



FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y  
COMPUTACIÓN

TESIS DE LICENCIATURA

---

# Lentes Plasmáticas en Entornos de Objetos Compactos

---

*Autor:*  
Gastón BRIOZZO

*Director:*  
Dr. Emanuel GALLO

28 de marzo de 2022



Lentes Plasmáticas en Entornos de Objetos Compactos por Gastón Briozzo se distribuye bajo una  
[Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0.](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



# *Resumen*

## **Lentes Plasmáticas en Entornos de Objetos Compactos**

La deflexión de la luz por potenciales gravitatorios es un fenómeno clásico de la Relatividad General. Es sabido que objetos compactos generan efectos de lente gravitacional convergente. En este trabajo, estudiaremos como la presencia de un medio plasmático refractivo en torno a objetos compactos produce en general un efecto de lente divergente que compite con el de la lente gravitacional, alterando las trayectorias de los fotones y generando una gama de efectos cromáticos. Consideraremos para esto espaciotiempos estáticos y asintóticamente planos, llenos de un plasma frío no magnetizado. En primer lugar, nos centraremos en el estudio de púlsares de rotación lenta, haciendo énfasis en el cálculo numérico de las trayectorias de los fotones y de los perfiles de pulso generados por casquetes de emisión. Luego, propondremos aproximaciones analíticas que permitan un tratamiento mas simple de estos problemas. En segundo lugar, estudiaremos la sombra de agujeros negros de rotación rápida, resumiendo algunos métodos para la obtención de métricas axisimétricas y centrándonos en el cálculo numérico de la sombra, considerando además efectos de aberración relativista. Por último, discutiremos algunos de los métodos numéricos empleados.

Palabras clave:

Relatividad General, Lentes gravitacionales, Plasmas astrofísicos



# *Abstract*

## **Plasmatic Lensing Surrounding Compact Objects**

Deflection of light by gravitational potentials is a classic phenomenon of General Relativity. Compact objects are known to generate convergent gravitational lensing effects. On this presentation we will study how the presence of a refractive plasma surrounding compact objects, produces (most of the times) a divergent lens effect that competes with the gravitational lensing, altering the trajectories of photons and generating a range of chromatic effects. So, we will consider space-times static and asymptotically flat, filled with a plasma not magnetized and pressureless. First, we will focus on the study of slow rotation pulsars, emphasizing in the numerical calculation of the photons trajectories and the pulse profiles generated by emission caps. Then, we will propose analytical approaches for a simpler analysis of these problems. Secondly, we will study the shadows of rotating black holes, showing some methods for obtaining axisymmetric metrics, and focusing on the numerical calculation of the shadows, also, we will be considering relativistic aberration effects. Finally, we will discuss some of the numerical methods that were used.

Key words:

General Relativity, Gravitational lensing, Astrophysical plasmas



## *Agradecimientos*

Agradezco a todos los docentes que, mas allá del deber, entregan su tiempo, su esfuerzo y su dedicación a sus estudiantes, poniéndonos por encima de todo y dando prueba de su vocación y compromiso.

Agradezco a todos los compañeros que, si pedir nada a cambio, comparten sus apuntes, sus recursos y su conocimiento con quien lo necesite, ayudando a tantos a seguir adelante, porque todos estuvimos en la misma.

A los amigos de siempre, a los nuevos y a los que ya no están.

Gracias Ema, por acompañarme en este proceso tan importante y ayudarme a realizar este trabajo, por el apoyo y por todo lo enseñado. Gracias viejo, por ser un profe particular de todas las materias 24/7.

Gracias Martín, por convencerme de meterme en el Obse.

Gracias Cris y Santi, por las risas, el compañerismo y el apoyo en estos últimos años. Gracias Leo y Juan, por los buenos momentos y por enseñarme de lo que ustedes saben. Gracias Leo y Lau, por incluirme en sus proyectos y darme una oportunidad.

Gracias Agos, por todo.



*A mi familia...*



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Estrellas de Neutrones</b>	<b>5</b>
2.1. Introducción . . . . .	6
2.2. Métrica . . . . .	10
2.3. Trazado de Rayos . . . . .	12
2.3.1. Resumen . . . . .	16
2.3.2. Resultados . . . . .	16
2.4. Perfil de Pulso . . . . .	23
2.4.1. Resumen . . . . .	26
2.4.2. Resultados . . . . .	27
2.5. Aproximación Analítica . . . . .	42
2.5.1. Ecuación de la Trayectoria . . . . .	42
2.5.2. Perfil de Pulso . . . . .	47
2.6. Anillos . . . . .	55
2.7. Clasificación . . . . .	58
2.8. Conclusiones . . . . .	66
<b>3. Agujeros Negros</b>	<b>69</b>
3.1. Introducción . . . . .	70
3.2. Métrica . . . . .	74
3.2.1. Las Métricas de Konoplya, Stuchlík y Zhidenko . . . . .	74
3.2.2. Modelos de espaciotiempo . . . . .	75
3.3. La Sombra del Agujero Negro . . . . .	77
3.3.1. Resumen . . . . .	81
3.3.2. La Sombra en Entornos Libres de Plasma . . . . .	82
3.3.3. La Sombra en Entornos Plasmáticos . . . . .	85
3.4. Aberraciones . . . . .	91
3.4.1. Resumen . . . . .	92
3.4.2. La Sombra y las Aberraciones Relativistas . . . . .	93
3.5. Conclusiones . . . . .	100
<b>4. Apéndices</b>	<b>103</b>
<b>Apéndice I: Parámetro de Impacto</b>	<b>104</b>
<b>Apéndice II: Métricas KSZ</b>	<b>105</b>

<b>Apéndice III: Métodos Numéricos</b>	<b>108</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>

## Capítulo 1

# Introducción

La primera confirmación experimental de una predicción de la teoría de la relatividad general [Ein15] fue la observación de la deflexión de la luz durante un eclipse solar en 1919 [Edd19]. Desde entonces, se han hecho progresos significativos en el estudio de los efectos causados por la deflexión de la luz en campos gravitatorios. Estos efectos se condensan en lo que hoy día llamamos lente gravitacional. En la mayoría de las manifestaciones observables del efecto de lente gravitacional, el campo gravitatorio es relativamente débil, por lo que los ángulos de deflexión son pequeños. Bajo este régimen, la fórmula para el ángulo de deflexión puede linealizarse, llegando a la simple expresión propuesta en 1916 por Albert Einstein [Ein16]. Más recientemente, sin embargo, las observaciones en el régimen de lente fuerte (donde se pueden generar multiplicidad de imágenes) tanto en campo gravitacional débil como fuerte se hicieron posible.

En 1916, Schwarzschild publicó la primera solución de las ecuaciones de Einstein [Sch16], encontrando lo que posteriormente se conocería como agujero negro. Si la luz pasa cerca de estos objetos, los rayos pueden desviarse muy fuertemente e incluso adoptar órbitas acotadas (incluso circulares para espaciotiempos esféricamente simétricos). Esta fuerte deflexión, combinada con el hecho de que un agujero negro no emite luz hacia el exterior, producen que este se vea como un disco oscuro en el cielo. A este disco se le conoce como la sombra del agujero negro. En el año 2000, en el artículo [FMA00], se planteó la posibilidad de que esta sombra pueda observarse de forma efectiva y, empleando métodos numéricos, se llegó a la conclusión de que las observaciones en longitudes de onda cercanas a  $1\text{mm}$  con interferometría de línea base muy larga podrían dar buenos resultados. Este artículo se centró en el agujero negro supermasivo del centro de nuestra galaxia, asociado con la fuente de radio Sagitario A\*. En 2019, exactamente un siglo después de la primera observación de la deflexión gravitacional de la luz, y después de grandes logros tanto por el lado tecnológico al conseguir que las observaciones sean posibles como por el lado computacional al procesarlas, el Event Horizon Telescope Collaboration publicó una imagen del agujero negro en el centro de la galaxia M87 [Col+19] logrando un avance histórico. A raíz de este logro, gran atención se centra ahora en la investigación de varios aspectos de las sombras de los agujeros negros.

A lo largo de su existencia centenaria, la teoría de la relatividad general de Einstein ha sido consistente dentro de todas las pruebas experimentales realizadas, que van desde experimentos locales del Sistema Solar hasta la detección de ondas gravitacionales por la colaboración LIGO-Virgo [CC+16], otro hecho histórico, mostrado de esta forma una notable potencia predictiva. Al mismo tiempo, es notable el hecho de que esta teoría no posea parámetros libres que puedan ajustarse para que sus predicciones concuerden con las observaciones, a diferencia de lo que sucede con la mayoría de las teorías alternativas. A pesar de sus virtudes, existen numerosos argumentos que sugieren que la teoría de la relatividad general se encuentra incompleta. En el frente observacional, la curva de rotación de las galaxias [BH18], la expansión tardía del Universo [PC+99] y la asimetría bariones-antibariones [CDS12], entre otras observaciones cosmológicas, suelen estudiarse proponiendo la existencia materia y energía oscuras o modificaciones a la relatividad general. En el frente teórico, la incompatibilidad entre la relatividad general y la mecánica cuántica ha provocado muchos intentos de unificación o extensión, tales como la teoría de cuerdas, la gravedad cuántica de bucles u otras variaciones. Por este motivo, resulta de interés considerar modificaciones a la misma y examinar sus consecuencias observacionales.

Las lentes gravitacionales son una herramienta sumamente útil a la hora de estudiar el contenido de materia y energía en el Universo, así como su dinámica, evolución y distribución [CK18] [Men21]. La interacción entre radiación electromagnética y campos gravitacionales se da a todas las escalas, desde agujeros negros individuales [Bro+16] hasta cúmulos de galaxias [Cav+18], siendo el estudio del régimen de lente gravitacional fuerte crucial para proporcionar pruebas de la teoría gravitacional en condiciones de campo fuerte. Una cantidad crucial en el estudio de la lente gravitatoria es el ángulo de desviación. La deflexión fuerte ocurre cerca de objetos compactos (agujeros negros y estrellas de neutrones) y afecta de manera crucial su emisión. A través del estudio de la curvatura de la luz, por ejemplo, se puede determinar el contenido de materia de objetos astrofísicos [Hoe+13] [Gio+14]. Por otro lado, los estudios de los sistemas de lentes gravitacionales también son relevantes en la caracterización de la radiación cósmica de fondo de microondas y aspectos cosmológicos relacionados [LC06] [BT17]. Al mismo tiempo, su estudio nos permite predecir la forma (o sombra) de un agujero negro o las propiedades de lente gravitatoria de cuerpos compactos más exóticos.

Las propiedades de los objetos compactos que emitan radiación electromagnética predichas por las teorías de gravedad modificadas son en general diferentes de las predichas por la relatividad general [SY19]. Sin embargo, las pruebas de gravedad en esta dirección están limitadas por un fuerte problema de degeneración entre la ecuación de estado y la teoría de la gravedad [Gla+15]. Una opción para evitar este problema es centrarse en los fenómenos electromagnéticos en el exterior del objeto, como por ejemplo líneas espectrales atómicas, estallidos y oscilaciones cuasiperiódicas. En estos escenarios se puede sondear el espaciotiempo exterior, buscando posibles desviaciones de la relatividad general sin preocuparse por las complejidades del interior estelar [MEF70] [Ber+15] [Col+18b]. La deflexión de la luz también debe depender de la geometría gravitacional, afectando de forma característica las trayectorias, el perfil de pulso, la magnificación o la forma o sombra del objeto.

En la mayoría de las observaciones, la influencia de los medios ópticos a lo largo de la trayectoria de propagación de los fotones es despreciable, por lo que generalmente la teoría de lente gravitacional se ocupa de la propagación de los rayos de luz en el vacío, donde las trayectorias y los ángulos de deflexión son independientes de la frecuencia fotónica, y por lo tanto los efectos son acromáticos (en el marco de la óptica geométrica). Sin embargo, los efectos del medio no pueden despreciarse con seguridad en la gama de radiofrecuencias [CGR19]. A todas las escalas, estamos físicamente motivados a considerar que las galaxias, cúmulos de galaxias, agujeros negros u otros objetos compactos están inmersos en un medio plasmático dispersivo o rodeados por densas magnetosferas ricas en plasma que pueden formar discos de acreción [GJ69] [Pét16] [Col+18a]. En tales medios ópticos, la propagación de los fotones se vuelve dependiente de la frecuencia, dando lugar a fenómenos cromáticos. En el espectro visible estos efectos son insignificantes, pero en el espectro de radiofrecuencia el índice de refracción del plasma genera fuertes modificaciones del comportamiento de lente gravitacional habitual dependientes de la frecuencia. Podemos preguntarnos entonces cómo influye el plasma en los fenómenos de lente gravitacional.

El efecto del plasma en la propagación de la luz ha sido estudiado desde la década de 1960. En 1966, Muhleman y Johnston estudiaron la influencia del plasma electrónico de la corona solar en el retraso temporal de frecuencias de radio bajo el campo gravitacional del Sol, utilizando los índices de refracción gravitacional y plasmática para derivar una aproximación de campo débil [MJ66]. En 1970, Muhleman, Ekers y Fomalont midieron la deflexión del cuásar 3C273 cuando fue ocultado por el Sol y obtuvieron una estimación de la densidad de electrones en la corona solar, calculando por primera vez la desviación de la luz en presencia de un plasma en la aproximación de campo débil [MEF70]. Una variedad de estudios centrados en el viento solar y el perfil de densidad de electrones en su corona exterior también se realizaron, utilizando el análisis de la propagación de la luz en diferentes misiones espaciales como Viking, Mariner 6 y 7 y la misión Cassini. En 1980 Breuer y Ehlers realizaron una rigurosa derivación de un hamiltoniano para rayos de luz incluyendo un plasma magnetizado y un espaciotiempo curvo [BE80]. Incluso, recientemente los efectos de lentes plasmáticas se han utilizado para resolver las regiones de emisión de un pulsar [Mai+18].

Actualmente existen algunos proyectos de radiotelescopios que operan en bandas de frecuencia donde tales efectos podrían ser observables [BBS17] [BMB15]. Por este motivo, en los últimos años ha proliferado el estudio de la influencia de los medios plasmáticos en la trayectoria de los rayos de luz en campos gravitatorios externos asociados a objetos compactos, convirtiéndose en un área de investigación muy activa [ER18] [Tur+19]. El primer problema que surge al abordar este tema es que los fotones en general no siguen geodésicas nulas [CG18]. Además, al considerar efectos de lente en campos gravitacionales intensos debemos tratar los efectos de lente gravitacional y plasmática en simultáneo, dado que los ángulos de deflexión resultan demasiado grandes para ser linealizados como se hace en el régimen de campo gravitacional débil. La magnitud de la influencia del plasma se determina por la relación entre la frecuencia plasmática y la frecuencia del fotón. Menor frecuencia de fotones (longitud de onda más larga) o mayor densidad de plasma conduce a una mayor deflexión refractiva [TB19]. Cuando un fotón viaja a través de la atmósfera plasmática de una estrella o a través del disco de acreción alrededor de un agujero negro, la influencia del plasma en la desviación de la luz puede ser significativa debido a su alta concentración [TB13] [MJ66]. Si la deflexión plasmática es lo suficientemente grande, puede compensar o superar completamente la deflexión gravitacional. Por otra parte, existe una correspondencia muy conocida entre las dinámicas de fotones en un plasma homogéneo y partículas de prueba masivas bajo la influencia de campos gravitatorios [KL92], que siguen las mismas geodésicas, haciendo de este un tema de interés académico.

En este trabajo estudiaremos lentes plasmáticas en torno a objetos compactos, en espaciotiempos estáticos y asintóticamente planos, llenos de un plasma no magnetizado y libre de presión. En todo momento compararemos los resultados obtenidos para distintos modelos métricos, distintos perfiles de densidad del plasma, distintas frecuencias fotónicas y distintos parámetros característicos del objeto en cuestión, tales como carga, tamaño, orientación, posición o espín.

En primer lugar, nos centraremos en el estudio de púlsares de rotación muy lenta (La frecuencia de rotación de un pulsar puede variar entre  $1\text{ms}$  y  $15\text{s}$  [Har13], los que se encuentren en el rango superior pueden considerarse lentamente rotantes), por lo que para la descripción de la región exterior a las estrellas tomaremos métricas con simetría esférica despreciando correcciones a la misma que puedan ocasionar la existencia de la rotación. Presentaremos el formalismo necesario para calcular numéricamente las trayectorias de los fotones desde la superficie estelar hasta un observador en el infinito y los perfiles de pulso de uno o más casquetes emisores ubicados en su superficie, en distintas configuraciones. Luego, desarrollaremos aproximaciones analíticas que permitan simplificar los cálculos, la interpretación y la discusión de estos fenómenos, examinando su precisión y rango de validez. Finalmente, propondremos un sistema de clasificación de los perfiles de pulso observados.

En segundo lugar, estudiaremos la influencia de plasma sobre la sombra de agujeros negros rotantes, adoptando ahora métricas con simetría axial. Resumiremos algunos métodos para la obtención de métricas axisimétricas, comparando los espaciotiempos resultantes. Presentaremos el formalismo necesario para calcular numéricamente la sombra de agujeros negros vistas desde una posición arbitraria por un observador dentro del dominio de comunicación exterior. Finalmente analizaremos el efecto de la aberración relativista sobre la forma y tamaño de la sombra.

Por último, presentaremos algunos métodos numéricos necesarios para el desarrollo de este trabajo, o que pueden facilitar su desarrollo. Cabe aclarar que estos métodos no están optimizados, solo pretenden dar una idea de las opciones disponibles. Los programas necesarios para este trabajo se escribieron en Fortran 90, mientras que se empleó gnuplot como graficador principal. También se utilizó el software Maple para la resolución de problemas matemáticos, así como Python.



## Capítulo 2

# Estrellas de Neutrones

## 2.1. Introducción

Las estrellas masivas llegan al final de su vida cuando agotan su combustible de fusión nuclear y, al perder el equilibrio interno, colapsan gravitacionalmente bajo su propio peso [WW86]. Este último acto en la vida de la estrella sucede tan rápidamente que se generan ondas de choque que rebotan golpeándose en su zona central, alcanzando densidades supranucleares y produciendo una violenta explosión que eyecta buena parte de la materia hacia el espacio exterior. Este estallido es lo que se conoce como supernova y, mientras dura, libera cantidades tan inmensas de energía que su brillo es equiparable al de toda una galaxia [Col71]. La parte de la estrella que es expulsada hacia el exterior forma una nebulosa, una nube de materia que continuará expandiéndose mucho tiempo después. Por otro lado, la materia que no se eyecta es comprimida en un núcleo increíblemente denso ( $\rho \approx 10^{17} \text{kg/m}^3$  [Kiz10]) compuesto principalmente por neutrones, donde la fusión nuclear ha cesado por completo. Este 'cadáver' estelar es lo que se conoce como estrella de neutrones [Har13] [MT77].

Las estrellas de neutrones son entonces el remanente de las supernovas y representan algunos de los objetos más extremos del universo, presentando condiciones ambientales únicas. Cuentan con una masa típica de aproximadamente 1,4 masas solares en un radio de apenas 12km [Ann+18], por lo que la densidad de materia dentro de ellas puede exceder significativamente la densidad nuclear estándar, siendo catalogadas como objetos compactos dentro de la astrofísica debido a su alta compacticidad (esto es, el cociente entre la masa  $M$  y el radio  $R$  del objeto) [ÖF16]. De este modo, representan las superficies estelares más relativistas accesibles a la observación, presentando fuertes efectos de lente gravitacional [CK18]. Además, los campos magnéticos asociados pueden ser incluso más fuertes que el campo crítico de la electrodinámica cuántica [SM17] y el fuerte campo gravitacional que producen es varios ordenes de magnitud mayor a lo que podríamos encontrar dentro del sistema solar, siendo solo superado por el de los agujeros negros [ST83].

Debido a estas condiciones extremas, donde se supera la densidad de saturación nuclear, la mayor parte de las propiedades de las estrellas de neutrones siguen siendo inciertas, por lo que la determinación de su ecuación de estado es un problema pendiente en la astrofísica nuclear [Lat21]. Sin embargo, esta dificultad puede superarse mediante la observación de las propias estrellas de neutrones y los fenómenos asociados a ellas. Por otro lado, dadas sus características extremas, las estrellas de neutrones son uno de los mejores candidatos naturales para sondear la física en estos entornos extremos y probar la teoría de la Relatividad General en el régimen de campo fuerte, muy diferente a las condiciones encontradas en el sistema solar [MEF70] [Ber+15] [Col+18b]. Por lo tanto, sirven como un laboratorio único para investigar la física fundamental, cuya descripción desafía nuestra comprensión actual de la materia y el Universo. De hecho, los descubrimientos de estrellas de neutrones de alrededor de 2 masas solares [Dem+10], así como la observación de ondas gravitacionales producto de fusiones de sistemas binarios [Abb+16], imponen severas restricciones a la ecuación de estado en régimen de alta densidad.

Por la conservación del momento angular, las estrellas de neutrones suelen girar sobre si mismas con periodos increíblemente cortos de hasta milésimas de segundo [BH86], adoptando una forma oblonga. Llegan a girar tan rápido que un punto sobre su superficie puede estar moviéndose a velocidades de hasta cientos de kilómetros por segundo. La fuerza centrífuga es tan grande que solo su potente campo gravitatorio es capaz de evitar que se despedacen. Las cargas que forman parte del objeto generan un enorme campo magnético al girar [Pét20], de modo que las partículas que se aproximan desde el exterior son aceleradas a altísimas velocidades, decayendo en espirales hacia los polos magnéticos de la estrella para luego ser emitidas en chorros sumamente colimados de radiación electromagnética [Pét16]. Por razones aún desconocidas, los polos magnéticos de muchas estrellas de neutrones no están sobre el eje de rotación. El resultado es que los chorros de radiación emitidos desde los polos magnéticos no apuntan siempre en la misma dirección, sino que rotan con la estrella. Al mismo tiempo, es común que en partes de la superficie de la estrella ocurran explosiones termonucleares, resultando en 'zonas calientes' sumamente localizadas que emiten grandes cantidades de radiación observable [Bil98]. Las estrellas de neutrones que presentan estos flujo de radiación a intervalos periódicos cortos y regulares son denominadas púlsares. Una representación artística puede verse en la Figura 2.1.

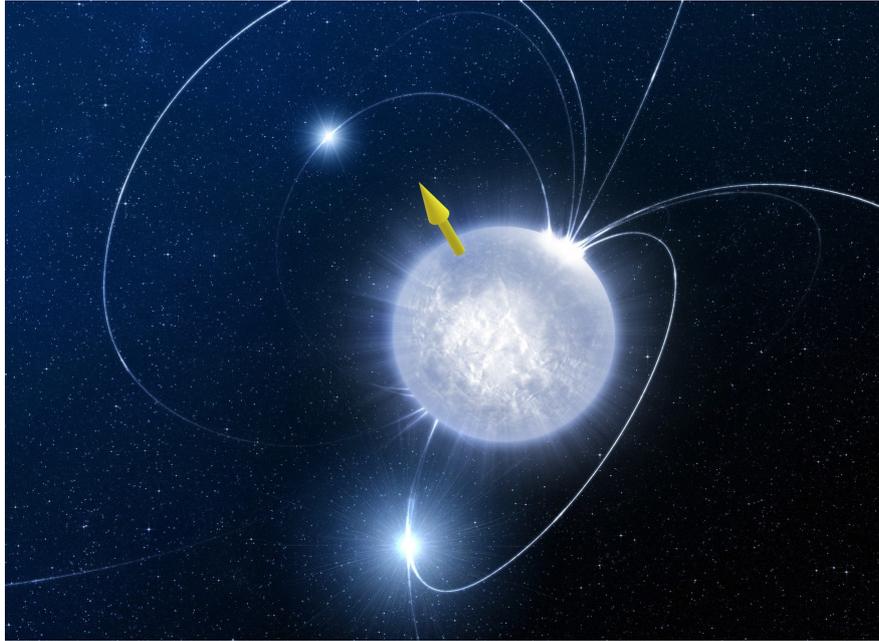


FIGURA 2.1: Representación artística de un pulsar, con su eje de rotación marcado por la flecha amarilla y sus zonas calientes brillantes. Crédito: Imagen pública extraída y modificada de Pixabay.com, <https://pixabay.com/es/photos/magnetar-espacio-universo-5603793/>

De este modo, si un observador tiene la suerte de encontrarse en la dirección en que apunta el flujo de radiación del púlsar en algún punto de su período, verá un incremento significativo en la luminosidad aparente de la estrella, seguido por un descenso abrupto al cambiar la dirección del flujo por la rotación. Este fenómeno se repetirá periódicamente, originando pulsos de radiación con una frecuencia extremadamente regular y constante, como si de un faro se tratase. Como resultado, al medir la intensidad lumínica el observador obtendrá una curva cuyo perfil se repetirá en el tiempo, llamada curva de luz o perfil de pulso. Estas curvas de luz codifican información sobre las propiedades físicas del punto caliente, como por ejemplo, su tamaño, geometría, distribución de temperatura y espectros, además de contener información sobre la geometría del espaciotiempo mismo alrededor de la estrella [Sot17] [SM17] [SY19] [Sot20].

La observación de estos pulsos electromagnéticos ofrece otra vía para investigar las propiedades de estos objetos extremadamente compactos, permitiendo evadir las ecuaciones de estado y evitar así las incertidumbres físicas del interior del objeto. Debido a su fuerte campo gravitacional, la radiación en las inmediaciones de las estrellas de neutrones experimenta una fuerte deflexión, generándose un efecto de lente gravitacional, cuya magnitud está íntimamente vinculada con la masa y el radio de la estrella, por lo que su observación permite en principio inferir estos parámetros, o al menos acotar sus valores, proporcionando información sobre la estructura estelar que facilite determinar la ecuación de estado [PÖC14] [Bog16]. El perfil de pulso observado dependerá del ángulo entre los ejes magnético y rotacional junto con el ángulo entre el eje de rotación y la dirección del observador, además de la geometría y distribución de los casquetes emisores. La compacticidad en los púlsares podría llegar a ser lo suficientemente alta como para que incluso un fotón emitido desde la parte posterior de la estrella llegue al observador, contribuyendo significativamente al perfil de pulso. Si bien la compacticidad típica de estos objetos es demasiado baja como para presentar una superficie completamente visible al observador, estos son teóricamente posibles [SM18] [Sot20]. El estudio de estos fenómenos supone un ambiente propicio para probar distintas teorías de gravedad en el régimen de campo fuerte.

El problema de modelar los perfiles de pulso ha sido tratado intensamente en la literatura. Se han hecho estudios considerando el efecto Doppler, la aberración [PB06], el tiempo de retardo [Rog15], la

rotación rápida o la oblongación estelar [PÖ14], por ejemplo. En particular, en [PFC83] Pechenick et al. han estudiado las propiedades de lente gravitacional en estrellas de neutrones de rotación lenta descritas por la métrica de Schwarzschild, consistentes en uno o dos casquetes polares antipodales, uniformes y circulares en la superficie que emiten fotones al observador en el infinito. En general, el tratamiento de la propagación de fotones en un espaciotiempo esféricamente simétrico y estacionario conduce a integrales del tipo elípticas o expresiones aún más complicadas que requieren ser resueltas mediante evaluación numérica. La implementación de métodos numéricos suele ser inevitable al tenerse en cuenta una distribución continua de temperatura superficial, una emisión anisotrópica o una forma arbitraria de las regiones de emisión. Si bien estos modelos pueden llegar a describir el perfil de pulso de estrellas de cualquier compacticidad, requiere un tratamiento numérico complicado y computacionalmente costoso. En este contexto, Beloborodov encontró en [Bel02] una expresión analítica simple para el ángulo de deflexión que reemplaza la integral elíptica aproximando con gran precisión los perfiles de pulso de casquetes de emisión puntuales en el espaciotiempo de Schwarzschild, siempre y cuando la compacticidad de la estrella no sea excesiva. Por su parte, en [TN13] se extiende este análisis a casquetes extensos, uniformes y circulares, dando una expresión analítica simple que aproxima en gran medida el flujo total observado.

En este trabajo investigaremos el fenómeno de lente gravitacional en estrellas de neutrones lentamente rotantes [SM18], haciendo uso de métricas esféricamente simétricas alternativas a la de Schwarzschild para describir la región exterior, a los efectos de estudiar la diferencia de su influencia sobre las curvas de luminosidad. Mas precisamente, nos concentraremos en los modelos métricos de espaciotiempos estáticos, con simetría esférica y asintóticamente planos de Schwarzschild (SH), Reissner-Nordström (RN) y Garfinkle-Horowitz-Strominger (GHS) (ver 2.2). La elección particular de estas métricas es tan solo para demostrar las diferencias que aparecen en las propiedades de objetos compactos en el régimen de campo fuerte y que pueden potencialmente ser observadas. Cabe mencionar también que existen soluciones de otras teorías gravitacionales funcionalmente similares a la métrica de RN pero con el parámetro  $Q$  teniendo otro origen no vinculado a la carga, por ejemplo asociado a cargas tidales en teorías de branas [AG05] o siendo proporcional a la masa ADM del agujero negro en Gravedad modificada [Mof15]. Consideraremos casquetes de emisión (ya sean puntos calientes de emisión térmica o polos de emisión electromagnética) de tamaño finito, con formas, distribución e intensidades arbitrarias, en púlsares altamente compactos de rotación lenta, por lo que no tendremos en cuenta el efecto Doppler, la aberración, el tiempo de retardo, la rotación rápida o la oblongación estelar. Tampoco consideramos ningún efecto de la magnetosfera del pulsar<sup>1</sup>. La estrella de neutrones estará embebida en un entorno plasmático libre de presión y no magnético, cuya densidad electrónica estará dada por leyes de potencias inversamente proporcionales a la coordenada radial  $r$ , lo que derivará en un análisis cromático del problema.

Estudiaremos las trayectorias de los fotones (sección 2.3) considerando distintos modelos métricos, haciendo énfasis en los efectos cromáticos derivados de la presencia de un entorno plasmático, cuya interacción con la luz dependerá de la longitud de onda de ésta. Luego (sección 2.4) discutiremos la curva de luminosidad resultante de un único casquete emisor circular y uniforme sobre la superficie estelar y como ésta se ve afectada por la distribución y densidad del plasma, los ángulos entre el casquete y el eje de rotación del púlsar y entre el eje de rotación y el observador o la compacticidad de la estrella. Este análisis será extendido al caso de dos casquetes antipodales idénticos. Motivados por el modelo analítico aproximado de Beloborodov, generalizaremos el mismo para introducir correcciones que tengan en cuenta atmósferas plasmáticas (sección 2.5), extendiendo así el rango de validez de expresiones analíticas, incluyendo ahora casquetes extensos uniformes y circulares inmersos en un entorno plasmático. Este nuevo formalismo será aplicado a los distintos modelos métricos tratados, obteniendo en cada uno de ellos expresiones analíticas simples para las trayectorias (2.5.1) y el flujo observado

<sup>1</sup>Un campo magnético intenso en un entorno plasmático puede afectar la propagación de rayos de luz al comportarse el mismo como un medio dispersivo birrefringente, además afecta la polarización de los mismos a través de la rotación de Faraday, o interferir a través de fenómenos como la creación de pares. Sin embargo en este trabajo no consideraremos este tipo de efectos, los cuales sí deberían tenerse en cuenta en un modelo más detallado.

(2.5.2) que simplifican significativamente el cálculo de los perfiles de pulso, reduciendo drásticamente el coste computacional de los mismos. Compararemos los resultados numéricos con las aproximaciones analíticas, estudiando los errores relativos cometidos por esta última y su dependencia con distintas magnitudes de interés según las características del problema. Una vez establecidos los rangos de validez de nuestro modelo, mostraremos como emplear las aproximaciones obtenidas para modelar fácilmente casquetes de emisión mas realistas, no antipodales, homogéneos o circulares (sección 2.6). Bajo este nuevo formalismo se podrán examinar en detalle los efectos de la forma y el tamaño de puntos calientes individuales, sin grandes pérdidas de precisión o generalidad, facilitando de esta forma el estudio y la comprensión de estos objetos. Finalmente, expandiremos la clasificación introducida por Beloborodov para el caso de dos casquetes no antipodales y distinguibles entre si (sección 2.7).

Emplearemos las unidades fundamentales normalizadas,  $c = 1$ ,  $G = 1$  y  $\hbar = 1$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío,  $G$  la constante de gravitación universal y  $\hbar$  la constante de Planck, y la signatura métrica  $(-, +, +, +)$ . La superficie estelar se situará en la coordenada "radial"  $r = R$ , siendo la región  $r < R$  totalmente opaca dado que corresponde al interior estelar. La emisión luminosa se originará en dicha superficie, con una intensidad  $I$  dependiente del ángulo  $\delta$  entre la normal de la superficie estelar y la dirección de emisión del fotón. El observador se considerará estacionario en  $r = r_O$  con  $r_O \rightarrow \infty$ . El brillo observado  $l$  estará dado entonces por la integral de la intensidad por el ángulo sólido medido por el observador sobre su esfera celeste. En caso de que una misma superficie produzca imágenes múltiples, todas deben ser consideradas al integrar el flujo. Si bien este enfoque está ligeramente idealizado, nos permitirá una primera aproximación para describir cualitativamente los efectos asociados a los distintos parámetros de la estrella, sus casquetes de emisión, el entorno plasmático y el propio espaciotiempo.

## 2.2. Métrica

En la geometría de Riemann, la métrica  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ , es un tensor de rango 2 que permite definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en una variedad Riemanniana. En el marco de la Relatividad General de Einstein, es una herramienta indispensable para describir como la materia interactúa con el espacio y con el tiempo, dos conceptos antes independientes que se funden ahora en una única entidad conocida como espaciotiempo, que se expande y contrae ante la presencia de materia, dando lugar a comportamientos poco intuitivos.

En esta sección trabajaremos con un modelo métrico simple, consistente en un espaciotiempo estático con simetría esférica y asintóticamente plano. De este modo, al alejarnos lo suficiente en la dirección radial deberíamos recuperar la métrica de Minkowski. Estas suposiciones permiten expresar la métrica de la siguiente forma<sup>2</sup>

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)d\Omega^2, \quad (2.1)$$

donde las funciones  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $C(r)$  dependen únicamente de la coordenada radial  $r$ , satisfaciendo además las condiciones de espaciotiempo plano en el infinito, es decir  $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ ,  $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$  y  $C(r \rightarrow \infty) \rightarrow r^2$ . Al fijar estas funciones estaremos determinando el modelo métrico que consideraremos correcto para describir el espaciotiempo donde nos encontremos.

La métrica mas sencilla que describe un espaciotiempo estacionario, esféricamente simétrico y asintóticamente plano con una masa  $M$  gravitante en su centro fue publicada en 1916 por Schwarzschild en [Sch16], siendo además la primer solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein que describe el campo gravitacional fuera de una masa esférica. En este modelo, la carga eléctrica y el momento angular del objeto son nulos y no se toma en cuenta la constante cosmológica universal. La solución es una aproximación útil para describir objetos astronómicos que giran lentamente, como muchas estrellas y planetas, incluyendo la Tierra y el Sol.

Una generalización de la métrica de Schwarzschild que describe el campo gravitatorio y electromagnético de un cuerpo masivo con carga neta diferente de cero es la métrica de Reissner-Nordström [Rei16] [Nor18], otra solución exacta con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein. Esta es en muchos aspectos similar al espaciotiempo dado por Schwarzschild. Sin embargo, en el modelo de Reissner-Nordström el tensor de energía-momento asociado a la métrica no es idénticamente nulo, de modo que el espaciotiempo está ocupado por un campo electromagnético estático con simetría esférica. En esta métrica es posible obtener una singularidad desnuda cuando  $M^2 < Q^2$ , de modo que el valor de la carga esta acotado.

Métrica	$A(r)$	$B(r)$	$C(r)$	$Q$
Schwarzschild (SH)	$1 - \frac{2M}{r}$	$\frac{1}{A(r)}$	$r^2$	
Reissner-Nordström (RN)	$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$	$\frac{1}{A(r)}$	$r^2$	$0 \leq Q^2 \leq M^2$
Garfinkle, Horowitz y Strominger (GHS)	$1 - \frac{2M}{r}$	$\frac{1}{A(r)}$	$r^2 - r\frac{Q^2}{M}$	$0 \leq Q^2 \leq 2M^2$

CUADRO 2.1: Métricas mas comunes en torno a objetos compactos con una masa gravitante  $M$  y una carga neta  $Q$ , en espaciotiempos estacionarios, esféricamente simétricos y asintóticamente planos.

