Sea  $\{\psi_i\}$  una base de  $\mathcal{H}$ .  $\psi_p, \psi_q \in \mathcal{H}$  dos estados que admiten las descomposiciones,

$$\psi_p = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i \quad (2.32)$$

$$\psi_q = \sum_{i=1}^n z_i \psi_i \quad (2.33)$$

con  $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ , entonces,

$$|\langle \psi_p, \psi_q \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |z_i| |w_i| = \sum_{i=1}^n |\langle \psi_i, \psi_p \rangle| |\langle \psi_i, \psi_q \rangle| \quad (2.34)$$



La desigualdad anterior tiene importancia en razonamientos posteriores, en particular, cuando presentamos cómo obtuvieron otros autores una extensión cuántica de ciertas divergencias de tipo Csiszár.

La mecánica cuántica puede ser considerada como un marco teórico general para las teorías físicas. Consta de un núcleo matemático que se convierte en una teoría física cuando se añade un conjunto de reglas de correspondencia que nos dice qué objetos matemáticos tenemos que utilizar en qué situaciones físicas particulares. En contraste con las teorías de la física clásica, estas reglas de correspondencia no son claramente intuitivas, puesto que operadores lineales en espacios de Hilbert están lejos de la vida cotidiana.

Es verdaderamente notable que Heisenberg, Schrödinger, Dirac, Bohr, von Neumann, junto con todas las otras mentes famosas de aquella edad de oro, fundaran tal teoría.

**Notación:** Hasta aquí, se desarrollaron principalmente resultados matemáticos sin realizar un paralelismo estricto con la teoría cuántica, por lo que se optó hacerlo mediante la notación que generalmente se usa en matemática. En las secciones y capítulos siguientes, la cercanía con la mecánica cuántica crece por lo que usaremos la notación de Dirac, normalizada por los físicos a la hora de hablar de la teoría cuántica. Entonces,

- $\psi = |\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- $\langle\psi, \cdot\rangle = \langle\psi|$
- $\langle\psi_i, \psi_j\rangle = \langle\psi_i|\psi_j\rangle$
- $A^* = A^\dagger$  (autoadjunto)
- $\bar{\alpha} = \alpha^*$  (conjugado)

### 2.2.2. Estados en mecánica cuántica

Revisaremos brevemente el formalismo de la mecánica cuántica, abstracción de realizaciones físicas concretas. Todas las cantidades serán sin dimensiones y  $\hbar = 1$  (aunque se debe tener en cuenta que en realidad es  $10^{34}$  Js, en otras palabras: muy, muy pequeño).

## Preparación y medición

Imaginemos que contamos con un sistema físico particular, por ejemplo, un electrón, un fotón, o el núcleo de un átomo, y se desarrolla un experimento para medir una magnitud física por ejemplo, la energía, la polarización, el momento magnético, etcétera. A menudo es útil dividir estos experimentos físicos en dos partes: **preparación y medición**.

La **preparación** de un sistema cuántico es el conjunto de acciones que determina todas las distribuciones de probabilidad de cualquier posible medición. En mecánica cuántica, hay observables cuyos posibles valores están cuantizados, es decir, no pueden tomar cualquier valor.

Por otro lado, como la aparición de las probabilidades no sólo se debe a la ignorancia del observador, sino al corazón mismo de la descripción, el proceso de **medición** se puede considerar como una transición de posibilidades a los hechos.

## Estados

Dado que muchas preparaciones diferentes pueden tener el mismo efecto, en el sentido de que todas las distribuciones de probabilidad resultantes son iguales, se introduce el concepto de **estado**, que especifica el efecto de una preparación sin importar cómo haya sido efectivamente realizado.

La división de experimentos físicos en preparación de un estado y medición de una cantidad observable se refleja en la estructura matemática de la mecánica cuántica. La representación matemática del conjunto de observables se da por elementos hermitianos  $A$  tomados de un álgebra  $\mathbb{A}$  (llamado álgebra de observables). Un álgebra es un conjunto cerrado bajo multiplicación y adición, así como bajo multiplicación por escalares. Además también suponemos que hay un adjunto por cada elemento del álgebra.

Usualmente se utiliza una representación del álgebra de observables, mediante operadores lineales acotados  $\mathbf{B}(\mathcal{H})$  actuando sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Todas las álgebras de observables usadas admiten tal representación.

Ahora bien, un **estado** es un elemento del dual del álgebra de observables  $\mathcal{A}^d$ , es decir, el espacio de funcionales lineales continuos sobre  $\mathcal{A}$  definidos positivos y normalizados, para obtener una descripción correcta en término de probabilidades.

En lo que sigue nos restringimos a dimensión finita, es decir,  $\mathcal{A} \cong M_n$  con  $M_n$  conjunto de las matrices  $n \times n$  y  $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ .

Definimos entonces el producto escalar entre dos operadores como,  $\langle B, A \rangle = \text{tr}[B^* A]$  con  $B^*$  adjunto de  $B$ .

Luego, en síntesis, los estados son operadores lineales sobre  $\mathcal{H}$  que cumplen,

$$\langle \mathbb{I} \rangle = \text{tr}[\rho] = 1 \quad (2.35)$$

$$\langle \rho^* \rho \rangle = \langle \rho^2 \rangle \geq 0 \quad (2.36)$$

Este tipo de operadores (-matrices) se denominan operadores (-matrices) densidad<sup>7</sup>.

Una de las propiedades más importantes del conjunto de matrices densidad es la *convexidad*: si tenemos  $\{\rho_i / i \in \mathbb{N}\}$  matrices densidad y  $\{\lambda_i \in [0, 1] / i \in \mathbb{N}\}$  probabilidades entonces

$$\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i \quad (2.37)$$

y

$$\sum_i \lambda_i = 1 \quad (2.38)$$

es también una matriz densidad.  $\rho$  describe un estado que puede prepararse generando los estados  $\rho_i$  con probabilidad  $\lambda_i$ .

Una vez establecidas las propiedades de tales operadores, podemos calcular los valores medios de las cantidades observables de nuestro sistema físico de la siguiente manera:

A la magnitud física  $A$  se le asocia un operador lineal autoadjunto de  $\mathbb{A}$ , y se calcula

$$\langle A \rangle = \text{tr}[\rho A] \quad (2.39)$$

### Estados puros y estados mezcla

Los operadores densidad  $\rho$  son elementos particulares de  $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ , es decir, del conjunto de operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Denominamos *funciones de onda* a los elementos de  $\mathcal{H}$ .

Si la base de este espacio es  $\{|\psi_i\rangle / i \in \mathbb{N}\}$ , ortonormales y autovectores de algún operador, y nuestro sistema físico se encuentra en alguno de estos microestados  $\psi_i$  entonces el operador densidad asociado a este estado será el operador proyección,

$$\rho = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.40)$$

<sup>7</sup>este operador resulta ser autoadjunto,  $\rho^* = \rho$

con

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1 \quad (2.41)$$

y el estado se denomina **puro**. Las funciones de onda que representan los estados puros son de radical importancia puesto que al medir cualquier observable, encontraremos nuestro sistema en uno de estos microestados particulares.

Si nuestro sistema se encuentra en una superposición de microestados tal que,

$$\text{Tr}[\rho^2] < 1 \quad (2.42)$$

tenemos un estado **mezcla** y nuestro operador densidad será,

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.43)$$

con  $\{\lambda_i \in [0, 1]/i \in \mathbb{N}\}$  coeficientes de una distribución de probabilidad. Cabe aclarar que en la descomposición anterior, los elementos  $\lambda_i$  son tales que  $\rho$  no puede tomar la expresión para estados puros, 2.40.

## Descomposición espectral

**Teorema 2.2.4** Sea  $T \in \mathcal{H}$  autoadjunto. Entonces:

1. Todos los autovalores de  $T$  (si existen) son reales.
2. Autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

El teorema anterior sugiere que, si tenemos un espacio de dimensión finita, el conjunto de autovectores de un operador autoadjunto será completo ( $n$  autovectores) y ortonormal por lo que es una base del espacio  $\mathcal{H}$ . Entonces se admite la descomposición siguiente

**Teorema 2.2.5** Sea  $T \in \mathcal{H}$  de dimensión finita  $n$ ,  $\{|e_i\rangle / i \in [1, n] \subset \mathbb{N}\}$  el conjunto de autovectores de  $T$  con autovalores  $\{\lambda_i / i \in [1, n] \subset \mathbb{N}\}$  respectivamente, entonces,

$$T = \sum_{i=1}^n \lambda_i |e_i\rangle \langle e_i| \quad (2.44)$$

Lo anterior se justifica utilizando que los  $|e_i\rangle \langle e_i|$  forman una base de  $\mathbf{B}(\mathcal{H})$  si los  $|e_i\rangle$  forman una base de  $\mathcal{H}$

De esta manera completamos una descripción de la estructura básica de un espacio de Hilbert de dimensión finita y a su vez de los operadores autoadjuntos.

### 2.2.3. Operadores Autoadjuntos y observables

Como se enunció anteriormente, los operadores autoadjuntos son de radical importancia en la estructura cuántica, pero ¿por qué?: en síntesis, tienen autovalores reales. Esto permite una correspondencia entre operadores autoadjuntos y observables (magnitudes físicas).

De esta manera, si el objetivo es conocer cuál es el valor de una propiedad cuantificable  $A$  de nuestro sistema físico, asociamos a ésta un operador autoadjunto  $A \in B(\mathcal{H})$ . El valor que tome esta magnitud física al medir será uno de los autovalores reales de  $A$ , dependiendo del estado en el que nuestro sistema se encuentre. Nótese entonces que no cualquier operador puede representar una magnitud física, en particular, uno que tenga autovalores complejos.

### 2.2.4. Qubits

En la Teoría Clásica de la Información se describe a toda la información por medio de cadenas de bits, donde cada bit puede tomar un valor de 0 ó 1. Los cálculos se realizan efectuando operaciones lógicas sobre dichas cadenas de bits. En la *Teoría de la Información Cuántica* la información se representa por medio de “bits” cuánticos que se conocen con el nombre de *qubits*. Un qubit representa un sistema cuántico de dos niveles cuyo espacio de estados es desarrollado por los vectores de estado  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , los cuales comúnmente forman lo que se conoce como *base computacional*.

Sistemas físicos reales de dos niveles que pueden ser utilizados para generar un qubit incluyen el spin de una partícula (*up* o *down*), la polarización de un fotón (*V* -vertical- o *H* -horizontal-, o el estado de un átomo de dos niveles (*f* -fundamental- o *e* -excitado-). Una distinción importante entre un qubit y un bit clásico es que, a diferencia de su contrapartida clásica, un qubit puede estar en una *superposición arbitraria* de los estados de la base:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.45)$$

Físicamente, si midiéramos el qubit mediante un dispositivo capaz de detectar ya sea el estado  $|0\rangle$  o el estado  $|1\rangle$ , entonces como resultado de tales mediciones obtendríamos el estado  $|0\rangle$  con probabilidad  $|\alpha|^2$ , o el estado  $|1\rangle$  con probabilidad  $|\beta|^2$ . Esto se conoce como *Regla de Born* y conecta los coeficientes complejos  $\alpha$  y  $\beta$ , conocidos como amplitudes, con las probabilidades de medir los distintos resultados posibles.

### 2.2.4.1. Esfera de Bloch

Es posible visualizar la representación de un qubit como un punto sobre la denominada *esfera de Bloch*. En la figura (2.1) presentamos un ejemplo. En general, los ejes de la esfera de Bloch se hacen corresponder con los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  de la base computacional, sin embargo, muchas veces se hace corresponder la base computacional con los estados de polarización de un fotón.

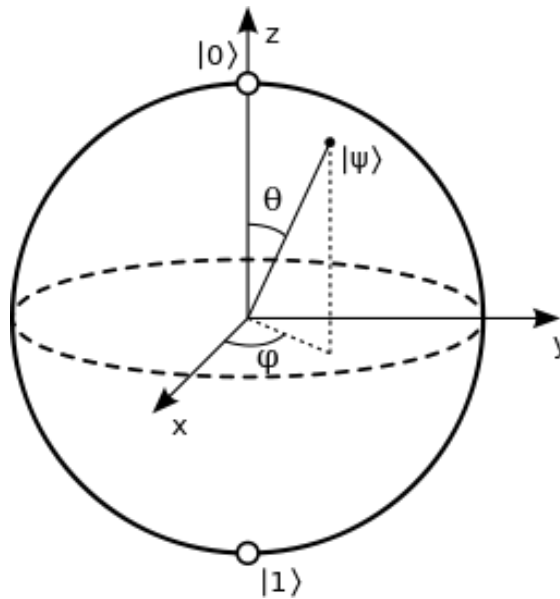


FIGURA 2.1: Esfera de Bloch

Cualquier vector  $|\psi\rangle$  que represente un estado puro de un qubit puede ser parametrizado por medio de dos ángulos  $\theta, \phi$  en la forma

$$|\psi\rangle = \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle. \quad (2.46)$$

Este estado corresponde a un punto *sobre* la esfera de Bloch especificado por el vector  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , where  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = (\sin 2\theta \cos \phi, \sin 2\theta \sin \phi, \cos 2\theta)$ . El vector  $\vec{r}$  se conoce con el nombre de *vector de Bloch* correspondiente al estado  $|\psi\rangle$ . Como veremos en la sección 2.2.6, si tenemos en cuenta que dos estados puros que difieran en un factor de fase global resultan físicamente equivalentes, para estados puros pertenecientes a espacios de Hilbert de dimensión 2 es posible realizar una parametrización más sencilla que la representada en la ec.(2.46).

Una matriz densidad arbitraria puede ser representada también en términos de su correspondiente vector de Bloch,  $\vec{r}$ , excepto que en este caso  $\vec{r}$  no necesariamente debe ser

de longitud unidad. Los estados puros son representados como puntos sobre la superficie de la esfera de Bloch y en este caso se satisface  $|\vec{r}| = 1$ . Por otra parte, los estados mezcla son representados mediante puntos en el interior de la esfera de Bloch y en este caso se satisface  $|\vec{r}| < 1$ . Un estado completamente mezclado corresponde al centro de la esfera de Bloch y para este estado se satisface  $\vec{r} = 0$ .

Para una matriz densidad arbitraria en un espacio de Hilbert de dimensión 2 (i.e., qubits) la representación de Bloch puede escribirse como

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i),$$

donde  $\sigma_i$  representan a las matrices de Pauli

$$\sigma_1 \equiv X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

El conjunto  $\{\mathbb{I}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  constituye una base ortogonal para todas las matrices complejas  $2 \times 2$  con respecto al *producto interno de Hilbert-Schmidt* ( $A, B \equiv \text{Tr}(A^\dagger B)$ ). Los elementos del vector de Bloch para un estado  $\rho$  pueden ser recuperados por medio de  $r_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i)$ .

### 2.2.5. Purificación

El concepto de *purificación* está asociado con un procedimiento que nos permite asociar estados cuánticos *mixtos* con estados cuánticos *puros*. Este concepto surge como consecuencia del hecho que, dada una matriz densidad  $\rho$  que actúa sobre un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , asociada con un estado cuántico mixto, siempre es posible encontrar una matriz densidad que actúa sobre un espacio de Hilbert *ampliado*  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}$ , asociada con un estado *puro*, cuya traza parcial sobre los grados de libertad del espacio de Hilbert auxiliar  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  da como resultado la matriz densidad original  $\rho$ . Con el fin de ver de qué manera funciona este concepto, a continuación vamos a hacer uso de un procedimiento matemático que nos permitirá entender de qué manera purificar un estado cuántico mixto.

Sea  $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$  una matriz densidad arbitraria de un sistema cuántico asociado con un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . A continuación, introducimos un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  de la *misma* dimensión que  $\mathcal{H}$ . Finalmente, introducimos formalmente un estado

normalizado de la forma

$$|\Psi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |\psi_k\rangle \otimes |\phi_k\rangle \quad (2.48)$$

donde  $\{|\phi_k\rangle\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$ . Sea  $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  la matriz densidad asociada con el estado puro  $|\Psi\rangle$  perteneciente al espacio de Hilbert extendido  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\text{aux}}$ . Podemos ver que

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{aux}}(\rho_\Psi) &= \text{Tr}_{\text{aux}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{i,j,k} (I \otimes \langle\phi_i|) [\sqrt{p_j p_k} |\psi_j\rangle |\phi_j\rangle \langle\psi_k| \langle\phi_k|] (I \otimes |\phi_i\rangle) \\ &= \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k| = \rho \end{aligned} \quad (2.49)$$

Por lo tanto, siempre resulta posible purificar un estado cuántico mixto utilizando un espacio de Hilbert auxiliar  $\mathcal{H}_{\text{aux}}$  de la misma dimensión que el espacio de Hilbert original  $\mathcal{H}$ . Es fácil ver, por construcción, que la purificación de un estado cuántico mixto no es única. De hecho, el número de purificaciones de una dada matriz densidad resulta ser infinito. También es importante resaltar que el proceso de purificación de un estado cuántico mixto no es un concepto abstracto sin relación alguna con la realidad física. A modo de ejemplo, en las referencias [78] y [79] pueden encontrarse discusiones muy interesantes relacionadas con procedimientos físicos para obtener purificaciones de un dado ensamble.

Hemos realizado entonces un muy breve recorrido por la estructura matemática necesaria para comprender los resultados aquí propuestos. La herramienta siguiente es de importancia radical en la sección 3.2. Luego continuamos el presente capítulo con una introducción a las distintas medidas de distinguibilidad en mecánica cuántica, ya sea entre estados mezcla o puros.

### 2.2.6. Equivalencia de estados puros en un espacio de Hilbert

Los estados cuánticos puros están descriptos por vectores pertenecientes a un espacio de Hilbert. Si este espacio de Hilbert es de dimensión finita entonces es simplemente el espacio vectorial  $\mathbb{C}^N$  equipado con un producto escalar (teo. 2.2.1). Sin embargo, es importante destacar que cualquier estado puro corresponde a toda una clase de equivalencia de vectores de estado. Efectivamente, teniendo en cuenta que los estados puros están normalizados a una longitud unitaria y considerando por ejemplo el estado  $|\xi\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle$ , donde  $|\psi\rangle$  es un vector de estado y  $\alpha$  es un número real, se puede demostrar que la estadística de las mediciones predichas con cualquiera de los estados  $|\xi\rangle$  y



$|\psi\rangle$  resulta ser la misma. Por lo tanto, desde un punto de vista observacional, ambos estados  $|\xi\rangle$  y  $|\psi\rangle$  resultan indistinguibles y en consecuencia decimos que son estados *físicamente equivalentes*. Por esta razón, podemos ignorar factores de fase globales dado que resultan irrelevantes desde el punto de vista de las propiedades observables en un sistema físico. Por otra parte, cualquier estado de la forma  $|\xi\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle$ , con  $\alpha$  real y arbitrario se dice que pertenece al mismo *rayo* en el espacio de Hilbert.

A los efectos de algunos de los análisis realizados en el presente trabajo final, trabajar con estados cuánticos puros, teniendo en cuenta a todos los estados físicamente equivalentes, nos permite poner de manifiesto las siguientes observaciones:

1. Dado que dos estados puros en un espacio de Hilbert definen un sub-espacio de dimensión dos, sin ninguna pérdida de generalidad podemos elegir una base ortonormal  $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$  de manera que las componentes de cada estado en esta base resulten reales [74–77]. De esta manera, dos estados puros  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$  se pueden parametrizar de la siguiente manera

$$|\psi_p\rangle = \cos \theta_p |e_1\rangle + \sin \theta_p |e_2\rangle \quad (2.50)$$

$$|\psi_q\rangle = \sin \theta_q |e_1\rangle + \cos \theta_q |e_2\rangle \quad (2.51)$$

en donde se satisface la siguiente condición:

$$\theta_p + \theta_q + \phi = \pi/2 \quad (2.52)$$

en esta última ecuación  $\phi$  es un número real que representa el ángulo comprendido entre los estados  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$  en el espacio de Hilbert.

2. Como consecuencia de la observación anterior, el producto interno entre dos vectores de estado puede escribirse como:

$$\langle \psi_p | \psi_q \rangle = \cos \phi \quad (2.53)$$

3. El valor absoluto del producto interno entre dos vectores arbitrarios  $|\xi_p\rangle = e^{i\alpha_p} |\psi_p\rangle$  y  $|\xi_q\rangle = e^{i\alpha_q} |\psi_q\rangle$ , cada uno perteneciente a un dado rayo en el espacio de Hilbert puede escribirse como:

$$|\langle \xi_p | \xi_q \rangle| = \langle \psi_p | \psi_q \rangle = \cos \phi \quad (2.54)$$

### 2.2.7. Distancias entre operadores lineales

La *norma*  $L_p$  (también conocida como norma  $-p$  o norma Schatten  $-p$ ) de un operador lineal  $A$  se define como

$$\|A\|_p = \left( \frac{1}{2} \text{Tr}|A|^p \right)^{1/p} \quad (2.55)$$

donde el valor absoluto de un operador  $A$  se denota como  $|A|$  y corresponde a la raíz cuadrada positiva de  $A^\dagger A$ . En símbolos escribimos,

$$|A| = \sqrt{A^\dagger A} \quad (2.56)$$

A partir de la definición de las normas  $L_p$  es posible definir distancias *inducidas* por dichas normas. Así, la *distancia*  $L_p$  entre dos operadores  $A$  y  $B$  se define como

$$D_p(A, B) = \|A - B\|_p \quad (2.57)$$

La definición de la norma  $L_p$ , como veremos, nos permite más adelante obtener la distancia traza

## 2.3. Medidas de distinguibilidad entre estados en Mecánica Cuántica

En principio, existen diferentes maneras de abordar el problema de definir medidas de distancia entre dos estados, representados en general por dos matrices densidad  $\rho$  y  $\sigma$ , en Mecánica Cuántica. Una manera es generar medidas cuánticas de distancia *inducidas* por la norma de un operador. Veremos un ejemplo de esta clase de definición de distancia en la sec 2.3.1. Otra manera posible es utilizar medidas de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad clásicas y mediante algún procedimiento “adecuado” obtener una medida de distancia entre estados cuánticos. Dicho procedimiento puede involucrar o no un proceso de optimización. Dentro de este último caso, el procedimiento consiste en partir de una cierta medida de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad clásicas, asignar adecuadamente las probabilidades correspondientes a los posibles resultados que podríamos obtener efectuando mediciones sobre un sistema cuántico y luego realizar un proceso de optimización teniendo en cuenta todas las

mediciones posibles de ser realizadas. Dado que, por un lado, la distribución de probabilidades  $P(E, \rho)$  que gobierna los resultados que son posibles de obtener efectuando mediciones sobre el sistema cuántico, cuyo estado está representado por medio de una matriz densidad  $\rho$ , dependen no sólo de  $\rho$  sino también del conjunto de mediciones que pueden ser realizadas sobre el sistema y, por otro lado, que la manera más general de representar dicho conjunto de mediciones es mediante el formalismo de las POVMs<sup>8</sup> (ver sec. 3.1), las probabilidades que intervienen en el problema formulado de esta manera están dadas por

$$p_i(E, \rho) = \text{Tr}(E_i \rho) \quad (2.58)$$

$$q_i(E, \sigma) = \text{Tr}(E_i \sigma) \quad (2.59)$$

donde  $E = \{E_i\}_{i=1}^K$  representa alguna medición de tipo POVM<sup>9</sup>. De esta forma, al menos desde un punto de vista conceptual, podrían obtenerse medidas de distinguibilidad o de distancia entre dos estados cuánticos encontrando el mejor valor de distinguibilidad posible de una medida de distinguibilidad clásica, asignando las distribuciones de probabilidad según las ecuaciones (2.59) y (2.58), y variando sobre todas las POVMs posibles.

### 2.3.1. Distancia Traza

Reemplazando  $p = 1$  en la ecuación 2.57, la distancia  $L_1$  inducida por la norma  $L_1$  entre dos operadores densidad  $\rho$  y  $\sigma$  se denomina *distancia traza* y toma la siguiente forma

$$D_{tr}(\rho, \sigma) \doteq D_1(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma| \quad (2.60)$$

Notablemente, la distancia traza también puede ser obtenida a partir de su forma clásica como medida de distancia entre distribuciones de probabilidad, mediante el procedimiento descrito en la sec. 2.3. En particular, esta distancia constituye un ejemplo de cómo definir una medida de distinguibilidad cuántica cuando se involucra un único proceso de medición. En este caso, el problema que nos planteamos es encontrar  $D(\rho, \sigma)$  definida mediante la siguiente expresión:

<sup>8</sup>positive-operator valued measure

<sup>9</sup>conjunto de las POVM

$$D(\rho, \sigma) = \max_{\mathbb{E}} D_1(P(E, \rho), P(E, \sigma)) \quad (2.61)$$

donde  $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i=1}^K$  representa el conjunto de todas las posibles POVMs y  $D_1(P, Q)$  está definida como

$$D_1(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_i |p_i - q_i| \quad (2.62)$$

El resultado de este procedimiento de maximización está dado por el siguiente teorema debido a C. W. Helstrom [21, 22]:

**Teorema 2.3.1** *Sea  $p_i = \text{Tr}(E_i \rho)$  y  $q_i = \text{Tr}(E_i \sigma)$ . Entonces*

$$D(\rho, \sigma) = \max_{\mathbb{E}} D_1(P, Q) = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma| \quad (2.63)$$

donde la maximización se realiza sobre todas las POVMs.

Como vemos, ocurre que la distancia entre dos operadores densidad obtenida por medio de este procedimiento (el cual, como ya mencionamos, supone un único proceso de medición) coincide con la distancia traza definida mediante la ecuación (2.60),

$$D_{tr} = \frac{1}{2} \text{Tr}|\rho - \sigma| \quad (2.60)$$

### 2.3.2. Entropía relativa

La entropía relativa de un operador densidad  $\rho$  con respecto a un operador densidad  $\sigma$  está dada por

$$S(\rho, \sigma) = \text{Tr}[\rho(\log_2 \rho - \log_2 \sigma)] \quad (2.64)$$

Cabe destacar que la entropía relativa no es una métrica (debido a que no es simétrica y tampoco satisface la desigualdad triangular) Otra desventaja importante es que en algunos casos puede no estar acotada. En particular, la entropía relativa solamente está bien definida cuando el soporte de  $\sigma$  es igual o mayor que el soporte de  $\rho$  [67] (el soporte de un operador es el subespacio generado por los autovectores del operador con correspondientes autovalores distintos de cero). Esta constituye una fuerte restricción que no es respetada en algunas situaciones físicas relevantes, como por ejemplo cuando  $\sigma$  representa un estado puro de referencia. Por último, es de suma importancia resaltar que la entropía relativa se puede obtener de la divergencia estadística Kulback-Liebler, realizando un paralelismo entre matrices densidad y distribuciones de probabilidad.

### 2.3.3. Divergencia de Jensen-Shannon Cuántica

La divergencia de Jensen-Shannon estadística está dada por,

$$D_{JS}(p, q) = \frac{1}{2} \left[ D_{KL} \left( p, \frac{p+q}{2} \right) + D_{KL} \left( q, \frac{p+q}{2} \right) \right] \quad (2.65)$$

o alternativamente por,

$$D_{JS}(p, q) = H \left( \frac{p+q}{2} \right) - \frac{1}{2}H(p) - \frac{1}{2}H(q) \quad (2.66)$$

en función de la entropía de Shannon,

$$H(p) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (2.67)$$

Como esta distancia sirve para distinguir dos distribuciones de probabilidad, entonces también podemos utilizarla para distinguir estados cuánticos. La primera generalización directa tiene como objetivo discriminar dos estados mezcla descritos por matrices densidad  $\rho$ , y  $\sigma$ . Utilizando el mismo razonamiento desarrollado en la generalización cuántica de la Kullback-Leibler, que no es más que un paralelismo entre distribuciones de probabilidad y matrices densidad, sin optimización alguna, se propuso [68] la extensión JS como sigue,

$$JS(\rho, \sigma) = H_N \left( \frac{\rho + \sigma}{2} \right) - \frac{1}{2}H_N(\rho) - \frac{1}{2}H_N(\sigma) \quad (2.68)$$

con  $H(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho$  la entropía de von Neumann. En el caso de estados puros  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$ , tomamos,

$$\rho = |\psi_p\rangle \langle \psi_p| \quad (2.69)$$

$$\sigma = |\psi_q\rangle \langle \psi_q| \quad (2.70)$$

entonces la JS toma la forma,

$$JS(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = H_N \left( \frac{|\psi_p\rangle \langle \psi_p| + |\psi_q\rangle \langle \psi_q|}{2} \right) \quad (2.71)$$

Luego de realizar los cálculos correspondientes, la extensión de la divergencia de Jensen-Shannon para estados puros, es igual a,

$$\begin{aligned} JS(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = & - \left( \frac{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|}{2} \right) \log \left( \frac{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|}{2} \right) + \\ & - \left( \frac{1 + |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|}{2} \right) \log \left( \frac{1 + |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Nótese que en este caso no hicimos uso de la correspondencia 2.86 y 2.87.

En estos ejemplos centramos nuestra atención en la búsqueda de los máximos para algunas cantidades estadísticas, ya sean de tipo Csiszár o no, mostrando cómo escribirlas en función del producto escalar.

Además, el funcional JS posee interpretaciones interesantes en el ámbito de la Teoría de la Información Cuántica y ha sido aplicada también como medida de entrelazamiento [69].

Una observación importante con respecto a la expresión de la divergencia de Jensen-Shannon cuántica que presentamos aquí es que si quisiéramos obtener una expresión a partir de su forma clásica, asignando las probabilidades de acuerdo con las ecuaciones 2.58 y 2.59, deberíamos optimizar sobre todo el conjunto posible de POVMs. Notablemente, esta tarea resulta sumamente difícil de realizar y hasta donde sabemos no ha sido lograda hasta el momento [21]. De hecho, la expresión 2.68, fue obtenida sin efectuar ningún procedimiento de optimización.

### 2.3.4. Fidelidad

La *fidelidad*  $F(\rho, \sigma)$  es una de las medidas de *distinguibilidad* entre dos estados cuánticos representados por matrices densidad  $\rho$  and  $\sigma$  más ampliamente utilizada. Esta cantidad está definida como [72]:

$$F(\rho, \sigma) = \left( \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right)^2 \quad (2.73)$$

Una definición equivalente de  $F$  puede realizarse en términos de la purificación de los estados  $\rho$  and  $\sigma$  [72]. De esta manera, podemos escribir

$$F(\rho, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\varphi\rangle} |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \quad (2.74)$$

donde la maximización se realiza sobre *todas* las purificaciones  $|\psi\rangle$  de  $\rho$  y  $|\varphi\rangle$  de  $\sigma$ . Puede demostrarse fácilmente que una definición equivalente de  $F$  en términos de purificaciones de los estados  $\rho$  and  $\sigma$  es [72]

$$F(\rho, \sigma) = \max_{|\varphi\rangle} |\langle \psi | \varphi \rangle|^2 \quad (2.75)$$

donde  $|\psi\rangle$  representa una purificación arbitraria *fija* de  $\rho$  y el procedimiento de maximización se efectúa sobre *todas* las purificaciones  $|\varphi\rangle$  de  $\sigma$ .

Puede demostrarse que la fidelidad tiene las siguientes propiedades importantes:

1. *Normalización:*

$$0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1 \quad (2.76)$$

2. *Identidad de indiscernibles:*

$$F(\rho, \sigma) = 1 \text{ si y sólo si } \rho = \sigma \quad (2.77)$$

3. *Simetría:*

$$F(\rho, \sigma) = F(\sigma, \rho) \quad (2.78)$$

4. Si  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  y  $\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$  representan estados puros, la fidelidad se reduce a

$$F(|\psi\rangle\langle\psi|, |\varphi\rangle\langle\varphi|) = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2 \quad (2.79)$$

5. Si  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  representa un estado puro, entonces  $F(|\psi\rangle\langle\psi|, \sigma) = \langle\psi|\sigma|\psi\rangle = \text{Tr}(\rho\sigma)$

6. *Concavidad Separada:* Para  $p_1, p_2 \geq 0$ ,  $p_1 + p_2 = 1$ , y matrices densidad arbitrarias  $\rho_1, \rho_2$  y  $\sigma$

$$F(p_1\rho_1 + p_2\rho_2, \sigma) \geq p_1F(\rho_1, \sigma) + p_2F(\rho_2, \sigma) \quad (2.80)$$

Por la propiedad de simetría 3, también se satisface la concavidad en el segundo argumento.

7. *Multiplicatividad ante productos tensoriales:* Para matrices densidad arbitrarias  $\rho_1, \rho_2, \sigma_1$  y  $\sigma_2$

$$F(\rho_1 \otimes \rho_2, \sigma_1 \otimes \sigma_2) = F(\rho_1, \sigma_1)F(\rho_2, \sigma_2) \quad (2.81)$$

8. *Invariancia ante transformaciones unitarias:* Para cualquier transformación unitaria arbitraria  $\mathcal{U}$ ,  $F(\rho, \sigma)$  es preservada i.e.,

$$F(\mathcal{U}\rho\mathcal{U}^\dagger, \mathcal{U}\sigma\mathcal{U}^\dagger) = F(\rho, \sigma) \quad (2.82)$$

9. *Monotonía ante operaciones cuánticas:* Para una operación cuántica  $\mathcal{E}$  descrita por medio de un mapa completamente positivo que preserva la traza,

$$F(\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) \geq F(\rho, \sigma) \quad (2.83)$$

Para las demostraciones de las propiedades mencionadas aquí se pueden ver, por ejemplo, las siguientes referencias [4, 24].

Es importante mencionar que, si bien la fidelidad resulta útil como medida de distinguibilidad entre estados cuánticos en general, la fidelidad no es una métrica. No obstante, como veremos más adelante, puede ser utilizada para definir métricas en el espacio de los estados cuánticos.

## 2.4. Distancias cuánticas entre estados puros

Una vez establecidas las herramientas necesarias para la comprensión de futuros resultados, presentamos en este fragmento del presente trabajo final distintas extensiones que realizaron otros autores, de *algunas* divergencias estadísticas de tipo Csiszár, y otras no.

En el intento de generar distancias cuánticas a partir de divergencias estadísticas, como veremos con mayor detenimiento en el capítulo 3, una de las posibilidades es establecer una relación entre distribuciones de probabilidad discretas y estados en espacios de Hilbert de dimensión finita.

Presentamos entonces uno de los esquemas para generar distancias cuánticas.

Consideremos  $|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle \in \mathcal{H}$ , con  $\dim(\mathcal{H}) = n \in \mathbb{N}$ , dos estados cuánticos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensión finita  $n$  y  $A \in B(\mathcal{H})$  un operador autoadjunto.

En primer lugar nos concentremos en el operador  $A$ , que además está representando un observable. Como es autoadjunto, admite la siguiente descomposición,

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i |f_i\rangle \langle f_i| \quad (2.84)$$

donde los  $\{|f_i\rangle\}$  son sus autovectores cuyos autovalores respectivamente son  $\{\lambda_i \in \mathbb{R}\}$ . De esta manera, contamos con una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ ,  $b = \{|f_i\rangle\}$ <sup>10</sup>.

En segundo lugar, supongamos que

$$D(p, q) = \sum_{i=1}^n q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad (2.85)$$

es una  $f$ -divergencia que cumple con el resultado de simetría (una distancia con  $c = 0$ , es decir,  $f(u) = uf(1/u)$ ) entre  $p$  y  $q$ .

<sup>10</sup>Por simplicidad, suponemos que no hay degeneración



Nuestro objetivo es generar dos distribuciones de probabilidad bien definidas,  $p$  y  $q$ , que representen los estados  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$ , para luego evaluar  $D$ . En consecuencia, la distribución  $p$  estará dada por,

$$p_i = |\langle \psi_p, f_i \rangle|^2 \quad (2.86)$$

con  $i \in [1, n] \subset \mathbb{N}$ , mientras que la distribución  $q$  será,

$$q_j = |\langle \psi_q, f_j \rangle|^2 \quad (2.87)$$

con  $j \in [1, n] \subset \mathbb{N}$ . Ahora bien, como la cantidad  $D(p, q)$  depende explícitamente de las probabilidades  $q_j$  y  $p_i$  entonces también depende del operador en particular que escojamos, en este caso,  $A$  (de donde se sigue  $b$ ) por lo que la notación será,  $D_b(p, q)$ .

Una distancia entre estados cuánticos no es conveniente que dependa de un operador (o de la elección de qué magnitud física medir) o de una base, entonces proponemos que la **distancia entre**  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$  tendrá la siguiente expresión,

$$D(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = \max_{b \in B} \{D_b(p, q)\} \quad (2.88)$$

con  $B$  conjunto de todas las bases de  $\mathcal{H}$ ,  $|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle \in \mathcal{H}$  y  $D_b(p, q)$  definida como en el párrafo anterior.

De esta manera  $D(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle)$  es la mejor discriminación posible entre dos estados permitida por el esquema de correspondencia 2.86 y 2.87. En el capítulo 3, planteamos un problema de naturaleza similar, aunque utilizando el formalismo de proyectores de rango uno como justificación de 2.86 y 2.87.

Veamos en lo que sigue, qué alternativas utilizaron otros autores para obtener distancias cuánticas.

Este problema de maximización se extiende en el capítulo 3. Por el momento, presentamos las generalizaciones de la distancia Wooters 2.4.1.1, la distancia Hellinger 2.4.1.2, y la distancia Bhattacharyya 2.4.1.3 a distancias cuánticas. Y en el final de esta sección, presentamos una extensión de la divergencia de Jensen-Shannon que, al menos directamente, no hace uso de la correspondencia dada por las ecuaciones 2.86 y 2.87.

### 2.4.1. Algunas propuestas

En primer lugar, nos concentramos en los coeficientes Bhattacharyya. Como vimos anteriormente, en el contexto estadístico, tenemos que  $BC(p, q)$  está dada por,

$$BC(p, q) = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i q_i} \quad (2.89)$$

La contraparte cuántica de estos coeficientes la obtenemos aplicando 2.86 y 2.87 cuya expresión es,

$$BC(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle)_b = \sum_{i=1}^n |\langle \psi_p, f_i \rangle| |\langle \psi_q, f_i \rangle| \quad (2.90)$$

Utilizando el resultado expuesto en 2.2.4, obtenemos una desigualdad para  $BC$  evaluada en  $p_i$  y  $q_i$ ,

$$BC(p, q) = \sum_{i=1}^n |\langle \psi_p, f_i \rangle| |\langle \psi_q, f_i \rangle| \geq |\langle \psi_p | \psi_q \rangle| \quad (2.91)$$

Esta desigualdad toma valor en el análisis de la distancia Wootters, Hellinger, y Bhattacharyya, porque todas ellas se pueden poner en función de los coeficientes  $BC(p, q)$ .

#### 2.4.1.1. Distancia Wootters

La distancia  $D_W(p, q)$  no es una de tipo Csiszár, sin embargo, se puede escribir en función de la distancia  $BC(p, q)$ . Repetimos la ecuación de secciones anteriores,

$$D_W(p, q) = \arccos [BC(p, q)]$$

En el contexto cuántico, la distancia Wootters corresponde al número de estados distinguibles entre dos estados cuando ambos se expresan en términos de una misma base, es decir, cuando se mide una misma magnitud física. De esta manera, la distancia estadística está completamente determinada por la cantidad de fluctuaciones que ocurren en las mediciones que se realizan para distinguir un estado de otro. Naturalmente entonces, esta cantidad depende del observable en cuestión. En concordancia con lo expuesto en el capítulo anterior, para desprendernos de la relación con el observable (o de la relación con la base), debemos encontrar una expresión para la cantidad,

$$\max_{b \in B} \{D_W(p, q)\}$$

Utilizando la cota inferior para la distancia Bhattacharyya 2.91 y el comportamiento decreciente de la función  $\arccos(x)$  en el intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , podemos obtener una

expresión independiente de nuestro observable. Entonces, la mejor discriminación entre dos estados que podemos hacer utilizando  $D_W(p, q)$  es,

$$\phi(\psi_p, \psi_q) = \arccos [|\langle \psi_p | \psi_q \rangle|] \quad (2.92)$$

Este es uno de los resultados más importantes del trabajo de Wootters del año 1981 [70]: geoméricamente, la distancia  $\phi(\psi_p, \psi_q)$  representa el ángulo entre los dos estados  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$ . De esta manera, si  $\langle \psi_p | \psi_q \rangle = \cos \phi$  con  $\phi \in [0, \pi/2] \subset \mathbb{R}$ , entonces,  $\phi$  es la distancia Wootters entre  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$ .