Otra generalización posible es el espaciotiempo de Garfinkle, Horowitz y Strominger [GHS91], una solución para agujeros negros estáticos con carga neta no nula proveniente de la teoría de cuerdas, donde se toman en cuenta tanto la carga magnética  $Q$  de la masa como el valor asintótico del campo de Dilaton  $\varphi_0$  en el infinito. En este modelo, el espaciotiempo se encuentra inmerso en un campo puramente magnético, y a diferencia del caso de Reissner-Nordström, la carga se encuentra restringida a los valores

<sup>2</sup> Si bien siempre es posible elegir un sistema de coordenadas adecuado para el cual el espaciotiempo sea caracterizado solo por dos funciones métricas  $A$  y  $B$ , en lo que sigue mantendremos la forma (2.1) debido a que deseamos escribir expresiones generales que se mantengan válidas para una vasta familia de sistemas de coordenadas.

$0 \leq Q \leq \sqrt{2}Me^{-\varphi_0}$ . En este trabajo, adoptaremos  $\varphi_0 = 0$  mientras que, para facilitar la comparación con el modelo de Reissner-Nordström, emplearemos los mismos valores para  $Q$ .

En el Cuadro 2.1 se expresan los elementos métricos de los modelos aquí mencionados, así como el rango de valores permitidos para la carga  $Q$ .

Recordemos que estamos bajo la hipótesis de rotación lenta, por lo que los efectos relativistas debido a la rotación de los púlsares no serán considerados aquí. En general, se espera que toda desviación del espaciotiempo de Schwarzschild sea pequeña, es decir que el valor de la carga  $Q$  esperado resulte relativamente pequeño. Sin embargo, como se mencionó anteriormente,  $Q$  no está necesariamente asociado a una carga eléctrica. Nótese que todos los modelos recién mencionados resultan idénticos al espaciotiempo de Schwarzschild cuando la carga se anula.

### 2.3. Trazado de Rayos

Recordemos que en este trabajo utilizaremos el sistema de unidades  $G = 1$ ,  $c = 1$  y  $\hbar = 1$ , además de tomar la masa del objeto como unidad de medida, normalizándola a  $M = 1$ . Emplearemos índices griegos para denotar coordenadas espacio-temporales, mientras que reservaremos los índices latinos para coordenadas únicamente espaciales. En esta subsección seguiremos el trabajo presentado en [Rog15], extendiendo su aplicación a distintos espaciotiempos.

Consideremos un espaciotiempo de la forma dada por (2.1) donde las funciones métricas  $A$ ,  $B$  y  $C$  dependen paramétricamente de la masa  $M$  y la carga  $Q$  del púlsar. Las trayectorias de fotones dentro de un medio plasmático se describen mediante el Hamiltoniano en el límite de la óptica geométrica dado por Synge en [Syn60],

$$H(x^\alpha, p_\alpha) = \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - (n^2 - 1)(p_\alpha V^\alpha)^2], \quad (2.2)$$

siendo

$$n^2 = 1 + \frac{p_\alpha p^\alpha}{(p_\beta V^\beta)^2} \quad (2.3)$$

el índice de refracción de un medio dispersivo general no necesariamente proveniente de un plasma, mientras que  $p^\alpha = \hbar K^\alpha$  es el 4-momento lineal de fotón, siendo  $K^\alpha$  el 4-vector de onda y  $V^\alpha$  la 4-velocidad del plasma. Observemos que el hecho de que la contribución del plasma se anule en el vacío y resulte  $n = 1$  se condice con la condición de geodésicas nulas  $p_\alpha p^\alpha = 0$ , las cuales describen justamente las trayectorias de la luz en el vacío. Los rayos de luz se obtienen como soluciones a las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \frac{dp_\alpha}{d\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \\ H(x^\alpha, p_\alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde el parámetro  $\lambda$  no tiene un significado geométrico directo. Sin pérdida de generalidad podemos restringirnos al estudio de órbitas en el plano ecuatorial ( $p_\theta = 0$ ).

Supondremos una distribución de plasma con simetría esférica, estando el púlsar de masa  $M$  posicionado en su centro. Al ser atravesado por la luz, el plasma actuará como un medio refractivo, presentando un índice de refracción  $n = n(x^\alpha, \omega)$  que dependerá de la frecuencia  $\omega = -p_\alpha V^\alpha$  del fotón. Asumiendo que el plasma es un medio estático tal que  $V^t = \sqrt{-g^{tt}}$  y  $V^i = 0$ , resulta

$$p_t \sqrt{-g^{tt}} = -p^t \sqrt{-g_{tt}} = -\omega(x^i), \quad (2.5)$$

de forma que el Hamiltoniano no depende de  $t$  ni de  $\phi$ , por lo que los momentos  $p_t$  y  $p_\phi$  son constantes. De este modo, la componente temporal del momento depende de la frecuencia asintótica del fotón en el infinito

$$p_t = -\omega_\infty. \quad (2.6)$$

A partir de las Ecs. (2.5) y (2.6) podemos encontrar la relación para el redshift efectivo,

$$\omega(r) = \frac{\omega_\infty}{A(r)^{1/2}}, \quad (2.7)$$

siendo  $\omega(r)$  la frecuencia de la luz medida por un observador estático. La dependencia radial de la frecuencia se debe entonces al efecto de corrimiento al rojo gravitacional producido por la métrica. Para

continuar con el desarrollo analítico, supondremos que el índice de refracción es de la forma general

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega^2(r)}, \quad (2.8)$$

donde

$$\omega_e^2 = \frac{4\pi e^2}{m} N(r), \quad (2.9)$$

siendo  $\omega_e(r)$  la frecuencia del plasma ([Goo03]),  $e$  y  $m$  la carga y masa del electrón respectivamente, y  $N(r)$  la densidad electrónica numérica del plasma. Junto con las Ecs. (2.2) y (2.8), la expresión anterior nos permite obtener la relación de dispersión para fotones en un plasma frío no magnetizado,

$$H(x^\alpha, p_\alpha) = \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \omega_e^2]. \quad (2.10)$$

Las trayectorias de los fotones se describen por las Ecs. (2.4). Este sistema de ecuaciones nos permite describir la posición y el momento de los fotones a través del espaciotiempo bajo la influencia de la gravedad y el medio óptico. Para construir el trazado de rayos, es decir, la trayectoria espacial de los fotones, podemos deshacernos del parámetro  $\lambda$  como sigue,

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{d\lambda} \left[ \frac{dr}{d\lambda} \right]^{-1} = \frac{p_\phi B(r)}{p_r C(r)}. \quad (2.11)$$

Al mismo tiempo, de las Ecs. (2.10) y (2.4) puede deducirse que

$$p_r = \pm \sqrt{\frac{B}{A} p_t^2 - \frac{B}{C} p_\phi^2 - B\omega_e^2} \quad (2.12)$$

Aquí la solución positiva corresponde al caso en que tanto  $r$  como  $\phi$  se incrementan de manera conjunta, mientras que la solución negativa en caso contrario. Introducimos ahora el parámetro de impacto  $b$  y la velocidad de grupo asintótica  $n_0$  para expresar la constante  $p_\phi$ , la cual puede escribirse como

$$p_\phi = \omega_\infty n_0 b. \quad (2.13)$$

La velocidad de grupo suele tender asintóticamente a 1, salvo los casos donde se tiene una distribución de plasma constante, o distinta de cero en torno al observador, donde resulta

$$n_0^2 = 1 - \frac{\omega_e^2(r_O)}{\omega_\infty^2} = 1 - \frac{\omega_e^2(r_O)}{\omega^2(r_O)A(r_O)}, \quad (2.14)$$

siendo  $r_O$  la coordenada radial del observador (ver [CGV19]).

De esta manera, la ecuación de la trayectoria resulta

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{C} \left[ \frac{1}{AB} \left( \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - \frac{A}{C} \right) \right]^{-1/2}. \quad (2.15)$$

En esta última expresión, vemos que a medida que  $n \rightarrow 1$  (con  $n_0 = 1$ ) recuperamos la ecuación para el vacío que puede encontrarse en la literatura. La Ec. (2.15) nos permite describir la trayectoria de los fotones en el plano ecuatorial en el caso general de deflexión fuerte, que es apropiado para órbitas cerca de la superficie de la estrella. El índice de refracción del plasma en esta expresión introduce la dependencia de las órbitas con la frecuencia. Con el fin de posteriormente facilitar la integración numérica,

introduciremos la nueva variable  $u = 1/r$ , para la cual resulta

$$\frac{d\phi}{du} = \frac{1}{u^2 C} \left[ \frac{1}{AB} \left( \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - \frac{A}{C} \right) \right]^{-1/2}, \quad (2.16)$$

donde tanto los elementos de la métrica como el índice de refracción  $n$ , deben escribirse en términos de  $u$ . Deseamos ahora hacer uso de la Ec. (2.16) para estudiar el trazado de rayos salientes de una estrella de neutrones con una atmósfera plasmática fría y no magnética modelada por (2.8).

Para lograr una descripción más clara y simple de las trayectorias vistas por el observador, cambiaremos ahora el sistema de coordenadas. Ya establecimos que los fotones se desplazarán por un plano que pase por el centro de la estrella, antes tomado como el plano ecuatorial. Desplazando  $90^\circ$  el eje  $\theta = 0$  de dicho sistema, obtenemos un sistema de coordenadas donde los fotones se mueven con  $\phi = cte$ , de modo que la Ec. (2.16) describe ahora la variación de  $\theta$  con respecto a  $r$  (ver Figura 2.2). Ubicaremos entonces al observador sobre el eje  $\theta = 0$  de este nuevo sistema coordenado, a una gran distancia de la estrella,  $r = r_O \rightarrow \infty$ , tal que la recta que une al centro de la estrella con el observador corresponda al parámetro de impacto  $b = 0$ . Estamos interesados en describir rayos que abandonan la superficie de la estrella en  $u_R = 1/R$  y alcanzan al observador en  $u_O = 0, \theta = 0$ . El ángulo  $\theta$  del fotón en el instante en que sale del púlsar puede calcularse como

$$\theta = \int_0^{u_R} \frac{1}{u^2 C} \left[ \frac{1}{AB} \left( \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - \frac{A}{C} \right) \right]^{-1/2} du, \quad (2.17)$$

donde hemos tomado el signo correspondiente al rayo que se aleja de la estrella a medida que gira alrededor de esta en sentido horario.

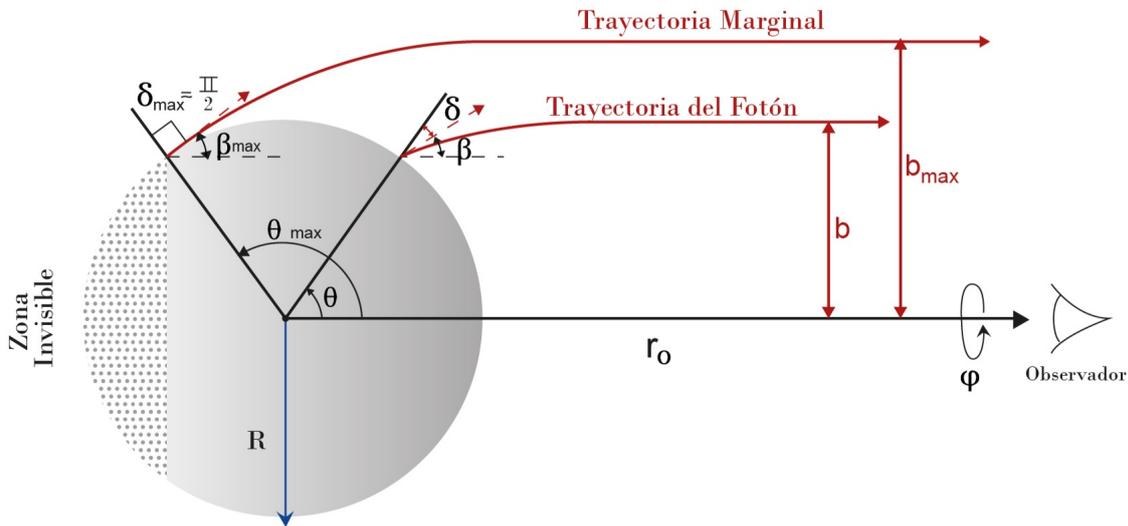


FIGURA 2.2: Trayectoria de un fotón con parámetro de impacto  $b$  desde la superficie estelar en  $R$  hasta el observador en  $r_O$ . El ángulo de deflexión  $\beta$  se calcula como  $\theta - \delta$ .

Ahora bien, si la estrella de neutrones es lo suficientemente compacta, es posible que el valor de  $\theta$  dado por la Ec. (2.17) sea mayor a  $\pi$ , por lo que éste ángulo no será exactamente la coordenada colatitud del fotón al momento de abandonar la superficie estelar, sino mas bien el ángulo desde el vector posición del observador hasta el vector posición del fotón medido en sentido antihorario, como se muestra en la Figura 2.2. De ahora en adelante, cuando hablemos del ángulo  $\theta$  del fotón nos referiremos al ángulo que acabamos de definir, mientras que para hablar de su colatitud usaremos el símbolo  $\Theta$ .

En este punto solo nos resta encontrar una expresión para el parámetro de impacto de los rayos cuya trayectoria conecta la superficie de la estrella con el observador. Para esto, definimos  $\delta$  como el ángulo entre las componentes radial y angular del momento del fotón. En la superficie de la estrella  $r = R$ ,  $\delta$  es el ángulo en que se emite el rayo con respecto a la normal. Como puede comprobarse en el Apéndice 4, es posible expresar el parámetro de impacto  $b$  en términos de  $\delta$  como sigue

$$b = \frac{n(R)}{n_0} \sqrt{\frac{C(R)}{A(R)}} \sin(\delta), \quad (2.18)$$

donde vemos que el parámetro de impacto máximo  $b_{max}$  ocurre para  $\delta = \pi/2$ . De este modo, los fotones provenientes de la superficie de la estrella llegarán al observador con un parámetro de impacto menor o igual a  $b_{max}$ . La presencia del índice de refracción dentro de la expresión del parámetro de impacto predice que el tamaño aparente del púlsar para observador distante se anula cuando  $n \rightarrow 0$ .

A partir de estas expresiones podemos obtener el ángulo máximo  $\theta_{max}(b_{max})$  de la superficie estelar que es visible para el observador (recordemos que  $\theta$  no es exactamente una colatitud, por lo que puede valer mas que  $\pi$ ). De esta forma, el observador tiene acceso a todos los puntos de la superficie con  $\Theta \leq \theta_{max}(b_{max})$ , correspondientes a  $b \leq b_{max}$ , mientras que los puntos con  $\Theta \geq \theta_{max}(b_{max})$  formarán una región invisible. En un espacio tiempo plano se tiene  $\theta_{max} = \pi/2$ , lo que corresponde a la mitad de la estrella visible. Por otro lado, en Relatividad General la lente gravitacional desvía los rayos de luz de forma tal que un observador lejano tiene acceso a una mayor porción de la superficie, viendo además un incremento en el tamaño aparente. En los casos mas extremos, un observador podría ver incluso múltiples imágenes de una misma parte de la estrella ( $\theta_{max} > \pi$ ).

Las expresiones mostradas hasta este punto son válidas para una distribución de plasma genérica, con un índice de refracción  $n = n(x^\alpha, \omega)$  que puede depender tanto de la frecuencia del fotón como de la posición. Para el caso en que  $\omega_e \ll \omega$  se recupera el caso de gravedad pura con  $n = 1$ . La propagación de un fotón a través de este medio requiere que  $\omega_e(r) < \omega(r)$  en todo punto de la trayectoria. La condición necesaria para que los rayos se propaguen desde la superficie de la estrella hasta el infinito resulta entonces

$$\omega_e(r) \sqrt{A(r)} < \omega_\infty \quad (2.19)$$

para todo  $r \geq R$ .

El trazado de rayos numérico requiere de una distribución específica de plasma, por lo que siguiendo el trabajo [Rog15], elegimos un ejemplo físicamente motivado basado en la densidad de Goldreich-Julian. Normalmente, La magnetosfera de los pulsares contiene plasma con densidades que son sostenidas por corrientes Goldreich-Julian [GJ69], transfiriendo portadores de carga desde la superficie de la estrella de neutrones a la magnetosfera. Por lo tanto, estas corrientes proporcionan un límite inferior para la concentración de portadores de carga en una magnetosfera estándar. Usando la frecuencia plasmática presentada en la Ec. (2.9), consideremos una ley de potencias radial

$$N(r) = \frac{N_0}{r^h}, \quad (2.20)$$

tomando  $h \geq 0$ . Con el fin de simplificar la integración numérica y de deshacernos del mayor número de constantes triviales, introducimos ahora el parámetro  $\epsilon$ , definido como el cociente entre la frecuencia de plasma y la frecuencia del fotón sobre la superficie de la estrella,

$$\epsilon = \frac{\omega_e(R)}{\omega(R)}, \quad (2.21)$$

de forma que el índice de refracción puede reescribirse de manera sencilla como

$$n^2(r) = 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \left( \frac{R}{r} \right)^h \epsilon^2. \quad (2.22)$$

Notemos que la condición de propagación presentada anteriormente en la Ec. (2.19), junto con las Ecs. (2.7) y (2.21) nos imponen

$$\epsilon^2 < 1, \quad (2.23)$$

condición que resultará suficiente para la propagación en el caso en que la densidad de plasma decae asintóticamente a cero mas rápido de lo que crece  $A(r)$ . Para el caso en que la densidad de plasma no se anula en torno al observador, la condición de propagación debe deducirse considerando también la Ec. (2.14), resultando para el caso de plasma constante

$$\epsilon^2 < A(R). \quad (2.24)$$

Esta última expresión deja en evidencia que la propagación depende del espaciotiempo elegido. Por otro lado, señalamos la correspondencia entre  $\epsilon = 0$  y el caso del gravedad pura.

### 2.3.1. Resumen

Contamos ya con todas las herramientas necesarias para realizar el trazado de rayos desde un objeto sumamente compacto y relativista sumergido en el seno de un medio plasmático frío no magnetizado hasta un observador ubicado en el infinito. A continuación, para la comodidad del lector, listamos los pasos a seguir para llevar adelante el trazado de rayos.

1. Seleccione una métrica. Algunos ejemplos se muestran en el Cuadro 2.1.
2. Fije los parámetros radio de la estrella  $R$  ( $R > 2M$ ), carga  $Q$  (Tabla 2.1), cociente de frecuencias  $\epsilon$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ ) y distribución de plasma  $h$  ( $h \geq 0$ ).
3. Calcule la velocidad de grupo asintótica  $n_0$  (en el infinito) a partir de la Ec. (2.14) y compruebe que  $\epsilon$  satisface la condición de propagación pertinente.
4. Obtenga el parámetro de impacto máximo  $b_{max}$  a partir de la Ec. (2.18) y elija un parámetro de impacto  $b$  en el rango  $0 < b < b_{max}$ .
5. Calcule el ángulo  $\theta(b)$  desde el cual el rayo abandonará la superficie estelar según la Ec. (2.17).
6. Partiendo de la posición inicial  $(u_0, \phi_0) = (1/R, \theta)$ , integre numéricamente la trayectoria del rayo a partir de la Ec. (2.16).

### 2.3.2. Resultados

A continuación, en los Cuadros 2.2 a 2.5 se muestran los trazados de rayos obtenidos para las métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Garfinkle, Horowitz y Strominger. Se trabajó considerando una estrella altamente relativista con un radio  $R/r_S = 1,60$ . Los rayos trazados cuentan con parámetros de impacto positivos que van de 0 a  $b_{max}$ , cuyos valores se corresponden a los múltiplos enteros de  $b_{max}/5$ . El valor absoluto de la carga en cada figura es el mismo para todas las métricas,  $Q = 0,99$ . Si bien es físicamente poco probable encontrar tal carga en estrellas de neutrones realistas, elegimos este valor dado que permite distinguir con mayor claridad las diferentes trayectorias obtenidas para cada modelo métrico. Aclaremos que se trabajó además con  $Q = 0,00, 0,25, 0,50$  y  $0,75$ . Por su parte, cada tabla se corresponde a una distribución de plasma en particular, y compara los resultados obtenidos para distintos cocientes  $\epsilon$  de frecuencias.

Además de los perfiles mencionados anteriormente, también consideraremos uno con decaimiento exponencial, de modo que el índice de refracción se exprese como

$$n_e^2(r) = 1 - \frac{A(r)}{A(R)} e^{R-r} \epsilon^2. \quad (2.25)$$

Si bien este perfil no tiene fundamentos teóricos u observacionales, al tener un decaimiento radial pronunciado, los efectos sobre las trayectorias de los rayos se acentúan, por lo cual vale la pena considerarlo al menos desde un punto de vista académico. Los trazados de rayos obtenidos bajo este perfil se muestran en el Cuadro 2.2.

El siguiente perfil de plasma que tendremos en cuenta será el empleado en [Rog15], donde se trabajó con  $h = 3$  dado que la densidad de Goldreich-Julian depende de la fuerza del campo magnético polar. De este modo, el índice de refracción se expresa en todo el espacio como

$$n_3^2(r) = 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \epsilon^2. \quad (2.26)$$

Los resultados obtenidos para esta distribución de plasma se muestran en el Cuadro 2.3.

Otro perfil de interés puede obtenerse al tomar  $h = 2$ , con lo que se tiene

$$n_2^2(r) = 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \epsilon^2. \quad (2.27)$$

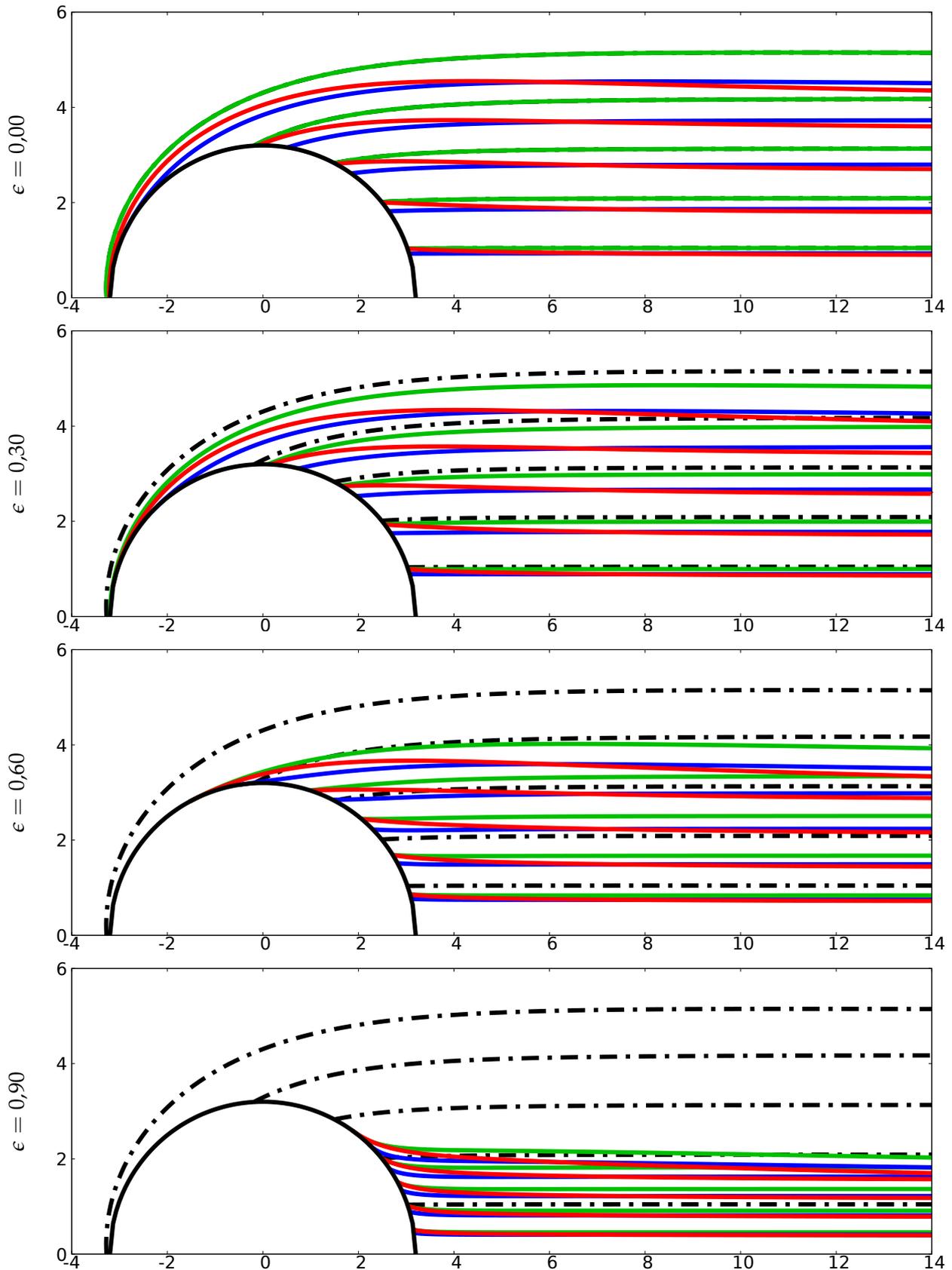
De este modo, la frecuencia del plasma  $\omega_e$  va como  $1/r$ , de la misma forma que el potencial eléctrico de una carga puntual. Las figuras correspondientes a esta distribución se muestran en el Cuadro 2.4.

Por último, consideraremos una distribución de plasma homogénea con densidad constante, de modo que el índice de refracción se expresa como

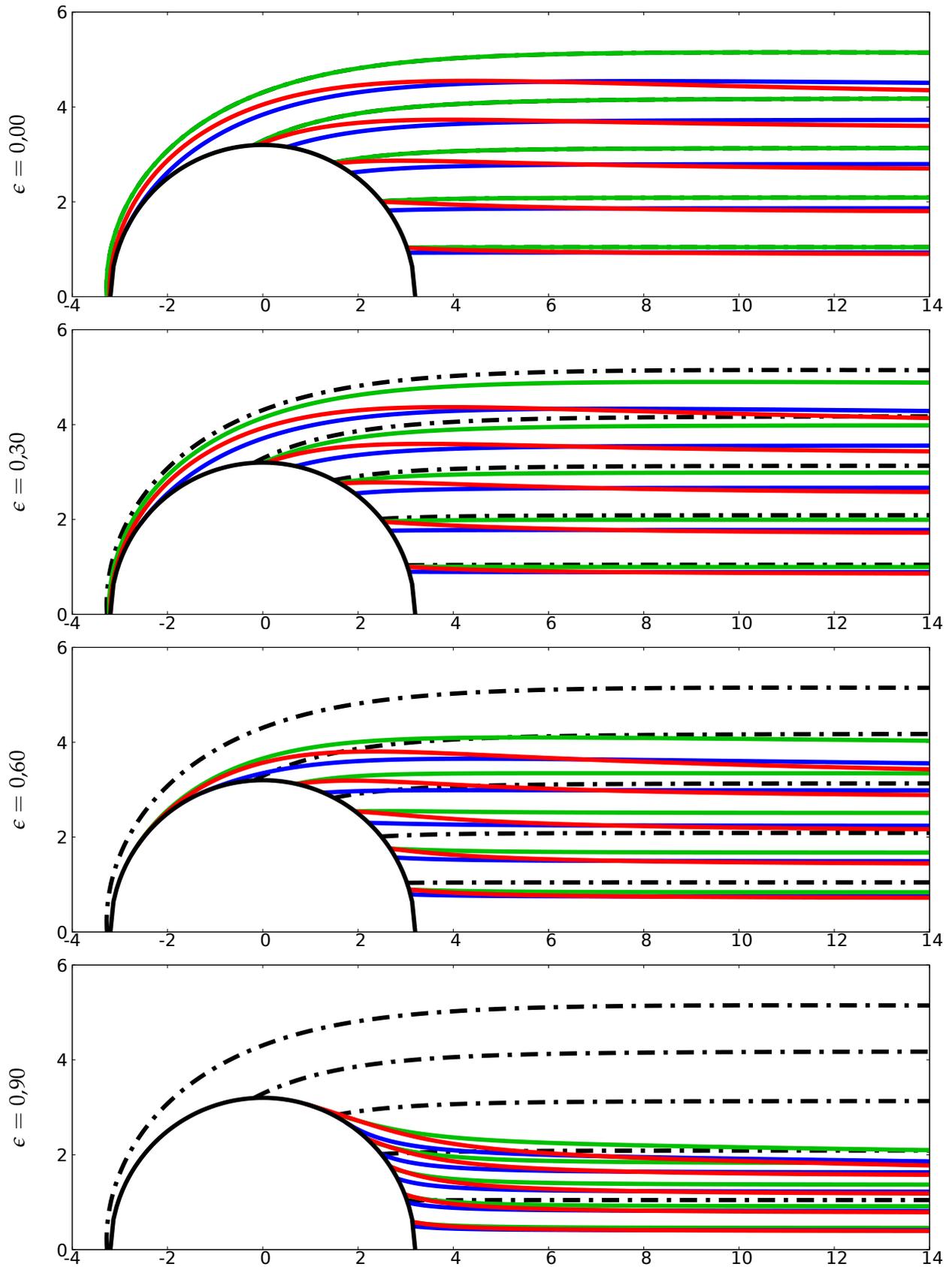
$$n_0^2(r) = 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \epsilon^2. \quad (2.28)$$

Como se menciona en los trabajos [CG18], [CGR19] y [CGV19], existe una correspondencia entre la dinámica de los rayos de luz de frecuencia  $\omega$  en un plasma homogéneo, no magnetizado y libre de presión, con frecuencia  $\omega_e$ , y el movimiento sobre geodésicas temporales de partículas masivas de masa  $\mu$  y energía  $E_\infty$  medidas por un observador asintótico en el mismo campo gravitacional. En particular, dada la transformación  $\omega_e \rightarrow \mu$  y  $\omega_\infty \rightarrow E_\infty$  es posible emplear el mismo hamiltoniano para describir ambos fenómenos. De esta forma, una densidad de plasma constante supone un modelo de gran interés, donde los fotones se comportan como si tuvieran una masa inercial efectiva. De hecho, se ha sugerido en la literatura [DRD16; Dey+21] que neutrinos provenientes de casquetes de magnetosferas en el régimen de PeV podrían ser detectados por distintos detectores de neutrinos como el IceCube. Su dinámica puede entonces ser equivalentemente estudiada a partir del estudio de fotones en un plasma homogéneo. Los gráficos obtenidos para esta distribución se muestran en el Cuadro 2.5.

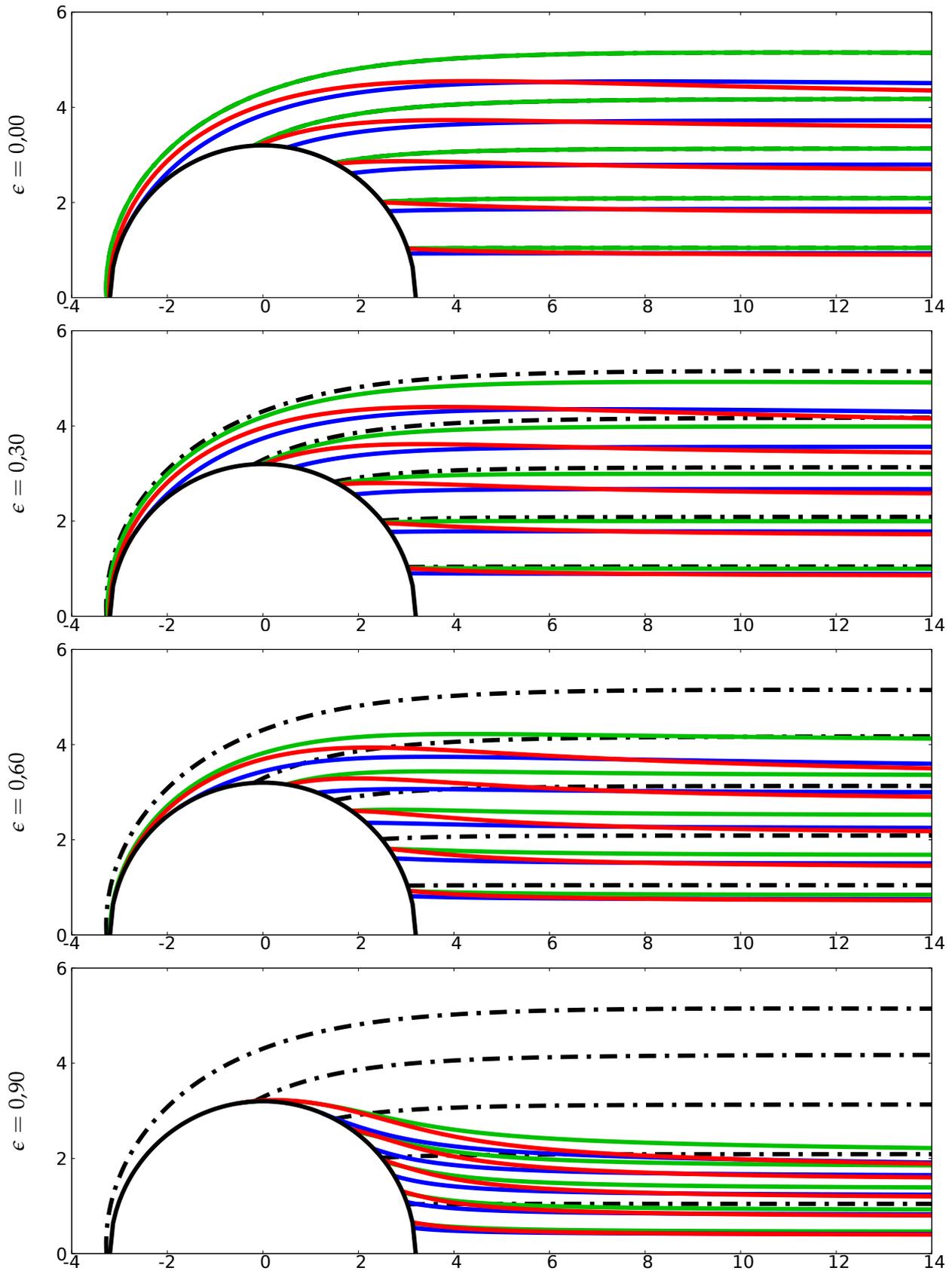
En general, observamos que las concentraciones de plasma producen un efecto de lente divergente que compite con el efecto convergente de la lente gravitacional. De este modo, mientras que el potencial gravitatorio intenta desviar los rayos de luz hacia la estrella, incrementando los valores de  $\theta_{max}$  y  $b_{max}$ , la difracción producida por el plasma desvía los rayos en sentido contrario, apartándolos del objeto y reduciendo los valores mencionados. Esto produce que las trayectorias de los fotones tengan una forma de S, donde el efecto convergente de la lente gravitacional domina en las proximidades de la superficie, siendo superado por la divergencia de la lente plasmática al alejarnos de esta. Estos efectos se acentúan al incrementar la densidad del plasma, es decir, para valores mayores de  $\epsilon$ , de modo que para  $\epsilon \rightarrow 1$  se tiene  $\theta_{max} \rightarrow 0$  y  $b_{max} \rightarrow 0$ , con lo que la estrella deja de ser visible.



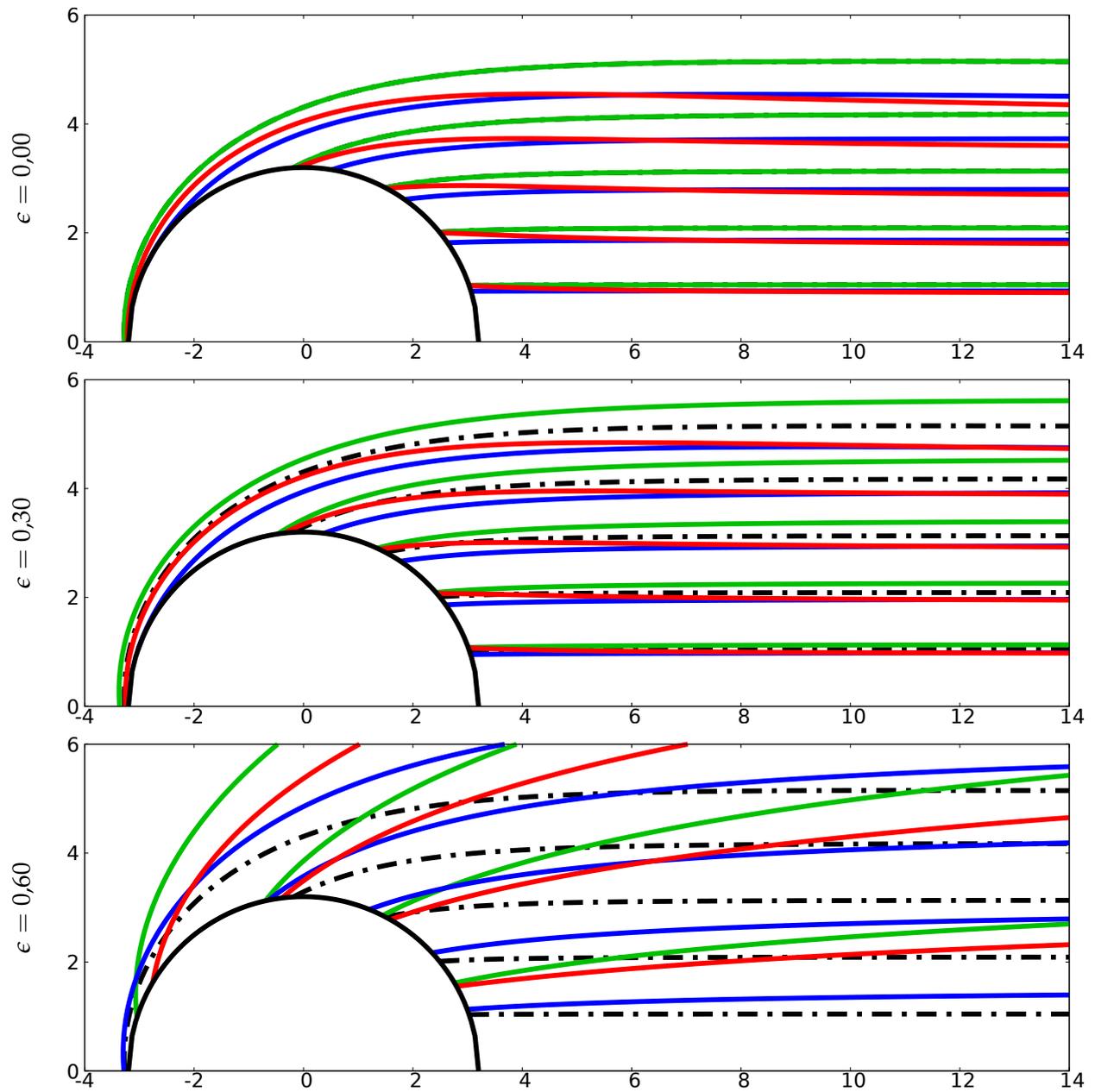
CUADRO 2.2: Trazado de Rayos.  $R = 3,2$ ,  $Q = 0,99$ , densidad de plasma con decaimiento exponencial. La línea punteada corresponde a Schwarzschild sin plasma, la verde a Schwarzschild, la azul a Reissner-Nordström y la roja a Garfinkle-Horowitz-Strominger.



CUADRO 2.3: Trazado de Rayos.  $R = 3,2$ ,  $Q = 0,99$ ,  $h = 3$ . La línea punteada corresponde a Schwarzschild sin plasma, la verde a Schwarzschild, la azul a Reissner-Nordström y la roja a Garfinkle-Horowitz-Strominger.



CUADRO 2.4: Trazado de Rayos.  $R = 3,2$ ,  $Q = 0,99$ ,  $h = 2$ . La línea punteada corresponde a Schwarzschild sin plasma, la verde a Schwarzschild, la azul a Reissner-Nordström y la roja a Garfinkle-Horowitz-Strominger.



CUADRO 2.5: Trazado de Rayos.  $R = 3,2$ ,  $Q = 0,99$ ,  $h = 0$ . La línea punteada corresponde a Schwarzschild sin plasma, la verde a Schwarzschild, la azul a Reissner-Nordström y la roja a Garfinkle-Horowitz-Strominger.

Respecto a la distribución del plasma, puede notarse que los efectos de lente divergente que este genera se ven magnificados al incrementar la tasa de decaimiento de la concentración del plasma. De este modo, el perfil de plasma con decaimiento exponencial presenta propiedades de lente divergente más marcadas que los perfiles que obedecen una ley de potencias, mientras que una distribución homogénea de plasma no produce efecto divergente alguno. Esto se condice con las nociones básicas de óptica en medios refractivos, que nos indican que mientras mayor sea la variación del índice de refracción en una interfase mayor será su poder de deflexión.

Algo curioso ocurre al considerar una distribución de plasma homogénea. Como ya dijimos, el efecto de lente divergente del plasma se encuentra completamente anulado en este perfil. En el Cuadro 2.5 se ve claramente que tanto el tamaño aparente como la superficie visible de la estrella se incrementan al aumentar el coeficiente  $\epsilon$ . Si analizamos las Ecs. (2.14) y (2.18), veremos que esto se debe a que, dada una densidad de plasma constante,  $n_0 \rightarrow 0$  a medida que  $\epsilon \rightarrow 1$ , por lo que el parámetro de impacto  $b$  diverge, haciendo que el tamaño aparente de la estrella tienda a infinito. Añadimos que, como podrá comprobar el lector, el cociente  $\epsilon = 0,90$  no satisface las condiciones de propagación para este perfil, por lo que no fue graficado.

Notamos que el incremento de la carga  $Q$  de la estrella tiende a disminuir tanto la superficie observable al reducir el valor de  $\theta_{max}$ , como el tamaño aparente de la misma al reducir el valor de  $b_{max}$ . No es que la carga tenga un efecto de lente divergente, sino que su presencia limita la potencia de la lente gravitacional. Además, vemos que estos efectos dependen del modelo de espaciotiempo que se tenga en consideración. Al emplear la métrica de Reissner-Nordström el ángulo  $\theta_{max}$  se ve claramente mermado, mientras que el tamaño aparente de la estrella se reduce apreciablemente. Esta disminución en el tamaño aparente es incluso levemente mayor en el espaciotiempo de Garfinkle-Horowitz-Strominger, donde, sin embargo, la superficie observable de la estrella se ve apenas reducida. De esta forma, si nos encontramos en Reissner-Nordström veremos una menor cantidad de la superficie de una estrella aparentemente más grande que si nos encontramos en Garfinkle-Horowitz-Strominger.

## 2.4. Perfil de Pulso

Consideremos una estrella de neutrones rodeada por plasma frío y no magnetizado, con brillantes regiones polares de emisión en su superficie que producirán pulsos periódicos en el flujo de radiación observado, ya sean puntos calientes de emisión térmica o polos de emisión electromagnética. La geometría de este modelo se encuentra sumamente detallada en [PFC83], y pueden encontrarse de forma resumida en [Rog15]. Como vimos anteriormente, en estos sistemas el efecto de la refracción es equiparable al de lente gravitacional, compitiendo muchas veces entre si, por lo que este modelo proporciona un ejemplo físicamente relevante.

La superficie de la estrella, a  $r = R$ , es descrita por las coordenadas esféricas angulares  $\Theta$  y  $\phi$  que empleamos anteriormente. En general, emplearemos  $\theta$  en lugar de  $\Theta$ , recordando que dicho ángulo, correspondiente a la Ec. (2.17), no es exactamente la colatitud. Situaremos al observador sobre el semieje  $z$  positivo ( $\Theta = 0$ ), en  $r = r_O \rightarrow \infty$ , definiendo su sistema de coordenadas con respecto a un plano perpendicular a la línea de visión (el "detector"). La superficie del detector registra el flujo recibido del objeto (la imagen) sobre los ángulos de su esfera celeste  $\theta'$  y  $\phi'$ . Dado que la estrella es esféricamente simétrica, las trayectorias se mantendrán en un mismo plano meridiano, por lo que podemos suponer  $\phi = \phi'$ .

Dicho esto, podemos expresar el elemento de ángulo sólido en el sistema de coordenadas del observador de la siguiente forma

$$d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\phi, \quad (2.29)$$

donde se supone que el ángulo  $\theta'$  es lo suficientemente pequeño, por lo que podemos aproximar

$$d\Omega' = \theta' d\theta' d\phi. \quad (2.30)$$

Esta hipótesis nos permite expresar el ángulo latitudinal  $\theta'$  en términos del parámetro de impacto  $b$ , siendo  $b \approx r_O \theta'$ , con lo que resulta

$$d\Omega' = \frac{1}{r_O^2} b db d\phi, \quad (2.31)$$

donde  $b$  viene dado por la Ec. (2.18) y varía entre 0 y  $b_{max}$  para las trayectorias que parten de la superficie estelar. De esta forma, empleando la aproximación  $b \approx r_O \theta'$  y la Ec. (2.17) podemos mapear cada punto de la imagen observada en  $(\theta'(b), \phi')$  a su ubicación sobre la superficie de la estrella en  $(\theta(b), \phi)$ , recordando que  $\phi = \phi'$ . Es decir, podemos mapear el elemento de ángulo sólido bidimensional del observador en el correspondiente elemento de área superficial en la estrella. Para encontrar el perfil de pulso en cuestión, debemos encontrar el flujo de la región de emisión en la superficie estelar y calcular la proyección de ésta en el cielo del observador.

Consideremos por ahora un único casquete polar de emisión, también llamado hotspot o cap en la literatura, de forma circular y semiapertura angular  $\theta_c$ , cuya posición respecto al centro de la estrella se encuentra indicada por el versor  $\hat{C}$ , estando centrado en  $\theta = \theta_0$ . Definimos además el versor a lo largo de la línea de visión  $\hat{L}$  en sentido saliente del púlsar hacia el observador, resultando  $\theta_0 = \cos^{-1} \hat{C} \cdot \hat{L}$  el ángulo entre ambos versores (dadas las simetrías del sistema,  $\theta_0$  si puede ser tratado como una colatitud). En general  $\theta_0$  será una cantidad dependiente del tiempo, ya que la estrella rota sobre un eje  $\hat{R}$  que no tiene por que coincidir con la línea de visión  $\hat{L}$ . El ángulo entre el eje de rotación  $\hat{R}$  y la línea de visión se define como  $\xi = \cos^{-1} \hat{R} \cdot \hat{L}$ , mientras que el ángulo entre el eje de rotación y el centro del casquete viene dado por  $\chi = \cos^{-1} \hat{R} \cdot \hat{C}$ . Cabe aclarar que tanto  $\xi$  como  $\chi$  son constantes. Una representación pictórica de los ángulos utilizados y de la configuración geométrica de la estrella, el casquete y el observador puede encontrarse en la Fig. 2.3.

Para encontrar la posición angular del casquete en función del tiempo  $t$ , debemos expresar la fase del púlsar  $\gamma_p(t) = \Omega t + \gamma_0$ , donde  $\Omega = 2\pi/P$  es la velocidad angular, siendo  $P$  el período de rotación de la estrella y  $\gamma_0$  una fase inicial arbitraria. De esta forma, la orientación latitudinal del casquete puede

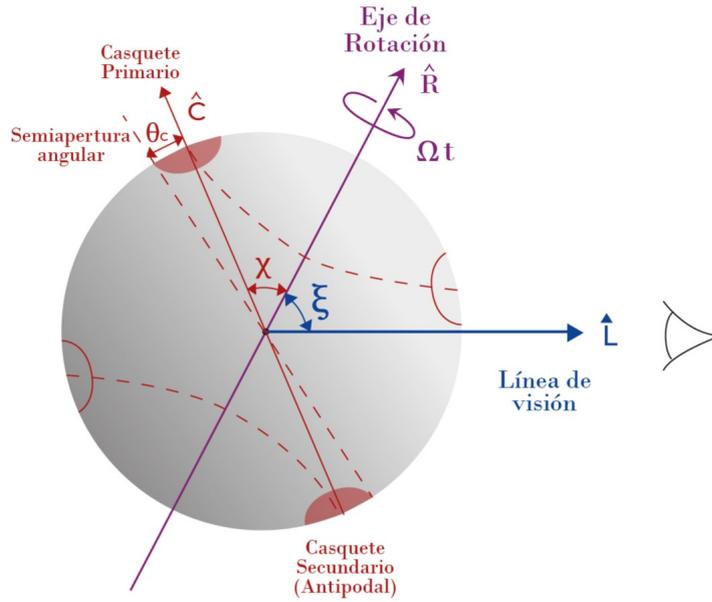


FIGURA 2.3: Configuración angular entre el observador  $\hat{L}$ , el eje de rotación de la estrella  $\hat{R}$  y el centro del casquete emisor  $\hat{C}$ , de semiapertura angular  $\theta_c$ .

expresarse en términos de la fase como

$$\theta_0(t) = \cos^{-1} [\cos \xi \cos \chi - \sin \xi \sin \chi \cos \gamma_p(t)], \quad (2.32)$$

donde puede verse que  $\gamma_p(t) = 2n\pi$  corresponde al valor máximo de  $\theta_0(t)$ . Para un único casquete, se toma por convención  $0 \leq \xi \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \chi \leq \pi$  y  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ .

En un sistema de coordenadas esféricas solidarias al casquete, cuyo polo viene dado por el versor  $\hat{C}$ , un punto arbitrario en el borde del casquete se expresa como  $(\theta_c, \Phi)$ , mientras que el mismo punto se expresa como  $(\theta, \phi_b)$  en las coordenadas del objeto, marcando  $\phi_b$  el límite del casquete en el paralelo  $\theta$ . Usando la transformación entre los componentes cartesianos de los dos sistemas, llegamos a una expresión para  $\phi_b(\theta)$  en términos de las coordenadas del objeto,

$$\phi_b(\theta) = \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta_0 \sin \theta} \right), \quad (2.33)$$

donde  $2\phi_b(\theta)$  debe entenderse como la longitud angular del segmento de círculo en el cielo del observador con un mismo parámetro de impacto  $b(\theta)$ , correspondiente a la intersección unidimensional entre el paralelo  $\theta$  y el casquete emisor en la superficie de la estrella. De esta forma, podemos determinar los límites del casquete en las coordenadas del observador en un corte a lo largo del paralelo  $\theta$  para una orientación  $\theta_0$  y una semiapertura  $\theta_c$  dadas. Sobre dicho paralelo, el casquete se extiende en el rango  $[-\phi_b, \phi_b]$ , por lo que definiremos la función  $h(\theta, \theta_c, \theta_0) = 2\phi_b$  como el rango de valores de  $\phi$  que pertenecen a la intersección unidimensional entre el paralelo  $\theta$  y el casquete emisor,

$$h(\theta, \theta_c, \theta_0) = 2 \cdot \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta_0 \sin \theta} \right), \quad (2.34)$$

lo que nos permitirá simplificar el elemento de ángulo sólido del observador.

En realidad, la definición de  $\phi_b$  es más complicada que la descrita anteriormente, dado que no está bien definida para cualquier orientación  $\theta_0$ . Este punto se discute en mayor detalle en [PFC83] y [DO95].

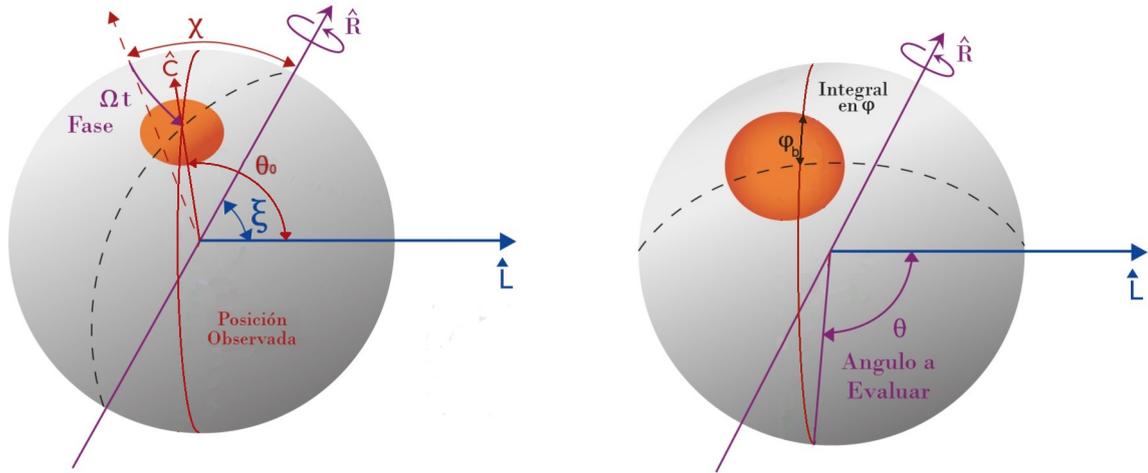


FIGURA 2.4: En la figura de la izquierda se muestra la dependencia de la posición observada  $\theta_0$  del casquete con la fase  $\Omega t$  del púlsar. En la figura de la derecha vemos una representación gráfica de las integrales en  $\phi$  para un dado  $\theta$ ,  $\phi_b$  y  $h$ .

Sin embargo, para los fines de este trabajo, nos basta con definir

$$h(\theta, \theta_c, \theta_0) = \begin{cases} 2\pi, & \Delta \leq -1 \\ 2 \arccos(\Delta), & -1 < \Delta < +1 \\ 0, & +1 \leq \Delta \end{cases} \quad (2.35)$$

siendo  $\Delta$  el argumento de la función  $\cos^{-1}$  en la Ec. (2.34).

Introduciremos ahora el parámetro de impacto normalizado  $x = b/M$  ( $M = 1$ ), el cual ayudará evitar problemas de confusión entre  $b$  y la función métrica  $B(r)$ . De este modo, el segmento de ángulo sólido puede expresarse como

$$d\Omega' = \frac{1}{r_0^2} h(\theta(x), \theta_c, \theta_0) x dx, \quad (2.36)$$

de forma que, para determinar el flujo observable de un casquete de emisión, solo se requiere una integral unidimensional sobre el parámetro de impacto  $x$ . Para contemplar la aparición de imágenes múltiples, debemos permitir que  $\theta$  tome todos los valores en el intervalo  $[0, \theta_{max}]$ . Por conveniencia, reescribimos la Ec. (2.17) en términos de  $x$  como

$$\theta = \int_0^{u_R} \frac{1}{u^2 C} \left[ \frac{1}{AB} \left( \frac{n^2}{n_0^2} x^2 - \frac{A}{C} \right) \right]^{-1/2} du. \quad (2.37)$$

La intensidad emitida  $I_{em}$  por un punto brillante sobre la superficie estelar a  $r = R$  en un medio refractivo se relaciona con la intensidad observada  $I_{obs}$  de dicho punto por un detector en  $r = r_0$  por medio de la frecuencia de la luz, según la relación

$$\frac{I_{obs}}{\omega(r_0)^3 n(r_0)^2} = \frac{I_{em}}{\omega(R)^3 n(R)^2} = cte, \quad (2.38)$$

encontrada por Bicák y Hadrava en [BH75]. La intensidad observada resulta entonces

$$I_{obs} = \left( \frac{A(R)}{A(r_0)} \right)^{3/2} \left( \frac{n(r_0)}{n(R)} \right)^2 I_{em} \quad (2.39)$$

Contemplaremos ahora la posibilidad de que la intensidad emitida por el casquete polar dependa de el ángulo de emisión  $\delta$  respecto a la normal de la superficie estelar. Tomemos por conveniencia

$$I_{em} = r_O^2 \frac{A(r_O)^{3/2}}{C(R)} \left( \frac{n(R)}{n(r_O)} \right)^2 I_0 f_B(\delta), \quad (2.40)$$

donde  $I_0$  es una constante paramétrica y  $f_B$  describe la anisotropía de la emisión. El factor  $r_O^2$  se ha incluido para poder cancelarlo al juntar esta expresión con la Ec. (2.36), y se ha dividido por  $C(R)$  para normalizar el flujo por el área de emisión de la estrella. De esta manera, la expresión para el flujo observado puede reescribirse como

$$I_{obs} = r_O^2 \frac{A(R)^{3/2}}{C(R)} I_0 f_B(\delta). \quad (2.41)$$

Por su parte, el ángulo de emisión en la superficie es una función de  $x$  ya que, como puede deducirse de la Ec. (2.18), resulta

$$\delta = \arcsin \left( \frac{x}{x_{max}} \right), \quad (2.42)$$

de modo que podemos expresar el diferencial de flujo observado  $dF$  en el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega'$  del detector como

$$dF = I_{obs} d\Omega' = \frac{A(R)^{3/2}}{C(R)} I_0 f_B[\delta(x)] h[\theta(x), \theta_c, \theta_0] x dx. \quad (2.43)$$

Para obtener el flujo total observado  $F$  solo resta integrar la expresión anterior en  $x$ , obteniendo

$$F = \frac{A(R)^{3/2}}{C(R)} I_0 \int_0^{x_{max}} f_B[\delta(x)] h[\theta(x), \theta_c, \theta_0] x dx. \quad (2.44)$$

Este resultado, al que se llega en [Rog15], es similar al obtenido por Pechenick, Ftaclas y Cohen en [PFC83]. Sin embargo, los valores de  $\theta$  y  $x_{max}$  dependen ahora de las frecuencias  $\omega$  y  $\omega_e$ , introduciendo de este modo los efectos producidos por la presencia del plasma y su distribución.

La existencia de un segundo casquete antipodal e idéntico al primero requiere simplemente de la suma de una segunda componente con  $\theta_{0,2} = \pi - \theta_{0,1}$  en el cálculo del flujo,

$$F_T = F(\theta_0) + F(\pi - \theta_0) = F(\theta_{0,1}) + F(\theta_{0,2}), \quad (2.45)$$

siendo  $F_T$  el flujo total observado, y  $F$  el flujo producido por cada uno de los casquetes, dado por la Ec. (2.44).

### 2.4.1. Resumen

Ya nos encontramos en condiciones de calcular la curva de luminosidad de un pulsar embebido en un medio plasmático frío no magnetizado, registrada por un observador lejano. Para la comodidad del lector, listamos a continuación los pasos a seguir para la obtención del perfil de pulso de una estrella de neutrones con casquetes de emisión circulares y uniformes, únicos y antipodales.

1. Elegir los elementos métricos  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $C(r)$ .
2. Fijar los parámetros  $R$ ,  $Q$ ,  $\epsilon$  y  $h$ , atendiendo sus respectivas limitaciones.
3. Seleccionar los parámetros ángulo entre el eje de rotación y la línea de visión  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq \pi/2$ ), ángulo entre el eje de rotación y el centro del casquete  $\chi$  ( $0 \leq \chi \leq \pi$ ) y semiapertura angular del casquete  $\theta_c$  ( $0 \leq \theta_c \leq \pi$ ).

4. Elegir una función de emisión superficial  $f_B[\delta(x)]$ .
5. Calcular el parámetro de impacto máximo  $x_{max}$  a partir de la Ec. (2.18).
6. Discretizar los valores a emplear de la fase  $\gamma_p \in [0, 2\pi]$  y el parámetro de impacto  $x \in [0, x_{max}]$  y evaluar en ellos  $\theta_0(t)$  mediante la Ec. (2.32),  $\theta(x)$  mediante la Ec. (2.37) y  $h(\theta, \theta_c, \theta_0)$  mediante la Ec. (2.34).
7. Para cada fase  $\gamma_p$ , integrar numéricamente el flujo observado  $F$  mediante la Ec. (2.44).
8. Repetir el procedimiento barriendo valores de  $\gamma_p$  entre 0 y  $\pi$  (el perfil de un solo casquete es simétrico respecto a  $\pi$ ) para obtener el perfil de pulso de un casquete único.
9. En el caso de contar con un segundo casquete idéntico y antipodal al primero, añadir el flujo de este último según la Ec. (2.45) barriendo los valores de  $\gamma_p$  entre 0 y  $\pi/2$  (el perfil de los casquetes antipodales es simétrico respecto a  $\pi/2$ ). En este caso, se toma  $\chi_1$  tal que  $0 \leq \chi \leq \pi/2$ .

### 2.4.2. Resultados

Para obtener las curvas de luminosidad debemos trazar el flujo observado  $F$  en función del período de la estrella  $\gamma_p$ , recordando la dependencia temporal de  $\theta_0$ . Este procedimiento se realizó para una variedad de relaciones entre frecuencias  $\epsilon = \omega_c(R)/\omega(R)$ , cargas netas  $Q$  y relaciones de radio  $R/r_h$ , siendo  $r_h$  el radio del horizonte de eventos, dado por  $r_s = 2M$  para las métricas *SH* y *GHS*, mientras que para *RN* se tiene

$$r_h = \frac{r_s + \sqrt{r_s^2 - 4Q^2}}{2}. \quad (2.46)$$

Las relaciones entre radios empleadas son tales que la mas compacta muestra múltiples imágenes de la superficie estelar, que resulta ser completamente visible. Incrementamos progresivamente esta relación en cada gráfico posterior para mostrar cómo cambian los perfiles de pulso para radios mayores. Las distribuciones de densidad de plasma que se usaron son las mismos que se introdujeron en la subsección anterior, dando como resultado los índices de refracción

$$\begin{aligned} n_\epsilon^2(r) &= 1 - \frac{A(r)}{A(R)} e^{R-r} \epsilon^2, & n_3^2(r) &= 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \epsilon^2, \\ n_2^2(r) &= 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \epsilon^2, & n_0^2(r) &= 1 - \frac{A(r)}{A(R)} \epsilon^2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Consideramos casquetes polares de tamaño constante con semiapertura angular  $\theta_c = 5^\circ$ , únicos o antipodales, asumiendo emisión isotrópica al tomar  $f_B(\delta) = 1$ . El valor específico de  $I_0$  sólo afecta la escala del perfil de pulso dejando sin cambios su morfología, por lo que se tomó  $I_0 = 1$ .

En primer lugar, se consideró un único casquete en una configuración ortogonal con  $\chi = \xi = \pi/2$ . Los resultados se muestran en los Cuadros 2.6 a 2.9 para las métricas de Reissner-Nordström y Garfinkle, Horowitz y Strominger. Se consideraron estrellas altamente relativistas con radios  $R/r_h = 1,60, 1,675, 2$  y  $3$ . Se tomaron los valores  $Q = 0,25, 0,50, 0,75$  y  $0,99$  para la carga neta. Por su parte, cada tabla se corresponde a una distribución de plasma en particular, y compara los resultados obtenidos para distintos cocientes de frecuencias, con valores  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$ .

Lo primero que notamos es que, para estrellas sumamente compactas y bajo ciertas condiciones, el flujo observado es mucho mayor cuando el casquete emisor se encuentra en la parte posterior de la estrella ( $\Omega t = \pi$ ) que cuando se encuentra en la parte anterior ( $\Omega t = 0$ ). Este fenómeno sumamente anti intuitivo se debe a que, al ser tan compacta la estrella, un objeto situado en su parte posterior produce

múltiples imágenes. De esta forma, cuando el casquete se halla en esta posición, su imagen forma un anillo no demasiado grueso pero de gran apertura angular, que ocupa buena parte del cielo del observador. Al entrar el casquete en la zona de formación de imágenes múltiples (esto es, para  $\theta_0$  suficientemente grandes), la luminosidad se dispara dando como resultado los perfiles de pulso observados. En general, este efecto se incrementa con la compacticidad de la estrella, anulándose para las estrellas de mayor radio cuya superficie ya no es completamente visible, por lo que no forman imágenes múltiples. Vemos además que, mientras mayor sea el radio de la estrella, mayor será su luminosidad relativa en  $\Omega t = 0$ . Esto se debe a que, al ser menos compactas, las trayectorias de los rayos de luz se ven menos perturbadas por el campo gravitatorio, de modo que no son tan fuertemente desviados y una mayor cantidad de ellos consiguen llegar al observador. Paralelamente, al incrementar el radio disminuye la porción del período durante la cual es visible el casquete.

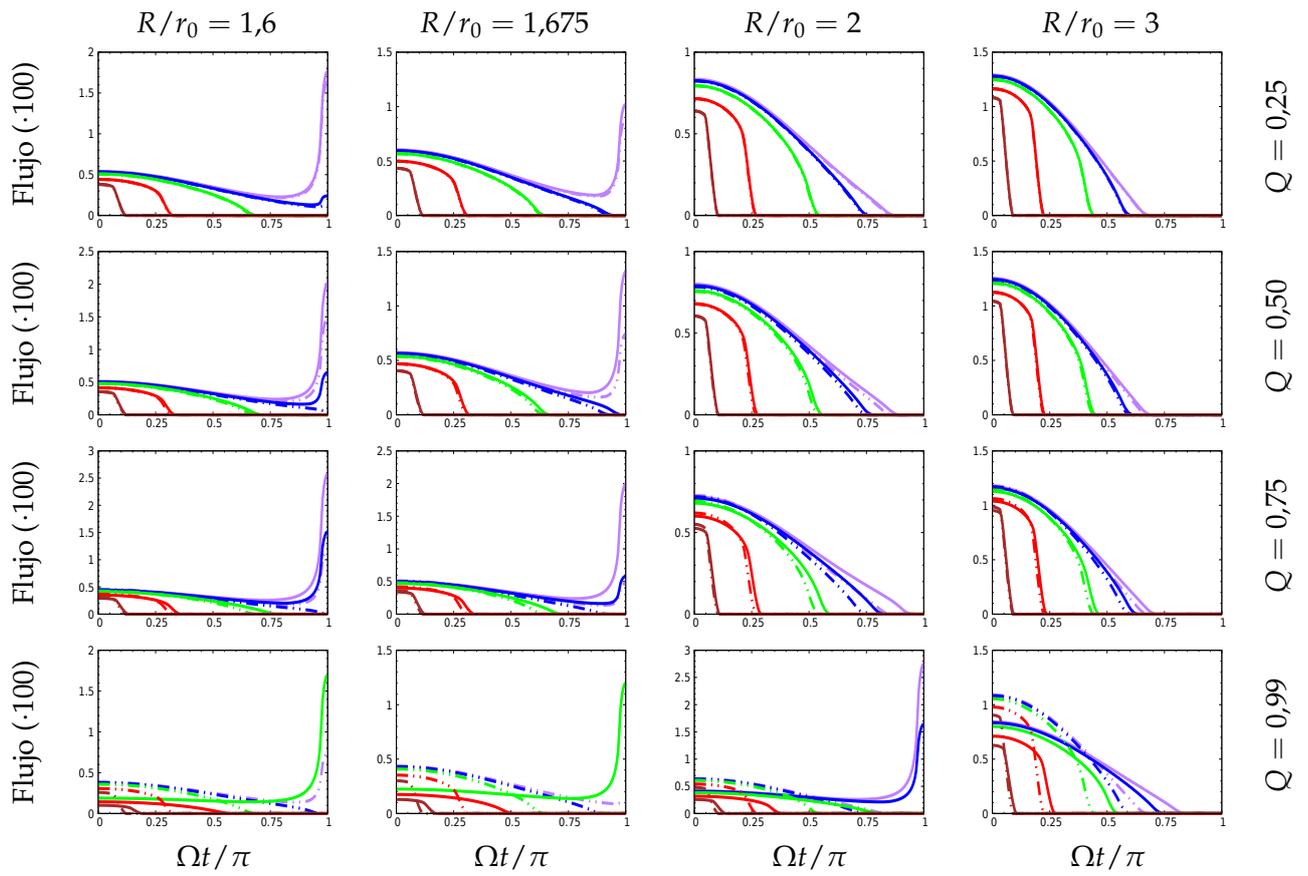
Puede verse que, al aumentar la carga neta, tanto el flujo como la fracción del período durante la cual es visible el casquete (o en su defecto la magnitud del pico al producirse las imágenes múltiples) disminuyen. Aunque este efecto es leve para GHS y difícil de observar para RN dado que variamos  $R$  con  $Q$ , se condice con los resultados obtenidos en la subsección anterior, donde vimos que al incrementar la carga neta disminuyen tanto el tamaño aparente de la estrella (flujo) como su superficie observable (fracción del período en que es observable). Al mismo tiempo, vemos que mientras mayor sea  $\epsilon$  menor será el flujo observado y mas rápidamente decaerá este a cero. Nuevamente, esto coincide con lo observado en la sección anterior, donde al incrementar la densidad del plasma se reducían tanto el tamaño aparente de la estrella como su superficie observable.

Por otro lado, notamos que el flujo en  $\Omega t = 0$  es mayor para la métrica GHS, mientras que al aumentar  $\Omega t$  pasa a ser mayor el flujo para RN, teniendo un mayor pico en  $\Omega t = \pi$  o decayendo a cero mas lentamente. En principio, esto parecería contradecirse con lo visto en la sección anterior, donde pusimos de manifiesto que GHS presenta un menor tamaño aparente y mayor área visible. Sin embargo, debemos recordar que las estrellas no tienen el mismo radio. Puede verse de la Ec. (2.46) que  $r_h$  es menor para RN que para GHS, por lo que, al mantener el cociente  $R/r_h$  idéntico, el radio de la estrella en RN será menor, dando como resultado un menor brillo cuando el casquete se ubica en la posición anterior y una mayor zona visible de la estrella. Estas diferencias entre los modelos métricos se ven acentuadas al incrementar la carga  $Q$ . Notamos además que para valores bajos de  $R/r_h$  y altos de  $Q$  no se produce un perfil de pulso observable en RN, al menos no en todas las frecuencias probadas.

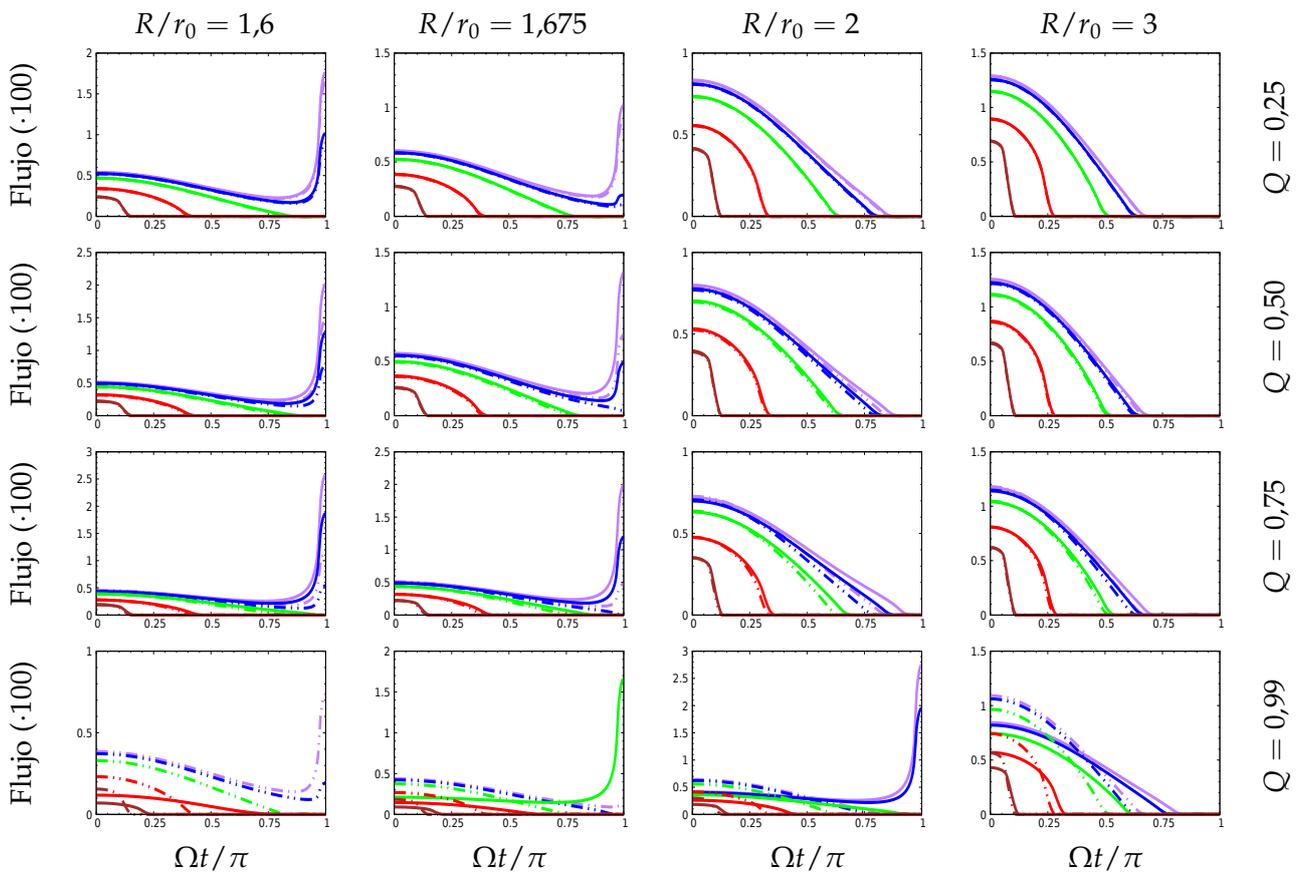
Mencionamos además que, si bien existen diferencias cuantitativas entre los distintos perfiles de plasma (esto es, las magnitudes exactas de los flujos, los valores exactos de  $\Omega t$  donde el flujo decae a cero, las frecuencias observables, etc.), las curvas de luminosidad observadas son cualitativamente idénticas, dando lugar a la misma morfología en el perfil de pulso. La excepción en este análisis se da para la distribución de plasma constante, donde las frecuencias mas bajas dan como resultado un mayor flujo aparente, incrementando además la superficie observable y dando lugar a mayores picos en caso de producirse imágenes múltiples. Esto es precisamente lo que se observó en la sección anterior para dicho perfil de plasma. Además, vemos que las frecuencias mas altas no producen un perfil de pulso observable.