#### 2.4.1.2. Distancia Hellinger

Otra medida de distancia, como vimos anteriormente, definida sobre el espacio de las distribuciones de probabilidad es la distancia Hellinger,

$$D_H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i}|^2 \quad (2.93)$$

cuya contraparte cuántica la obtenemos con las ecuaciones 2.86 y 2.87, resultando,

$$D_H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\langle \psi_p | f_i \rangle| - |\langle \psi_q | f_i \rangle|)^2 \quad (2.94)$$

Como,

$$(|\langle \psi_p | f_i \rangle| - |\langle \psi_q | f_i \rangle|)^2 = |\langle \psi_p | f_i \rangle|^2 + |\langle \psi_q | f_i \rangle|^2 - 2|\langle \psi_p | f_i \rangle| |\langle \psi_q | f_i \rangle| \quad (2.95)$$

entonces  $D_H(p, q)$  nos queda,

$$D_H(p, q) = 1 - \sum_{i=1}^n |\langle \psi_p | f_i \rangle| |\langle \psi_q | f_i \rangle| = 1 - BC(p, q) \quad (2.96)$$

Deseamos maximizar la cantidad anterior por lo que debemos minimizar los coeficientes  $BC(p, q)$ , con lo que empleamos el resultado 2.91, obteniendo finalmente la distancia Hellinger sobre  $\mathcal{H}$  en función del producto escalar,

$$\Delta_H(\psi_p, \psi_q) = 1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle| \quad (2.97)$$

#### 2.4.1.3. Distancia Bhattacharyya

Por último, nos concentramos en la distancia Bhattacharyya dada por,

$$D_{BC}(p, q) = -\log [BC(p, q)] \quad (2.98)$$

Tomando nuestras distribuciones de probabilidad como hasta el momento, es decir 2.86 y 2.87, y haciendo uso de la desigualdad para los coeficientes  $BC(p, q)$  2.91, es claro que la versión cuántica de  $D_{BC}(p, q)$  tiene la forma,

$$\Delta_{BC}(p, q) = -\log(|\langle \psi_p | \psi_q \rangle|) \quad (2.99)$$

por la naturaleza decreciente de la función  $-\log(t)$ ,  $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

En estos ejemplos centramos nuestra atención en la búsqueda de los máximos para algunas cantidades estadísticas, ya sean de tipo Csiszár o no, mostrando cómo escribirlas en función del producto escalar.

# 3

## Distancias cuánticas a partir de divergencias Csiszár

Como mencionamos en el capítulo 2, existen diferentes maneras de definir distancias entre estados en Mecánica Cuántica. Una de ellas es partir de una medida de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad, asignando las probabilidades de acuerdo con las ecuaciones (2.58) y (2.59), luego realizar un proceso de optimización sobre todos los conjuntos posibles de POVMs (en caso que tal procedimiento sea posible), y finalmente definir una medida de distinguibilidad entre estados cuánticos (ver por ejemplo el teorema 2.3.1, subsección 2.3.1). Esta es precisamente la manera que elegimos utilizar en este trabajo para obtener distancias entre estados cuánticos a partir de medidas generales de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad que puedan escribirse como una divergencia Csiszár.

### 3.1. Planteo del problema propuesto

Sean  $\rho$  y  $\sigma$  dos matrices densidad representando dos estados cuánticos arbitrarios y sea  $\mathbb{E} = \{E_i\}_{i=1}^K$  un conjunto de operadores representando una medición de tipo POVM arbitraria. Además, sea  $D(p, q)$  una divergencia Csiszár *simétrica* dada por

$$D(p, q) = \sum_i q_i f\left(\frac{p_i}{q_i}\right) = \sum_i p_i f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \quad (3.1)$$

donde vamos a suponer que la función  $f(u)$  es *diferenciable* y que satisface  $f(u) = uf(1/u)$ , es decir, cumple con el teorema de simetría con  $c = 0$ , ver cf. teorema 2.1.2. Además, sean  $p_i = \text{Tr}(E_i\rho)$  y  $q_i = \text{Tr}(E_i\sigma)$ . Entonces, buscamos una distancia  $\Delta(\rho, \sigma)$  definida de la siguiente manera:

$$\Delta(\rho, \sigma) = \max_{\mathbb{E}} D(P, Q) \quad (3.2)$$

donde la maximización se realiza sobre todas las POVMs posibles.

Naturalmente, este problema presenta un grado importante de complejidad cuando intentamos abordarlo de manera general, es decir, considerando estados mixtos actuando sobre espacios de Hilbert de dimensión arbitraria y POVMs arbitrarias. De hecho, como mencionamos en la sección 2.3.3, no ha podido resolverse por ejemplo para el caso de la divergencia de Jensen-Shannon. En consecuencia, vamos a analizar el problema considerando el caso de estados puros y el subconjunto de POVMs descrito por PVMs<sup>1</sup> (i.e., mediciones proyectivas) representadas por proyectores de rango uno. Entonces, para un espacio de Hilbert de dimensión dos, teniendo en cuenta que todos los estados puros que difieran en un factor de fase global resultan físicamente equivalente, dos estados arbitrarios pueden parametrizarse de la siguiente manera (ver figura 3.1 y sec. 2.2.6):

$$|\psi_p\rangle = \cos \theta_p |e_1\rangle + \text{sen } \theta_p |e_2\rangle \quad (3.3)$$

$$|\psi_q\rangle = \text{sen } \theta_q |e_1\rangle + \cos \theta_q |e_2\rangle \quad (3.4)$$

<sup>1</sup>Positive valued operator measurement

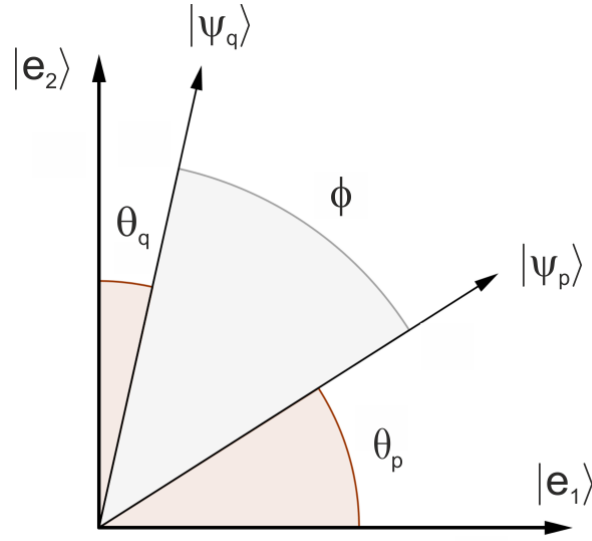


FIGURA 3.1: Representación geométrica de dos estados arbitrarios no ortogonales  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$  en un espacio de Hilbert de dimensión 2, dentro de la clase de equivalencia.

Para un espacio de Hilbert de dimensión dos un conjunto de PVMs compuesto por proyectores de rango uno puede representarse como

$$E_1 = |e_1\rangle\langle e_1| \quad (3.5)$$

$$E_2 = |e_2\rangle\langle e_2| \quad (3.6)$$

De manera que las probabilidades estarán dadas por:

$$p \doteq p_1 = \text{Tr}(E_1 |\psi_p\rangle\langle\psi_p|) = |\langle e_1|\psi_p\rangle|^2 = \cos^2 \theta_p \quad (3.7)$$

$$p_2 = 1 - p \quad (3.8)$$

$$q \doteq q_1 = \text{Tr}(E_1 |\psi_q\rangle\langle\psi_q|) = |\langle e_1|\psi_q\rangle|^2 = \sin^2 \theta_q \quad (3.9)$$

$$q_2 = 1 - q \quad (3.10)$$

Entonces, el problema de optimización sobre todas las PVMs es equivalente a encontrar los valores de  $\theta_p$  y  $\theta_q$  que maximizan la divergencia Csiszár simétrica  $D(p, q)$ , sujetos a la condición de vínculo,

$$\theta_p + \theta_q + \phi = \pi/2 \quad (3.11)$$

En consecuencia, en términos de  $\theta_p$  y  $\theta_q$ , la expresión que buscamos maximizar resulta,

$$D(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) \doteq D(\theta_p, \theta_q) = \text{sen}^2 \theta_q f\left(\frac{\cos^2 \theta_p}{\text{sen}^2 \theta_q}\right) + \cos^2 \theta_q f\left(\frac{\text{sen}^2 \theta_p}{\cos^2 \theta_q}\right) \quad (3.12)$$

sujeta a la condición de vínculo (3.11).

## 3.2. Resultados

Una vez delineado nuestro problema estamos en condiciones de realizar la optimización de los ángulos  $\theta_q$  y  $\theta_p$ . Para realizar la maximización elegimos la técnica de los multiplicadores de Lagrange. Si bien no es necesario emplearla, como veremos más adelante, el uso de esta técnica nos permite ordenar los cálculos de una manera que resulta sumamente útil para efectuar los análisis que nos llevarán a encontrar los valores óptimos de  $\theta_p$  y  $\theta_q$  que maximizan la divergencia en cuestión sujetos a la condición de vínculo antes mencionada.

Definimos entonces el Lagrangiano de nuestro problema de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\theta_p, \theta_q, \lambda) = D(\theta_p, \theta_q) - \lambda g(\theta_p, \theta_q) \quad (3.13)$$

donde  $g(\theta_p, \theta_q)$  está definida como

$$g(\theta_p, \theta_q) = \theta_p + \theta_q + \phi - \frac{\pi}{2} \quad (3.14)$$

Por lo tanto, los puntos críticos de  $\mathcal{L}(\theta_p, \theta_q, \lambda)$  cumplen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_p} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_q} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.17)$$

Efectuando los cálculos, encontramos que los valores óptimos deben satisfacer la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \left[ f' \left( \frac{\text{sen}^2 \theta_p}{\cos^2 \theta_q} \right) - f' \left( \frac{\cos^2 \theta_p}{\text{sen}^2 \theta_q} \right) \right] \text{sen}(2\theta_p) = \\ & = \left[ f' \left( \frac{\text{sen}^2 \theta_q}{\cos^2 \theta_p} \right) - f' \left( \frac{\cos^2 \theta_q}{\text{sen}^2 \theta_p} \right) \right] \text{sen}(2\theta_q) \end{aligned} \quad (3.18)$$



con  $f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$ .

Observando la ecuación 3.18 nos damos cuenta de que el miembro de la derecha es funcionalmente igual al miembro de la izquierda si intercambiamos  $\theta_p \leftrightarrow \theta_q$  en alguno de los dos. Además, un análisis exhaustivo de la ecuación anterior nos permite ver una relación de simetría entre ambos miembros. Para establecer tal relación, definimos,

$$g_1(\theta_p, \theta_q) = \left[ f' \left( \frac{\text{sen}^2 \theta_p}{\text{cos}^2 \theta_q} \right) - f' \left( \frac{\text{cos}^2 \theta_p}{\text{sen}^2 \theta_q} \right) \right] \text{sen}(2\theta_p) \quad (3.19)$$

$$g_2(\theta_p, \theta_q) = \left[ f' \left( \frac{\text{sen}^2 \theta_q}{\text{cos}^2 \theta_p} \right) - f' \left( \frac{\text{cos}^2 \theta_q}{\text{sen}^2 \theta_p} \right) \right] \text{sen}(2\theta_q) \quad (3.20)$$

y utilizamos la ecuación de vínculo  $\theta_q = \theta_q(\theta_p) = \frac{\pi}{2} - \phi - \theta_p$  para poner todo en función de sólo un parámetro,  $\theta_p$ :

$$g_1(\theta_p) = \left[ f' \left( \frac{\text{sen}(\theta_p)^2}{\text{cos}[\theta_q(\theta_p)]^2} \right) - f' \left( \frac{\text{cos}(\theta_p)^2}{\text{sen}[\theta_q(\theta_p)]^2} \right) \right] \text{sen}(2\theta_p) \quad (3.21)$$

$$g_2(\theta_p) = \left[ f' \left( \frac{\text{sen}[\theta_q(\theta_p)]^2}{\text{cos}(\theta_p)^2} \right) - f' \left( \frac{\text{cos}[\theta_q(\theta_p)]^2}{\text{sen}(\theta_p)^2} \right) \right] \text{sen}[2\theta_q(\theta_p)] \quad (3.22)$$

De esta manera, la relación de simetría <sup>2</sup> está dada por,

$$g_1(\theta_p) = g_2(2\theta_p^{opt} - \theta_p) \quad (3.23)$$

con

$$\theta_p^{opt} = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad (3.24)$$

La simetría se demuestra fácilmente, pues al evaluar  $g_2$  en  $2\theta_p^{opt} - \theta_p$ , tenemos

$$\theta_q(2\theta_p^{opt} - \theta_p) = \theta_p \quad (3.25)$$

$$2\theta_p^{opt} - \theta_p = \pi/2 - \phi - \theta_p = \theta_q(\theta_p) \quad (3.26)$$

por lo tanto,  $g_2$  se convierte en  $g_1(\theta_p)$ . En la sección siguiente se incluyen gráficos de  $g_1(\theta_p)$  y  $g_2(\theta_p)$  para ilustrar la ecuación 3.23.

Una vez demostrada la simetría, volvemos a la ecuación por satisfacer,

$$g_1(\theta_p) = g_2(\theta_p) = g_2(2\theta_p^{opt} - \theta_p) \quad (3.27)$$

---

<sup>2</sup>la ecuación  $g_1(\theta_p) = g_2(2\theta_p^{opt} - \theta_p)$  sugiere que  $g_2(\theta_p)$  es la imagen espejo de  $g_1(\theta_p)$  alrededor de  $\theta_p = \theta_p^{opt}$

La segunda igualdad se debe a la ecuación 3.23. Se sigue directamente que el único punto que satisface  $g_1(\theta_p) = g_2(\theta_p)$  es,

$$2\theta_p^{opt} - \theta_p = \theta_p \Rightarrow \theta_p = \theta_p^{opt} \quad (3.28)$$

Hasta aquí vimos que  $D(\theta_p, \theta_q(\theta_p))$  tiene un punto crítico en  $\theta_p = \theta_p^{opt}$ . Falta ver que es un máximo global.

Lo convencional para demostrar la condición de máximo de nuestro punto crítico sería calcular la derivada segunda respecto de  $\theta_p$ , de  $D(\theta_p) = D[\theta_p, \theta_q(\theta_p)]$ , evaluar en  $\theta_p = \theta_p^{opt}$  y notar que es menor que cero (ya que sólo contamos con un punto crítico). Por lo extenso de las cuentas que conlleva el método anterior, optamos por otro distinto.

Se demuestra fácilmente <sup>3</sup> que la función  $D(\theta_p) : [0, \pi/2 - \phi] \rightarrow \mathbb{R}$  es también simétrica respecto de  $\theta_p = \theta_p^{opt}$ , es decir,  $D(\theta_p) = D(2\theta_p^{opt} - \theta_p)$ . Sumado el hecho de que tenemos sólo un punto crítico, se sigue que la condición de máximo global queda demostrada al probar que

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_p}(0) \geq 0 \quad (3.29)$$

En consecuencia,  $D(\theta_p)$  es ,

$$D(\theta_p) = \cos^2(\theta_p) f \left[ \frac{\cos^2(\phi + \theta_p)}{\cos^2(\theta_p)} \right] + \sin^2(\theta_p) f \left[ \frac{\sin^2(\phi + \theta_p)}{\sin^2(\theta_p)} \right] \quad (3.30)$$

Definimos,

$$g(u) = \cos^2(u) f \left[ \frac{\cos^2(\phi + u)}{\cos^2(u)} \right] \quad (3.31)$$

Entonces,

$$D(\theta_p) = g(\theta_p) + g(\theta_p - \pi/2) \quad (3.32)$$

Luego,

$$\frac{\partial D(\theta_p)}{\partial \theta_p} = g'(\theta_p) + g'(\theta_p - \pi/2) \quad (3.33)$$

con  $g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z}$ . Como  $D(\theta_p) = D(2\theta_p^{opt} - \theta_p)$ ,

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_p}(0) = -\frac{\partial D}{\partial \theta_p}(\pi/2 - \phi) \quad (3.34)$$

Calculemos  $\frac{\partial D}{\partial \theta_p}(\pi/2 - \phi)$ .

<sup>3</sup>utilizando sólo propiedades trigonométricas

Tenemos que evaluar  $\frac{\partial g}{\partial \theta_p}(\theta_p)$  en  $\theta_p = \pi/2 - \phi$  y en  $\theta_p = -\phi$  para luego sumar, en consecuencia:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_p}(\pi/2 - \phi) = -\text{sen}(2\phi)f(0) \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_p}(-\phi) = 2 \tan(\phi) \left[ f(\cos^2 \phi) - f'\left(\frac{1}{\cos^2 \phi}\right) \right] \quad (3.36)$$

Como  $f \geq 0$  y  $\phi \in [0, \pi/2]$ , es evidente que 3.35 es menor cero. Veamos qué ocurre con 3.36.

Hasta esta parte de la demostración, entre otros resultados, solo habíamos utilizado que  $f(u) - f(1/u)u = c(u-1)$  con  $c \in \mathbb{R}$ , en lo que sigue debemos calcular:  $f(u) - f'(1/u)$ , por lo que optamos restringirnos al caso  $c = 0$ . Realizando los cálculos correspondientes,

$$f(u) - f'(1/u) = uf'(u) \quad (3.37)$$

y  $u = \cos^2 \phi \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $f'(u) \leq 0^4$  si  $u \leq 1$ , entonces resulta también menor que cero 3.36. Luego  $\frac{\partial D}{\partial \theta_p}(\pi/2 - \phi)$  es negativa, y por lo tanto se cumple 3.29.

La figura 3.2 se incluye a modo de ilustración del teorema demostrado, en el que se esquematizan los estados,

$$|\psi_p\rangle = \cos \theta_p |e_1\rangle + \text{sen} \theta_p |e_2\rangle \quad (3.38)$$

$$|\psi_q\rangle = \text{sen} \theta_q |e_1\rangle + \cos \theta_q |e_2\rangle \quad (3.39)$$

Entonces, los ángulos que maximizan la distancia  $D_b(p, q)$  son  $\theta_p = \theta_q = \theta_p^{opt}$ , como se indica en la figura.

El resultado que obtuvimos descansa sobre la hipótesis de que  $f(u) = uf(1/u)$ , es decir, simetría con  $c = 0$ . Desde ya creemos generalizable el teorema para  $c$  distinto de cero. En lo que respecta a este trabajo final, no nos preocupó tal falta de generalidad pues todas las  $f$ -divergencias que vamos a estudiar cumplen  $f(u) = uf(1/u)$ .

#### 3.2.0.4. Gráficas $g_1(\theta_p)$ , $g_2(\theta_p)$

Con el objetivo de ejemplificar la simetría de las funciones  $g_1(\theta_p)$  y  $g_2(\theta_p)$  incluimos los gráficos 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8, para los casos de la divergencia de Jensen-Shannon, la distancia variacional, y la discriminación triangular, para distintos valores del producto escalar.

<sup>4</sup>Ver sección Sobre  $f(u) = uf(1/u)$  derivable

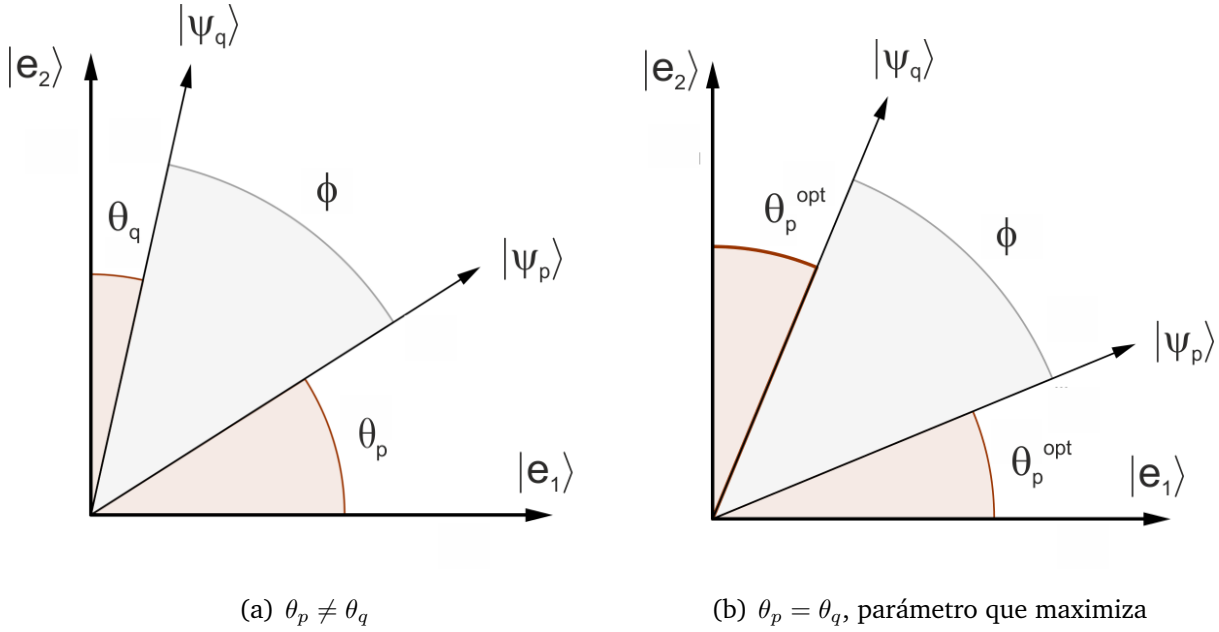


FIGURA 3.2: Parámetro óptimo.