En segundo lugar, se repitió el procedimiento anterior añadiendo ahora un casquete de emisión antipodal e idéntico al primero para estudiar su repercusión sobre la morfología del perfil de pulso. Se conservo la configuración ortogonal de los ángulos, con  $\chi = \zeta = \pi/2$  y se emplearon los mismo valores para los parámetros  $R$ ,  $\epsilon$  y  $Q$ . Se repitieron además los perfiles de plasma empleados anteriormente. Los resultados se muestran en los Cuadros 2.10 a 2.13.

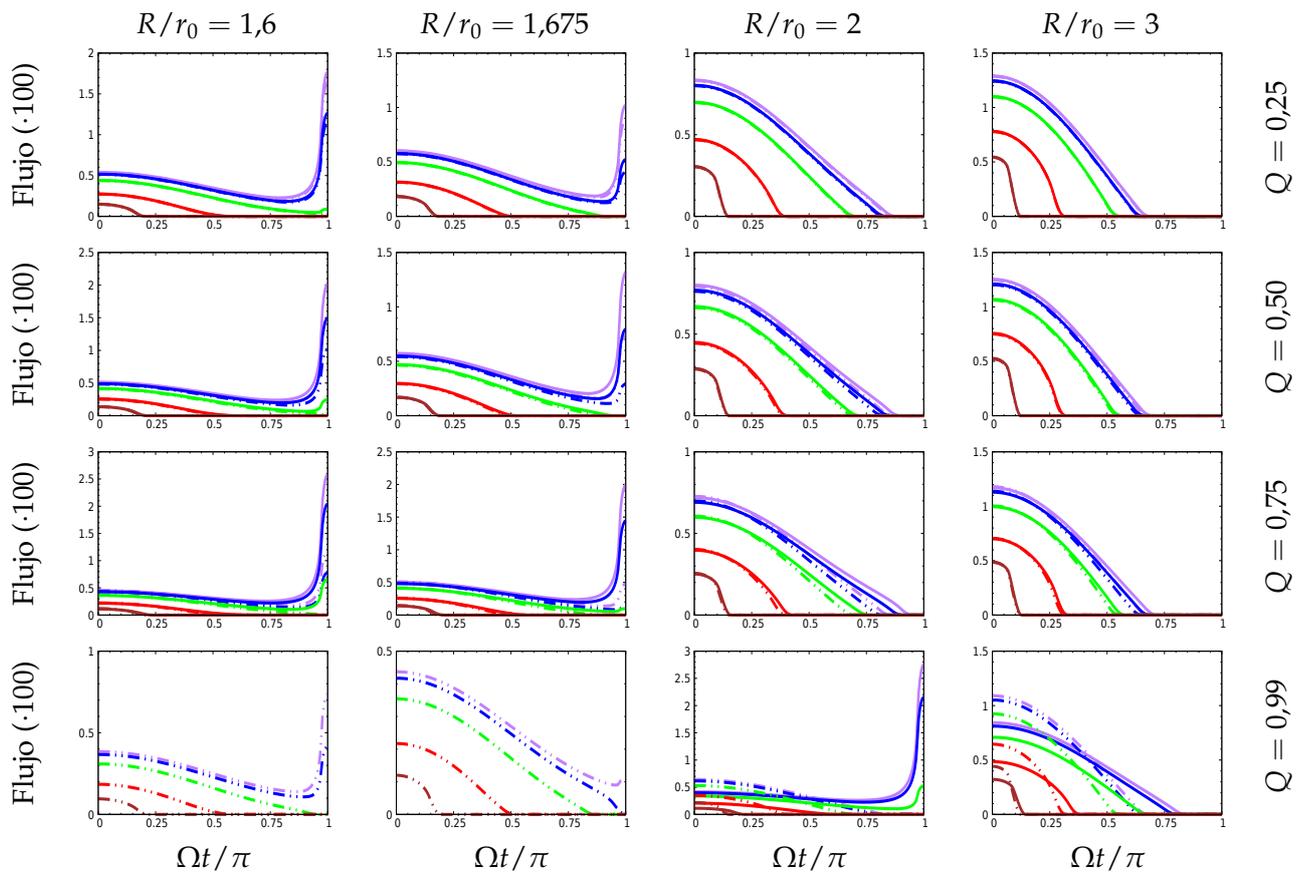
Vemos que ahora, dado el casquete antipodal, el incremento en el brillo debido al efecto de lente se da también en  $\Omega t = 0$ , resultando en un pico de flujo en el instante inicial, que será mas marcado mientras mayor sea la compacticidad de la estrella. Además, notamos que en los instantes posteriores, cuando ninguno de los casquetes se encuentra produciendo imágenes múltiples u oculto en la zona de no visibilidad de la estrella, el flujo resultante permanece en gran medida constante pese al cambio en la posición de los casquetes. Si la estrella no es lo suficientemente compacta como para producir imágenes múltiples, se produce un ligero mínimo en el flujo al empalmarse ambos comportamientos.



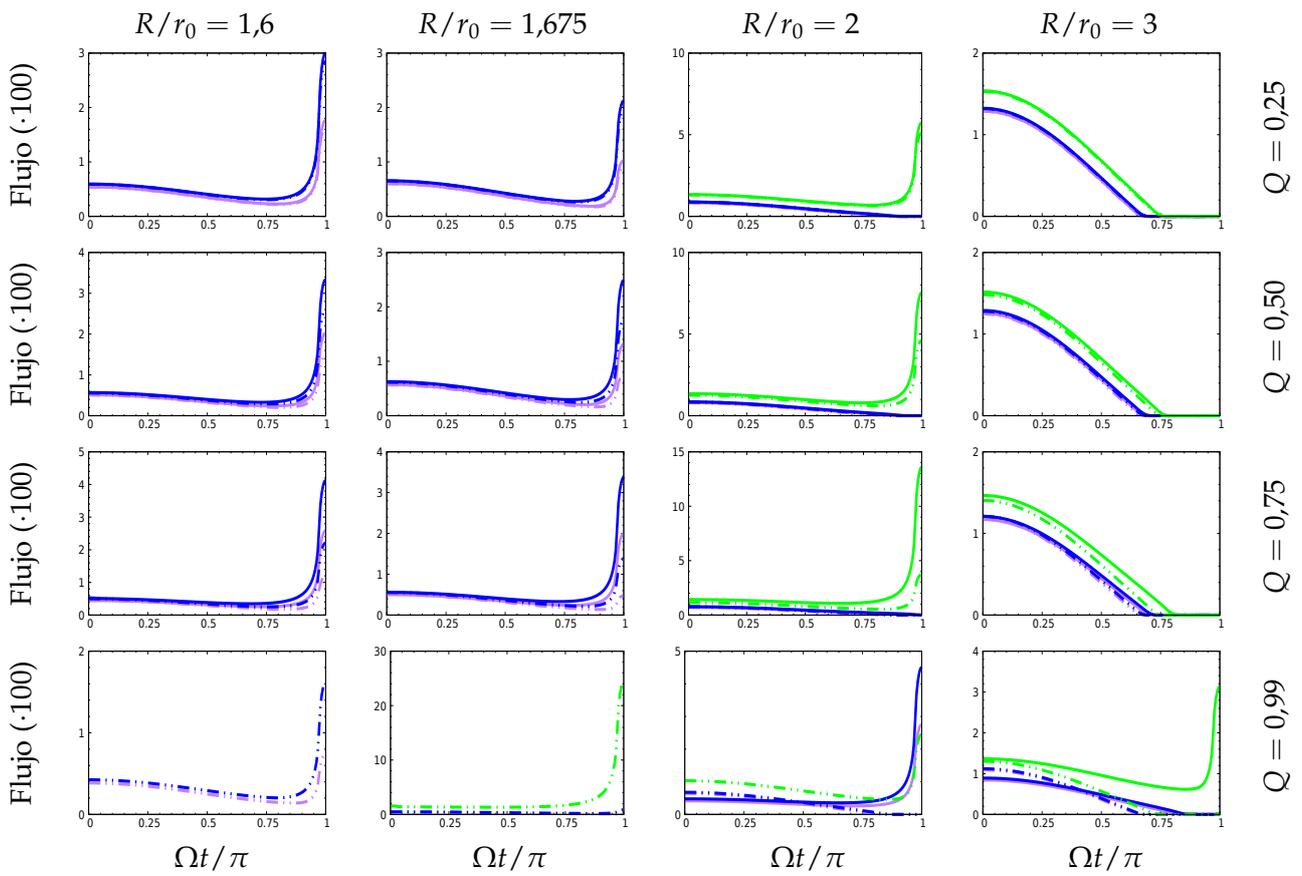
CUADRO 2.6: Perfil de pulso para casquetes únicos. Plasma con decaimiento exponencial,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



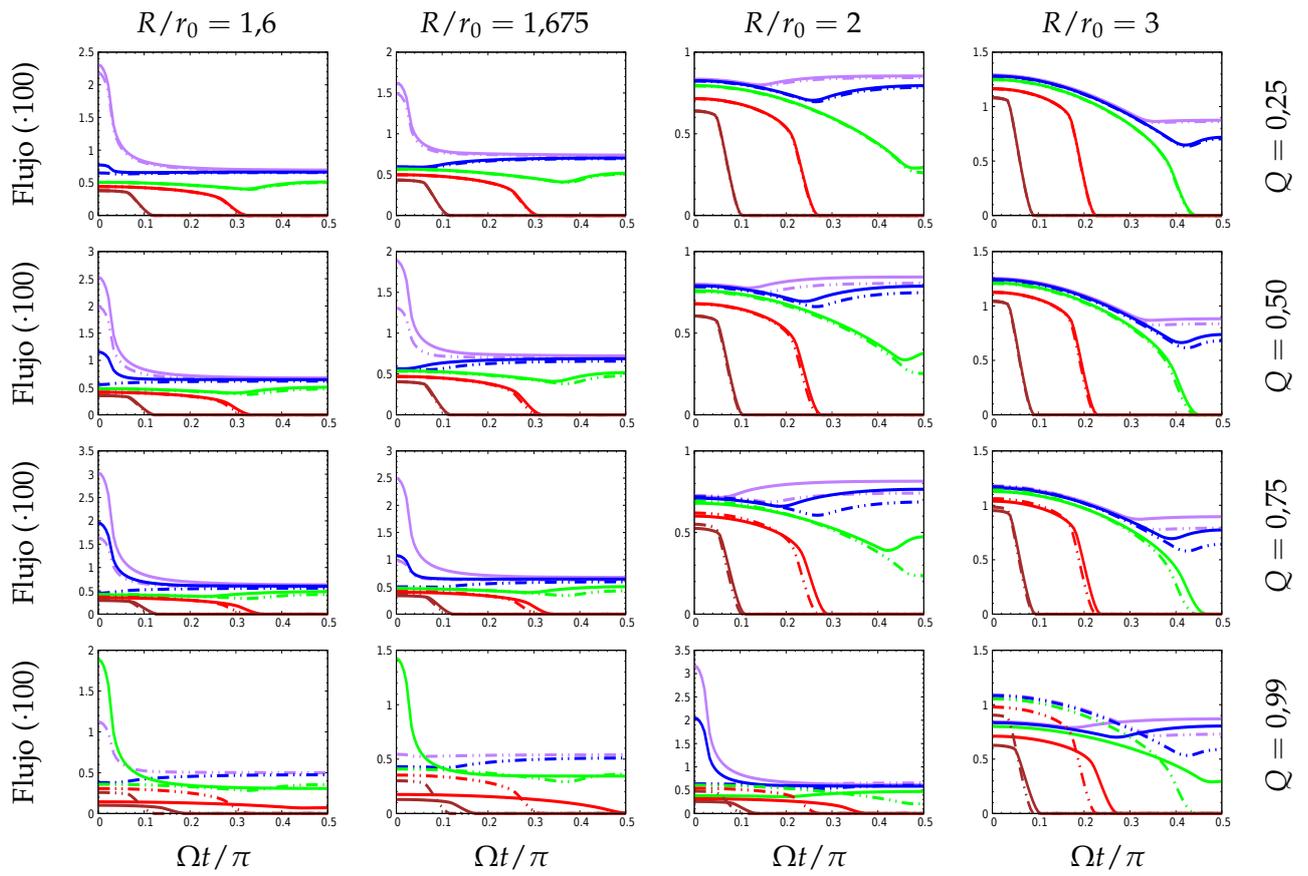
CUADRO 2.7: Perfil de pulso para casquetes únicos.  $h = 3$ ,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



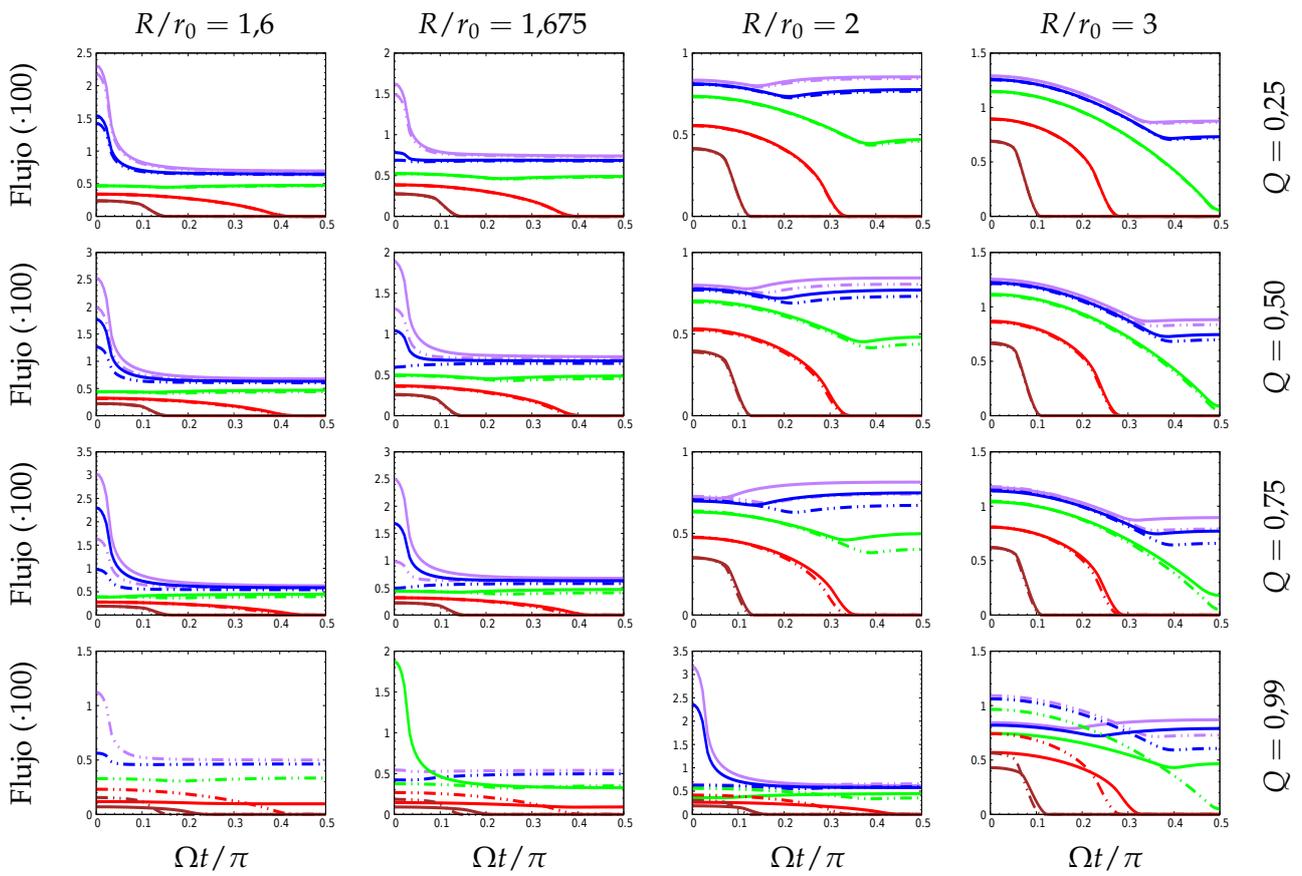
CUADRO 2.8: Perfil de pulso para casquetes únicos.  $h = 2$ ,  $\zeta = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



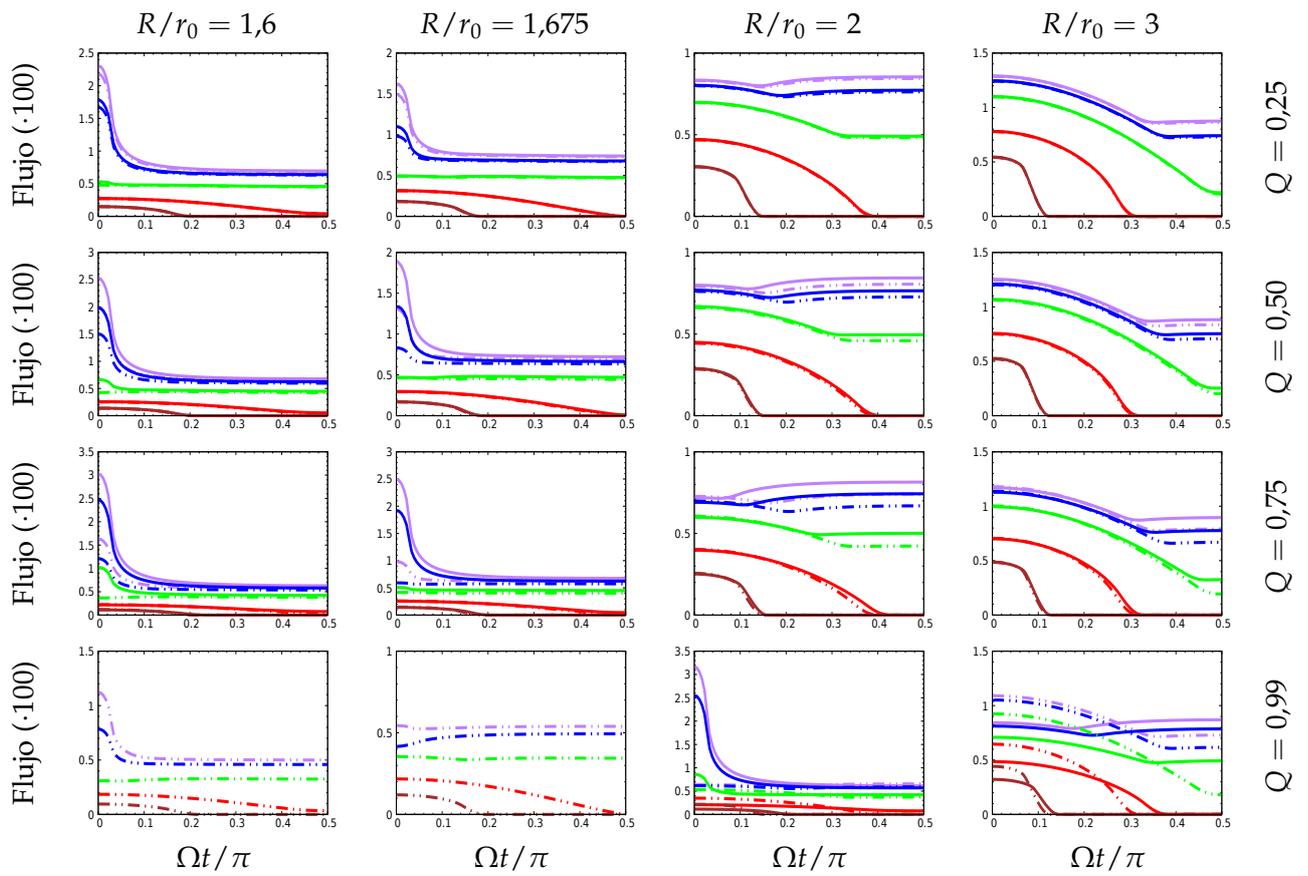
CUADRO 2.9: Perfil de pulso para casquetes únicos.  $h = 0$ ,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



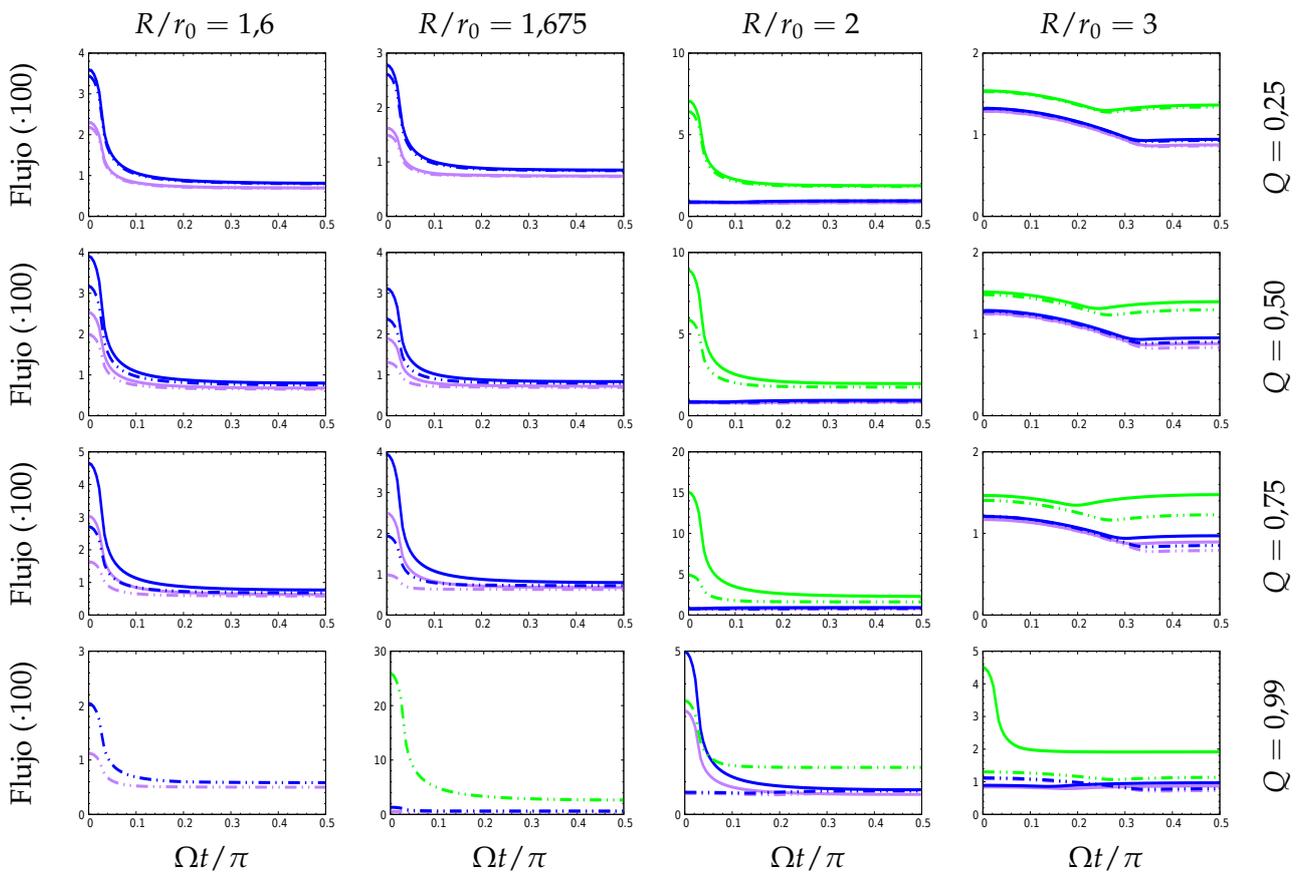
CUADRO 2.10: Perfil de pulso para casquetes antipodales. Plasma con decaimiento exponencial,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



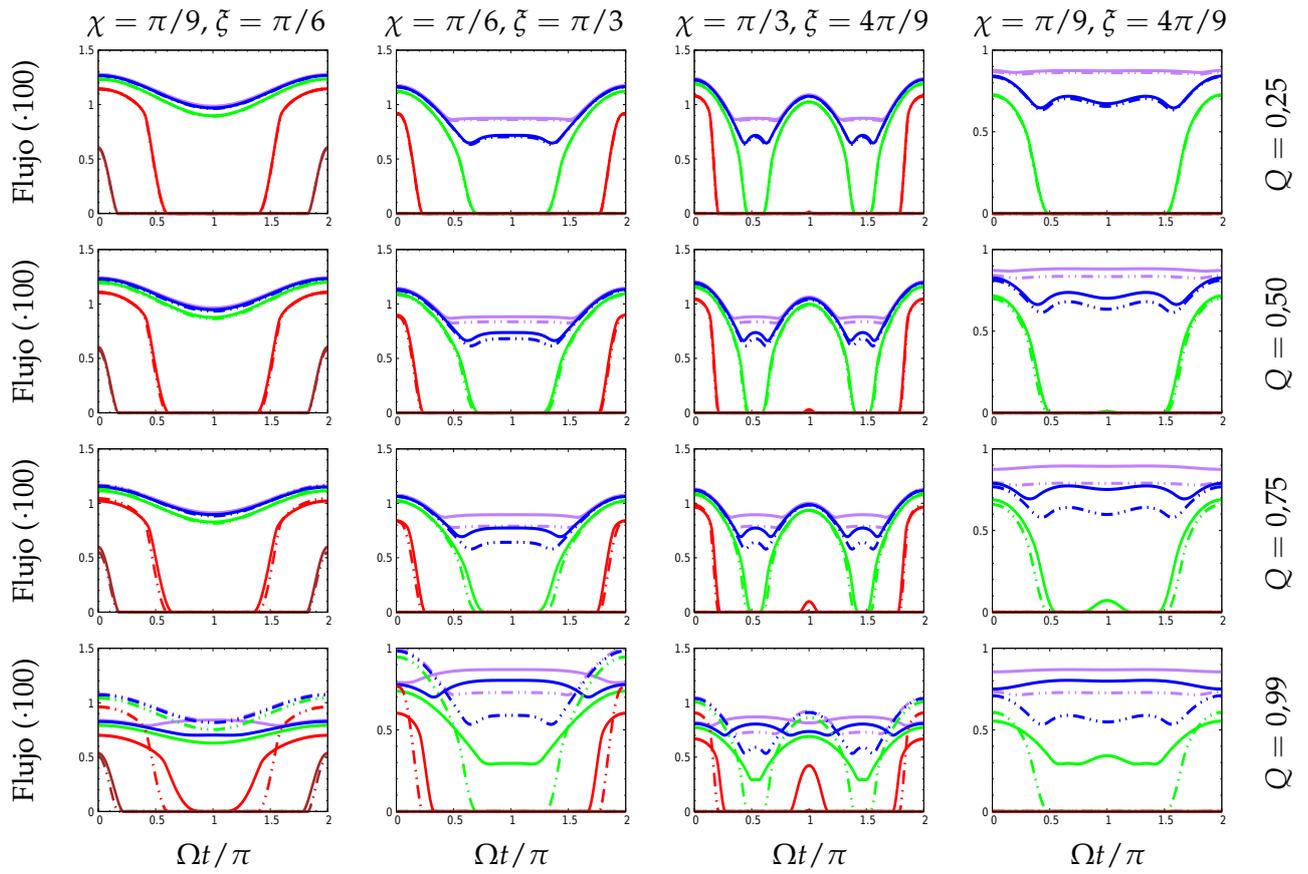
CUADRO 2.11: Perfil de pulso para casquetes antipodales.  $h = 2$ ,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



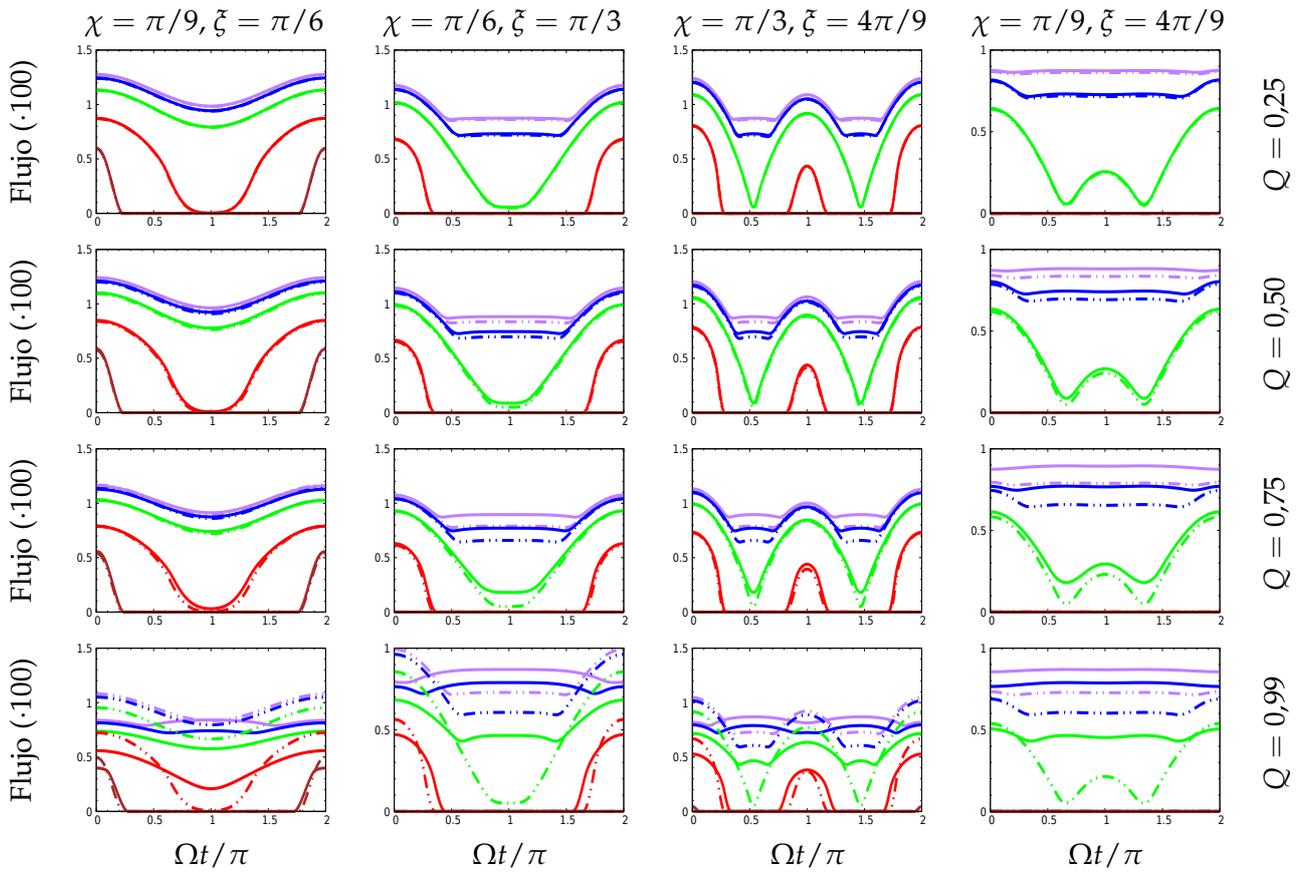
CUADRO 2.12: Perfil de pulso para casquetes antipodales.  $h = 2$ ,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



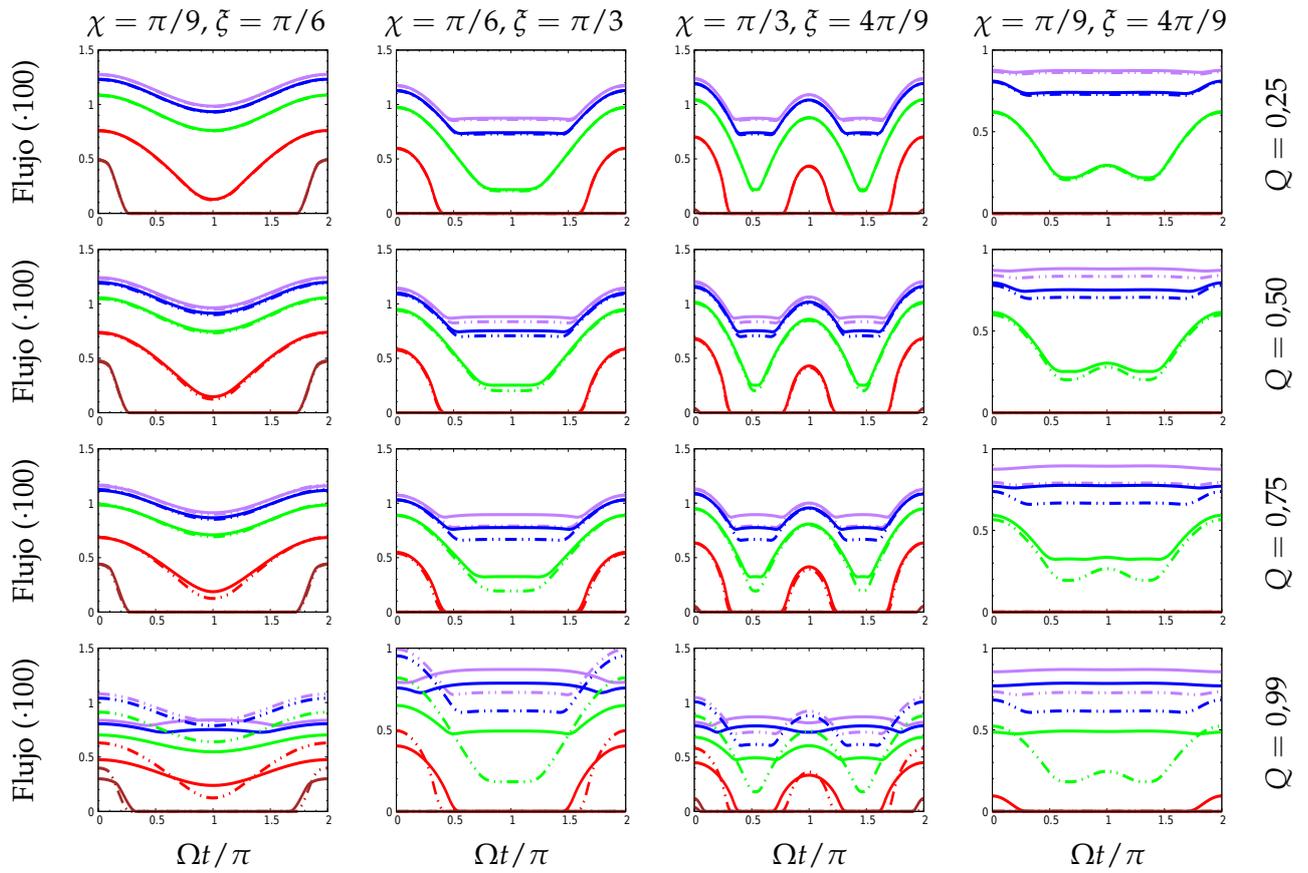
CUADRO 2.13: Perfil de pulso para casquetes antipodales.  $h = 0$ ,  $\xi = \chi = \pi/2$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



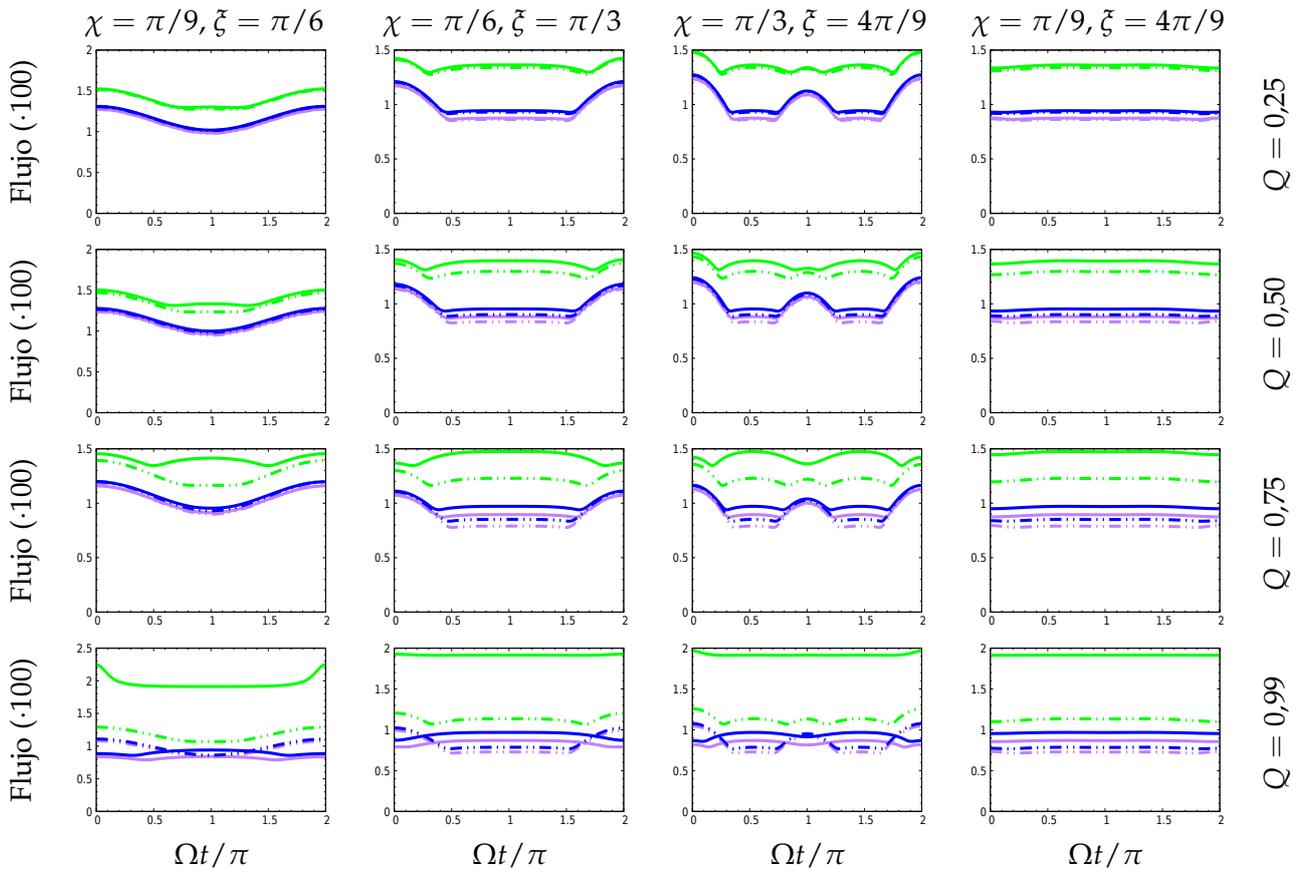
CUADRO 2.14: Perfil de pulso para casquetes antipodales. Plasma con decaimiento exponencial,  $R/r_h = 3$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



CUADRO 2.15: Perfil de pulso para casquetes antipodales.  $h = 3$ ,  $R/r_h = 3$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



CUADRO 2.16: Perfil de pulso para casquetes antipodales.  $h = 2$ ,  $R/r_h = 3$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.