### 3.2.1. Casos y comentarios particulares

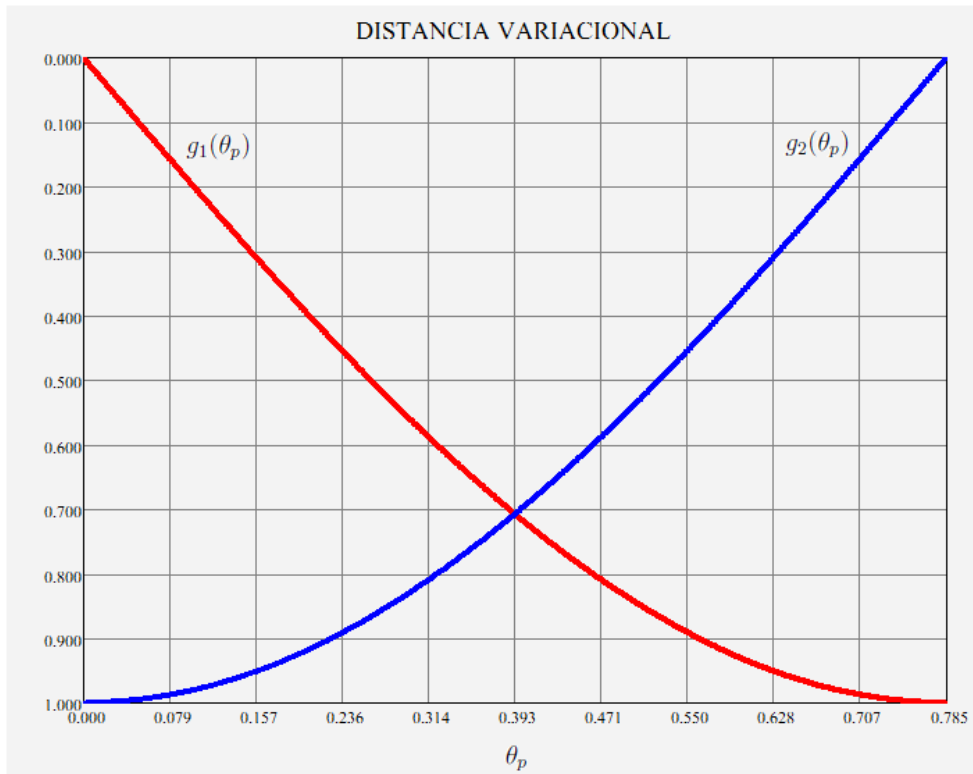
Veamos ahora algunos casos merecedores de comentarios adicionales. Cuando escribimos “casos” nos referimos a especificar funciones  $f$  particulares y hacerlas partícipes del razonamiento anterior.

#### Distancia Hellinger

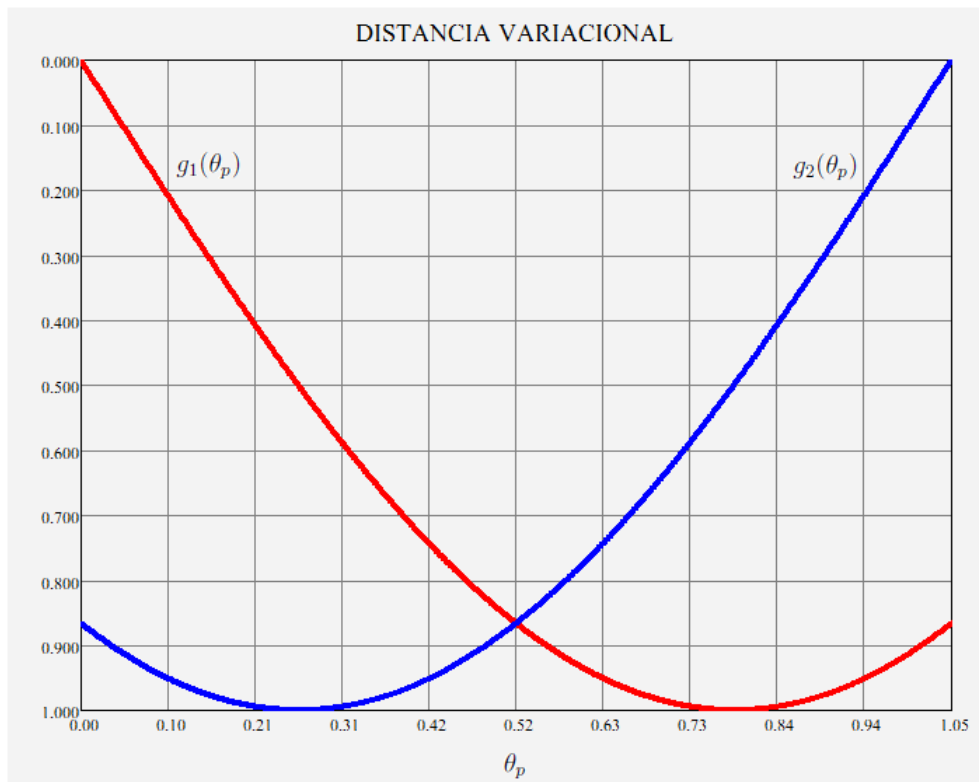
Como vimos en la sección 2 “Conceptos preliminares”, la distancia Hellinger  $H$  está definida por,

$$D_H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i})^2 \quad (3.40)$$

Al insertar las probabilidades dadas por 3.7 y 3.9 en 3.40 veremos que la dependencia con  $\theta_p$  desaparece. Nos damos cuenta que la distancia Hellinger es independiente del operador, o base, que consideremos, siendo una función únicamente de la distancia Wooters  $\phi$ . No debemos hacer ningún proceso de optimización, en este caso, puesto que sólo con el esquema de correspondencia entre estados-operadores y distribuciones de probabilidad ya es suficiente. Obtenemos, como en la sección 2.4.1.2 del capítulo 2, que la contraparte cuántica de la distancia Hellinger obtenida con la asignación de probabilidades 3.7 y 3.9 es,

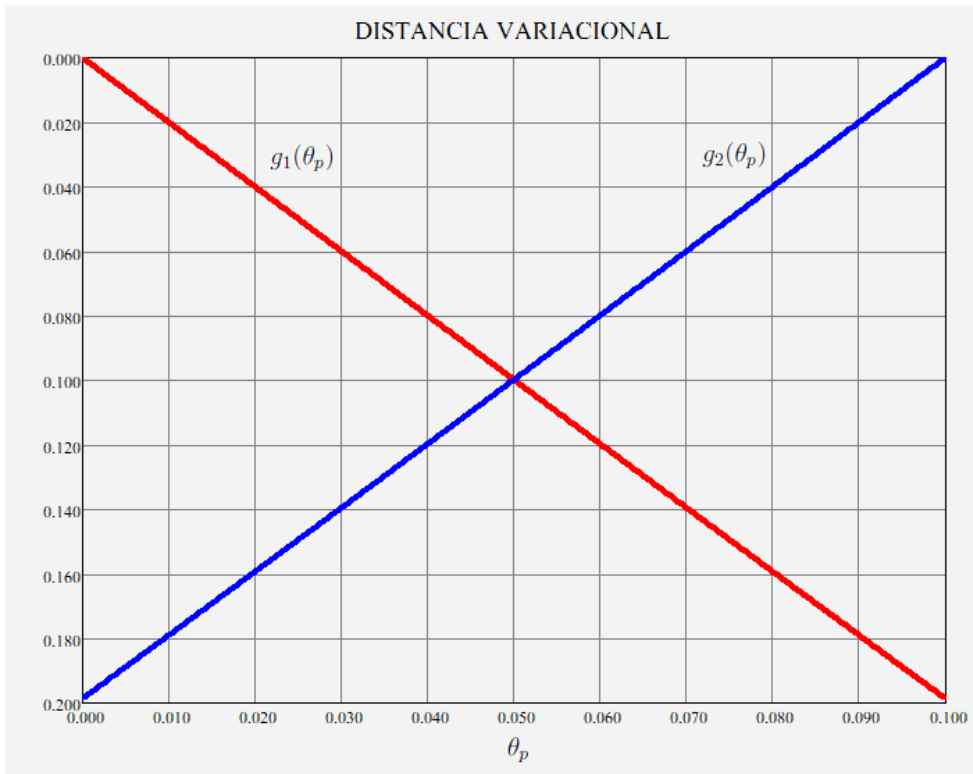


(a)  $\phi = \pi/4$ . Intersección  $\theta_p = \pi/8 \approx 0,3926$

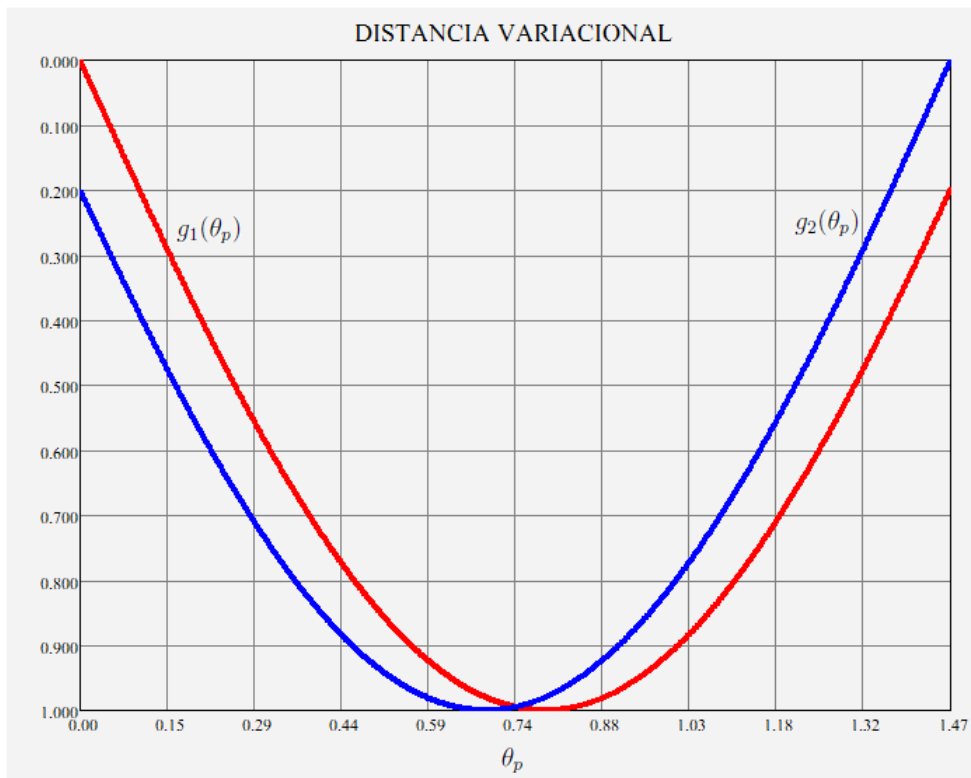


(b)  $\phi = \pi/6$ . Intersección  $\theta_p = \pi/12 \approx 0,5235$

FIGURA 3.3:

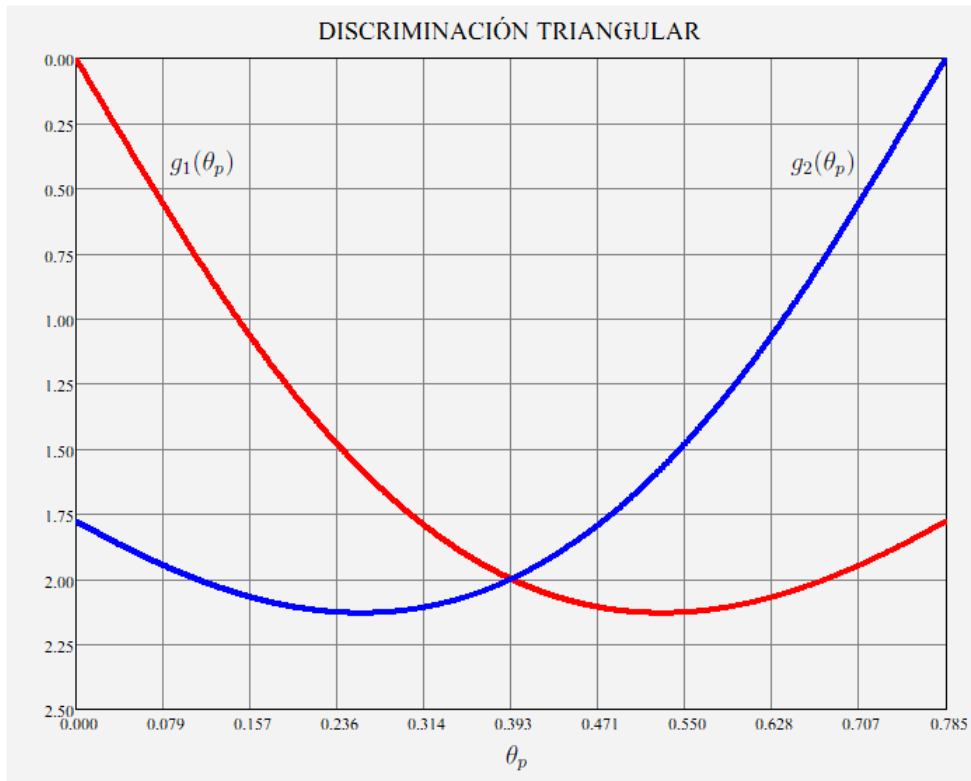


(a)  $\phi = \pi/2 - 0,1$ . Intersección  $\theta_p = 1/20 = 0,05$

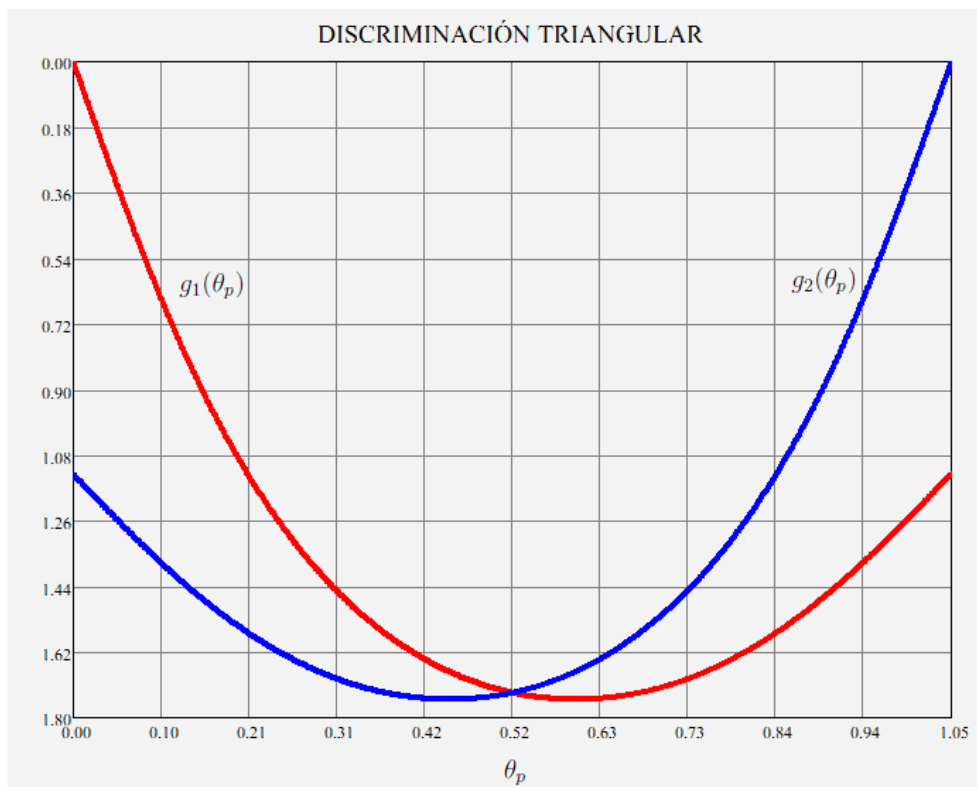


(b)  $\phi = 0,1$ . Intersección  $\theta_p = \pi/4 - 1/20 \approx 0,7353$

FIGURA 3.4:

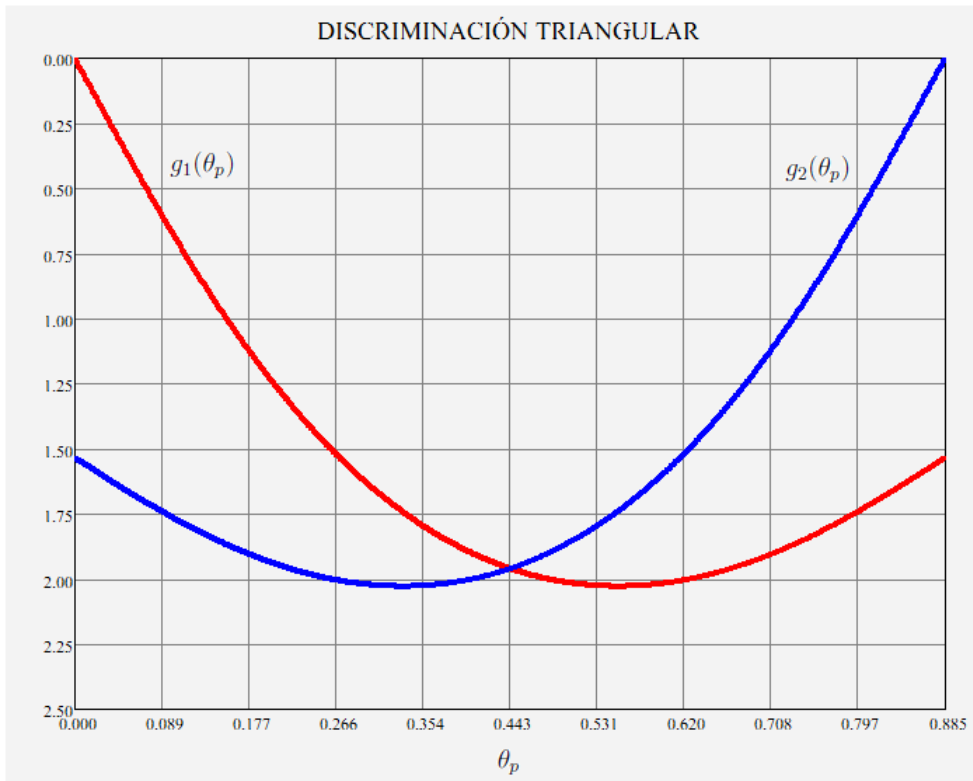


(a)  $\phi = \pi/4$ . Intersección  $\theta_p = \pi/8 \approx 0,3926$

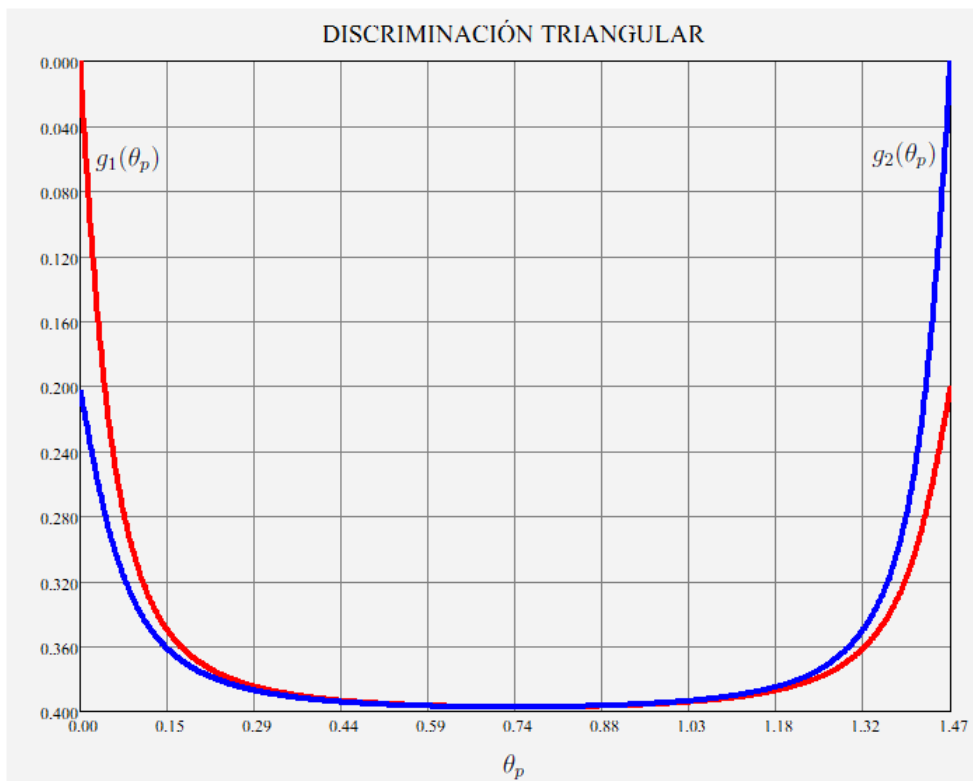


(b)  $\phi = \pi/6$ . Intersección  $\theta_p = \pi/12 \approx 0,5235$

FIGURA 3.5:



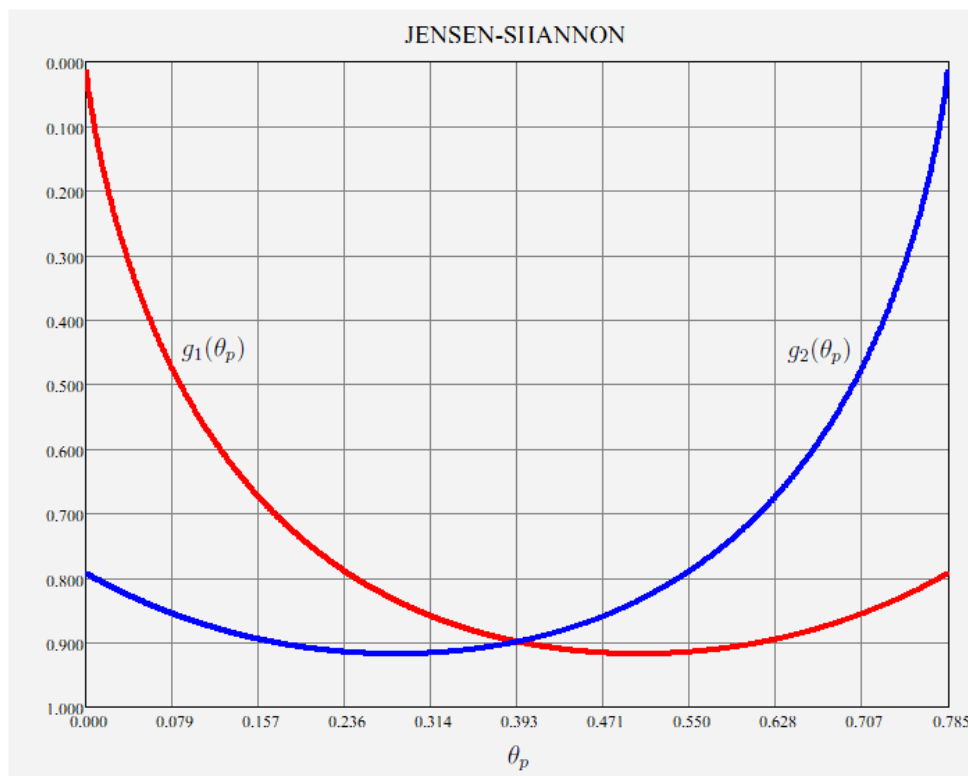
(a)  $\phi = \pi/2 - 0,1$ . Intersección  $\theta_p = 0,44$



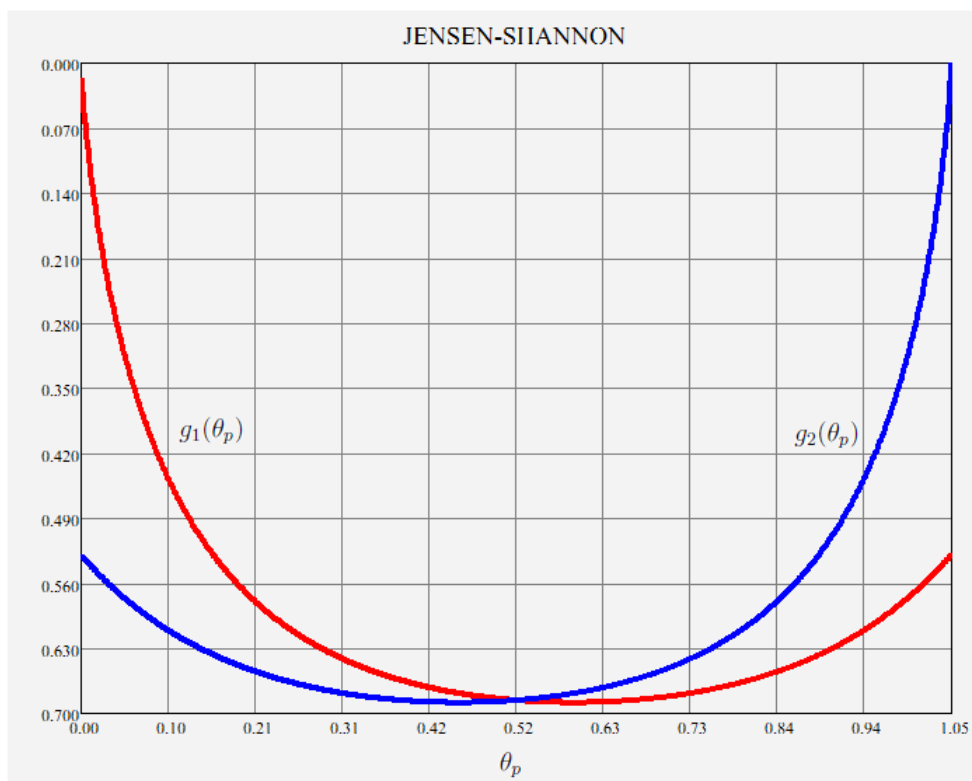
(b)  $\phi = 0,1$ . Intersección  $\theta_p = \pi/4 - 1/20 \approx 0,7353$

FIGURA 3.6:



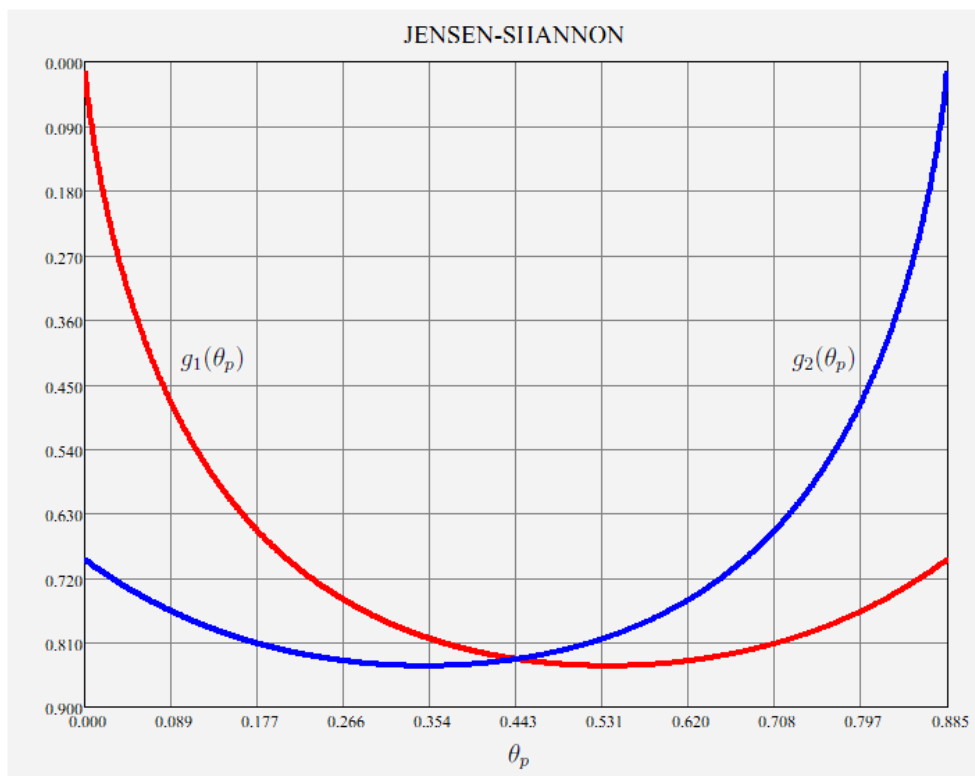


(a)  $\phi = \pi/4$ . Intersección  $\theta_p = \pi/8 \approx 0,3926$

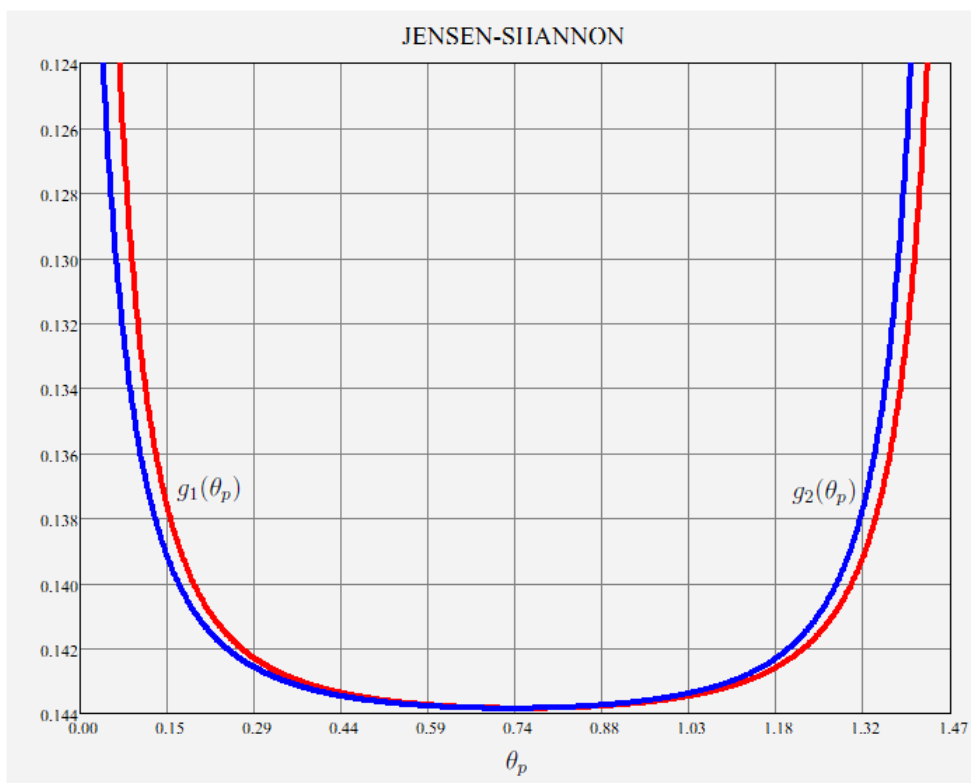


(b)  $\phi = \pi/6$ . Intersección  $\theta_p = \pi/12 \approx 0,5235$

FIGURA 3.7:



(a)  $\phi = \pi/2 - 0,1$ . Intersección  $\theta_p = 0,44$



(b)  $\phi = 0,1$ . Intersección  $\theta_p = \pi/4 - 1/20 \approx 0,7353$

FIGURA 3.8:

$$\Delta_H(\psi_p, \psi_q) = 1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|$$

¿Queda excluída entonces la distancia Hellinger de la aplicación de nuestro resultado? No, la generalización de la distancia Hellinger se reobtiene, ya que el teorema consiste sólo en evaluar nuestras distribuciones de probabilidad asignadas por 3.7 y 3.9 en un ángulo específico, es decir, que maximiza la distancia estadística, y como  $D_H(p, q)$  no depende de tal ángulo, obtenemos el mismo resultado.

### Distancia variacional

En este caso, consideremos dos estados distintos <sup>5</sup> ( $\phi$  no nulo) y

$$f_V(t) = \frac{1}{2}|t - 1| \quad (3.41)$$

Creemos que vale la pena hacer una salvedad aquí pues  $f$  no es derivable en  $t = 1$ . Sin embargo, nuestro resultado continua invariante. Esto se debe a que la ecuación 3.21 es el resultado de derivar la f-divergencia

$$D_V(p, q) = \sum_{i=1}^n q_i f_v \left( \frac{p_i}{q_i} \right) \quad (3.42)$$

En consecuencia, los argumentos de  $f_v$  son dos,

$$t_1 = \frac{\text{sen}^2 \theta_p}{\text{cos}^2 \theta_q} \quad (3.43)$$

$$t_2 = \frac{\text{cos}^2 \theta_p}{\text{sen}^2 \theta_q} \quad (3.44)$$

para que la función  $D_V(p, q)$  tome algún punto de no diferenciabilidad se tiene que satisfacer  $t_1 = 1$  y/o  $t_2 = 1$ . Pero ninguno de estos casos es posible puesto que  $\theta_p$  y  $\theta_q$  están relacionados por  $\theta_p + \theta_q + \phi = \pi/2$ .

Una última aclaración sobre la demostración que vale para cualquier  $f$ , es que las propiedades,

$$0f \left( \frac{0}{0} \right) = 0$$

$$0f \left( \frac{a}{0} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} tf \left( \frac{a}{t} \right) = a \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}, \quad \forall a > 0$$

sumado a la hipótesis de  $f$  diferenciable, nos garantizan la no existencia de puntos singulares, sea cual fuere el argumento de  $f$ .

<sup>5</sup>El caso en que los estados son iguales es trivial y carece de interés

### Gráficos $f$ -divergencias en función de $\theta_p$

Con el objetivo de ejemplificar la maximización realizada en la sección 3.2, se estudiará la dependencia de distintas  $f$ -divergencias con los proyectores de rango uno, para un espacio de Hilbert de dimensión dos.

Conocemos que tal dependencia está parametrizada por  $\theta_p$ . Entonces lo que haremos será considerar los posibles valores de  $\theta_p$  y graficar la distancia siguiente para un valor fijo del producto escalar  $\cos(\phi)$ .

Consideremos la descomposición anteriormente utilizada en la sección 3.2:

$$\begin{aligned} |\psi_p\rangle &= \cos \theta_p |e_1\rangle + \text{sen } \theta_p |e_2\rangle \\ |\psi_q\rangle &= \text{sen } \theta_q |e_1\rangle + \cos \theta_q |e_2\rangle \end{aligned} \quad (3.45)$$

De esta manera, obtenemos

$$D(\theta_p, \theta_q) = \cos^2(\theta_p) f\left[\frac{\text{sen}^2(\theta_q)}{\cos^2(\theta_p)}\right] + \text{sen}^2(\theta_p) f\left[\frac{\cos^2(\theta_q)}{\text{sen}^2(\theta_p)}\right] \quad (3.46)$$

En las gráficas 3.9 - 3.17, se muestran, en función de  $\theta_p$ , las divergencias  $D(\theta_p, \theta_q) = D(\theta_p)$ , y cercioramos de esta manera que el máximo está dado por el postulado anteriormente,  $\theta_p^{opt} = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ .

Una aclaración geométrica: si observamos la figura 3.2 notaremos que  $\theta_p$  no puede tomar cualquier valor, en particular, está limitado  $\theta_p \in [0, \frac{\pi}{2} - \phi] \subset \mathbb{R}$ .

### 3.3. Nuevas distancias cuánticas en función de divergencias tipo Csiszár

Realizando el álgebra correspondiente, obtenemos haciendo uso nuestro ángulo óptimo, que la distancia cuántica entre  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$  <sup>6</sup>, construida con la asignación de probabilidades 3.7 y 3.9 que se realizó en la sección 3.2 es

$$\Delta(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = \left[1 + \sqrt{1 - |\langle\psi_p|\psi_q\rangle|^2}\right] f\left(\frac{1 - \sqrt{1 - |\langle\psi_p|\psi_q\rangle|^2}}{1 + \sqrt{1 - |\langle\psi_p|\psi_q\rangle|^2}}\right) \quad (3.47)$$

o en función de  $\phi$ ,

---

<sup>6</sup>cuyo producto escalar cumple con  $\langle\psi_p|\psi_q\rangle = \cos \phi$

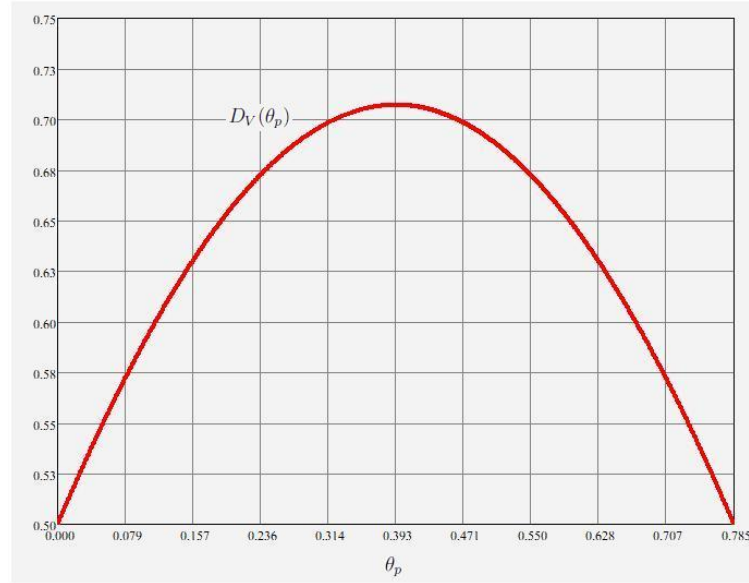


FIGURA 3.9: Distancia variacional en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,39$

$$\Delta(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = (1 + \text{sen } \phi) f\left(\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi}\right) \quad (3.48)$$

Como vemos en la ec. 3.47, la distancia encontrada depende del producto interno entre los estados  $|\psi_p\rangle$  y  $|\psi_q\rangle$ . En consecuencia, esta distancia posee la propiedad adicional de ser invariante ante transformaciones unitarias.

Las ecuaciones 3.47 y 3.48, que se obtuvieron evaluando la distancia estadística de tipo Csiszár  $D(p, q)$  en las siguientes distribuciones de probabilidad,

$$p = \{ p_1 = \cos^2 \theta_p^{opt}, p_2 = \text{sen}^2 \theta_p^{opt} \} \quad (3.49)$$

$$q = \{ q_1 = \text{sen}^2 \theta_p^{opt}, q_2 = \cos^2 \theta_p^{opt} \} \quad (3.50)$$

con  $\theta_p^{opt} = \pi/4 - \phi/2$ , constituyen una herramienta matemática que nos permite de manera directa optimizar las distancias. Entonces, dada una  $f$ -divergencia, lo que resta para la obtención de nuevas distancias entre estados cuánticos es reemplazar  $f$  en 3.47 o en 3.48. Una última salvedad a modo de aclaración: las ecuaciones 3.47 y 3.48 presuponen  $f(u) = uf(1/u)$ . Sin el uso de esa identidad, no llegaremos a tales identidades.

### 3.3.1. Distancias cuánticas particulares

Una vez establecida la ecuación 3.47 que sirve para obtener distancias cuánticas en función de  $f$ -divergencias estadísticas, nos queda aplicarla. En consecuencia, realiza-

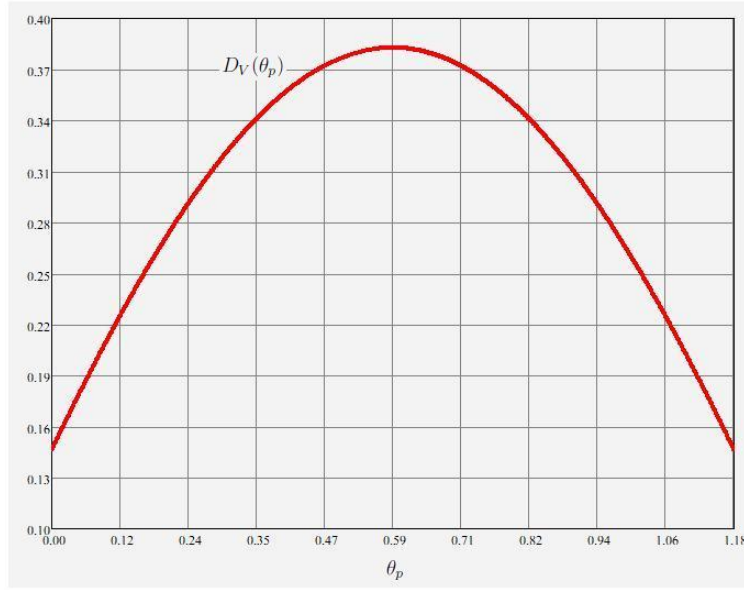


FIGURA 3.10: Distancia variacional en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{\pi}{8}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,59$

mos el procedimiento anterior para la distancia Hellinger y variacional, para la discriminación triangular, y para la divergencia de Jensen-Shannon, que son todas distancias estadísticas de tipo Csiszár, con simetría  $c = 0$ .