CUADRO 2.17: Perfil de pulso para casquetes antipodales.  $h = 0$ ,  $R/r_h = 3$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,00, 0,30, 0,60, 0,90$  y  $0,99$  respectivamente. Las líneas continuas corresponden a RN mientras que las a trazos a GHS.

En estos casos, la magnitud del flujo no varía demasiado al pasar de un régimen al otro. Por otro lado, cuando la superficie de la estrella es completamente visible no se produce ningún mínimo al pasar de un comportamiento a otro, siendo la intensidad del flujo mucho mayor al producirse las imágenes múltiples. Mas allá del hecho de incorporar un segundo casquete antipodal, la descripción cualitativa de los resultados es, por lo demás, idéntica a la realizada para los casquetes únicos.

Finalmente, variamos los ángulos  $\chi$  y  $\xi$  para estudiar las morfologías de los pulsos, dependientes de la frecuencia, para una variedad de ángulos entre la línea de visión y el eje de rotación y entre el eje de rotación y la posición del casquete emisor. Empleando el esquema de clasificación propuesto por Beloborodov en [Bel02], mostraremos a continuación ejemplos de cada clase de pulso para las configuraciones antipodales. En este esquema, la clase I tiene un casquete primario que es siempre visible, mientras que el antipodal es invisible en todo momento. En los perfiles de clase II, el casquete primario siempre se ve y el antipodal sólo es visible durante parte del tiempo. Los perfiles de clase III se generan cuando cada uno de los casquetes puede ser visible o invisible según la fase y la clase IV se da cuando ambos casquetes son visibles en todo momento, produciendo un perfil relativamente constante. Se emplearon las configuraciones angulares  $(\chi, \xi) = (\pi/9, \pi/6), (\pi/6, \pi/3), (\pi/3, 4\pi/9)$  y  $(\pi/9, 4\pi/9)$ , que se corresponden respectivamente con las cuatro clases recién introducidas cuando se tiene  $\epsilon = 0$  y  $Q = 0$ . Notemos que, para poder representar todas las clases, es preciso que la estrella tenga una baja compacticidad, contando de esta forma con una región fuera del alcance del observador, donde los casquetes resulten invisibles. Con esto en mente, se empleó el cociente entre radios  $R/r_h = 3$ . Los resultados obtenidos se muestran en los Cuadros 2.14 a 2.17.

Al observar los resultados, puede verse que tanto el modelo métrico, la frecuencia del plasma y la cantidad de carga tienen influencia sobre cual será la clasificación final del perfil de pulso. Notamos que los perfiles de clase I presentan oscilaciones sinusoidales alrededor de un valor medio positivo y mayor a la amplitud de oscilación. Los perfiles clase II son idénticos a los primeros, salvo que cuando la oscilación sinusoidal toma valores negativos no es sumada al flujo. Los perfiles de clase III combinan por su parte dos oscilaciones sinusoidales de diferente amplitud y en oposición de fase, que al tomar valores negativos no son sumadas al valor medio. Finalmente, los perfiles de clase IV son casi constantes, presentando ligeras deformaciones cerca de los valores extremos de la fase.

## 2.5. Aproximación Analítica

En un campo gravitatorio estático con simetría esférica, el ángulo de deflexión exacto  $\beta = \theta - \delta$  viene dado por una integral elíptica o similar (Ec. (2.17)) que generalmente no tiene solución analítica. El formalismo empleado en las subsecciones previas describe correctamente la física de los rayos de luz en las proximidades de estrellas de neutrones de cualquier tamaño, donde el ángulo de deflexión  $\beta$  puede llegar a ser mayor a  $\pi/2$ .

No obstante, las integrales a resolver pueden resultar complicadas e implicar un gran coste computacional. Expresiones como (2.37) o (2.44) puede que no representen un gran desafío cuando se tiene un único casquete esférico que emite de forma isotrópica, pero la cuestión se complica al considerar múltiples fuentes de formas irregulares que emiten anisotrópicamente, como los casos tratados en [TN13], [PFC83], [DO95] o [Sot20]. Al trabajar con un modelo más realista, resolver la integral de flujo para obtener el perfil de pulso puede volverse una verdadera molestia, y representar varias horas de cómputo.

En esta subsección nos centraremos en encontrar aproximaciones analíticas que nos permitan generalizar a situaciones de entornos plasmáticos expresiones ya conocidas para el caso de gravedad pura y así, simplificar los cálculos de curvas de luminosidad y reducir su costo computacional, sin gran pérdida de precisión o generalidad, facilitando una clara comprensión de los efectos de deflexión.

### 2.5.1. Ecuación de la Trayectoria

Una fórmula simple que relaciona el ángulo de emisión  $\delta$  del fotón respecto a la normal de la superficie estelar (dado por la Ec. (2)) con el ángulo  $\theta$  que da la posición sobre la superficie estelar desde donde sucede la emisión (dado por la Ec. (2.17)), y que reemplaza la integral elíptica o similar con alta precisión, es la llamada relación del coseno introducida por Beloborodov en [Bel02]<sup>3 4</sup>,

$$1 - \cos \delta = (1 - \cos \theta)A(R), \quad (2.48)$$

siendo  $A$  el elemento métrico  $-g_{tt}$ , debiendo evaluarse en la coordenada radial donde los ángulos  $\delta$  y  $\theta$  estén siendo medidos, en este caso  $R$ . La Ec. (2.48), sin embargo, es válida para todo punto de la trayectoria, siendo  $\delta$  el ángulo entre el vector posición del rayo y la tangente a su trayectoria en dicho punto. Por tal motivo, de ahora en adelante no asumiremos  $r = R$ .

De todas formas, la principal limitación que encontramos en la aproximación de Beloborodov es que no considera la presencia de plasma. Por este motivo, nos hemos visto obligados a imitar su desarrollo, introduciendo ahora una distribución de plasma con simetría esférica según la Ec. (2.22). La influencia del plasma se ha conservado hasta orden  $\epsilon^2$ , obteniendo una corrección para la relación del coseno de Beloborodov que puede expresarse en forma general como

$$(1 - \cos \delta)(1 - \epsilon^2 P_h(r)) = (1 - \cos \theta)A(r), \quad (2.49)$$

siendo  $P_h$  un factor de corrección por plasma que depende de la métrica según

$$\begin{aligned} P_h^{SH}(r) &= \frac{1}{A(R)} \left[ \frac{h}{h+1} - \frac{h+1}{h+2} \frac{r_s}{r} \right] \left( \frac{R}{r} \right)^h, \\ P_h^{RN}(r) &= \frac{1}{A(R)} \left[ \frac{h}{h+1} - \frac{h+1}{h+2} \frac{r_s}{r} + \frac{h+2}{h+3} \frac{Q^2}{r^2} \right] \left( \frac{R}{r} \right)^h, \\ P_h^{GHS}(r) &= \frac{1}{A(R)} \left[ \frac{h}{h+1} - \frac{h+1}{h+2} \frac{r_s}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{(h+1)(h+2)} - \frac{h+1}{(h+2)(h+3)} \frac{r_s}{r} \right) \frac{Q^2}{r} \right] \left( \frac{R}{r} \right)^h. \end{aligned} \quad (2.50)$$

<sup>3</sup>Beloborodov encuentra esta relación para el caso particular de Schwarzschild, con  $A(R) = 1 - 2M/R$ , sin embargo es posible verificar que al menos para las métricas aquí trabajadas la relación es generalizable con sus respectivos  $A(R)$ .

<sup>4</sup>Para  $R \geq 2r_s$ , esta ec. estima el ángulo de deflexión  $\beta = \theta - \delta$  con alta precisión, cometiendo un error relativo máximo del orden del 3% para  $R = 3r_s$ . Por su parte, los modelos estándar de púlsares predicen  $R \geq 2r_s$  con un  $R \approx 3r_s$  típico.

Notemos que la Ec. (2.49) tiende a la Ec. (2.48) en el límite de baja densidad de plasma ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), de modo que ambas descripciones coinciden en gravedad pura. Puede verse que estos factores se anulan ( $P_h \rightarrow 0$ ) al alejamos lo suficiente de la estrella ( $r \rightarrow \infty$ ), lo que se corresponde con una densidad de plasma que decae asintóticamente a cero. De esta forma, al alejarnos de la estrella la corrección por plasma es cada vez menor según se reduce la densidad de este. Al mismo tiempo, remarcamos que tanto  $P_h^{RN}$  como  $P_h^{GHS}$  tienden a  $P_h^{SH}$  cuando  $Q \rightarrow 0$ , lo que se corresponde con el hecho de que las métricas de Reissner-Nordström y Garfinkle-Horowitz-Strominger se vuelven idénticas a la de Schwarzschild para  $Q = 0$ .

Para la comodidad del lector, listamos a continuación los pasos a seguir para obtener los factores de corrección por plasma  $P_h$ .

1. Expresar  $d\phi/du$  (Ec. (2.16)) en términos de  $\sqrt{1 - \cos^2 \delta}$ .
2. Desarrollamos el resultado en serie de Taylor en términos de  $\epsilon$ , conservando hasta orden  $\epsilon^2$ .
3. Expandimos la expresión anterior en forma de serie alrededor de  $\cos \delta = 1$  y expresamos el resultado en forma de polinomio.
4. Integramos entre  $u = 1/r$  y  $u = 0$  (Ec. (2.17)), obteniendo una aproximación para  $\theta$ .
5. Evaluamos  $\cos \theta$  y desarrollamos en Taylor alrededor de  $\cos \delta = 1$ , conservando solo hasta primer orden.
6. Expandimos el resultado por Taylor como serie de potencias de  $\epsilon$ , conservando hasta segundo orden.

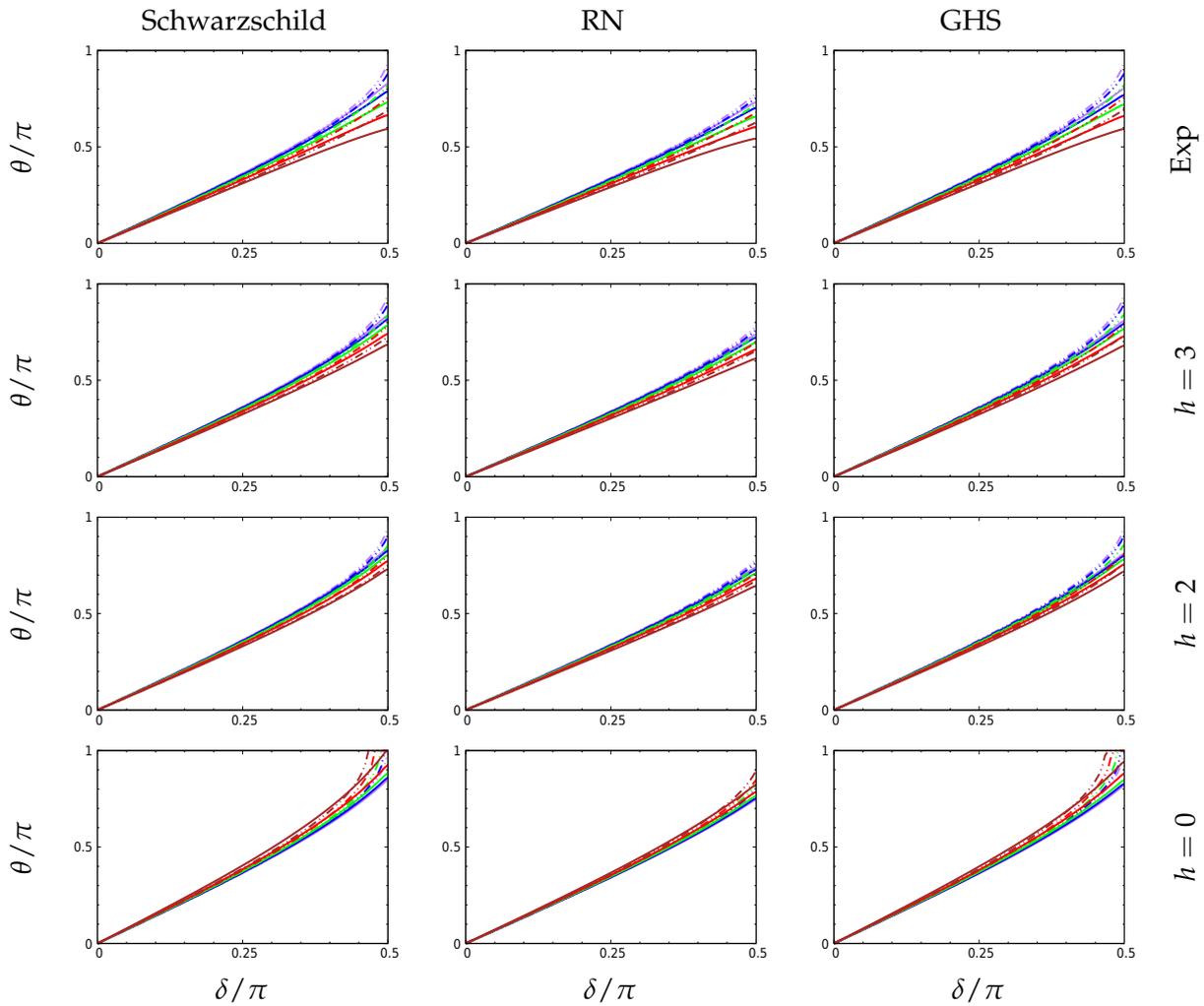
La Ec. (2.49) nos da entonces la relación entre los ángulos  $\theta$  y  $\delta$  para todo  $r$  en la trayectoria del rayo. Por otro lado, la Ec. (2.18) nos permite expresar  $\delta$  en términos del parámetro de impacto  $b(x)$  y el radio  $r$ . Por lo tanto, al combinar ambas expresiones, obtenemos una ecuación que vincula directamente  $\theta$  con  $r$  para todo punto en la trayectoria del fotón,

$$\cos \theta_a = \left[ 1 - \left( 1 - \sqrt{1 - x^2 \left( \frac{n_0}{n(r)} \right)^2 \frac{A(r)}{C(r)}} \right) \frac{1 - \epsilon^2 P_h(r)}{A(r)} \right] \quad (2.51)$$

donde el subíndice  $a$  señala que se trata de una aproximación analítica. Esta es la ecuación de la trayectoria, que nos permitirá encontrar el conjunto de coordenadas  $(r, \theta)$  que describe el camino de los fotones. Si bien anteriormente hemos empleado las Ec. (2.17) y (2.18) para describir los parámetros del fotón en el instante en que abandona la superficie estelar, cabe aclarar que éstas también son válidas para los demás puntos de su trayectoria. De esta forma,  $\theta$  y  $\theta_a$  corresponden al ángulo de emisión del fotón sobre la superficie del púlsar solo al evaluarlos en  $r = R$ , mientras que en caso contrario describen la coordenada angular de la trayectoria correspondiente a dicho  $r$ . Puede verse que en [Bel02] la relación encontrada es inversa, es decir, Beloborodov encuentra una expresión para  $r$  como función de  $\theta$ . Debido a que las correcciones por plasma introducen nuevas dependencias en  $r$ , y dado que estas son, junto con las funciones métricas, dependientes del modelo específico de espaciotiempo que se este usando, consideramos conveniente (y mucho mas fácil) utilizar la Ec.(2.51).

Toca ahora verificar que las nuevas expresiones encontradas no solo permiten aproximar aceptablemente las trayectorias de los fotones en torno a objetos compactos rodeados por plasma, sino que generalizan la aproximación presentada por Beloborodov mejorándola sustancialmente en los casos en que un entorno plasmático se tenga en cuenta. Con este objetivo, trazamos las curvas  $\theta$  y  $\theta_a$  en función de  $\delta$ , comparando los resultados obtenidos mediante integración numérica y mediante la aproximación analítica, para obtener una idea general de cuales son los errores cometidos por nuestra aproximación. Dado que queremos conocer los mayores errores que comete nuestro modelo, tomamos el caso mas desfavorable con  $R = 4$  y  $Q = 0,99$ . Por otro lado, dado que el desarrollo de la aproximación analítica asume  $\epsilon$  pequeño, solo tomamos valores de hasta  $\epsilon = 0,5$ . Los resultados se muestran en el Cuadro 2.18.

Puede verse que las desviaciones de la trayectoria analítica son ínfimas cuando  $\delta$  es pequeño y que estas aumentan conforme lo hace  $\delta$ , por lo que estudiar el error cometido por el rayo marginal ( $\delta = \pi/2$  y  $b_{max}$ ) será de sumo interés para nuestro análisis. Notemos que la aproximación analítica tiende a sobrestimar el valor de  $\theta_{max}$ , resultando en una mayor área visible de la superficie estelar. Este efecto parece incrementarse para perfiles con mayor pendiente (mayor  $h$ ). Dicho defecto tendrá repercusión en los perfiles de pulso, dado que una mayor zona visible implica mayor contribución por efecto de lente. Particularmente para el caso de plasma constante ( $h = 0$ ) existe un rango de valores de  $\delta$  para los cuales  $\theta$  es subestimado por la aproximación analítica. Sin embargo, vemos que a medida que nos aproximamos a  $\delta = \pi/2$ ,  $\theta$  pasa a ser sobrestimado, alcanzando para las métricas de Schwarzschild y GHS el máximo valor que permite la aproximación,  $\theta_a = \pi$ .

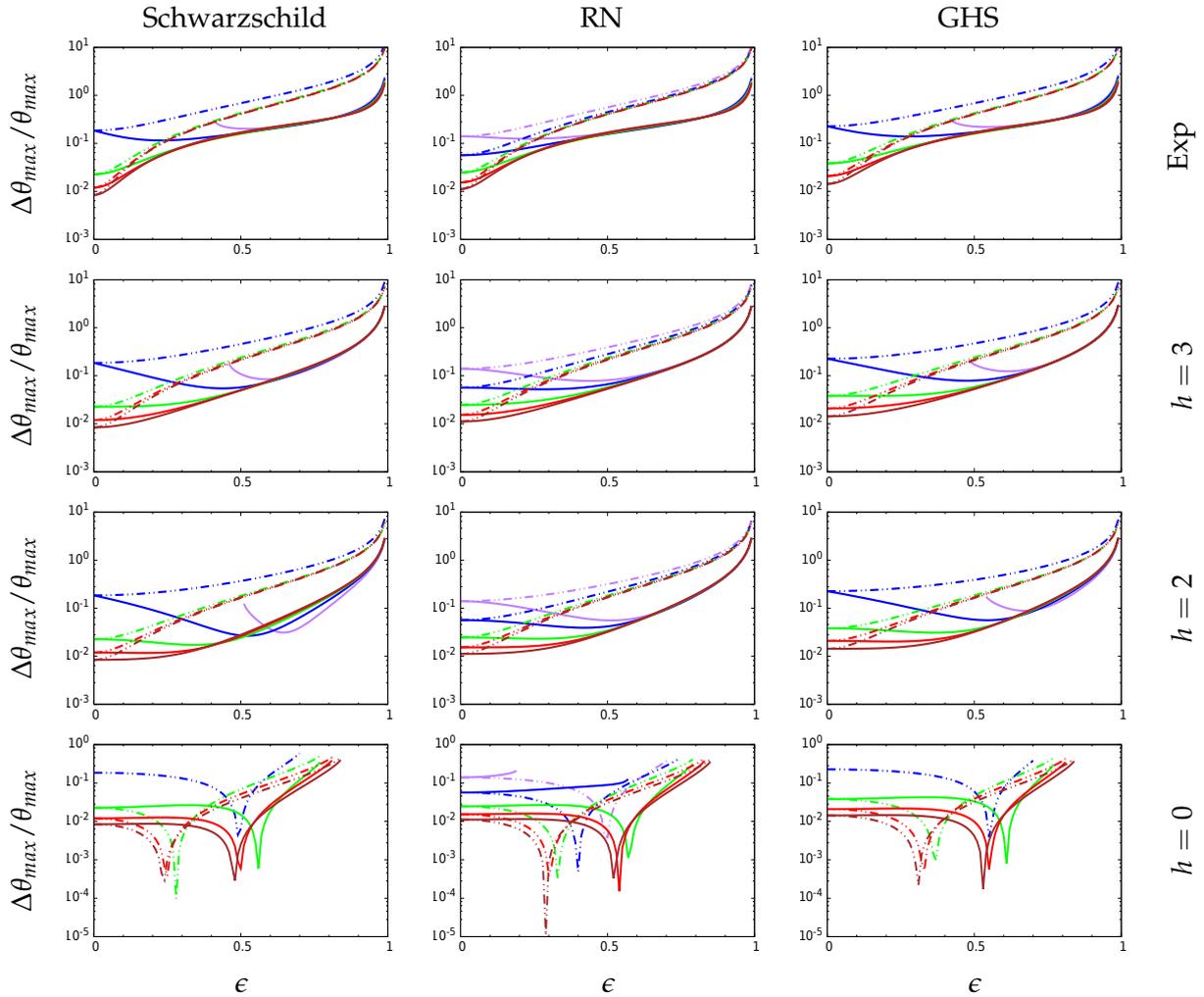


CUADRO 2.18:  $\theta$  en función de  $\delta$ .  $Q = 0,99$ ,  $R = 4$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden respectivamente a  $\epsilon = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  y  $0,5$ . Las líneas continuas se obtuvieron por integración numérica a partir de la Ec. (2.37) mientras que las a trazos se obtuvieron analíticamente a partir de la Ec. (2.49) (con corrección por plasma).

Como vimos anteriormente, en RN obtenemos un menor porcentaje de superficie visible al aumentar la carga  $Q$  que en GHS, que apenas difiere de Schwarzschild. Por este motivo, las desviaciones son menores en RN, al no tener rayos marginales tan extremos. Al mismo tiempo, confirmamos que la superficie visible también disminuye al reducir el valor de  $\epsilon$ .

Pasemos a analizar ahora la dependencia del error en  $\theta_a$  con  $\epsilon$  para  $\delta = \pi/2$  y  $Q = 0,99$ , comparando los resultados obtenidos con y sin la corrección por plasma. Aprovechamos para comparar también los errores cometidos para distintos radios estelares  $R$ , para observar como mejora la aproximación al

disminuir la compacticidad. Las curvas de error obtenidas se encuentran en el Cuadro 2.19. De dicho Cuadro podemos concluir que la aproximación analítica introducida en la Ec. (2.49) describe con mayor precisión la trayectoria de los fotones en entornos plasmáticos que la relación del coseno propuesta por Beloborodov (Ec. (2.48)). Salvo algunos comportamientos específicos obtenidos para  $h = 0$ , donde generalmente ocurren las anomalías, vemos que la precisión mejora en hasta un orden de magnitud cerca de  $\epsilon = 0,5$ . Para valores de  $\epsilon$  pequeños, como es de esperarse, ambas estimaciones se aproximan hasta coincidir en  $\epsilon = 0$ . Por otro lado, para  $\epsilon \geq 0,5$  la precisión de nuestro método sigue siendo superior, aunque el error cometido comienza a resultar excesivo.



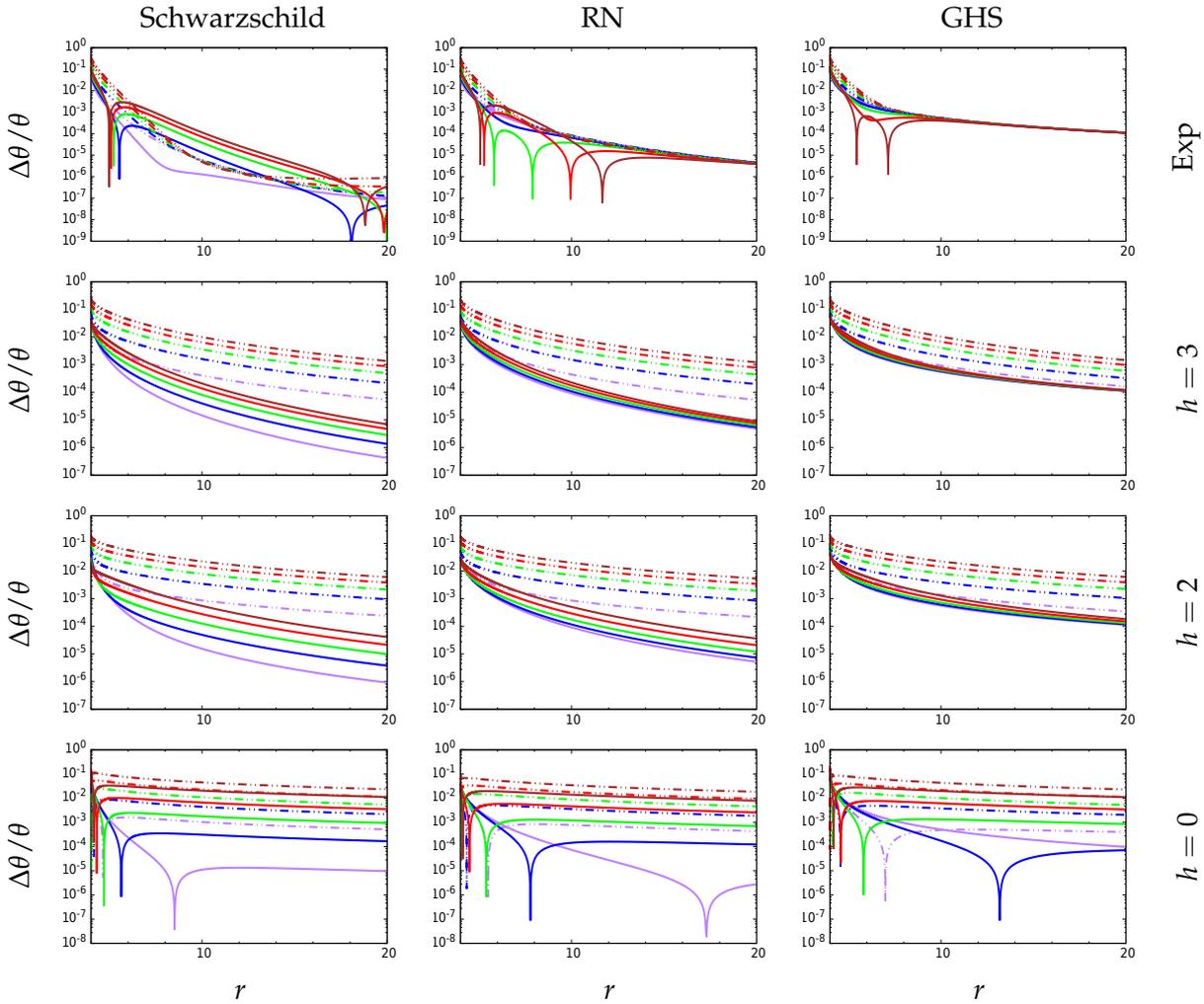
CUADRO 2.19: Error relativo en  $\theta_{max}$  ( $|\theta_{max,a} - \theta_{max}|/\theta_{max}$ ) en función del cociente entre frecuencias  $\epsilon$  para  $r = R$ .  $Q = 0,99$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden respectivamente a  $R = 3, 4, 5, 6$  y  $7$ . Las líneas continuas se obtuvieron a partir de la Ec. (2.49) (con corrección por plasma) mientras que las a trazos a partir de la Ec. (2.48) (sin corrección por plasma).

Vemos que, para  $\epsilon$  pequeños, el error en  $\theta_{max}$  depende fuertemente del radio  $R$ , siendo considerablemente menor para estrellas menos compactas. Llama la atención que, para las estrellas de menor radio ( $R \leq 4$ ), el error disminuye al incrementar  $\epsilon$  hasta alcanzar su valor mínimo alrededor de  $\epsilon = 0,5$ , donde se vuelve muy similar al error obtenido para las estrellas de mayor radio. Para  $\epsilon$  mayores, el error muestra poca dependencia con  $R$ .

Notamos además que, en torno a  $\epsilon = 0,5$ , el error es menor para distribuciones de plasma mas suaves (esto es, con menor  $h$ ). Por otro lado, vemos que el error parece no depender de  $h$  para valores de  $\epsilon$  cercanos a 0 y a 1, lo que puede explicarse debido a que, por un lado, para  $\epsilon \rightarrow 0$  la corrección por

plasma se anula, por lo que no hay dependencia con  $h$ , mientras que por el otro, para  $\epsilon \rightarrow 1$  no es válido hacer un desarrollo en potencias de  $\epsilon$ , por lo que la corrección por plasma deja de ser aplicable.

Como siempre, el caso  $h = 0$  tiene sus peculiaridades. Para empezar, vemos que existen ciertos picos donde el error parece anularse, lo que se explica dado que en esos puntos la corrección por plasma pasa de subestimar a sobrestimar el valor de  $\theta$ , haciendo que el error sea cero mas por casualidad que por mérito. También vemos que el error deja de computarse para  $\epsilon \approx 0,75$ , lo que sucede debido a que para valores mayores dejan de satisfacerse las condiciones de propagación expresadas en la Ec. (2.24). Por otro lado, vemos que en las estrellas mas compactas el error no se computa para valores pequeños de  $\epsilon$ , lo que se origina debido a que el argumento dentro del  $\cos^{-1}$  en la Ec. (2.51) es mayor a uno.



CUADRO 2.20: Error relativo en  $\theta$  ( $|\theta_a - \theta|/\theta$ ) en función del radio  $r$  para  $\delta(R) = \pi/2$ .  $Q = 0,99$ ,  $R = 4$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden respectivamente a  $\epsilon = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  y  $0,5$ . Las líneas continuas se obtuvieron a partir de la Ec. (2.49) (con corrección por plasma) mientras que las a trazos a partir de la Ec. (2.48) (sin corrección por plasma).

Por último, estudiamos como cambia el error en  $\theta_a$  al desplazarnos a lo largo de la trayectoria. Para esto, tomamos el escenario mas desfavorable posible, con  $R = 4$ ,  $Q = 0,99$  y  $\delta(R) = \pi/2$ , comparando los resultados obtenidos considerando y sin considerar la corrección por plasma para distintos valores de  $\epsilon$ . Dichos resultados se muestran en el Cuadro 2.20. Una vez mas, vemos que el error disminuye significativamente al aplicar la corrección por plasma, en todos los perfiles salvo en el de decaimiento exponencial, donde el efecto de aplicar dicha corrección es mas complejo. Notemos además que la precisión aumenta progresivamente conforme lo hace  $r$ . Esto se debe a que, en cierto sentido, estamos

enviando los rayos desde el observador hacia la estrella<sup>5</sup>. Con esto en mente, resulta evidente que la desviación se incrementa al disminuir  $r$  dado que acumulamos errores por interacción con el plasma. Vemos además que el error es menor para  $\epsilon$  pequeños, lo que se fundamenta en el hecho de que la corrección por plasma se realizó conservando solo términos de orden  $\epsilon^2$ .

Si bien la aproximación analítica fue desarrollada para ajustar un perfil de plasma con una densidad dada por una ley de potencias según la Ec. (2.22), puede ser aplicada al caso de un perfil de plasma con decaimiento exponencial como el que se muestra en la Ec. (2.25). Para esto, proponemos considerar un  $h$  tal que la pendiente de las densidades de plasma  $\omega_e$  obtenidas para ambas distribuciones coincidieran sobre la superficie de la estrella. Puede verse que esto se consigue tomando  $h = 2R$ . Al hacer esto, de alguna forma estamos proponiendo que toda distribución de plasma (con  $\epsilon$  pequeño) monótonamente decreciente puede aproximarse por la Ec. (2.22), eligiendo un  $h$  apropiado que nos permita obtener tanto el mismo valor de  $\omega_e$  como el de su derivada sobre la superficie estelar, en  $r = R$ .

### 2.5.2. Perfil de Pulso

Haciendo uso de las expresiones analíticas introducidas en la subsección anterior, nos centraremos ahora en encontrar una expresión analítica para el flujo observado, el cual era calculado anteriormente mediante integración numérica según la Ec. (2.44). Para esto, seguiremos de cerca el desarrollo que se muestra en [TN13] introduciendo la corrección por plasma y empleando la intensidad específica tal como fue introducida en la Sec. 2.4. Con estas consideraciones, podemos expresar el diferencial de flujo monocromático observado como<sup>6</sup>

$$dF = I_0 \frac{A^{1/2}(R)}{C(R)} \frac{n^2(R)}{n_0^2} f_B(\delta) \cos \delta \frac{d \cos \delta}{d \cos \theta} dS, \quad (2.52)$$

siendo  $I_0$  una constante proporcional a la intensidad superficial emitida por el casquete, cuyo valor puede tomarse a conveniencia. Por ejemplo, en [TN13] se considera una emisión Planckiana a temperatura  $T$  uniforme, aunque otras elecciones para  $I_0$  son igualmente válidas. El flujo total observado se obtiene integrando la expresión anterior sobre toda el área visible del casquete emisor, que denotaremos  $S_V$ . Remarcamos que esta aproximación es válida solo si suponemos un casquete que emite uniformemente ( $I_0 = cte$ ) en toda su superficie. De este modo, el flujo resulta

$$F = I_0 \frac{A^{1/2}(R)}{C(R)} \frac{n^2(R)}{n_0^2} \int_{S_V} f_B(\delta) \cos \delta \frac{d \cos \delta}{d \cos \theta} dS, \quad (2.53)$$

Haciendo uso de la relación del coseno con corrección por plasma (Ec. (2.49)) podemos calcular  $d \cos \delta / d \cos \theta = A(R) / (1 - P_h(R)\epsilon^2)$ . Luego, expresando  $\cos \delta$  en términos de  $\theta$ , llegamos a la siguiente expresión

$$F = I_0 \frac{A^{3/2}(R)}{C(R)} \frac{n^2(R)}{n_0^2} \frac{1}{1 - P_h(R)\epsilon^2} \int_{S_V} f_B[\delta(\theta)] \left[ \left( 1 - \frac{A(R)}{1 - P_h(R)\epsilon^2} \right) + \left( \frac{A(R)}{1 - P_h(R)\epsilon^2} \right) \cos \theta \right] dS. \quad (2.54)$$

El flujo se expresa entonces como la suma de dos contribuciones, la primera proporcional a la superficie y la segunda al área proyectada de la parte visible de la región emisora, ambas moduladas por la función  $f_B(\delta)$  de emisión anisotrópica. Notemos que, para  $A(R) \rightarrow 1$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ , esta expresión es análoga al resultado newtoniano, obteniendo la proyección de la superficie observada. El problema de calcular

<sup>5</sup>Para construir la trayectoria analítica del fotón, primero calculamos el parámetro de impacto a partir de la Ec. (2.18) tomando  $\delta = \pi/2$ , siendo éste mismo el parámetro de impacto de la trayectoria numérica. De esta forma, ambas trayectorias coinciden al alcanzar el detector en  $r_O$  y se separan a medida que se aproximan al púlsar.