### Distancia Hellinger

El análogo cuántico para el caso de la distancia Hellinger es, según nuestra maximización,

$$\Delta_H(\psi_p, \psi_q) = (1 + \text{sen } \phi) f_H \left( \frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} \right) \quad (3.51)$$

Como,

$$f_H \left( \frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi}} - 1 \right)^2 = \frac{1 - \cos \phi}{1 + \text{sen } \phi} \quad (3.52)$$

luego

$$\Delta_H(\psi_p, \psi_q) = 1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle| \quad (3.53)$$

Vemos que la ecuación anterior coincide con 3.2.1, por lo que obtuvimos el mismo resultado aunque por otro camino diferente.

La figura 3.18 es el gráfico de la función  $\Delta_H(\psi_p, \psi_q) = 1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|$  en función de la distancia de Wooters  $\phi \in [0, \pi/2] \in \mathbb{R}$ .

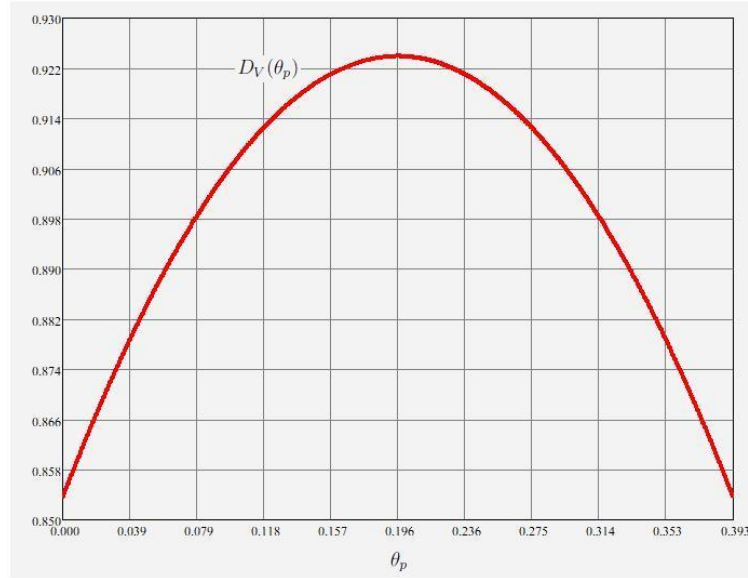


FIGURA 3.11: Distancia variacional en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{3\pi}{8}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,196$

### Distancia variacional

Ahora reemplazamos  $f$  en la ecuación 3.47 por,

$$f_V(t) = \frac{1}{2}|t - 1| \quad (3.54)$$

para obtener la versión cuántica de la distancia varicional estadística  $\Delta_H(\psi_p, \psi_q)$ . En consecuencia,

$$f_V\left(\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi}\right) = \frac{1}{2} \left| \frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} - 1 \right| = \frac{|1 - \text{sen } \phi - 1 + \text{sen } \phi|}{1 + \text{sen } \phi} \quad (3.55)$$

por lo cual,

$$\Delta_V(\psi_p, \psi_q) = \text{sen } \phi = \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2} \quad (3.56)$$

Se grafica  $\Delta_V(\psi_p, \psi_q)$  en función de  $\phi$  en la figura 3.19

### Discriminación triangular

Continuando con el mismo procedimiento, reemplazamos  $f_T(t) = \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2}{t+1}$  en 3.47, pero antes calculamos,

$$f_T\left(\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi}\right) = \frac{\left(\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} - 1\right)^2}{\frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi} + 1} = \frac{\text{sen}^2 \phi}{1 + \text{sen } \phi} \quad (3.57)$$

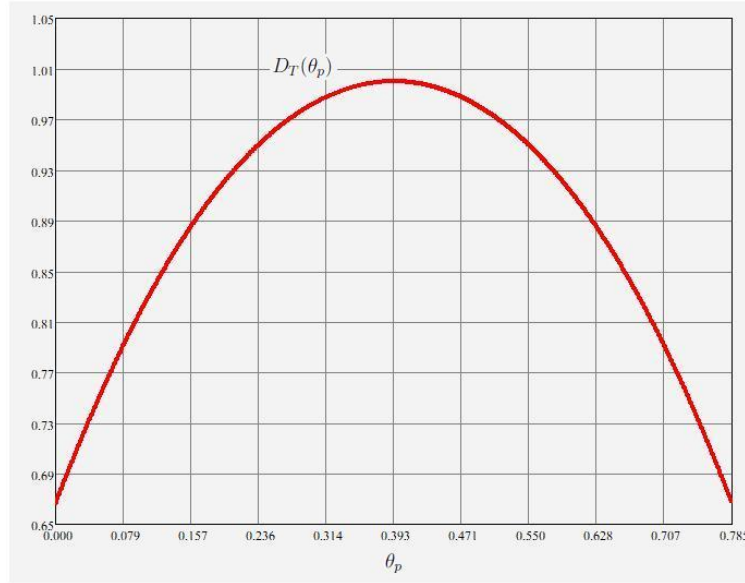


FIGURA 3.12: Discriminación triangular en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,393$

La discriminación triangular entre estados cuánticos entonces toma la forma,

$$\Delta_T(\psi_p, \psi_q) = \text{sen}(\phi)^2 = (1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2) \quad (3.58)$$

Graficamos este comportamiento en la figura 3.20

### Divergencia de Jensen-shannon

Para la divergencia de Jensen-Shannon los cálculos son algo más extensos, pero se llega fácilmente a la siguiente expresión,

$$\Delta_{JS}(\psi_p, \psi_q) = \log_2(\cos(\phi)) - \frac{1}{2} \text{sen}(\phi) \log_2\left(\frac{1 - \text{sen}(\phi)}{1 + \text{sen}(\phi)}\right) \quad (3.59)$$

que si la expresamos en función del producto escalar, nos queda,

$$\Delta_{JS}(\psi_p, \psi_q) = \frac{1}{2} \left[ \log_2(|\langle \psi_p | \psi_q \rangle|) - \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2} \log_2\left(\frac{1 - \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2}}{1 + \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2}}\right) \right] \quad (3.60)$$

La expresión anterior se obtuvo utilizando el mismo método que para las demás distancias anteriores.

La gráfica de la función  $\Delta_{JS}(\psi_p, \psi_q)$  se encuentra en la figura 3.21. Un ejercicio interesante es comparar esta extensión con la anteriormente propuesta (ver ec. 2.72)



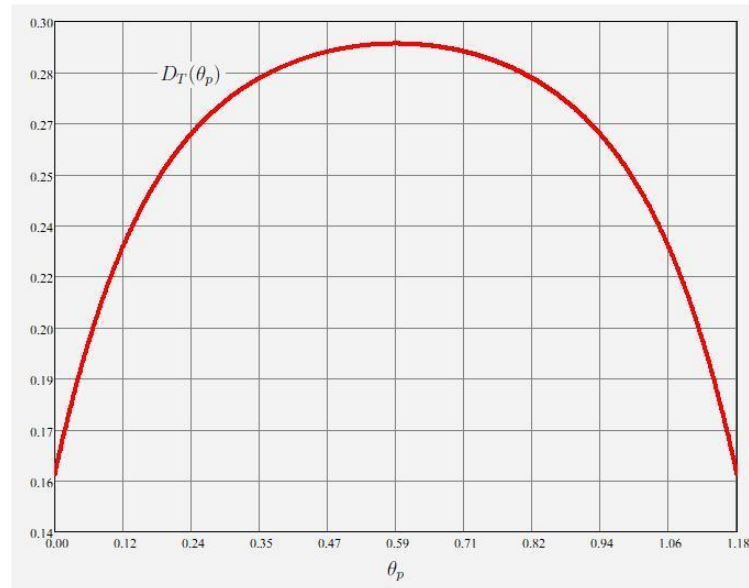


FIGURA 3.13: Discriminación triangular en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{\pi}{8} \cdot \theta_p^{opt} = 0,59$

por otros autores [68] obtenida por otros medios utilizando la correspondencia entre distribuciones de probabilidad y estados mezcla. En consecuencia, graficamos ambas funciones en la figura 3.22 y notamos aquí (aunque analíticamente también) que son funcionalmente distintas, por lo cual, con la ecuación 3.47, obtuvimos una nueva distancia cuántica, no propuesta anteriormente, basada en la divergencia de Jensen-Shannon.

Por último, incluimos una nueva figura, la 3.23, en la que se grafican todas las  $f$ -divergencias cuánticas obtenidas con la ecuación 3.47.

### 3.4. Conjunto de métricas en un espacio de Hilbert de dimensión de dos

A modo de conclusión o cierre de nuestro estudio geométrico para estados puros, queda por establecer un resultado directo sobre métricas en un espacio de Hilbert, haciendo uso de la ecuación 3.47, y también del teorema 2.1.4. Lo establecemos de la siguiente forma,

Sea  $f \in F_c$  una función que cumple con las hipótesis del teorema 2.1.4, es decir,

- $f \in F_c$ <sup>7</sup>

<sup>7</sup>función convexa, continua en 0 y además  $f(1) = 0$

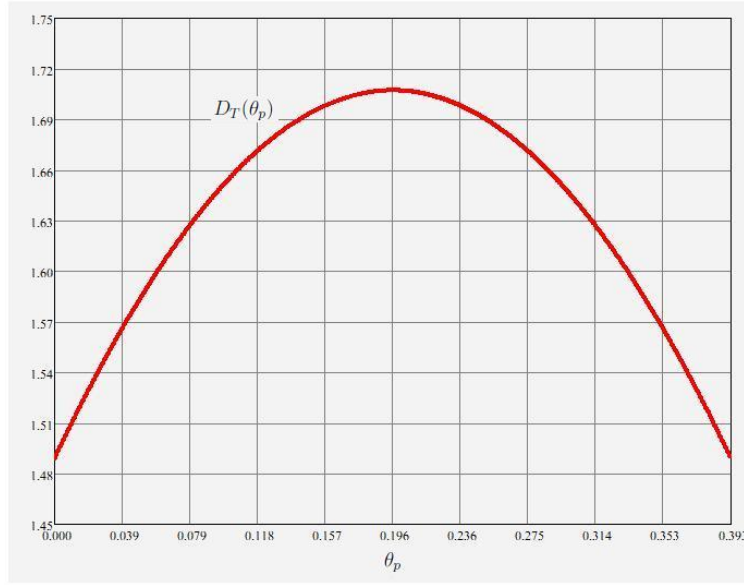


FIGURA 3.14: Discriminación triangular en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{3\pi}{8}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,19$

- $uf(1/u) - f(u) = 0$
- La cantidad  $h(u) = \frac{(1-u^\alpha)^{1/\alpha}}{f(u)}$  tiene que ser no creciente en el intervalo  $u \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$

Sea  $\alpha \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$  y

$$\Delta(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = \left[ 1 + \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2} \right] f \left( \frac{1 - \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2}}{1 + \sqrt{1 - |\langle \psi_p | \psi_q \rangle|^2}} \right)$$

la distancia cuántica obtenida con el razonamiento descrito en 3.2.

**Entonces**

$$d_\alpha(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle) = \Delta(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle)^\alpha \quad (3.61)$$

cumple con la identidad del triángulo por lo que es una métrica en el espacio de estados  $\mathcal{H}$

Por lo tanto, de manera idéntica para el caso del espacio de distribuciones de probabilidad, dada una función  $f$  adecuada, tenemos un conjunto infinito de métricas parametrizado por  $\alpha$  en el espacio de estados  $\mathcal{H}$ .

Como uno de los objetivos propuestos es generar métricas sobre  $\mathcal{H}$ , nos concentramos en la ecuación 2.10,

$$h(u) = \frac{(1 - u^\alpha)^{1/\alpha}}{f(u)}$$

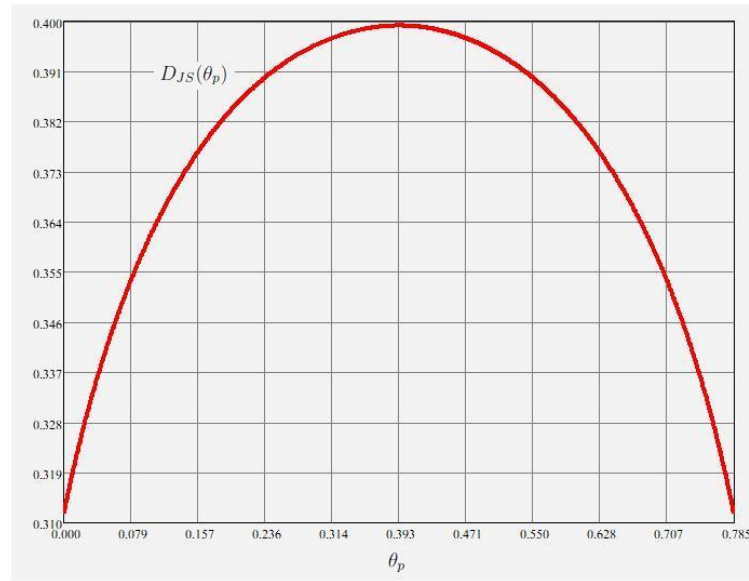


FIGURA 3.15: Div. de Jensen-Shannon en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{\pi}{4}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,39$

para determinar, dada una función  $f$  plausible, el rango de  $\alpha$  para el cual  $h(u)$  es decreciente.

Prescindimos de la distancia variacional puesto que ya vimos en la sección 2.1 que es métrica. En consecuencia, nuestra primer función  $f$  sujeta a análisis es la divergencia de Jensen-Shannon, para la cual,

$$f_{JS}(t) = \frac{1}{2} [1 + t + t \log_2(t) - (t + 1) \log_2(t + 1)]$$

y así tendremos una función,

$$h_{JS}(u) = \frac{2(1 - u^\alpha)^{1/\alpha}}{1 + t + t \log_2(t) - (t + 1) \log_2(t + 1)} \quad (3.62)$$

Tenemos que determinar para qué valores de  $\alpha$  esta función es no creciente<sup>8</sup> por lo cual graficamos la función,

$$l_{JS}(u, \alpha) = \frac{\partial h_{JS}(u)}{\partial u} \quad (3.63)$$

Aunque la dependencia con  $\alpha$  no queda explícita en la ecuación anterior, por 3.62 sabemos que está. Lo que resulta es el gráfico 3.24 en tres dimensiones cuyos argumentos son  $u$  y  $\alpha$ , ambos confinados al intervalo  $(0, 1]$ . Por limitaciones técnicas del graficador, sólo se pudo obtener la superficie  $l(u, \alpha)$  para  $\alpha \in [0,21; 1]$ .

<sup>8</sup> constante o decreciente

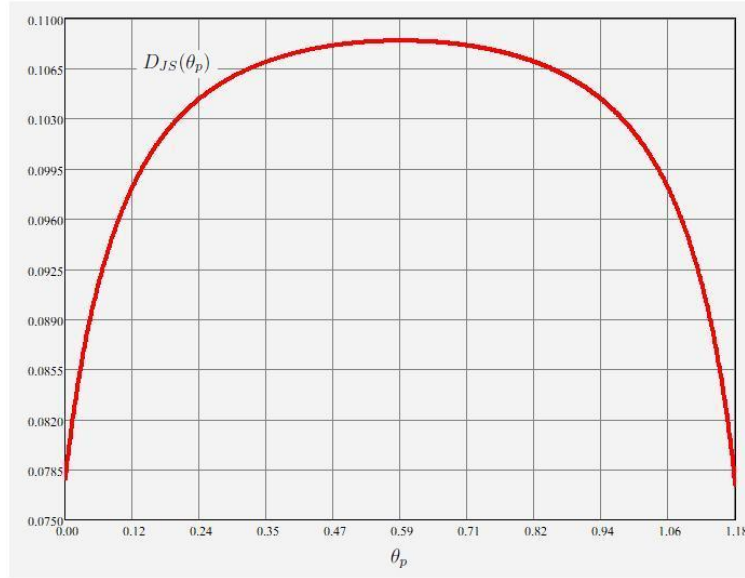


FIGURA 3.16: Div. de Jensen-Shannon en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{\pi}{8} \cdot \theta_p^{opt} = 0,59$

A modo de recordatorio, nos interesan los posibles valores de  $\alpha$  para los cuales  $l_{JS}(u, \alpha)$  es menor o igual que cero para todo  $u \in (0, 1]$ . La figura 3.25 es un gráfico de contorno de la función  $l_{JS}$  en el que la región de color azul oscuro es menor que cero. Por lo tanto, el intervalo de  $\alpha$  para el cual estamos seguros que  $[\Delta_{JS}(|\psi_p\rangle, |\psi_q\rangle)]^\alpha$  es una métrica en el espacio de estados  $\mathcal{H}$  es  $[0,21; 0,5]$ .

Ahora bien, nos queda un intervalo de  $\alpha$  de incerteza:  $(0; 0,21)$ . En este caso, **conjeturamos** que  $l_{JS}(u, \alpha)$  es también menor que cero en esta región. El motivo es que graficamos, para distintos valores de  $\alpha$ ,  $l_{JS}(u, \alpha)$ , ver figura 3.26, y resulta que es menor igual que cero para todo  $u$  permitido.