<sup>6</sup>Buscamos encontrar el equivalente a la Ec. (3) de [TN13]. El diferencial de superficie estelar se expresa como  $dS = C(R) \sin \theta d\theta d\phi$ . De aquí despejamos  $d\phi$  e introducimos la expresión resultante en el diferencial de área del observador  $d\Omega'$  (Ec. (2.31)). Finalmente reescribimos la expresión resultante en términos de  $d \cos \delta / d \cos \theta$  con el objetivo de aplicar las expresiones analíticas obtenidas anteriormente (Ec. (2.49)).

el flujo, una vez fijada la geometría, se reduce por lo tanto a determinar  $S_V$  y evaluar las siguientes integrales

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{S_V} f_B[\delta(\theta)] \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi, \\ I_s &= \int_{S_V} f_B[\delta(\theta)] \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Consideremos primero un ejemplo sencillo, un casquete circular y uniforme de semiapertura  $\theta_c$  centrado en  $\theta_0$ . Por simplicidad, tomaremos  $\theta_c \leq \pi/2$  y  $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ . La integral en  $\phi$  en la Ec. (2.55), que da como resultado la longitud angular de la intersección lineal entre el paralelo dado por  $\theta$  y el casquete de emisión, ya fue resuelta anteriormente, resultando en la función  $h(\theta, \theta_c, \theta_0)$  que se expresa en la Ec. (2.34). Un buen análisis sobre la validez de este punto puede encontrarse en [TN13]. De este modo, solo resta encontrar los límites  $\theta_{min}$  y  $\theta_{max}$  del intervalo de integración en  $\theta$  para la Ec. (2.55).

Para que un punto sobre la superficie estelar sea visible para el observador, debe satisfacerse la condición  $\delta \leq \pi/2$ . El caso extremo se da cuando los fotones abandonan la estrella con una trayectoria tangencial a su superficie. Estas trayectorias corresponden al máximo ángulo observable de la estrella,  $\theta_F$  (cambiamos de notación para no confundir con el límite superior de integración, que introduciremos mas adelante), que puede obtenerse de la Ec. (2.49) tomando  $\delta = \pi/2$ , con lo que resulta

$$\theta_F = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{1 - P_h(R)\epsilon^2}{A(R)} \right), \quad (2.56)$$

de donde se desprenden las siguientes condiciones de propagación

$$\frac{1 - 2A(R)}{P_h(R)} \leq \epsilon^2 \leq \frac{1}{P_h(R)}. \quad (2.57)$$

Notemos que esto limita la compacticidad de la estrella a los casos en que no todo punto sobre su superficie es visible para el observador, siendo el caso límite justamente  $\theta_F = \pi$ . Esto se condice con las limitaciones que veníamos imponiendo, dado que en el desarrollo analítico de la relación del coseno se asume  $R_S/R$  pequeño.

Dado que cualquier punto en la superficie de la estrella con  $\theta > \theta_F$  no será visible para el observador, y que el casquete se extiende desde  $\theta_0 - \theta_c$  hasta  $\theta_0 + \theta_c$ , puede verse que los límites de integración estarán dados por

$$\begin{aligned} \theta_{min} &= \min[\theta_F, \max(0, \theta_0 - \theta_c)], \\ \theta_{max} &= \min(\theta_F, \theta_0 + \theta_c). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Las integrales a resolver pueden expresarse ahora como

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int f_B[\delta(\theta)] \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta_0 \sin \theta} \right) \sin \theta \cos \theta d\theta, \\ I_2 &= 2 \int f_B[\delta(\theta)] \cos^{-1} \left( \frac{\cos \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta_0 \sin \theta} \right) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (2.59)$$

siendo

$$\begin{aligned} I_p &= I_1(\theta_{max}) - I_1(\theta_{min}), \\ I_s &= I_2(\theta_{max}) - I_2(\theta_{min}). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Por simplicidad, de ahora en adelante consideraremos una emisión isotrópica con  $f_B(\delta) = 1$ . Cuando el casquete es completamente visible y su centro se encuentra sobre la visual ( $\theta_0 = 0$ ), se tiene

$h(\theta, \theta_c, \theta_0) = 2\pi$ , con lo que las integrales se resuelven trivialmente, resultando

$$\begin{aligned} I_p &= \pi(\sin^2 \theta_{max} - \sin^2 \theta_{min}) = \pi \sin^2 \theta_c, \\ I_s &= 2\pi(\cos \theta_{min} - \cos \theta_{max}) = 2\pi(1 - \cos \theta_c). \end{aligned} \quad (2.61)$$

En caso de que  $\theta_0 \neq 0$ , debemos encontrar las integrales indefinidas  $I_1$  e  $I_2$ . Este cálculo se encuentra desarrollado en el apéndice de [TN13] y da como resultado<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} I_1 &= + \sin^2 \theta \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta_0 \sin \theta} \right] - \sin^2 \theta_c \cos \theta_0 \sin^{-1} \left[ \frac{\cos \theta - \cos \theta_0 \cos \theta_c}{\sin \theta_0 \sin \theta_c} \right] \\ &\quad - \cos \theta_c \sqrt{-[\cos \theta - \cos(\theta_0 + \theta_c)][\cos \theta - \cos(\theta_0 - \theta_c)]}, \\ I_2 &= - 2 \cos \theta \cos^{-1} \left[ \frac{\cos \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta}{\sin \theta_0 \sin \theta} \right] + 2 \cos \theta_c \sin^{-1} \left[ \frac{\cos \theta - \cos \theta_0 \cos \theta_c}{\sin \theta_0 \sin \theta_c} \right] \\ &\quad + \text{sign}(\theta_0 + \theta_c - \pi) \sin^{-1} \left[ \frac{(\cos \theta_0 \cos \theta_c + 1) \cos \theta + \sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_c - \cos \theta_0 \cos \theta_c}{(1 + \cos \theta) |\sin \theta_0 \sin \theta_c|} \right] \\ &\quad + \text{sign}(\theta_0 - \theta_c) \sin^{-1} \left[ \frac{(\cos \theta_0 \cos \theta_c - 1) \cos \theta + \sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_c + \cos \theta_0 \cos \theta_c}{(1 - \cos \theta) |\sin \theta_0 \sin \theta_c|} \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde se ha tomado nula la constante arbitraria. Puede verse que, si el casquete es completamente visible, resulta

$$\begin{aligned} I_p &= \pi \cos \theta_0 \sin^2 \theta_c, \\ I_s &= 2\pi(1 - \cos \theta_c), \end{aligned} \quad (2.63)$$

lo que simplifica enormemente los cálculos. De esta forma, la Ec. (2.62) solo es requerida si alguna parte del casquete escapa del área visible, teniendo que ser evaluada en  $\theta_F$ . Introduciendo ahora el área efectiva

$$A_{eff}(\theta_c, \theta_0) = C(R) \left[ \left( 1 - \frac{A(R)}{1 - P_h(R)\epsilon^2} \right) I_s + \left( \frac{A(R)}{1 - P_h(R)\epsilon^2} \right) I_p \right], \quad (2.64)$$

podemos expresar el flujo neto observado como

$$F = I_0 \frac{A^{3/2}(R) n^2(R)}{C(R) n_0^2} \frac{1}{1 - P_h(R)\epsilon^2} A_{eff}(\theta_c, \theta_0). \quad (2.65)$$

En caso de contar con mas de un casquete emisor, y considerando que cada uno puede tener una intensidad distinta, el flujo total se obtiene simplemente sumando las contribuciones de cada casquete,

$$F_{tot} = \frac{A^{3/2}(R) n^2(R)}{C(R) n_0^2} \frac{1}{1 - P_h(R)\epsilon^2} \sum_i I_{0,i} A_{eff}(\theta_{c,i}, \theta_{0,i}), \quad (2.66)$$

pudiendo aproximar de esta forma casquetes no esféricos ni homogéneos, construidos por combinación.

Para la comodidad del lector, enumeramos los pasos a seguir para la obtención del perfil de pulso analítico de una estrella de neutrones.

1. Elegir los elementos métricos  $A(r)$ ,  $B(r)$  y  $C(r)$ .
2. Fijar los parámetros  $R$ ,  $Q$ ,  $\epsilon$  y  $h$ , atendiendo sus respectivas limitaciones.
3. Seleccionar el ángulo entre el eje de rotación y la línea de visión  $\zeta$  ( $0 \leq \zeta \leq \pi/2$ ),

<sup>7</sup>En la Ec. (2.62) se han corregido dos typo de signo correspondientes a la Ec. (20) de [TN13].

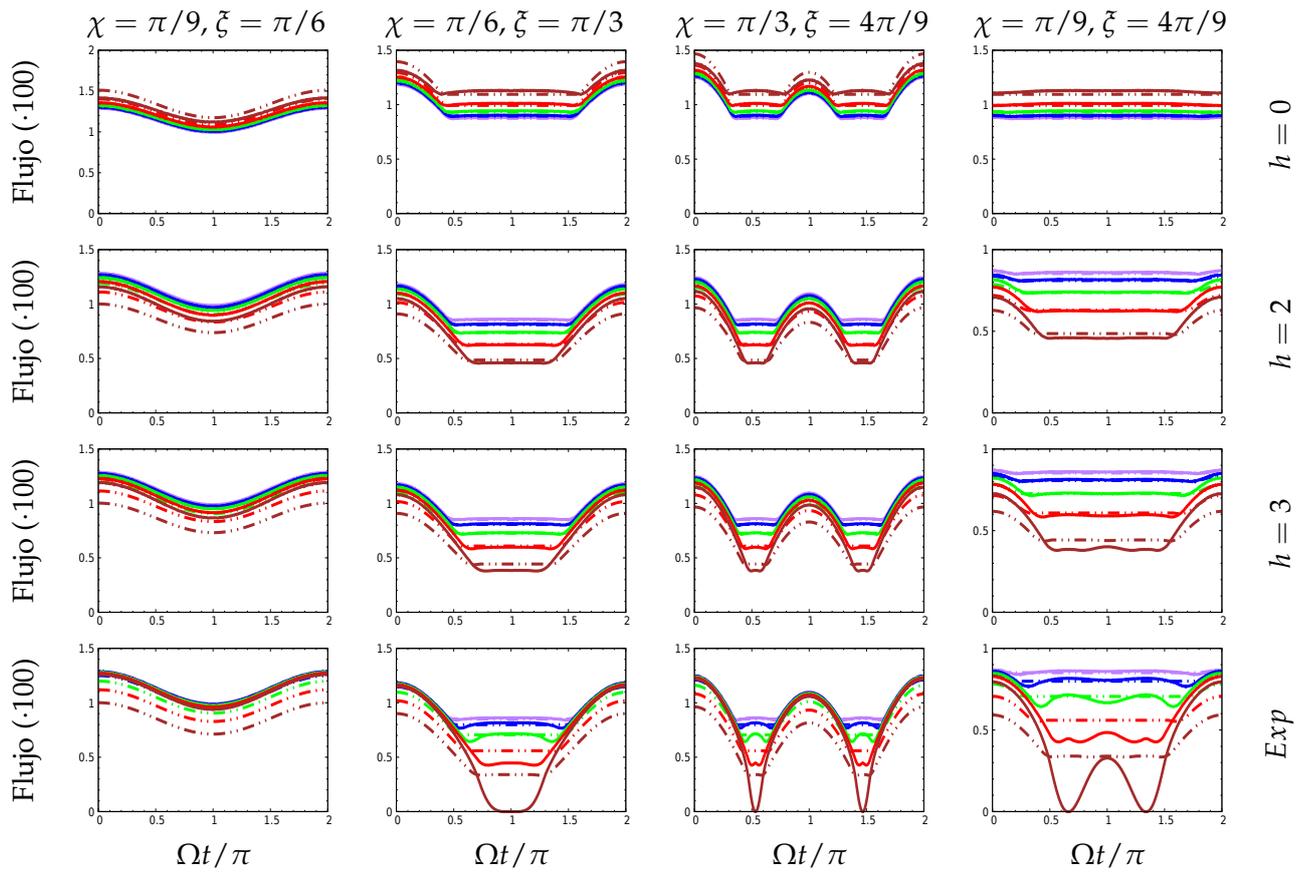
4. Fijar para cada casquete su intensidad  $I_{0,i}$ , el ángulo entre el eje de rotación y el centro del casquete  $\chi_i$  ( $0 \leq \chi_i \leq \pi$ ) y su semiapertura angular  $\theta_{c,i}$  ( $0 \leq \theta_{c,i} \leq \pi$ ).
5. Elegir una función de emisión superficial  $f_B[\delta(x)]$ . Notar que si  $f_B[\delta(x)] \neq 1$ , las Ec. (2.61), (2.62) y (2.63) deben ser modificadas, y si la elección de  $f_B$  lleva a que las integrales ya no sean analíticas, éste procedimiento deja de ser válido.
6. Calcular el máximo ángulo visible sobre la superficie de la estrella  $\theta_F$  a partir de la Ec. (2.56).
7. Discretizar los valores de la fase  $\gamma_p \in [0, 2\pi]$  y evaluar en ellos  $\theta_{0,i}(t)$  para cada casquete mediante la Ec. (2.32).
8. Para cada casquete, calcular los límites  $\theta_{min,i}$  y  $\theta_{max,i}$  según la Ec. (2.58).
9. Evaluar  $I_{1,i}$  e  $I_{2,i}$  en los límites  $\theta_{min,i}$  y  $\theta_{max,i}$  para obtener las integrales  $I_{p,i}$  e  $I_{s,i}$  como se indica en la Ec. (2.60).
10. Calcular el área efectiva de cada casquete  $A_{eff,i}$  a partir de la Ec. (2.64).
11. Sumar las contribuciones de cada casquete para obtener el flujo total a una dada fase  $F_{tot}$  según la Ec. (2.66).
12. Repetir el procedimiento para cada valor de la fase  $\gamma_p \in [0, 2\pi]$  a evaluar.

A continuación, mostramos los perfiles de pulso obtenidos analíticamente mediante la aproximación aquí desarrollada y los comparamos con el correspondiente resultado numérico. Para esto, consideraremos púlsares de un tamaño típico con  $R = 6$ , carga límite  $Q = 0,99$  y densidades de plasma con  $\epsilon \leq 0,5$ , con dos casquetes antipodales e idénticos de semiapertura angular  $\theta_c = \pi/36$ , en las configuraciones angulares  $(\chi, \xi) = (\pi/9, \pi/6)$ ,  $(\pi/6, \pi/3)$ ,  $(\pi/3, 4\pi/9)$  y  $(\pi/9, 4\pi/9)$  correspondientes (cuando se tiene  $\epsilon = 0$  y  $Q = 0$ ) a las clases I, II, III y IV definidas por Beloborodov en [Bel02] (estas y otras nuevas clases serán discutidas en la Sec. 2.7). Esto se realizó para los modelos métricos de Schwarzschild, Reissner-Nordström y Garfinkle, Horowitz y Strominger, sobre las cuatro distribuciones de plasma empleadas anteriormente. Los resultados se muestran en los Cuadros 2.21 a 2.23.

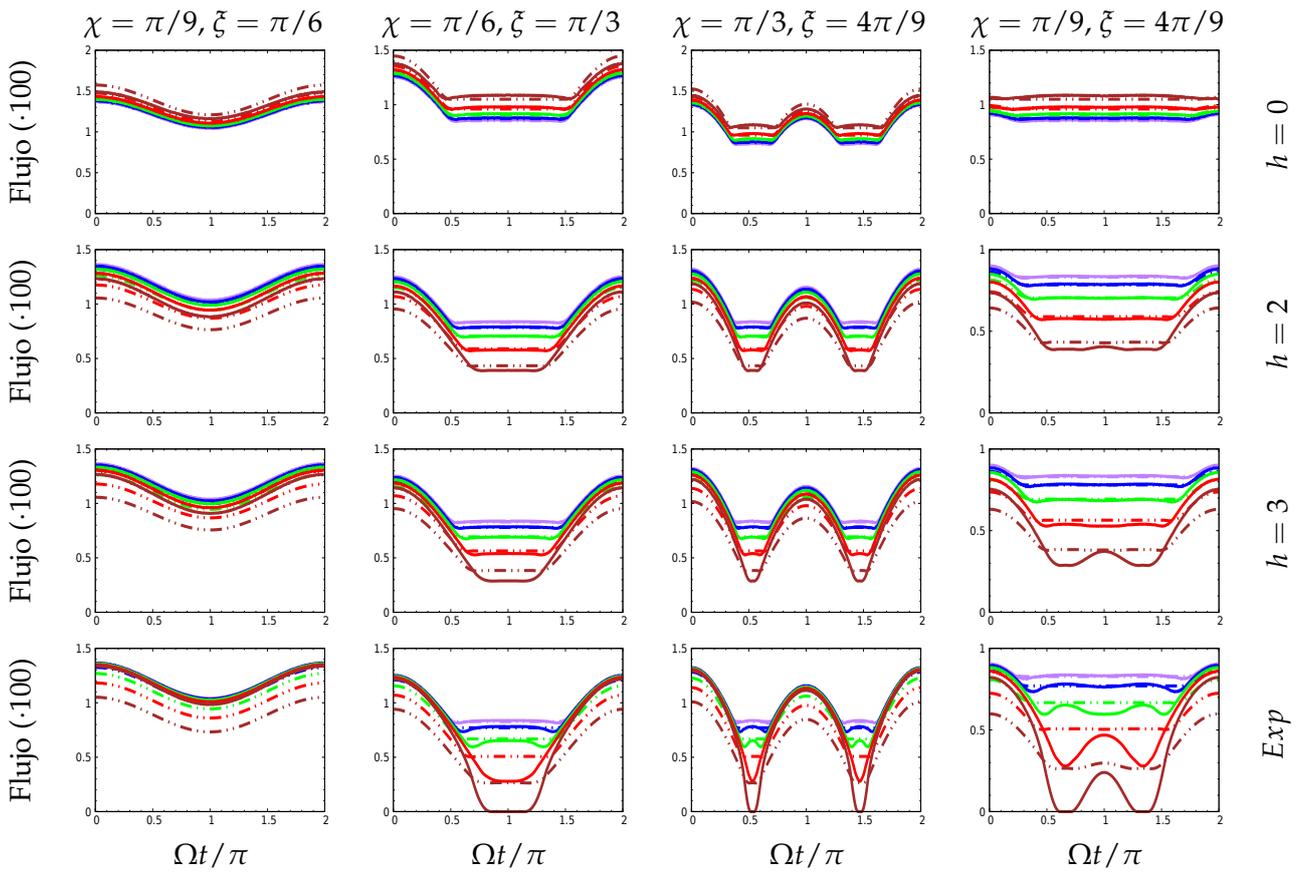
Vemos que el perfil del pulso obtenido de forma analítica aproxima en gran medida los resultados numéricos para frecuencias con  $\epsilon \leq 0,3$ , alcanzando una gran precisión para  $\epsilon = 0,1$ , mientras que para cocientes de frecuencias mayores 0,3 la aproximación comienza a perder precisión, aunque sigue siendo cualitativamente razonable. Esto es esperable dadas las condiciones bajo las cuales se realizó la aproximación, esto es  $\epsilon \ll 1$ , por lo que en este aspecto los resultados parecen aceptables.

Notemos que la aproximación tiende a subestimar el flujo generado por un único casquete, lo que se corresponde con los picos que se observan en los Cuadros 2.21 a 2.23 a  $\Omega t = 0, \pi$  y  $2\pi$ , o los perfiles correspondientes a  $(\chi, \xi) = (\pi/9, \pi/6)$ , en la columna izquierda de cada tabla. Esto puede tener su origen en el desarrollo en potencias de  $\epsilon$  durante la aproximación, obteniendo una mayor densidad espacial de plasma e incrementando su efecto de lente divergente, lo que disminuye el tamaño aparente de la estrella explicando así el déficit en el flujo. Por otro lado, en los instantes en que ambos casquetes son visibles se tiende a sobrestimar el flujo total. Esto puede deberse al hecho de que la aproximación sobrestima el ángulo máximo  $\theta_F$ , resultando en un mayor efecto de lente y generando un incremento en el flujo observado para los casquetes próximos al ocaso. En este régimen, además, la aproximación presenta un perfil prácticamente constante, omitiendo los sutiles altibajos que pueden observarse en el flujo numérico. Es en la transición entre estos comportamientos (que está directamente relacionada a la ubicación de  $\theta_F$ ) donde se produce la mayor pérdida de exactitud del modelo. De esta forma, concluimos que la precisión se incrementa para distribuciones de plasma con perfiles mas suaves y disminuye a medida que consideramos áreas de emisión con mayor  $\theta$ , tendiendo a sobrestimar el flujo.

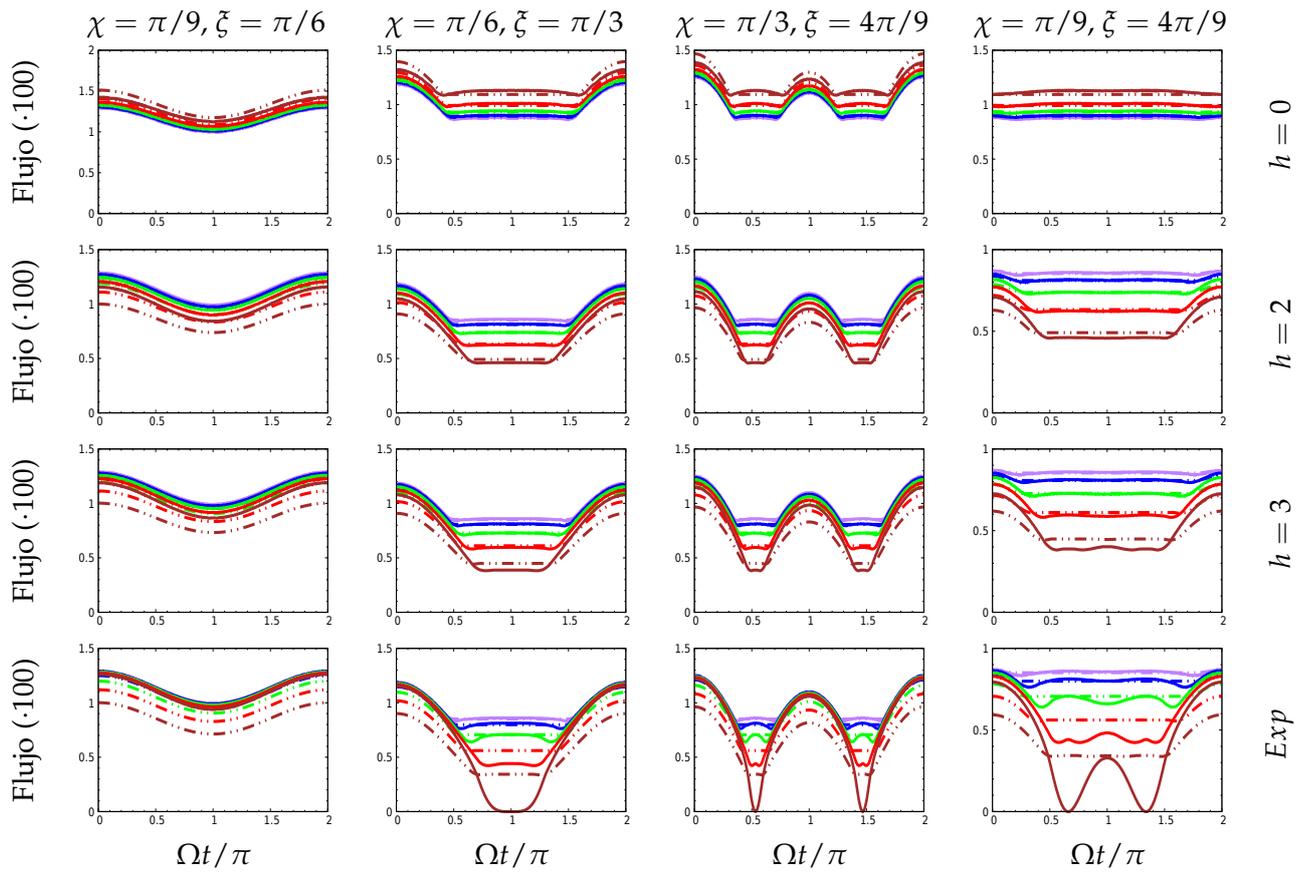
Para perfiles de clase I (recordemos que de momento estamos empleando el sistema de clasificación introducido por Beloborodov en [Bel02], el cual será revisado y generalizado en la Sec. (2.7)) vemos que



CUADRO 2.21: Perfil de pulso analítico para dos casquetes idénticos y antipodales. Schwarzschild,  $R = 6$ ,  $Q = 0,99$ ,  $\theta_c = 5^\circ$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  y  $0,5$  respectivamente. Las líneas continuas se corresponden al resultado numérico, mientras que las a trazos corresponden a la aproximación analítica.



CUADRO 2.22: Perfil de pulso analítico para dos casquetes idénticos y antipodales. Reissner-Nordström,  $R = 6$ ,  $Q = 0,99$ ,  $\theta_c = 5^\circ$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  y  $0,5$  respectivamente. Las líneas continuas se corresponden al resultado numérico, mientras que las a trazos corresponden a la aproximación analítica.



CUADRO 2.23: Perfil de pulso analítico para dos casquetes idénticos y antipodales. Garfinkle, Horowitz y Strominger,  $R = 6$ ,  $Q = 0,99$ ,  $\theta_c = 5^\circ$ . Las líneas púrpura, azul, verde, roja y marrón corresponden a  $\epsilon = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$  y  $0,5$  respectivamente. Las líneas continuas se corresponden al resultado numérico, mientras que las a trazos corresponden a la aproximación analítica.

la aproximación es cualitativamente impecable. Aunque los valores del flujo difieran levemente para valores de  $\epsilon$  elevados, las curvas analíticas son casi idénticas a las numéricas, a menos de una traslación vertical. Los perfiles de clase II y III son en general precisos, mas allá de las irregularidades mencionadas anteriormente que se dan principalmente en los picos y al confluir el flujo de ambos casquetes. Por su parte, los perfiles de clase IV son los mas irregulares, dado que al incrementar  $\epsilon$  estos degeneran en perfiles de clase II o III dependiendo del valor de  $\theta_F$ , el cual es distinto según el método empleado.

Respecto al perfil del plasma, vemos que para una distribución constante la aproximación tiende ahora a sobrestimar el flujo de un único casquete y a subestimar el flujo producto de ambos casquetes. Esto podría estar relacionado con el hecho de que, en general, una distribución de plasma constante invierte el efecto de lente, que pasa de divergente a convergente, invirtiendo de esta forma los efectos mencionados. A pesar de este defecto, las curvas son sumamente similares a las numéricas a menos de una traslación vertical. Por su parte, los perfiles de decaimiento dados por leyes de potencias con  $h = 2$  y  $h = 3$  funcionan razonablemente bien, atendiendo a las peculiaridades mencionadas anteriormente sobre la precisión en los picos y sobrestimar el flujo al confluir ambos casquetes. Por último, el perfil con decaimiento exponencial es que que presenta las mayores desviaciones, lo cual es esperable dado que la aproximación se realizo considerando una ley de potencias. En este caso, se pierde una gran cantidad de información al confluir ambos casquetes, existiendo además una gran pérdida cualitativa al analizar perfiles de pulso de clase IV debido a las discrepancias en el valor de  $\theta_F$ . De esta forma, gran parte del comportamiento cualitativo se pierde al considerar distribuciones de plasma con rápido decaimiento.

Finalmente, señalamos que la aproximación analítica para el perfil de pulso parece funcionar de igual forma en los tres modelos métricos aquí probados.

## 2.6. Anillos

Se ha mencionado en la literatura que las regiones de emisión en las estrellas de neutrones suelen tener formas irregulares, asemejándose en ocasiones a anillos o medias lunas [GLP17] [Loc+19]. Resolver estos casos de manera numérica puede resultar relativamente complicado e implicar un costo computacional alto, por lo que las aproximaciones analíticas introducidas en la Sec. 2.5 representan una alternativa sumamente provechosa que nos permiten obtener los perfiles de pulso en un tiempo mucho menor (alrededor de un orden de magnitud, dependiendo de la optimización de los programas) con una precisión aceptable y sin pérdida de generalidad.

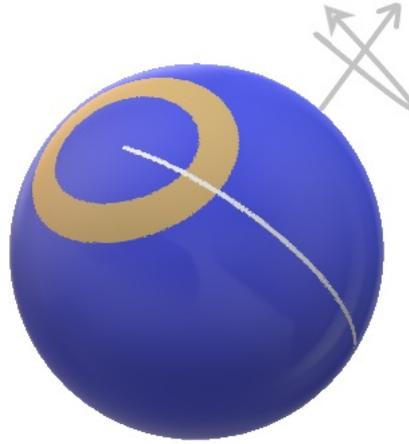


FIGURA 2.5: Configuración de casquete tipo anular centrado en  $\theta_0(t)$  con semiapertura interna  $\theta_i$  y externa  $\theta_e$ .

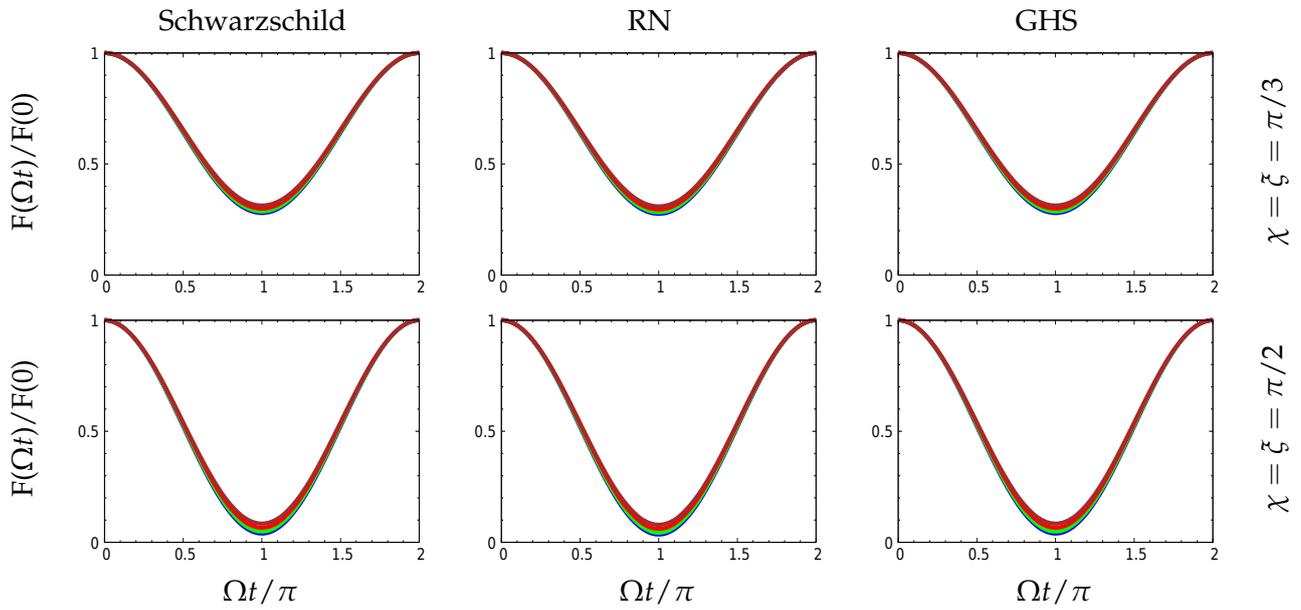
En los trabajos de Sotani et.al., [SM17], [SM18], [SSP19] y [Sot20] se desarrollan también aproximaciones analíticas para tratar este tipo de casos, haciendo especial énfasis en los casquetes de emisión de forma anular (para más información u orientación en este tema, revise los trabajos aquí citados), aunque se desprecia por completo la influencia de un entorno plasmático.

Haremos una demostración del alcance y la potencia de nuestro modelo empleándolo en la resolución de perfiles de pulso generados por casquetes anulares. Supongamos que tenemos un púlsar con un único casquete emisor con forma de anillo, cuyo borde exterior cuenta con una semiapertura angular  $\theta_e$  mientras que su borde interior tiene una semiapertura angular  $\theta_i$ . Esto se puede obtener fácilmente calculando el flujo producido por un casquete circular de semiapertura  $\theta_e$  y restando el flujo producido por un casquete circular de semiapertura  $\theta_i$ , ambos casquetes con el mismo vector posición  $\hat{C}$ ,

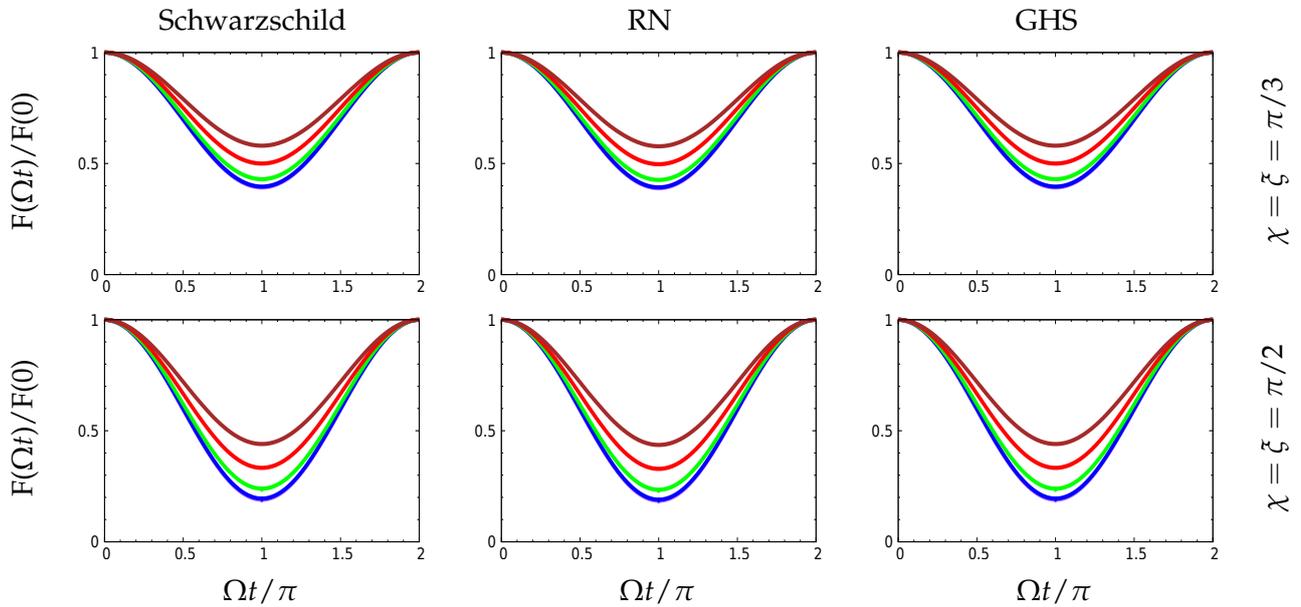
$$F_{Anillo} = \frac{A^{3/2}(R)}{C(R)} \frac{n^2(R)}{n_0^2} \frac{1}{1 - P_h(R)\epsilon^2} I_0 [A_{eff}(\theta_e, \theta_0) - A_{eff}(\theta_i, \theta_0)], \quad (2.67)$$

A continuación, en las Tablas 2.24 y 2.25 mostramos los perfiles de pulso generados por casquetes de emisión únicos anulares con  $\theta_e = 35^\circ$  y  $70^\circ$  respectivamente, para distintos valores de  $\theta_i$ . Para esto, se emplearon los parámetros  $R = 4,0$ ,  $Q = 0,20$ ,  $\epsilon = 0,15$  y  $h = 3$  (véase la Ec. (2.22)) sobre las tres métricas trabajadas hasta ahora, Schwarzschild, Reissner-Nordstrom y Garfinkle-Horowitz-Strominger, para las configuraciones  $\chi = \zeta = \pi/3$  y  $\chi = \zeta = \pi/2$ . Los flujos obtenidos fueron normalizados según su valor máximo.

Si bien la magnitud del brillo mengua notablemente al incrementar el valor de  $\theta_i$  (esto no es visible en los gráficos dada la normalización), la morfología del perfil apenas difiere de la del casquete circular, al menos cualitativamente. El flujo resultante presenta el perfil sinusoidal que estamos acostumbrados a esperar de un único casquete.