En el caso de la discriminación triangular, y la distancia Hellinger, las formas funcionales cambian. Sin embargo, el resultado y la conjetura no se ven alteradas, es decir, conjeturamos que, para  $\alpha \in (0; \frac{1}{2}]$ ,  $l(u, \alpha)$  es menor o igual que cero. Como en los párrafos anteriores, definimos,

$$h_{DT}(u) = \frac{4(t+1)(1-u^\alpha)^{1/\alpha}}{(t-1)^2} \quad (3.64)$$

y

$$l_{DT}(u, \alpha) = \frac{\partial h_{DT}(u)}{\partial u} \quad (3.65)$$

para el caso de la discriminación triangular. De la misma forma, estudiamos el carácter

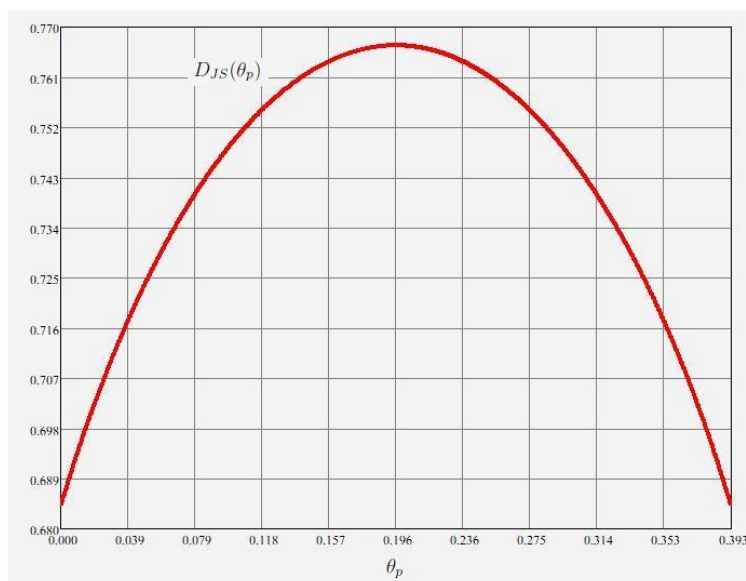


FIGURA 3.17: Div. de Jensen-Shannon en función de  $\theta_p$ , con  $\phi = \frac{3\pi}{8}$ .  $\theta_p^{opt} = 0,39$

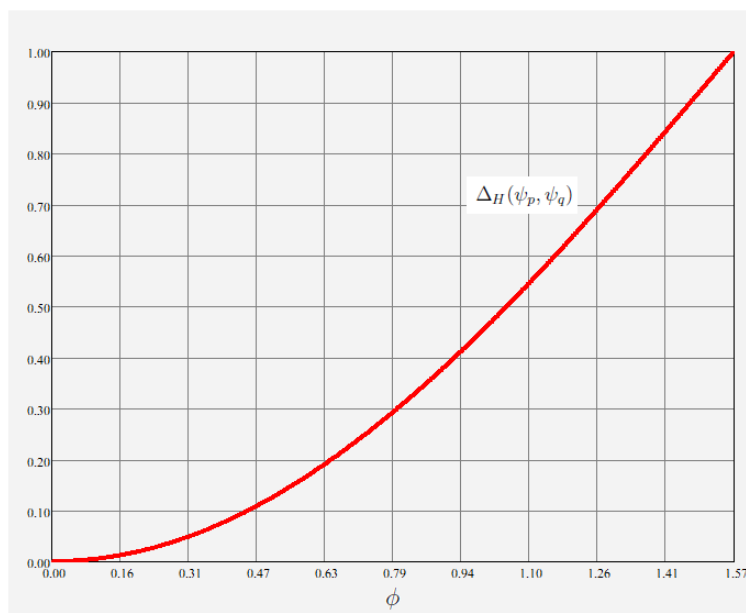


FIGURA 3.18: Distancia Hellinger

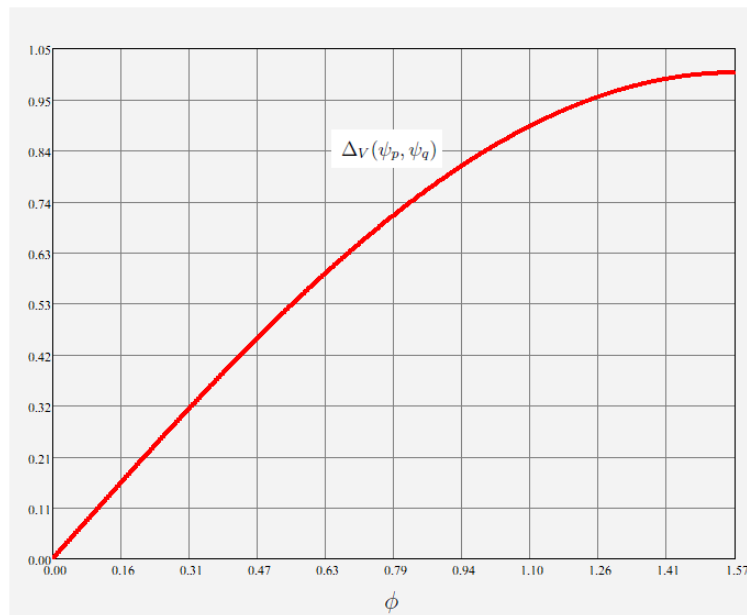


FIGURA 3.19: Distancia variacional

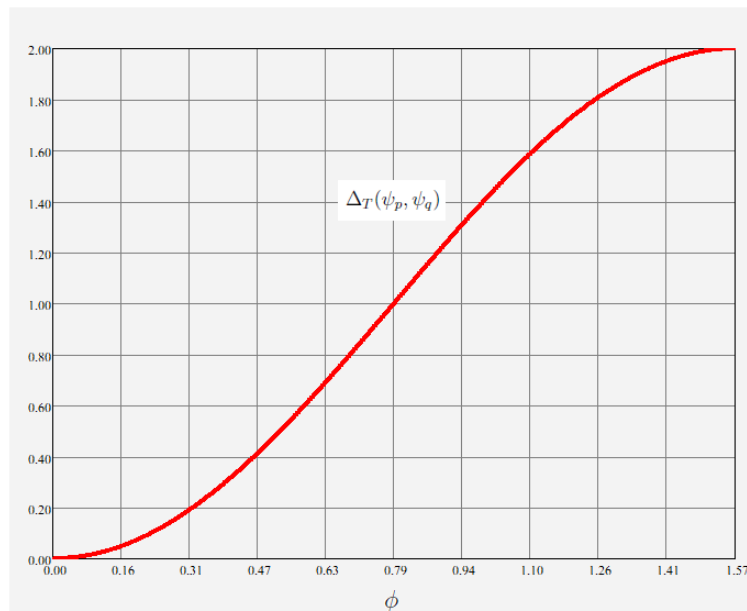


FIGURA 3.20: Discriminación Triangular

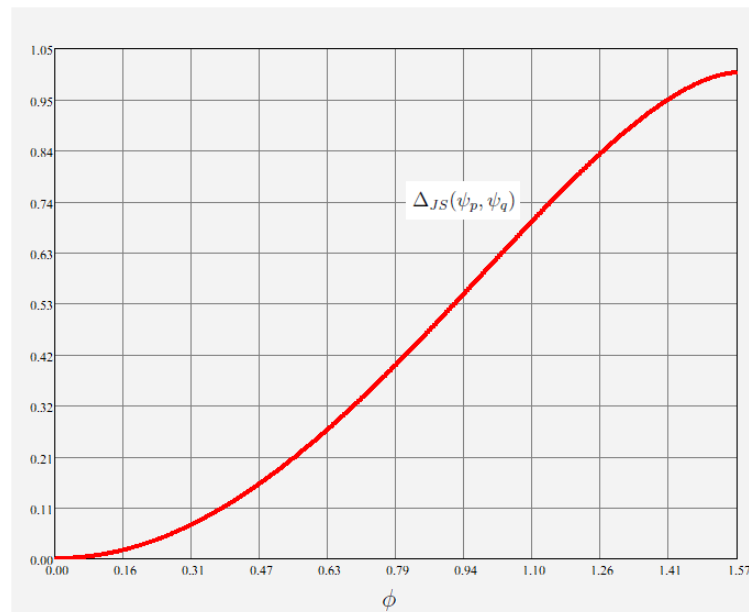


FIGURA 3.21: Jensen-Shannon

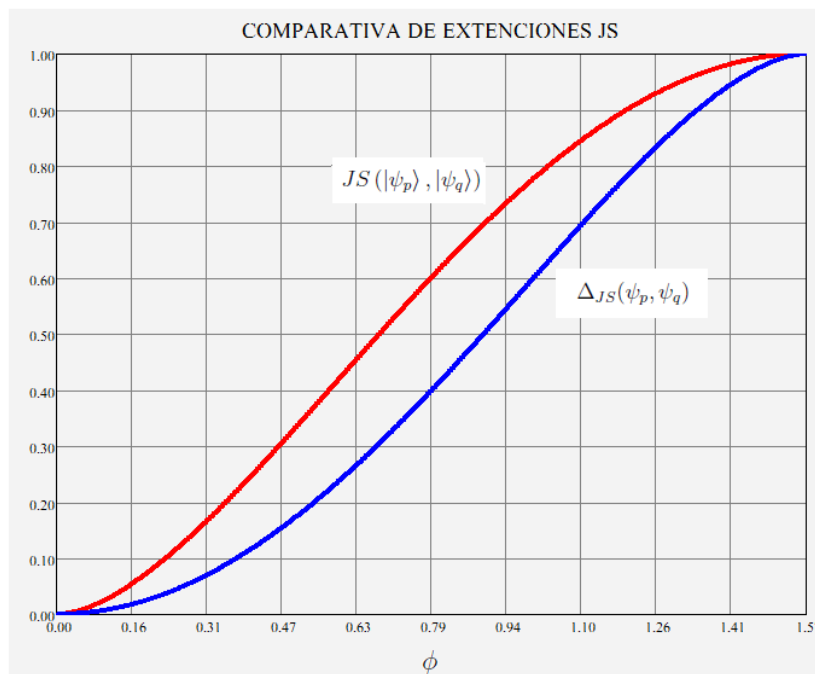


FIGURA 3.22: Comparación de extensiones de la divergencia de Jensen-Shannon

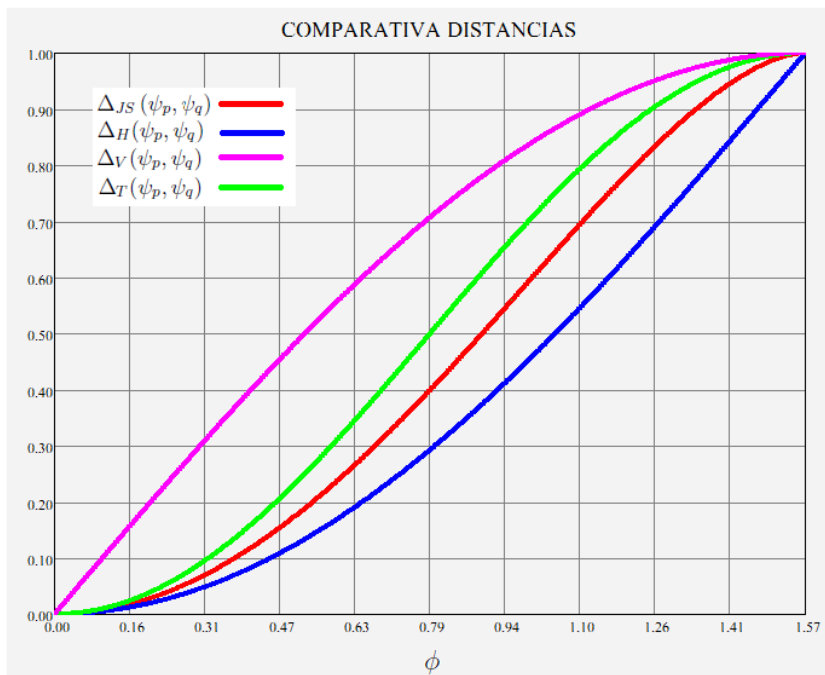
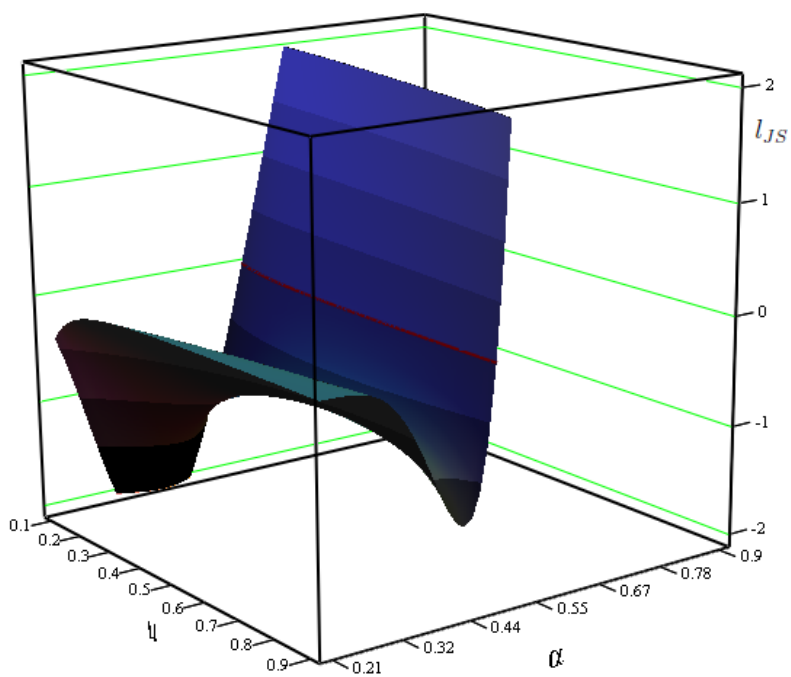
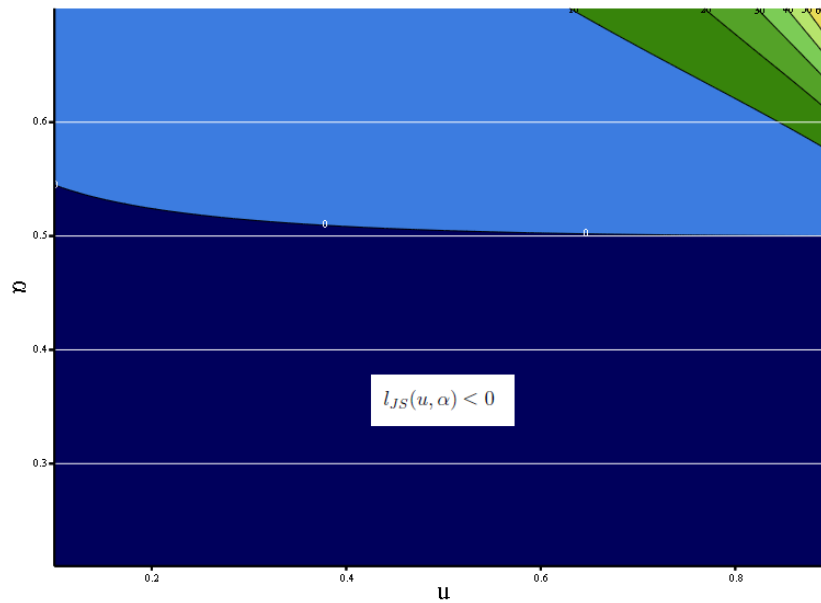
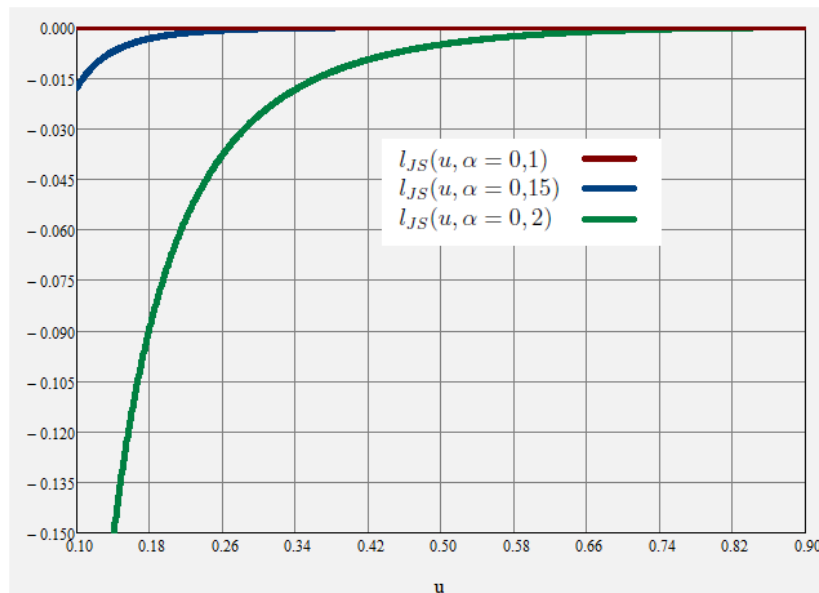


FIGURA 3.23: Comparación de distancias cuánticas

FIGURA 3.24:  $l_{JS}$  para  $\alpha \in [0.21; 1]$  y  $u \in [0, 1]$



FIGURA 3.25: Gráfico de contorno de  $l_{JS}$  para  $\alpha \in [0, 21; 1]$  y  $u \in [0, 1; 1]$ FIGURA 3.26: Gráfico de  $l_{JS}(u, \alpha)$  para  $\alpha \in \{0, 1; 0, 15; 0, 2\}$

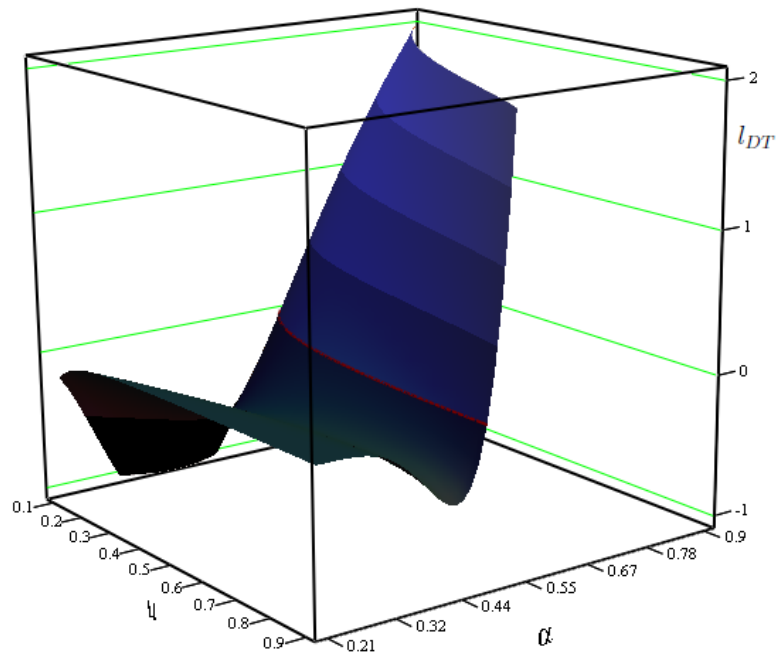


FIGURA 3.27:  $l_{DT}$  para  $\alpha \in [0,21; 1]$  y  $u \in [0,1; 1]$

métrico de las potencias de la distancia Hellinger, dado por las funciones,

$$h_{DH}(u) = \frac{2(1-u^\alpha)^{1/\alpha}}{\frac{1}{2}(\sqrt{t}-1)^2} \quad (3.66)$$

y

$$l_{DH}(u, \alpha) = \frac{\partial h_{DT}(u)}{\partial u} \quad (3.67)$$

Las figuras 3.27, 3.28 muestran las superficies de las funciones 3.65 y 3.67, respectivamente; agregamos para mayor claridad los gráficos de contorno 3.29, 3.30 y 3.31, 3.32 las gráficas en dos dimensiones.

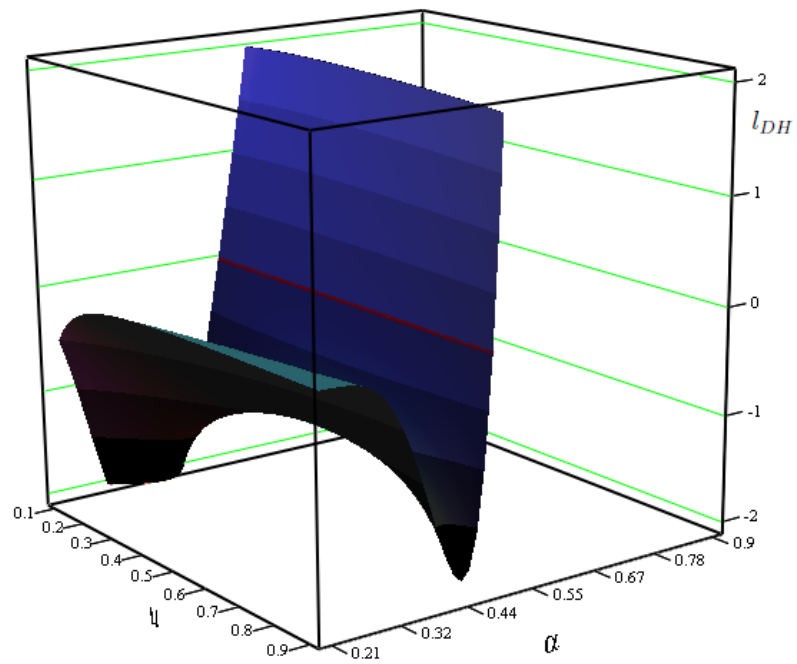


FIGURA 3.28:  $l_{DH}$  para  $\alpha \in [0,21; 1]$  y  $u \in [0,1; 1]$

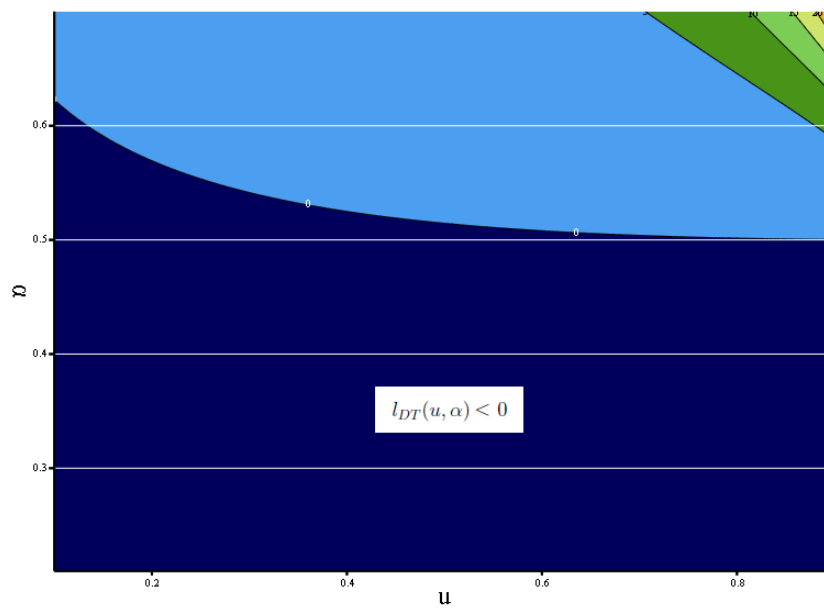


FIGURA 3.29: Gráfico de contorno de  $l_{DT}$  para  $\alpha \in [0,21; 1]$  y  $u \in [0,1; 1]$

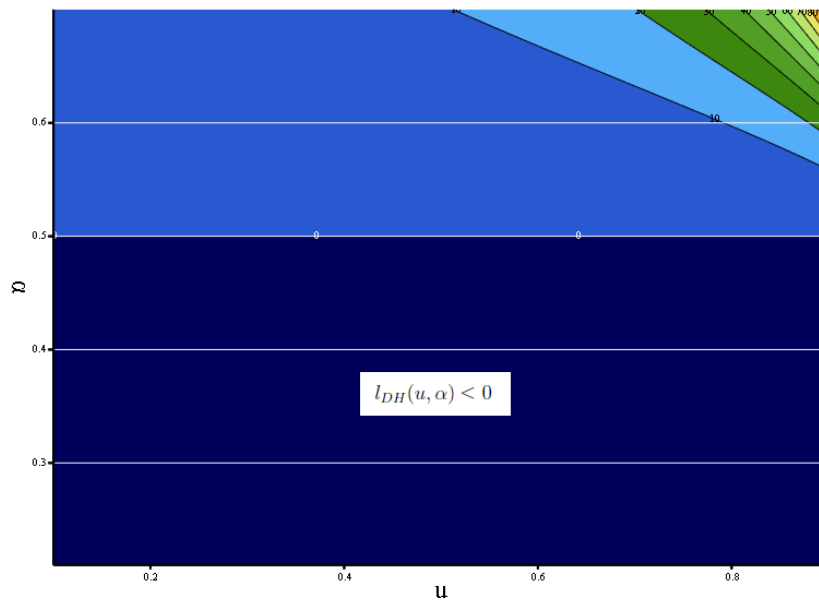


FIGURA 3.30: Gráfico de contorno de  $l_{DH}$  para  $\alpha \in [0,21; 1]$  y  $u \in [0,1; 1]$

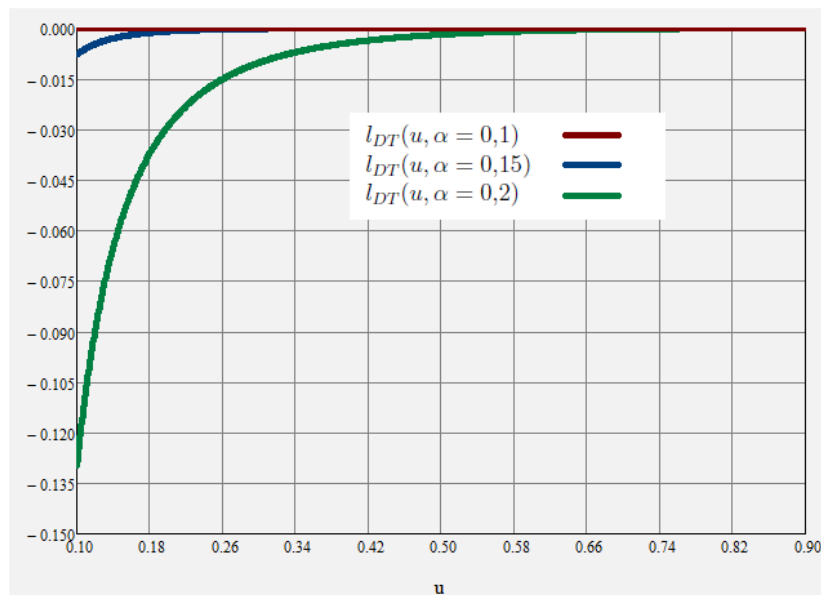
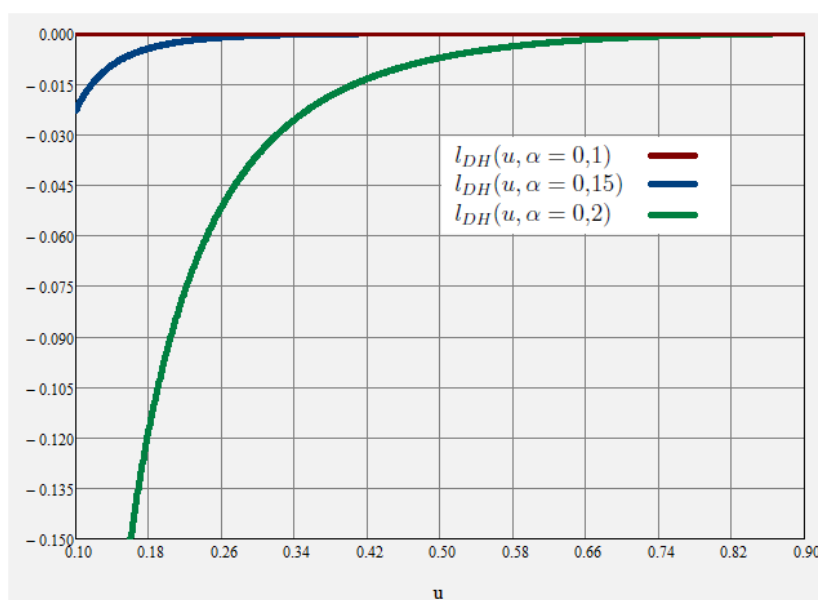


FIGURA 3.31: Gráfico de  $l_{DT}(u, \alpha)$  para  $\alpha \in \{0,1; 0,15; 0,2\}$

FIGURA 3.32: Gráfico de  $l_{DH}(u, \alpha)$  para  $\alpha \in \{0,1; 0,15; 0,2\}$



# 4

## Comentarios finales

### 4.1. Resumen de los resultados obtenidos

En este trabajo nos propusimos analizar el problema relacionado con la posibilidad de obtener medidas de distancia entre estados cuánticos a partir de medidas generales de distinguibilidad entre distribuciones de probabilidad que puedan escribirse como una divergencia Csiszár. Dada la complejidad que presenta el análisis del problema general para estados cuánticos mixtos descritos por matrices densidad actuando sobre espacios de Hilbert de dimensión arbitraria, decidimos restringir nuestro análisis al caso de estados puros pertenecientes a espacios de Hilbert de dimensión dos. Bajo esta restricción, hemos sido capaces de obtener expresiones generales para medidas de distancia entre estados cuánticos puros a partir de divergencias Csiszár que sean simétricas, con la condición que  $c = 0$  (ver teo. 2.1.2). Cabe destacar que este es un caso que se encuentra comúnmente. Dado que las distancias encontradas dependen del producto interno entre los estados, estas distancias poseen la propiedad adicional de ser invariantes ante transformaciones unitarias.

Por otra parte, como mencionamos en la 2.3.3 el problema de optimización para el caso

de la divergencia de Jensen-Shannon resulta sumamente complicado y hasta donde sabemos no ha sido solucionado hasta el momento. En consecuencia, nuestros resultados constituyen un paso hacia adelante en la solución de este problema, al menos para el caso de mediciones proyectivas de rango 1 y para estados puros. En particular, hemos encontrado una nueva métrica a partir de la divergencia de Jensen-Shannon que es diferente a la que se obtiene a partir de la divergencia de Jensen-Shannon Cuántica usual cuando ésta se reduce al caso de estados puros.

Además, analizamos numéricamente bajo que condiciones algunos ejemplos particulares de las distancias encontradas pueden transformarse en métricas para estados puros. Notablemente, encontramos que es posible construir una familia monoparamétrica de métricas para cada una de las distancias encontradas.

Como comentario final en referencia a los resultados obtenidos hasta el momento, observamos que, si bien hemos justificado una propuesta general para distancias cuánticas entre estados puros para el caso de espacios de Hilbert de dimensión 2, nuestros resultados coinciden en particular con las expresiones de las distancias de Hellinger y de la distancia Variacional (o distancia traza) para estados puros, las cuales tienen validez para el caso de espacios de Hilbert de dimensión arbitraria. Esto nos lleva a conjeturar que nuestra propuesta de distancias cuánticas entre estados puros a partir de divergencias Csiszár simétricas podría generalizarse a espacios de Hilbert de dimensión arbitraria.

## 4.2. Posibles direcciones para futuras investigaciones

Naturalmente quedan muchos aspectos interesantes para analizar en el problema que nos planteamos. A continuación, enumeramos algunos de los aspectos que planificamos estudiar en el futuro próximo:

1. Estudiar en profundidad las propiedades de las distancias encontradas.
2. Extender el análisis para los casos de divergencias simétricas en donde la condición de simetría sobre  $f(u)$  se satisfaga para  $c \neq 0$ .
3. Extender el análisis para los casos de POVMs generales y estados mezcla.
4. Comparar los resultados con otras métricas conocidas.



5. Estudiar de forma analítica bajo qué condiciones las distancias encontradas pueden ser transformadas en métricas.

Otro aspecto interesante para investigar es el estudio de las posibles aplicaciones de las nuevas medidas de distancia encontradas en este trabajo. Posibles contextos de aplicación podrían ser:

1. Detección de comportamientos no-Markovianos en sistemas cuánticos abiertos.
2. Estudiar la sensibilidad al ruido, por ejemplo, en el caso de canales cuánticos.



# Bibliografía

- [1] G. E. Moore, *Cramming More Components onto Integrated Circuits*, Electronics **38**, 114 (1965).
- [2] M. Le Bellac, *A Short Introduction to Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge University Press, 2006).
- [3] G. Jaeger, *Quantum information, an overview* (Springer, 2007).
- [4] M. A. Nielsen y I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [5] R. P. Feynman, *Simulating Physics with Computers*, Int. J. Theo. Phys. **21**, 467 (1982).
- [6] R. P. Feynman, *Feynman Lectures on Computation* (Addison Wesley, 1996)
- [7] A. O. Pittenger, *An Introduction to Quantum Computing Algorithms* (Birkhäuser, Boston, 2000).
- [8] D. Bouwmeester, A. K. Ekert y A. Zeilinger (Eds.), *The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation* (Springer, 2000).
- [9] J. Kempe y T. Vidick, *Quantum Algorithms*, Lect. Notes Phys., **808**, 309 (Springer, 2010)
- [10] D. Deutsch, *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer*, Proc. R. Soc. Lond. A **400**, 97 (1985).
- [11] D. Deutsch y R. Jozsa, *Rapid solution of problems by quantum computation*, Proc. R. Soc. Lond. A **439**, 553 (1992).

- 
- [12] P. W. Shor, *Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring*, Proceedings of the 35th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 124 (1994).
- [13] L. K. Grover, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 212 (1996) (arXiv:quant-ph/9605043).
- [14] A. Ekert y R. Jozsa, *Quantum computation and Shor's factoring algorithm*, Rev. Mod. Phys. **68**, 733 (1996).
- [15] P. W. Shor, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, SIAM J. Comput. **26**, 1484 (1997).
- [16] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello y M. Mosca, *Quantum algorithms revisited*, Proc. R. Soc. Lond. A **454**, 339 (1998).
- [17] A. M. Childs y W. van Dam, *Quantum algorithms for algebraic problems*, Rev. Mod. Phys. **82**, 1 (2008).
- [18] P. W. Shor, *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory*, Phys. Rev. A **52**, R2493 (1995).
- [19] A. M. Steane, *Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory*, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996).
- [20] D. Gottesman, *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology (1997) (arxiv: quant-ph/9705052).
- [21] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
- [22] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, 1976).
- [23] A. Uhlmann, *The "transition probability" in the state space of a \*-algebra*, Rep. Math. Phys. **9**, 273 (1976).
- [24] R. Jozsa, *Fidelity for Mixed Quantum States*, J. Mod. Opt. **41**, 2315 (1994).

- [25] D. J. C. Bures, *An extension of Kakutani's theorem on infinite product measures to the tensor product of semifinite  $w^*$ -algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **135**, 199 (1969).
- [26] V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko y A. Wunsche, *Hilbert-Schmidt distance and nonclassicality of states in quantum optics*, J. Mod. Opt. **47**, 633 (2000).
- [27] S. Luo y Q. Zhang, *Informational distance on quantum-state space*, Phys. Rev. A **69**, 032106 (2004).
- [28] A. P. Majtey, P. W. Lamberti y D. P. Prato, *Jensen-Shannon divergence as a measure of distinguishability between mixed quantum states*, Phys. Rev. A **72**, 052310 (2005).
- [29] M. Bina, A. Mandarino, S. Olivares y M. G. A. Paris, *Drawbacks of the use of fidelity to assess quantum resources*, Phys. Rev. A **89**, 012305 (2014).
- [30] N. A. Peters, T.-C. Wei y P. G. Kwiat, *Mixed-state sensitivity of several quantum-information benchmarks*, Phys. Rev. A **70**, 052309 (2004).
- [31] S. Salvini, S. Olivares y M. G. A. Paris, *Distances between Qubits and Sensitivity to Perturbations*, Laser Phys. **17**, 552 (2007).
- [32] S. Salvini, S. Olivares y M. G. A. Paris, *Sensitivity of Hilbert and Bures distances to qubit perturbations*, Int. J. Quantum Inf. **5**, 119 (2007).
- [33] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, London, 1976).
- [34] H.-P. Breuer y F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [35] V. Gorini, A. Kossakowski y E. C. G. Sudarshan, *Completely positive dynamical semigroups of  $N$ -level systems*, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).
- [36] G. Lindblad, *On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups*, Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [37] R. Alicki y K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications*, Lect. Notes Phys., **717** (Springer, 2007).

- [38] J. Piilo, S. Maniscalco, K. Härkönen y K.-A. Suominen, *Non-Markovian Quantum Jumps*, Phys. Rev. Lett. **100**, 180402 (2008).
- [39] J. Piilo, K. Härkönen, S. Maniscalco y K.-A. Suominen, *Open system dynamics with non-Markovian quantum jumps*, Phys. Rev. A **79**, 062112 (2009).
- [40] H.-P. Breuer y J. Piilo, *Stochastic jump processes for non-Markovian quantum dynamics*, Europhys. Lett. **85**, 50004 (2009).
- [41] H.-P. Breuer y B. Vacchini, *Quantum Semi-Markov Processes*, Phys. Rev. Lett. **101**, 140402 (2008).
- [42] H.-P. Breuer y B. Vacchini, *Structure of completely positive quantum master equations with memory kernel*, Phys. Rev. E **79**, 041147 (2009).
- [43] H.-P. Breuer, *Non-Markovian generalization of the Lindblad theory of open quantum systems*, Phys. Rev. A **75**, 022103 (2007).
- [44] S. Daffer, K. Wódkiewicz, J. D. Cresser y J. K. McIver, *Depolarizing channel as a completely positive map with memory*, Phys. Rev. A **70**, 010304(R) (2004).
- [45] A. Kossakowski y R. Rebolledo, *On Completely Positive Non-Markovian Evolution of a d-Level System*, Open. Syst. Inf. Dyn. **15**, 135 (2008).
- [46] P. Pechukas, *Reduced Dynamics Need Not Be Completely Positive*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1060 (1994).
- [47] P. Pechukas, *Pechukas Replies, (Reduced Dynamics Need Not Be Completely Positive)*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3021 (1995).
- [48] R. Alicki, *“Comment on Reduced Dynamics Need Not Be Completely Positive”*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3020 (1995).
- [49] G. Lindblad, *On the existence of quantum subdynamics*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 4197 (1996).
- [50] A. Royer, *Reduced Dynamics with Initial Correlations, and Time-Dependent Environment and Hamiltonians*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3272 (1996).
- [51] A. Royer, *Combining projection superoperators and cumulant expansions in open quantum dynamics with initial correlations and fluctuating Hamiltonians and environments*, Phys. Lett. **315**, 335 (2003).

- [52] P. Štelmachovič y V. Bužek, *Dynamics of open quantum systems initially entangled with environment: Beyond the Kraus representation*, Phys. Rev. A **64**, 062106 (2001).
- [53] P. Štelmachovič y V. Bužek, *Erratum: Dynamics of open quantum systems initially entangled with environment: Beyond the Kraus representation [Phys. Rev. A 64, 062106 (2001)]*, Phys. Rev. A **67**, 029902 (2003).
- [54] T. F. Jordan, A. Shaji y E. C. G. Sudarshan, *Dynamics of initially entangled open quantum systems*, Phys. Rev. A **70**, 052110 (2004).
- [55] H. A. Carteret, D. R. Terno y K. Życzkowski *Dynamics beyond completely positive maps: Some properties and applications*, Phys. Rev. A **77**, 042113 (2008).
- [56] C. A. Rodríguez-Rosario, K. Modi, A.-M. Kuah, A. Shaji y E. C. G. Sudarshan, *Completely positive maps and classical correlations*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 205301 (2008).
- [57] A. Shabani y D. A. Lidar, *Vanishing Quantum Discord is Necessary and Sufficient for Completely Positive Maps*, Phys. Rev. Lett. **102**, 100402 (2009).
- [58] H.-P. Breuer, E.-M. Laine y J. Piilo, *Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems*, Phys. Rev. Lett. **103**, 210401 (2009).
- [59] E.-M. Laine, J. Piilo y H.-P. Breuer, *Witness for initial system-environment correlations in open-system dynamics*, Europhys. Lett. **92**, 60010 (2010).
- [60] J. Dajka y J. Łuczka, *Distance growth of quantum states due to initial system-environment correlations*, Phys. Rev. A **82**, 012341 (2010).
- [61] J. Dajka, J. Łuczka y P. Hänggi, *Distance between quantum states in the presence of initial qubit-environment correlations: A comparative study*, Phys. Rev. A **84**, 032120 (2011).
- [62] J. Dajka y J. Łuczka, *The trace distance and linear entropy of qubit states: The role of initial qubit-environment correlations*, Rep. Math. Phys. **70**, 193 (2012).
- [63] H.-P. Breuer, *Measure for the Degree of Non-Markovian Behavior of Quantum Processes in Open Systems*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45**, 154001 (2012).

- [64] S. Wißmann, B. Leggio y H.-P. Breuer, *Detecting initial system-environment correlations: Performance of various distance measures for quantum states*, Phys. Rev. A **88**, 022108 (2013).
- [65] A. Gilchrist, N. K. Langford y M. A. Nielsen, *Distance measures to compare real and ideal quantum processes*, Phys. Rev. A **71**, 062310 (2005).
- [66] D. A. Lidar, P. Zanardi y K. Khodjasteh, *Distance bounds on quantum dynamics*, Phys. Rev. A **78**, 012308 (2008).
- [67] G. Lindblad, *Entropy, Information and Quantum Measurements*, Commun. Math. Phys. **33**, 305 (1973).
- [68] P. W. Lamberti, A. Majtey, A. Borrás, M. Casas y A. Plastino, *Metric character of the quantum Jensen-Shannon divergence*, Phys. Rev. A **77**, 052311 (2008).
- [69] A. Majtey, A. Borrás, M. Casas, P. W. Lamberti y A. Plastino, *Jensen-Shannon divergence as a measure of the degree of entanglement*, Int. J. Quant. Inf. Theory **6**, suppl., 715 (2008).
- [70] W. K. Wootters,
- [71] P. Kafka, F. Osterreicher e I. Vincze, *On powers of  $f$ -divergences defining a distance*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **26** 415-422 (1991).
- [72] R. Jozsa,  
J. Mod. Opt. **41** 2315–2323 (1994).
- [73] M. Khosravifard, D. Fooladivanda, y T. A. Gulliver, *Confliction of the convexity and metric properties in  $f$ -divergences*, Ieice trans. fundamentals **9** VOLE90-A (2007).
- [74] S. M. Barnett y S. Croke, *Quantum state discrimination*, Adv. Opt. Photonics **1**, 238 (2009).
- [75] A. E. Rastegin, *Relative error of state-dependent cloning*, Phys. Rev. A **66**, 042304 (2002).
- [76] A. Chefles, *Quantum state discrimination*, Contemp. Phys. **41**, 401 (2000).
- [77] D. Bruß, D. P. DiVincenzo, A. Ekert, C. A. Fuchs, C. Macchiavello y J. A. Smolin, *Quantum state discrimination*, Phys. Rev. A **57**, 2368 (1998).



- 
- [78] A. Bassi y G. Ghirardi, *A general scheme for ensemble purification*, Phys. Lett. A **309**, 24 (2003).
- [79] M. Kleinmann, H. Kampermann, T. Meyer y D. Bruß, *Physical purification of quantum states*, Phys. Rev. A **73**, 062309 (2006). M. Kleinmann, H. Kampermann, T. Meyer, and D. Bruß