CUADRO 2.24: Perfiles de pulso generado por casquetes de emisión anulares.  $R = 4,0$ ,  $Q = 0,20$ ,  $\epsilon = 0,15$ ,  $h = 3$ . El borde exterior del anillo tiene una semiapertura angular  $\theta_e = 35^\circ$ , mientras que las curvas púrpura, azul, verde, marrón y roja corresponden a  $\theta_i = 0^\circ, 5^\circ, 15^\circ, 25^\circ$  y  $32,5^\circ$  respectivamente



CUADRO 2.25: Perfiles de pulso generado por casquetes de emisión anulares.  $R = 4,0$ ,  $Q = 0,20$ ,  $\epsilon = 0,15$ ,  $h = 3$ . El borde exterior del anillo tiene una semiapertura angular  $\theta_e = 70^\circ$ , mientras que las curvas púrpura, azul, verde, marrón y roja corresponden a  $\theta_i = 0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ$  y  $65^\circ$  respectivamente

Al remover parte del casquete (esto es, al incrementar  $\theta_i$ ) vemos que la amplitud de la oscilación disminuye, tendiendo a aplanar la curva. Esto se debe a que la contribución del centro del casquete que estamos restando tiene menor peso mientras mas nos alejemos de la línea de visión, por lo que el valor mínimo del flujo disminuirá menos que el valor máximo (esto se ve al revés en los gráficos debido a la normalización, donde  $F_{max}$  se mantiene constante mientras es  $F_{min}$  el que se incrementa).

Por otro lado, vemos que este efecto en la morfología es solo apreciable en anillos relativamente grandes ( $\theta_e \approx 70^\circ$ ), mientras que para anillos pequeños ( $\theta_e \approx 35^\circ$ ) no vemos casi diferencia entre los distintos valores de  $\theta_i$ . Esto se debe a que, al ser pequeño el anillo, ocupa un entorno donde las contribuciones de cada punto al flujo neto son muy similares, por lo que remover parte del casquete solo disminuye proporcionalmente el flujo neto, sin afectar la morfología del perfil. En cierta forma, al considerar anillos pequeños nos estamos acercando a la aproximación de casquete puntual, de modo que lo que estamos haciendo podría compararse con restar dos casquetes puntuales de distinta intensidad.

Por lo demás, vemos que al cambiar la configuración  $(\xi, \chi)$  el comportamiento es el esperado. Para  $(\xi, \chi) = (\pi/3, \pi/3)$ , el anillo no se aleja demasiado de la parte frontal de la estrella, manteniendo bajo el valor de  $\theta_0$ , por lo que el valor mínimo del flujo es relativamente alto. En cambio, para la configuración  $(\xi, \chi) = (\pi/2, \pi/2)$  el anillo se encuentra en oposición al observador en  $\Omega t = \pi$ , por lo que el flujo observado será mucho menor, dado que gran parte de este se ubica en la zona invisible de la estrella, o a valores de  $\theta$  demasiado elevados.

Respecto a las métricas, vemos que existe poca o nula diferencia entre los perfiles obtenidos por estas, lo que es esperable dado el bajo valor de  $Q$ .

Remarcamos que esta es solo una de las posibles aplicaciones de nuestra aproximación analítica. Con ella, puede simplificarse el cálculo del perfil de pulso producido por casquetes con todo tipo de formas irregulares o con diferentes temperaturas superficiales, haciendo mas accesible el estudio de las propiedades de estos sistemas y facilitando su comprensión.

## 2.7. Clasificación

Al considerar dos casquetes emisores que ya no son idénticos y que tampoco se encuentran en una configuración antipodal, el sistema de Beloborodov [Bel02] resulta insuficiente para clasificar los distintos perfiles observables. Al ser distinguibles los casquetes, el perfil ya no es simétrico respecto a cual es cual, por lo que al invertir sus posiciones deberíamos añadir una nueva clase. Por otro lado, al abandonar la configuración antipodal damos lugar a perfiles donde, por ejemplo, ninguno de los casquetes es visible durante toda la fase, o uno es visible solo en ocasiones mientras el otro es siempre invisible. Estos fenómenos también puede conseguirse al incrementar la densidad de plasma, resultando en nuevas clases de perfiles. Tenemos entonces un total de nueve clases de perfiles para dos casquetes distinguibles no antipodales, las cuatro clases introducidas por Beloborodov, las inversiones de sus clases I y II, dos clases con spots de visibilidad parcial y nula y una clase de perfil nulo. Por comodidad, organizaremos esta nueva clasificación según los casquetes tengan visibilidad total (es decir, el casquete es visible en todo momento para el observador), parcial (es visible en algunos momentos y no en otros) o nula (no es visible para el observador en ningún momento). Esta clasificación se explica en el Cuadro 2.26, donde además se señala la correspondencia con las clases de Beloborodov.

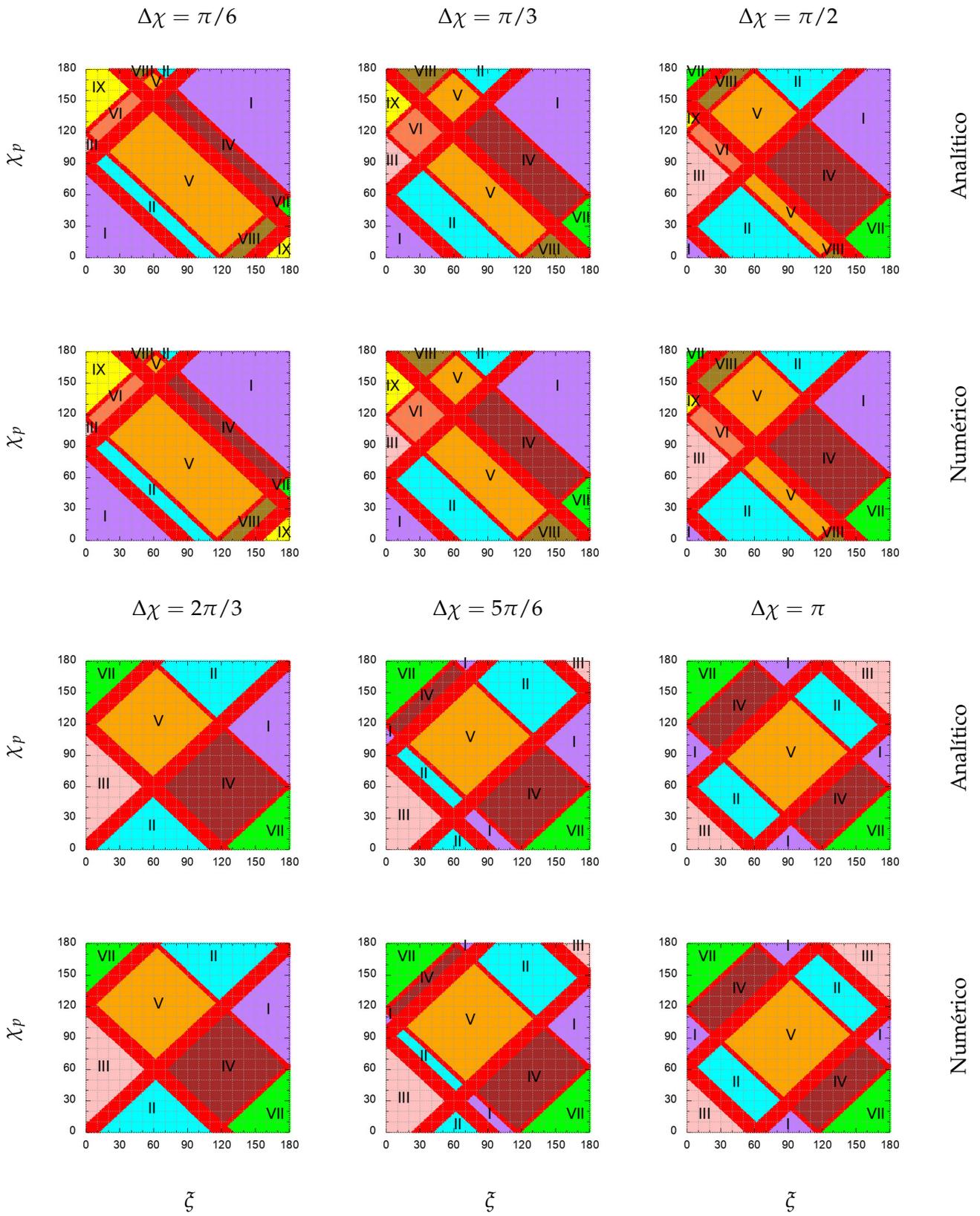
Clase	Visibilidad c. principal	Visibilidad c. secundario	Clase Beloborodov
I	Total	Total	IV
II	Total	Parcial	II
III	Total	Nula	I
IV	Parcial	Total	II
V	Parcial	Parcial	III
VI	Parcial	Nula	
VII	Nula	Total	I
VIII	Nula	Parcial	
IX	Nula	Nula	

CUADRO 2.26: Nuevo sistema de clasificación para púlsares con dos casquetes distinguibles no antipodales.

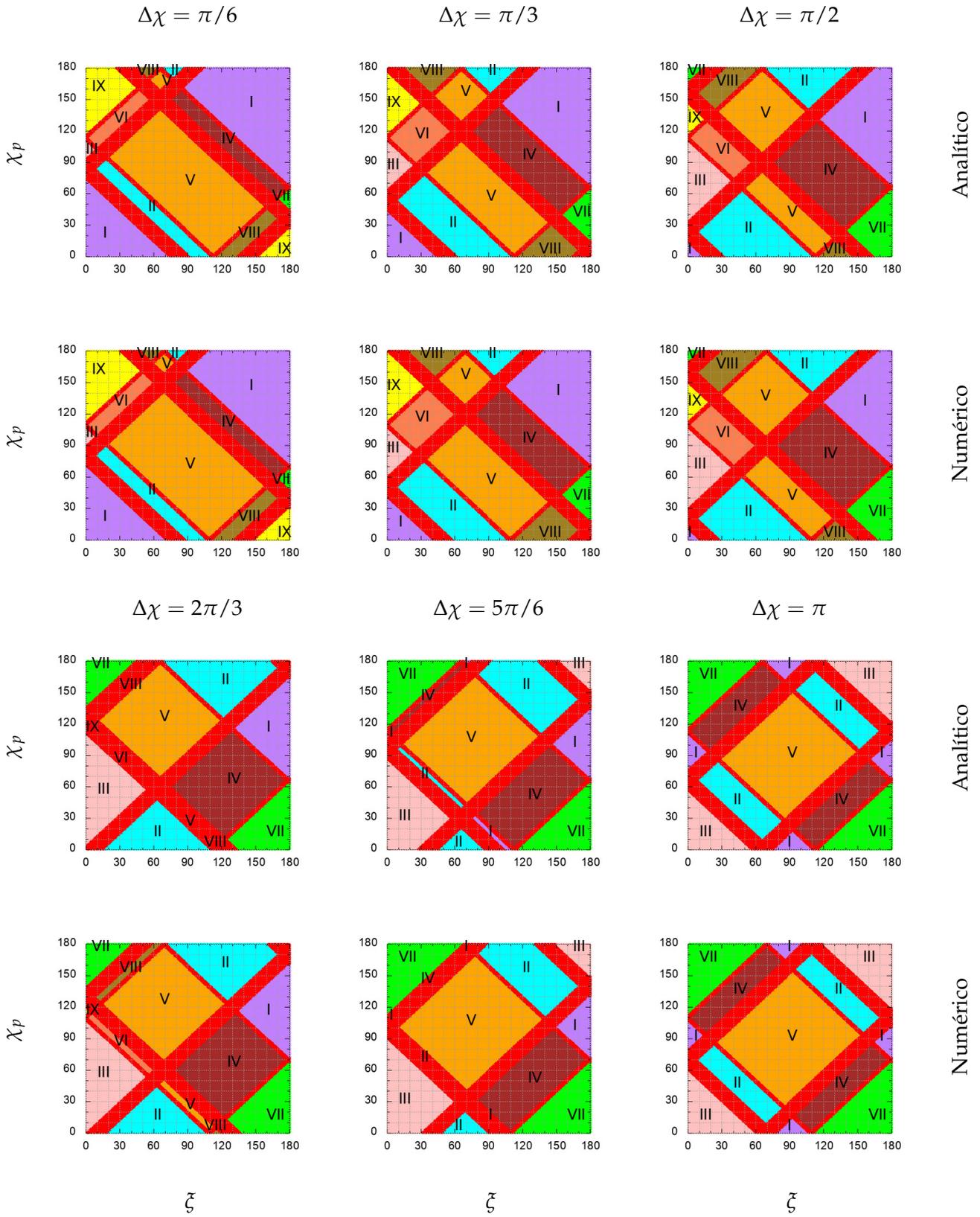
A continuación, en los Cuadros 2.27 a 2.30 se muestran los mapas de localización de las clases en el plano  $\xi - \chi_p$ , siendo  $\chi_p$  el ángulo entre el eje de rotación y el centro del casquete primario, para distintos valores de  $\Delta\chi = \chi_p - \chi_s$ , siendo  $\chi_s$  el ángulo entre el eje de rotación y el casquete secundario. Para esto se tomó  $R = 6$  y se consideraron distintas métricas, cocientes de frecuencias  $\epsilon$  y cargas  $Q$ , comparando los resultados obtenidos por los métodos numérico y analítico. Los casquetes primario y secundario contaban con semiapertura angular  $\theta_{c,p} = 3^\circ$  y  $\theta_{c,s} = 10^\circ$  respectivamente.

Al examinar los mapas de localización de las clases, vemos que estas están divididas por rectas marcadas en los gráficos de color rojo, que se corresponden a los valores de  $\xi$  y  $\chi_p$  para los cuales alguno de los casquetes, al alcanzar su máxima elongación en  $\theta$ , resulta parcialmente visible, estando en parte por encima de  $\theta_F$  y en parte por debajo, siendo de este modo zonas de transición para casquetes de visibilidad total a parcial, o de visibilidad parcial a nula. De esta forma, las ocho rectas rojas que vemos en cada gráfico están dadas por las siguientes ecuaciones

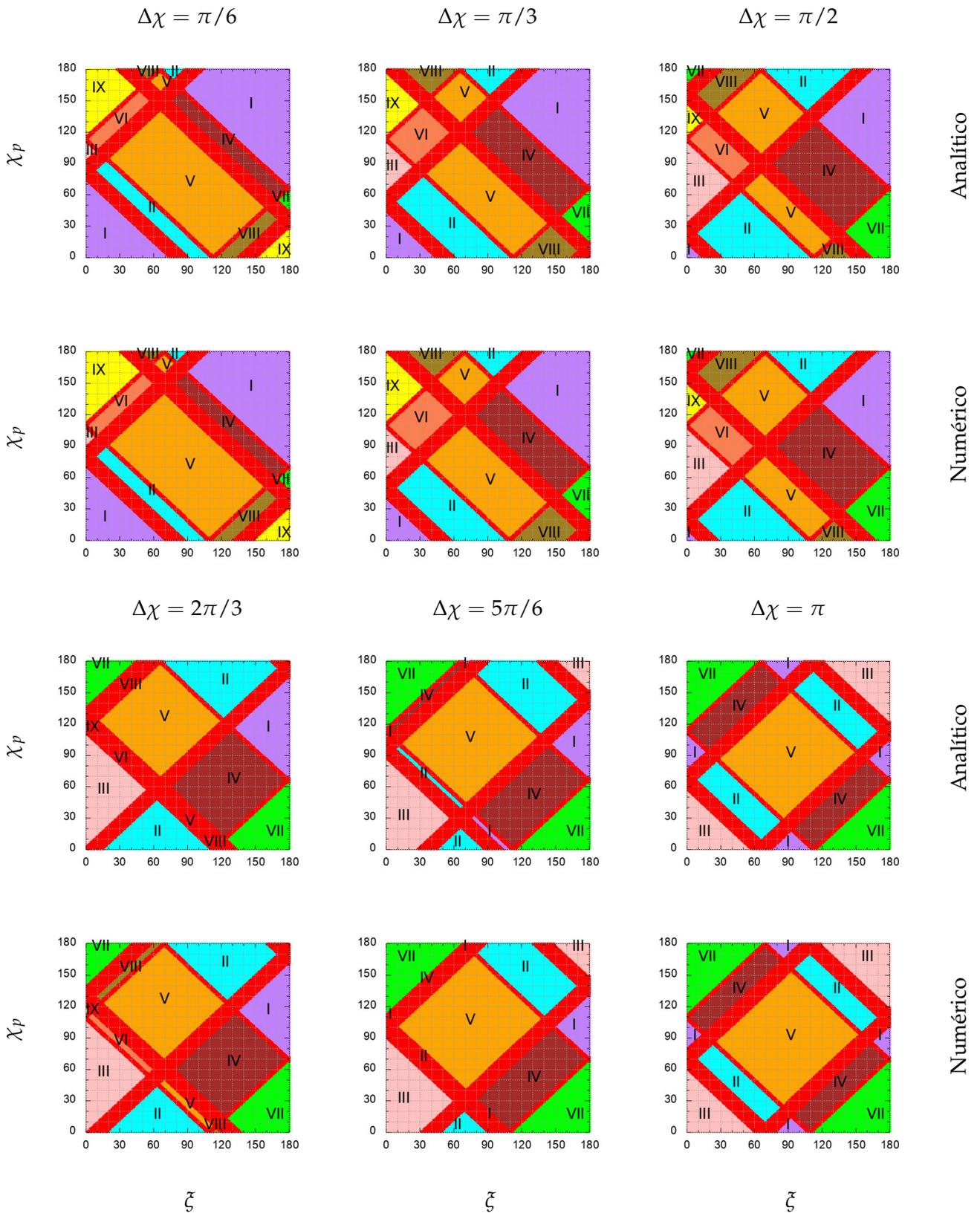
$$\begin{aligned}
 \chi_p &= \theta_F \pm \xi, \\
 \chi_p &= \theta_F - \Delta\chi \pm \xi, \\
 \chi_p &= 2\pi - \theta_F \pm \xi, \\
 \chi_p &= 2\pi - \theta_F - \Delta\chi \pm \xi,
 \end{aligned} \tag{2.68}$$



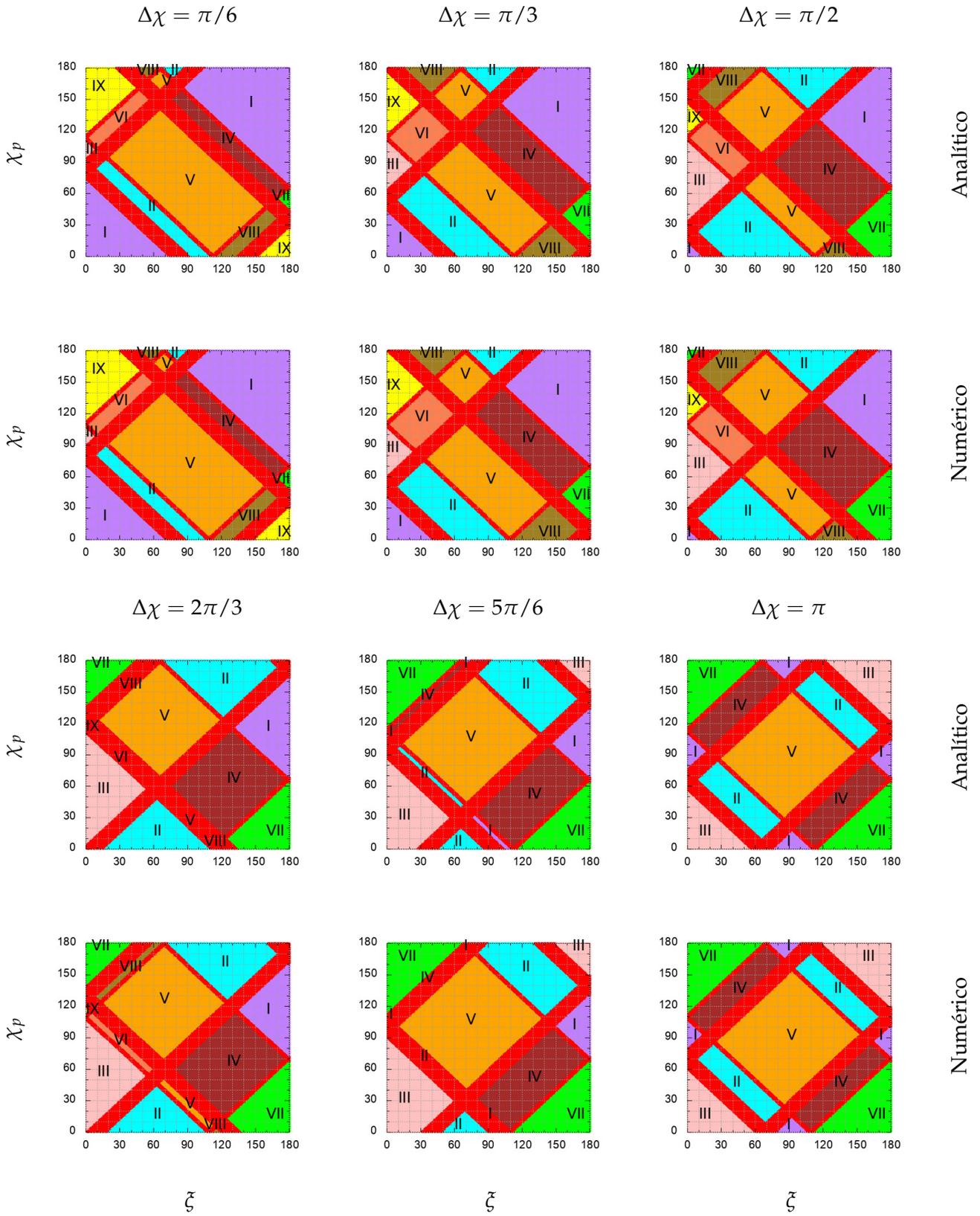
CUADRO 2.27: Mapas de localización de las clases en el plano  $\xi - \chi_p$ . Schwarzschild,  $\epsilon = 0,0$



CUADRO 2.28: Mapas de localización de las clases en el plano  $\xi - \chi_p$ . Schwarzschild,  $\epsilon = 0,3$



CUADRO 2.29: Mapas de localización de las clases en el plano  $\xi - \chi_p$ . Reissner-Nordström,  $\epsilon = 0,3, Q = 0,2$

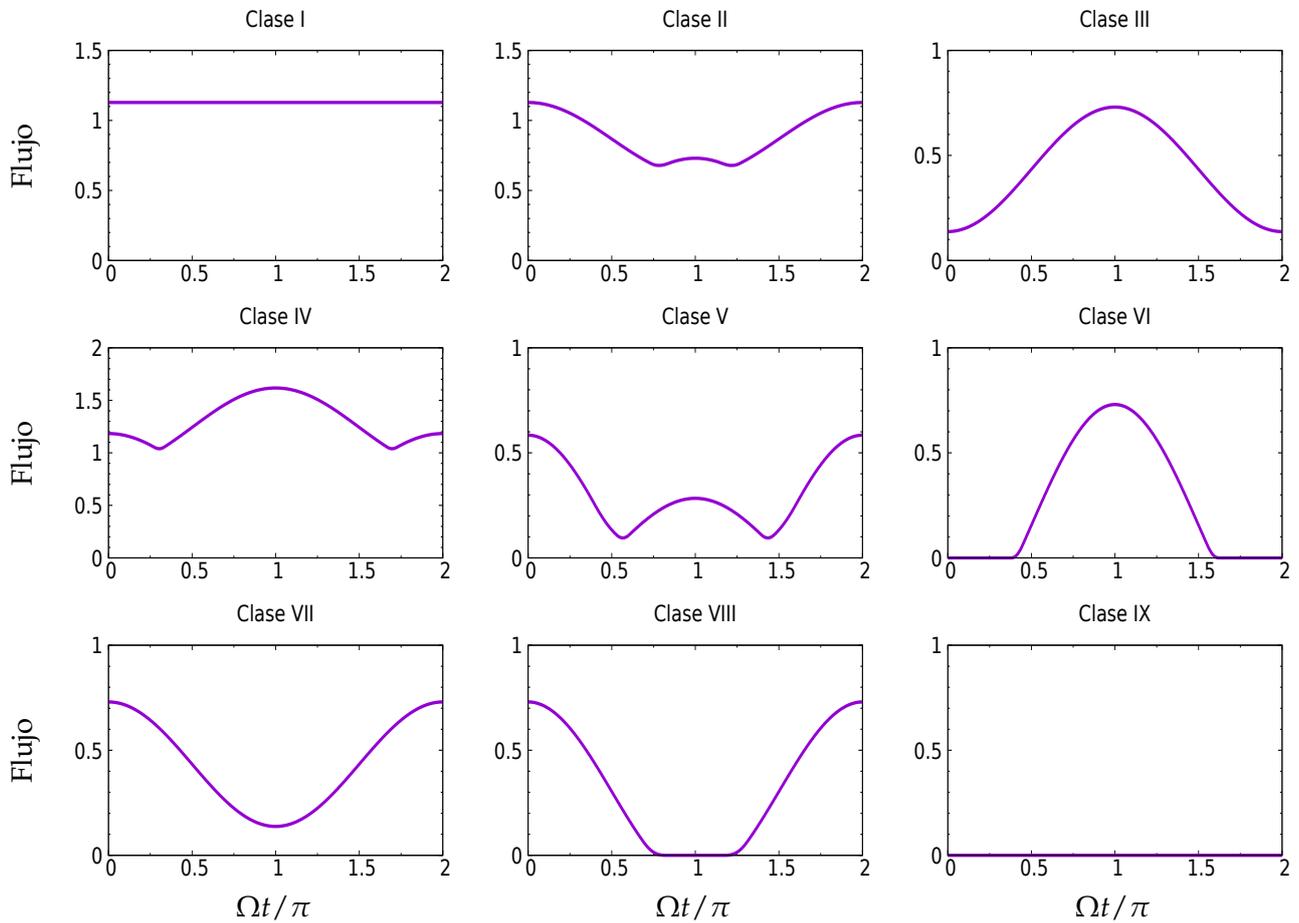


CUADRO 2.30: Mapas de localización de las clases en el plano  $\xi - \chi_p$ . Garfinkle, Horowitz y Strominger,  $\epsilon = 0,3$ ,  $Q = 0,2$

siendo los mapas simétricos respecto a las rectas  $\xi = 0$  y  $\xi = 180^\circ$ , es decir,  $Clase(\pi + \delta, \chi_p) = Clase(\pi - \delta, \chi_p)$ . Por otro lado, tenemos que  $Clase(\xi, \pi + \delta) = Clase(\pi - \xi, \delta)$ . Dadas estas simetrías, vemos que en cada gráfico se forman dos rectángulos inclinados cuyo vértice izquierdo se encuentra sobre el eje  $\chi_p$  y cuyos lados izquierdo superior y derecho inferior son mas cortos que los izquierdo inferior y derecho superior. El interior de cada rectángulo representa la zona de visibilidad parcial del correspondiente casquete. Al desplazarnos en diagonal atravesando los lados de mayor extensión, entramos en la zona de visibilidad total, mientras que al desplazarnos atravesando los lados de menor extensión entramos en la zona de visibilidad nula. Si en cambio nos desplazamos horizontal o verticalmente, atravesando algún vértice, nos encontramos nuevamente dentro de un rectángulo de visibilidad parcial.

Dadas las discrepancias entre los valores numérico y analítico de  $\theta_F$ , existe una leve diferencia en la ubicación de estas rectas que, en casos extremos, puede llegar a resultar en la aparición de clases que no deberían estar ahí, o en su omisión. Sin embargo, la morfología de los mapas de clases obtenidos por los métodos numérico y analítico son en general indistinguibles.

Para completar la discusión, en el Cuadro 2.31 mostramos algunos perfiles de pulso representativos de cada una de las clases introducidas en el Cuadro 2.26.



CUADRO 2.31: Perfiles de pulso representativos de cada clase.

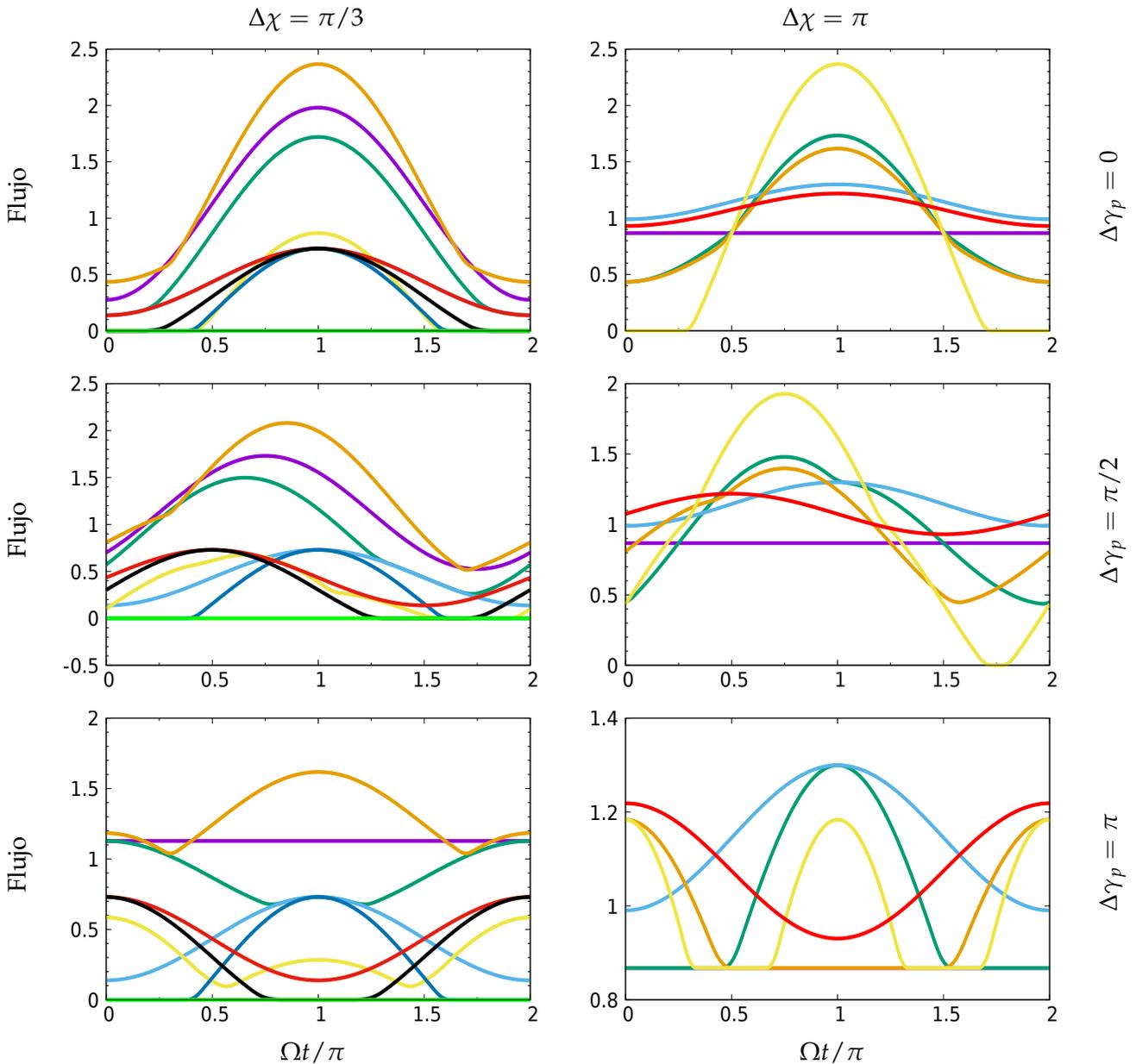
Sin embargo, al examinar el Cuadro 2.32, donde se incluyen perfiles de pulso con casquetes en diferentes configuraciones, vemos que, contrario a lo que sucedía en la clasificación de Beloborodov, al permitir que los casquetes sean no solo antipodales sino que además no se encuentren en el mismo meridiano (esto es,  $\Delta\gamma_p = \gamma_{p,p} - \gamma_{p,s} \neq 0$ ) tenemos que pulsos de igual clase presentan perfiles claramente diferentes en cuanto a su morfología.

Para resolver este problema, elaboramos las siguientes subclasificaciones en base al esquema presentado en el Cuadro 2.26, atendiendo solo a algunas de las mas evidentes diferencias morfológicas entre

perfiles de una misma clase.

Clase I:

- a: Los casquetes se encuentran en oposición de fase, de forma que el decaimiento en el brillo de uno contrarresta el incremento del otro, resultando en un perfil constante.
- b: Los casquetes se encuentran en conjunción de fase o desfasados, de forma que su luminosidad no se contrarresta, resultando en un perfil no constante.



CUADRO 2.32: Perfiles de pulso representativos de cada clase. Las curvas de color violeta, verde agua, celeste, naranja, amarillo, azul, rojo, negro y verde se corresponden respectivamente con las clases I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII y IX.

Clase II y clase IV:

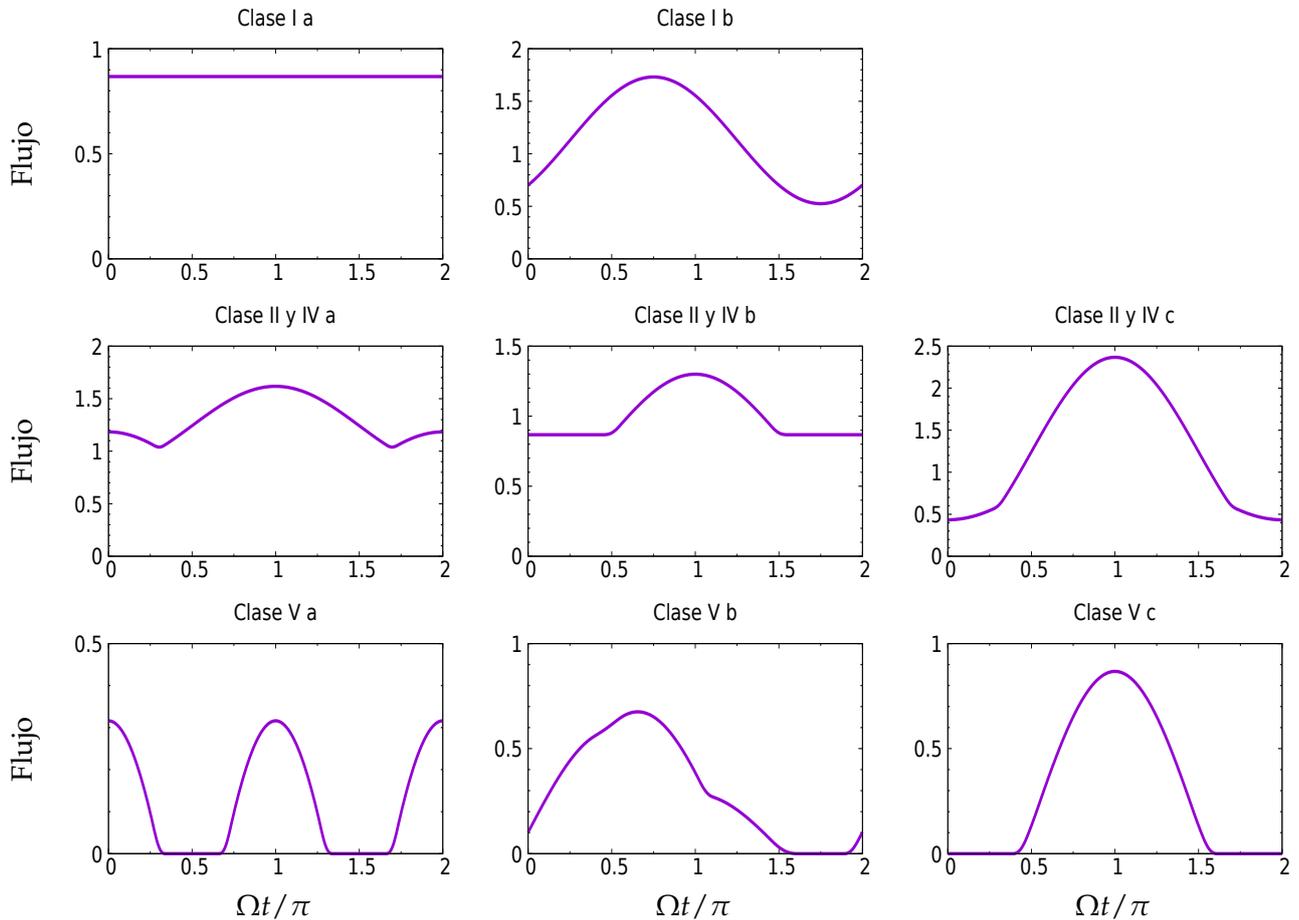
- a: Los casquetes se encuentran en desfasados, de forma tal que el perfil presenta dos picos distinguibles.

- b: Los casquetes se encuentran en desfases, de forma tal que el perfil presenta un único pico y periodos de flujo constante.
- c: Los casquetes se encuentran en conjunción, de forma tal que el perfil presenta un único pico con dos pendientes características.

Clase V:

- a: Los casquetes no comparten período de visibilidad, resultando en dos picos separados por dos periodos de flujo nulo.
- b: Los casquetes comparten un intervalo de período de visibilidad y cuentan con intervalos donde son el único visible, resultando en dos picos solapados y un único período de flujo nulo.
- c: El período de visibilidad de uno de los casquetes esta completamente contenido dentro del período de visibilidad del segundo, resultando en un único pico y un único periodo de flujo nulo.

Para cerrar esta sección, en el Cuadro 2.33 mostramos algunos perfiles de pulso característicos de las subclases recién mencionadas.



CUADRO 2.33: Perfiles de pulso representativos de cada subclase.

## 2.8. Conclusiones

Se estudió como la refracción y los efectos de lente gravitacional se superponen y compiten en las cercanías de objetos compactos en entornos plasmáticos, modificando las trayectorias de los fotones y los perfiles de pulso generados por casquetes de emisión en la superficie estelar. Suponiendo un espaciotiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano, se emplearon los modelos métricos de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom y Garfinkle-Horowitz-Strominger para describir un púlsar de rotación lenta en el seno de un medio plasmático no magnetizado con simetría esférica, derivando fórmulas para obtener numéricamente los perfiles de pulso y las trayectorias de los fotones. Remarcamos que, según el perfil de densidad del entorno plasmático, la frecuencia plasmática puede actuar como una masa fotónica efectiva ( $h = 0$ ), una contribución adicional al momento angular ( $h = 2$ ), o reproducir el potencial de una perturbación de campo escalar sin masa con una elección juiciosa de la constante de escala ( $h = 3$ ) [Rog15]. Estudiando los fenómenos dependientes de la frecuencia, se observó que toda interacción con un medio plasmático genera un comportamiento cromático en los perfiles de pulso y desviaciones en las trayectorias de los fotones en las cercanías de objetos compactos. Con el objetivo de desarrollar un enfoque simple que pudiera ser fácilmente utilizado para comparar cuantitativa los modelos con observaciones, tomamos la relación del coseno de Beloborodov y la modificamos para tener en cuenta el entorno plasmático, añadiendo correcciones de primer orden en  $\epsilon^2$ . Como resultado, las trayectorias y los perfiles de pulsos se expresan mediante fórmulas analíticas comparativamente simples que implican únicamente funciones elementales.

El trazado de rayos nos permitió estudiar el efecto de lente divergente originado por la refracción en el entorno plasmático que rodea a una estrella de neutrones. Este fenómeno se magnifica al incrementar la densidad del plasma, llegando a superar al efecto de lente gravitacional convergente propia del objeto compacto, y resultando en una disminución tanto en su tamaño aparente ( $x_{max}$ ) como en su área observable ( $\theta_{max}$ ). En general, este efecto se acentúa en distribuciones de plasma con mayor decaimiento (mayor  $h$ ), mientras que para distribuciones constantes ( $h = 0$ ) el efecto se invierte dando como resultado una lente convergente que se suma ahora al efecto de lente gravitacional. Por su parte, la carga tiene un efecto diferente según el modelo de espaciotiempo que se considere. Al emplear la métrica de Reissner-Nordström, una mayor carga  $Q$  reduce apreciablemente los valores de  $x_{max}$  y  $\theta_{max}$ , mientras que empleando la métrica de Garfinkle-Horowitz-Strominger  $\theta_{max}$  se ve apenas reducido, mientras que  $x_{max}$  resulta menor incluso al obtenido en RN. Concluimos que la carga eléctrica contrarresta los efectos relativistas de la gravedad, disminuyendo el área observable y el tamaño aparente de la estrella y aproximándonos a una métrica plana.

Se estudió el perfil de pulso producido por una estrella de neutrones con un único casquete circular y homogéneo en configuración ortogonal ( $\chi = \xi = \pi/2$ ), atendiendo a la dependencia de su morfología con el cociente entre frecuencias  $\epsilon$ , la compacticidad de la estrella  $R/M$ , su carga  $Q$ , el modelo métrico y la distribución de plasma. Se observó que la compacticidad tiende a aplanar la curva de luminosidad, mientras que una mayor frecuencia disminuye el brillo y tiempo de visibilidad del casquete. Un resultado notable es que, para estrellas con alta compacticidad donde  $\theta_{max} > \pi$ , el efecto de lente es tan poderoso que el flujo alcanza su máximo valor al encontrarse el casquete emisor en oposición al observador, superando significativamente al flujo observado en conjunción y formando un característico pico delgado. A este mismo modelo se le añadió un casquete emisor idéntico y antipodal al primero, repitiendo los mismo estudios. Es destacable el hecho de que, al encontrarse los dos casquetes en la zona de visibilidad de la estrella y relativamente lejos de  $\theta_{max}$ , el flujo resultante es casi constante. Finalmente, se cambió la configuración  $(\chi, \xi)$  para obtener perfiles de las cuatro clases introducidas por Beloborodov, considerando ahora estrellas de baja compacticidad con un radio típico  $R = 6$ . Resaltamos el hecho de que tanto el cociente entre frecuencias  $\epsilon$ , la carga  $Q$ , la distribución de plasma  $h$  y el modelo métrico pueden modificar notablemente la morfología del perfil de pulso, llevándolo a corresponder a otras clases.

Se encontró una corrección a la relación del coseno presentada por Beloborodov (Ec. (2.48)) para incluir ahora los efectos de refracción producidos por un entorno plasmático cuya densidad esté regida

por una ley de potencias, llegando a la Ec. (2.49), cuya forma exacta depende de la densidad del plasma  $h$ , del modelo métrico y del cociente entre frecuencias  $\epsilon$ . Esta formulación fue aplicada al estudio de púlsares, permitiendo un tratamiento mucho más simple de los problemas vistos anteriormente al reemplazar las complicadas integraciones numéricas, dando expresiones sencillas para el ángulo de deflexión  $\beta = \theta - \delta$  y para  $\theta$  en términos de  $r$  y del parámetro de impacto  $x$ . El estudio de los errores en  $\theta$  demostró que nuestra aproximación resulta efectivamente más precisa que la de Beloborodov al considerar entornos plasmáticos, presentando distintos niveles de precisión según la compacticidad de la estrella, la densidad y distribución del plasma o el modelo métrico. En general, las desviaciones resultan aceptables para estrellas de baja compacticidad ( $R \geq 6$ ) con bajos cocientes entre frecuencias ( $\epsilon \leq 0,3$ ). Estos avances nos permitieron encontrar una expresión analítica simple para el flujo observado, permitiendo aproximar en gran medida los perfiles de pulso obtenidos numéricamente y reduciendo drásticamente el coste computacional de estos.

Remarcamos que las aproximaciones analíticas obtenidas pueden emplearse para simplificar considerablemente el cálculo de perfiles de pulso producidos por casquetes de formas irregulares con emisión anisotrópica y diferencias superficiales de temperatura, e incluso combinaciones de estos, en entornos donde el plasma tiene un impacto no despreciable en la deflexión de la luz, bajo condiciones de compacticidad y carga eléctrica realistas, facilitando de este modo el estudio y la comprensión de estos sistemas. En nuestro caso, dimos una demostración de su uso para resolver el perfil producido por casquetes con forma de anillos, pero esta es solo una de la amplia gama de modelos que pueden tratarse con este enfoque.

El nuevo formalismo es mucho más simple de usar, dando una descripción clara de los perfiles de pulso y facilitando comparar la teoría con las observaciones, restringiendo así los parámetros del pulsar. Si el casquete antipodal nunca se ve, el pulso resultante es perfectamente sinusoidal. Si ambos casquetes antipodales son visibles simultáneamente, el pulso permanece constante. Por otro lado, la superficie visible de la estrella tiende a ser sobrestimada. Dadas estas nuevas facilidades, pudimos considerar estrellas de neutrones con dos casquetes no antipodales ni idénticos, las cuales daban lugar a perfiles de pulso nuevo que no encajaban en el esquema de clasificación de Beloborodov. Por este motivo desarrollamos nuestro propio sistema de clasificación, atendiendo a las nuevas particularidades del modelo. El principal efecto fue la ampliación de la zona no especular del mapa de clases en el plano  $\chi - \xi$ , es decir, la zona que no se puede obtener como reflexión o traslación de otras. Al mismo tiempo, debido a las libertades en la configuración del modelo, muchos perfiles de la misma clase presentaban morfologías claramente diferentes, por lo que debimos ampliar la clasificación en distintas subclases.

Aprovechamos para mencionar que es probable que una o más de las suposiciones realizadas en nuestro modelo sean violadas en la naturaleza, por lo que es importante conocer su rango de validez. Para empezar, no podemos argumentar que los modelos métricos de Reissner-Nordström y Garfinkle-Horowitz-Strominger sean realistas desde el punto de vista astrofísico. La razón por la que los adoptamos es que son soluciones analíticas simples que sirven como punto de partida para un análisis general posterior. Por otro lado, cabe destacar que el formalismo aquí presentado sólo puede aplicarse a estrellas de neutrones de rotación lenta. En otro caso, deben considerarse métricas como la de Kerr u otras similares. De hecho, a medida que el espín aumenta hasta unos pocos cientos de Hertz, fenómenos tales como el efecto Doppler, la aberración relativista, arrastre de marco, y la deformación estelar (momento cuadrupolar y oblongación) pasan a ser relevantes. Por otro lado, los casquetes de un púlsar realista no tienen por qué emitir de manera isotrópica según la ley de Lambert ( $f_B(\delta) = 1$ ), ya sea porque la estrella está cubierta por una atmósfera, o porque la emisividad está fuertemente restringida a energías por debajo de la frecuencia del plasma de electrones, por ejemplo. Los modelos de emisión realistas predicen, en diferente medida, una dependencia angular en la intensidad emitida. Además, para situaciones realistas, la existencia de una magnetosfera debe ser tenida en cuenta. Mientras que la anisotropía es despreciable en modelos atmosféricos no magnetizados, se vuelve relevante en atmósferas magnetizadas, o en superficies condensadas. Un fuerte campo magnético lleva a una emisividad anisotrópica con una dirección preferencial a lo largo del campo. Una posibilidad interesante es que la emisión se origine por encima de la superficie de la estrella de neutrones, generando emisiones con  $\delta > \pi/2$ . A

pesar de todas estas restricciones en el rango de validez y estado limitado a casos extremos, el trabajo actual constituye un modelo simple que permite describir y aproximar en gran medida la dinámica de los fotones en torno a objetos compactos embebidos en medios plasmáticos.

Para cerrar, señalamos que dado que los perfiles de pulso radiados desde estrellas de neutrones altamente compactas dependen fuertemente de la geometría gravitacional fuera de las mismas, estos se pueden emplear para sondear las distintas métricas y teorías alternativas, con la ayuda de otra observación que determina el radio y la masa estelares. Al mismo tiempo, es posible deducir la compacidad de la estrella de neutrones observando la curva de luz, restringiendo además la geometría de la estrella de neutrones. Así, se ha sugerido ([SM18]) que uno sería capaz de restringir la ecuación de estado para estrellas de neutrones a través de la observación del perfil de pulso, siempre que los ángulos  $\chi$  y  $\zeta$  estén determinados por otros métodos. Además, si una transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks pudiera existir dentro de una estrella, es probable que esta se vuelva más compacta, lo que puede conducir a un mayor brillo en los perfiles de pulso.

## Capítulo 3

# Agujeros Negros

### 3.1. Introducción

Los agujeros negros son quizás los objetos más extremos dentro de la Astrofísica [Gre15] [PT17] [GSH20] [PT21]. En la vecindad del horizonte de eventos la deformación del espaciotiempo es notable, generando importantes desviaciones en las trayectorias de la luz, efecto que se conoce como lente gravitacional fuerte en el régimen de campos gravitacionales intensos [Boz10]. Este fenómeno óptico se produce debido a que la luz en el campo gravitatorio del agujero negro se propaga a lo largo de curvas llamadas geodésicas. A diferencia de lo que sucede con objetos no suficientemente compactos como estrellas, galaxias o cúmulos de galaxias, donde los efectos de campos gravitacionales débiles pueden ser fácilmente linealizados o estudiados a mayor orden de forma perturbativa, un agujero negro presenta un campo gravitatorio con gradientes tan abruptos que el ángulo de deflexión de la luz en la vecindad del horizonte resulta demasiado grande para aplicar dicho procedimiento [Mel99] [Gre16].

A medida que nos acercamos al agujero negro estos efectos se incrementan y la deflexión llega a ser tan fuerte que aparecen órbitas acotadas de luz que conforman la región de fotones, una región del espacio donde los fotones imperturbados pueden permanecer indefinidamente [GPL14]. Al aproximarnos aún más encontramos el horizonte de eventos, un límite tal que de ser atravesado resulta imposible volver a salir al exterior, incluso para la luz [Gre16]. De esta forma, un agujero negro captura toda la luz que cae sobre él y atraviesa su horizonte, sin permitir que la radiación escape al exterior. En consecuencia, los agujeros negros le hacen honor a su nombre, dado que un observador realmente vería sólo una mancha negra sobre un entorno iluminado. Esta mancha negra da origen al concepto de sombra de un agujero negro, como será definida en breve [FMA00] [BF21].

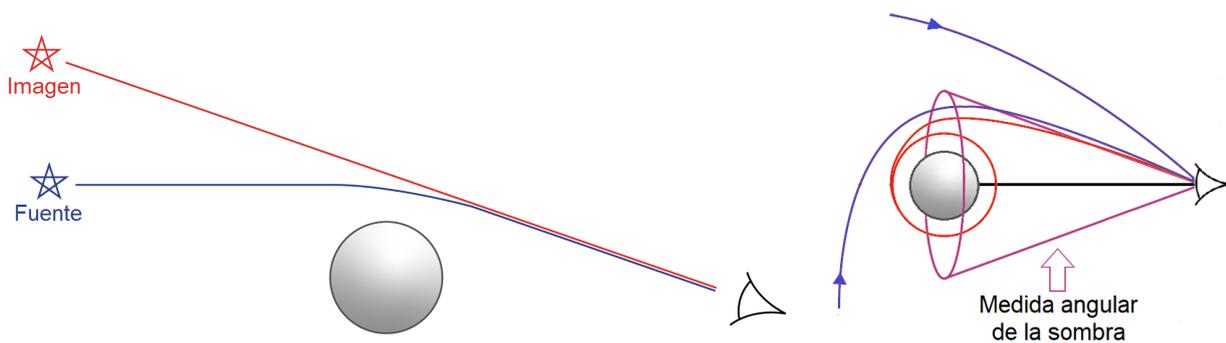


FIGURA 3.1: A la izquierda vemos una representación del efecto de lente gravitacional, donde la luz proveniente de una fuente es deflectada por un objeto compacto generando una imagen con otra posición aparente. A la derecha vemos cómo la deflexión aumenta al acercarnos al objeto compacto, generándose la región de fotones.

Notemos que tanto el tamaño como la forma de la sombra serán diferentes de lo que cabría esperar en un espaciotiempo plano con geometría euclídea. En orden de explicar el por qué, es preciso realizar aquí algunas aclaraciones. La principal característica de un agujero negro es la presencia de un horizonte de eventos, por lo que al hablar de su sombra o imagen, resulta natural asociarla con la apariencia visual del horizonte. De este modo, da la impresión de que uno puede calcular el radio angular aparente de la sombra en el cielo del observador dividiendo la coordenada radial del horizonte por la coordenada radial del observador. Para un observador lo suficientemente lejos, esto da como resultado la imagen euclídea del horizonte, suponiendo que los rayos de luz son líneas rectas en el sistema de coordenadas elegido. En realidad, esta consideración es incorrecta por dos razones. En primer lugar, el límite de la sombra corresponde a los rayos de luz que decaen hacia la esfera de fotones ( $r_f = 3M$  en Schwarzschild) y no hacia el horizonte ( $r_h = 2M$  en Schwarzschild)<sup>1</sup> [PT21]. En segundo lugar, los rayos

<sup>1</sup>Esto es así si consideramos la situación ideal de un agujero negro siendo iluminado desde todas direcciones. En el caso realista de un agujero negro con una zona de emisión dada por su disco de acreción, su sombra puede ser incluso más

de luz que se aproximan asintóticamente a la región de fotones están muy lejos de moverse por las líneas rectas que predice la geometría euclídea [Bar73]. En consecuencia, el radio angular de la sombra es significativamente mayor de lo que la estimación euclídea sugiere. Ver lado izquierdo de la Fig. 3.2.

La sombra es lo más cercano que podemos llegar a tener de una imagen del propio agujero negro, un objeto completamente oscuro del que la luz no puede escapar. Otra noción importante relacionada con la sombra de los agujeros negros es el valor crítico  $b_{cr}$  del parámetro de impacto que separa las órbitas capturadas de las órbitas que escapan hacia el infinito. Como un rayo de luz con  $b_{cr}$  decae en espiral aproximándose asintóticamente a una órbita acotada inestable (que se puede caracterizar por un radio  $r_f = \text{constante}$  en coordenadas de Boyer-Lindquist [SV18] en un espaciotiempo de Kerr), debe tener las mismas constantes de movimiento que otro fotón perteneciente a la órbita límite [BT17]. Estas geodésicas nulas “circulares”<sup>2</sup> son las que conforman la denominada región de fotones (Ver lado derecho de la Fig. 3.2.)

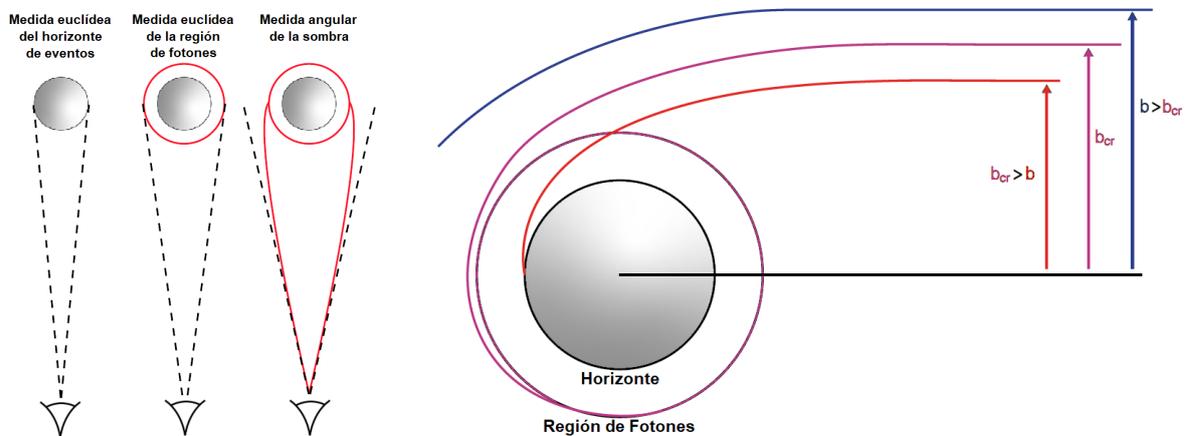


FIGURA 3.2: A la izquierda comparamos los tamaños euclídeos del horizonte y la región de fotones con el tamaño angular de la sombra. A la derecha vemos como un rayo de luz con  $b_{cr}$  decae asintóticamente a la región de fotones, el cual en el caso de un espacio tiempo esféricamente simétrico como el mostrado degenera a una esfera.

Para un observador en las coordenadas de Boyer-Lindquist  $(r_O, \theta_O)$  la sombra del agujero negro se define como la región de su esfera celeste que permanecería oscura si se distribuyesen fuentes de luz de forma continua y uniforme sobre una esfera de radio  $r_L > r_O$ , tal que contuviera en su interior tanto al agujero negro como al observador [PT21]. Para calcular la imagen de ésta, consideraremos rayos de luz enviados hacia el pasado desde el observador hacia algún punto de la esfera celeste. Podemos ver que todas las trayectorias acabarán o bien llegando a alguna fuente luego de desviarse por el agujero negro, a las que asignaremos brillo, o bien atrapadas por el horizonte, a las que asignaremos oscuridad. Como cada rayo de luz se corresponde a un punto en el cielo del observador, los que terminen dentro del horizonte determinarán la imagen observada de la sombra.

La curva de contorno de la sombra estará dada entonces por el caso límite, trayectorias de luz que decaen en espiral aproximándose asintóticamente a la región de fotones. En consecuencia, la sombra del

pequeña que la que se generaría por la apariencia lenteada de la esfera de fotones (el cual puede incluso contener zonas iluminadas en su interior, dependientes del perfil de luminosidad del disco de acreción). Sin embargo incluso en estas situaciones realistas, la esfera de fotones (o anillos de fotones en el caso de espaciotiempos mas generales) siguen jugando un rol importante en la caracterización de la geometría del agujero negro (es decir independientes de la física del modelo de disco de acreción) y recientemente se han propuesto diferentes tests observacionales para detectarlos con una próxima generación de radiotelescopios [Joh+20; CJL21; Gra20]. En este trabajo nos avocaremos al estudio de esta noción de sombra.

<sup>2</sup>Notar que si bien en un agujero negro esféricamente simétrico estas orbitas son realmente circulares, en el caso de agujero negro estacionario rotante no lo son en general, sin embargo es común en la literatura llamarlas circulares por el hecho de que mantienen la coordenada radial  $r$  constante.

agujero negro es un mapeo de esta región de fotones en la esfera celeste del observador y no del horizonte de eventos. En el espaciotiempo de Schwarzschild, y en otros espaciotiempos similares que son esféricamente simétricos, estáticos y asintóticamente planos, estos rayos de luz se aproximan asintóticamente a una esfera de fotones inestable, es decir, una esfera que está llena de geodésicas nulas circulares que son inestables respecto a perturbaciones.

Cuando el parámetro de impacto se aproxima a su valor crítico, el ángulo de deflexión diverge logarítmicamente, tendiendo al infinito. Si el parámetro de impacto está próximo a dicho valor, los fotones pueden realizar una o varias revoluciones alrededor del agujero negro antes de alejarse de él. Tales fotones dan lugar a una secuencia infinita de imágenes en ambos lados del agujero negro, llamadas imágenes de alto orden o imágenes relativistas, como se muestra pictóricamente en la Fig. 3.3 [BT17].

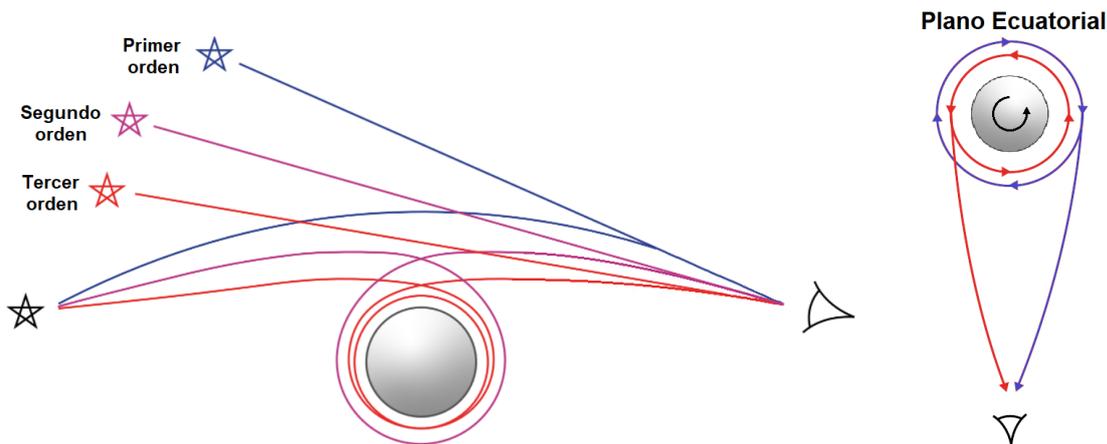


FIGURA 3.3: A la izquierda vemos como una misma fuente puede generar múltiples imágenes. A la derecha vemos el efecto del momento angular en órbitas de fotones sobre el plano ecuatorial que giran en el sentido de rotación del agujero negro u opuesto.

Ahora bien, los agujeros negros son soluciones especiales con una curvatura que aumenta a medida nos adentramos en su interior. La solución más simple que describe un agujero negro esféricamente simétrico, estático y sin carga es la métrica de Schwarzschild ([Sch16]), cuyo horizonte de eventos se encuentra en el denominado radio de Schwarzschild en la coordenada radial  $r_S = 2M$ . Synge ([Syn66]) fue el primero en calcular lo que hoy llamamos la sombra de un agujero negro de Schwarzschild, encontrando que el radio angular  $\rho$  de la sombra circular viene dado por

$$\sin^2 \rho = \frac{27}{4} \frac{\rho_O - 1}{\rho_O^3} \quad (3.1)$$

donde  $\rho_O = r_O/r_S$  es el cociente entre la coordenada radial del observador  $r_O$  y el radio de Schwarzschild. Aquí, las órbitas circulares de luz forman una esfera de fotones a  $r_f = 3M$ .

Los agujeros negros rotantes son descritos en la teoría de la relatividad general de Einstein por la métrica de Kerr ([Ker63]), presentando ahora una simetría axial. En estos, lo que antes fuese la esfera de fotones para Schwarzschild se deforma en una región tridimensional de espacio llena de órbitas espaciales provenientes de geodésicas nulas, es decir, trayectorias de luz en órbitas acotadas con  $r = cte$ , la región de fotones. La sombra ya no es circular, sino que presenta un contorno en forma de  $D$  que se acentúa en el caso de momento angular extremo. Una representación esquemática de dos de estos rayos que llegarían al observador (aquellos que se encuentran sobre el plano ecuatorial) puede verse en la Fig. 3.3.

La forma de la sombra del agujero negro depende de la métrica con que se describa el espaciotiempo a través de distintos parámetros físicos que lo caracterizan como por ejemplo su carga  $Q$ , masa  $M$  o momento angular  $a$ . Es de esperarse que los agujeros negros se encuentren rodeados de luminosos

discos de acreción, plasma y polvo, que afectarán considerablemente la trayectoria de la luz que los atraviese, debido a efectos de absorción, reflexión y refracción, generando una propagación tal que la silueta del agujero negro no estará bien definida (c.f. con lo descrito en el pie de página 1).

En este capítulo, nos centraremos en derivar fórmulas analíticas para describir la curva de contorno de la sombra de un agujero negro vista por un observador en una posición dentro del dominio de comunicación exterior, para una clase general de espaciotiempos estacionarios que tienen la particularidad de admitir separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi (ver 3.1) que describe la dinámica de rayos de luz (sección 3.2).

Con este objetivo, partiremos de la situación idealizada en que tenemos un agujero negro contra un fondo de fuentes de luz distribuidas homogénea y continuamente, sin fuentes de luz u otros obstáculos entre nosotros y el agujero negro, y supondremos que la luz viaja por un medio plasmático no magnetizado y libre de presión, interactuando con este. Para facilitar el tratamiento analítico, elegiremos distribuciones espaciales de plasma que permitan la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi, que describe la trayectoria de los fotones. Estas suposiciones nos permitirán de hecho calcular analíticamente la forma y el tamaño de la sombra para un observador en cualquier lugar fuera del agujero negro y para una gran clase de modelos que incluye el espaciotiempo de Kerr como el ejemplo más importante. Se analizarán las sombras generadas por distintas métricas (sección 3.3.2), para diferentes perfiles de plasma (sección 3.3.3) y considerando además el efecto de la aberración producida por el movimiento relativo del observador (sección 3.4).

Por supuesto, este enfoque no dará una imagen físicamente realista de la sombra que esperaríamos ver en el cielo. En general, nuestras suposiciones serán violadas debido a la presencia de fuentes de luz entre nosotros y el agujero negro, por ejemplo, la luz proveniente de un disco de acreción que cubrirá parcialmente la sombra en el cielo. Por otra parte, solo consideramos un modelo de plasma idealizado, sin tener en cuenta los procesos de emisión y/o absorción del mismo. A pesar del alto grado de idealización de nuestro modelo, este nos permitirá a través de un cálculo analítico obtener una buena comprensión de cómo se producen ciertos efectos, facilitándonos ver de qué manera influyen los parámetros del modelo en el resultado y proporcionando un banco de pruebas para comprobar la validez de los códigos numéricos con ejemplos simples.

## 3.2. Métrica

### 3.2.1. Las Métricas de Konoplya, Stuchlík y Zhidenko

Una familia de métricas estacionarias, axialmente simétricas y asintóticamente planas, que cuentan además con la existencia un horizonte de eventos compacto, es la que se presenta en [KSZ18]. En dicho trabajo, se propone el elemento de línea

$$ds^2 = -\frac{N^2 - W^2 \sin^2 \theta}{K^2} dt^2 - 2Wr \sin^2 \theta dt d\phi + K^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma \frac{B^2}{N^2} dr^2 + \Sigma r^2 d\theta^2, \quad (3.2)$$

donde  $N$ ,  $W$ ,  $K$ ,  $\Sigma$  y  $B$  son, en principio, funciones arbitrarias de  $r$  y  $\theta$ . Aquí, el horizonte de eventos está determinado por la ecuación  $N = 0$ . Por comodidad, de ahora en adelante se usará el cambio de variable  $y = \cos \theta$ . La principal motivación del trabajo de Konoplya, Stuchlík y Zhidenko (KSZ) es encontrar una estructura general para métricas que permitan la separabilidad de las ecuaciones de Klein-Gordon y Hamilton-Jacobi. Para mas información al respecto, vea el apéndice 4. Por ahora, basta con expresar la forma final de las componentes de la métrica encontradas por KSZ,

$$\begin{aligned} B(r, y) &= R_B(r), \\ \Sigma(r, y) &= R_\Sigma(r) + \frac{a^2 y^2}{r^2}, \\ W(r, y) &= \frac{a R_M(r)}{r^2 \Sigma(r, y)}, \\ N^2(r, y) &= R_\Sigma(r) - \frac{R_M(r)}{r} + \frac{a^2}{r^2}, \\ K^2(r, y) &= \frac{1}{\Sigma(r, y)} \left[ R_\Sigma^2(r) + \frac{a^2 R_\Sigma(r)}{r^2} + \frac{a^2 R_M(r)}{r^2} + \frac{a^2 y^2}{r^2} N^2(r, y) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde  $R_B(r)$ ,  $R_\Sigma(r)$  y  $R_M(r)$  son en principio tres funciones arbitrarias de  $r$  que, para cumplir con las condiciones mencionadas anteriormente, deben satisfacer los límites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R_B(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} R_\Sigma(r) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{R_M(r)}{r} = 0, \quad (3.4)$$

siendo además funciones dependientes entre sí, por lo que solo dos de ellas serán realmente libres.

La forma final de las componentes de la métrica y su inversa se simplifica notablemente, pudiendo ser expresadas en matrices de la siguiente forma

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{rR_M}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{arR_M \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2 R_B^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{arR_M \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \sin^2 \theta \left( r^2 R_\Sigma + a^2 + \frac{a^2 r R_M \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$[g^{\mu\nu}] = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \theta - \frac{(r^2 R_\Sigma + a^2)^2}{\Delta} & 0 & 0 & -\frac{arR_M}{\Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{R_B^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{arR_M}{\Delta} & 0 & 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde por conveniencia se han introducido las siguientes funciones

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 \Sigma(r, \theta) = r^2 R_\Sigma(r) + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.7)$$

$$\Delta(r) = r^2 N^2(r) = r^2 R_\Sigma(r) - r R_M(r) + a^2, \quad (3.8)$$

A través de estas expresiones se evidencia que la ecuación de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{1}{2} \left[ g^{\mu\nu}(\vec{x}) \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} + \omega_p^2(\vec{x}) \right] = 0, \quad (3.9)$$

resultará separable para esta familia de métricas, considerando  $\omega_p = 0$  y que  $p_t = \frac{\partial S}{\partial t}$  y  $p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi}$  son constantes de movimiento. Además, es fácil verificar que al añadir un entorno plasmático frío no magnético, basta con pedir que éste presente una distribución de la forma

$$\omega_p(r, \theta) = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{\rho^2(r, \theta)} \quad (3.10)$$

para garantizar la separabilidad de la Ec. (3.9), siendo  $f_r(r)$  una función solo de  $r$  y  $f_\theta(\theta)$  una función solo de  $\theta$ .

Aclaremos que las métricas KSZ no son las mas genéricas que permitan la separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi. Mediante el algoritmo de Newman-Janis, que puede verse en los trabajos [Sha19] y [CC19], partiendo de un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico (llamado espaciotiempo semilla) se obtiene un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico, cuyo elemento de línea genérico se expresa como

$$ds^2 = -Fdt^2 - 2a \sin^2 \theta \left( \sqrt{\frac{F}{G}} - F \right) dt d\phi + \frac{H}{GH + a^2 \sin^2 \theta} dr^2 + Hd\theta^2 + \sin^2 \theta \left[ H + a^2 \sin^2 \theta \left( 2\sqrt{\frac{F}{G}} - F \right) \right] d\phi^2. \quad (3.11)$$

Las métricas KSZ corresponden al subconjunto de métricas que se pueden obtener mediante N-J y que son además Klein-Gordon separables. A pesar de esto, y dado que todas las métricas que emplearemos a continuación admiten una expresión en la forma KSZ (es decir, son Klein-Gordon separables), utilizaremos por comodidad las métricas de Konoplya, Stuchlík y Zhidenko.

### 3.2.2. Modelos de espaciotiempo

Anteriormente vimos las estructuras genéricas que deben tener los espaciotiempos para describir un agujero negro rotante. Sin embargo, no presentamos ningún modelo particular de estos. En esta subsección introduciremos algunos de los modelos de espaciotiempo mas comunes y daremos su descripción en las métricas de KSZ. En el Cuadro 3.1 se expresan las componentes de la métrica de los principales modelos aquí mencionados, así con la ubicación del horizonte de eventos. Esta última se obtiene de la condición  $g^{rr} = 0$ , lo cual ocurre para  $\Delta(r_h) = 0$ .

El agujero negro de Kerr [Ker63] es el modelo mas simple de agujero negro rotante, considerando solo su masa  $M$  y momento angular  $a$ . Este tipo de agujero negro es no isótropo debido a su estado de rotación y presenta además del horizonte de eventos una ergósfera, una región donde la luz aún puede escapar pero la rotación del propio espaciotiempo es tal que nada puede permanecer en reposo con respecto a un observador estático en la región asintótica. Este modelo requiere que se satisfaga la relación  $a^2 < M^2$ , ya que de lo contrario el horizonte de eventos desaparece, lo que resulta en una singularidad desnuda. De este modo, el valor absoluto del momento angular queda restringido entre 0 y  $M$ .

Por otro lado, el agujero negro de Kerr-Newman [New+65] incorpora al modelo anterior la carga eléctrica  $Q$  del agujero negro. Para evitar una singularidad desnuda en este modelo debemos exigir  $a^2 +$

$Q^2 < M^2$ , de forma que tanto el momento angular como la carga del agujero negro están restringidos, siendo el valor máximo de uno dependiente de la magnitud del otro.

El modelo de Kerr Modificado, presentado en [KZ16], toma el agujero negro de Kerr e introduce una pequeña deformación estática  $\eta$  que altera la relación entre la masa  $M$  y el radio  $r_h$  del horizonte de eventos, preservando las propiedades asintóticas del espaciotiempo de Kerr. Es posible ver que, dadas las expresiones para las componentes de la métrica que podemos encontrar en el Cuadro 3.1, este modelo presentará un horizonte de eventos siempre. De esta forma, el momento angular  $a$  del agujero negro esta libre de restricciones.

Otra posible modificación al agujero negro de Kerr es el modelo Kerr-Sen, una solución de agujero negro con carga rotativa  $Q$  obtenida en teoría de cuerdas heteróticas ([Sen92]), la cual es cualitativamente similar al modelo de Kerr. Aquí, se introducen los parámetros  $r_1$  y  $r_2$ , que satisfacen  $r_1 + r_2 = 2M$  y  $r_2 = Q^2/M$ . Sin embargo, es conveniente introducir el parámetro  $b = r_2/2$  para facilitar el tratamiento de este modelo. Nuevamente, al exigir que el radio del horizonte de eventos sea un número real y positivo, obtenemos las condiciones  $a^2 < (M - b)^2$  y  $b < M$ , de modo que ambos parámetros están restringidos.

Un modelo diferente es el agujero negro con carga mareomotriz  $Q$  en teoría de Branas ([AG05]), o Braneworld<sup>3</sup>. Este es cualitativamente similar al modelo de Kerr-Newmann, sin embargo, la carga mareomotriz negativa permite que el momento angular del agujero negro supere considerablemente el límite permitido en Kerr-Newman. Al calcular el radio del horizonte de eventos, vemos que se debe satisfacer la relación  $a^2 - Q^2 < M^2$ , de forma que, si bien el valor de  $a$  esta restringido entre 0 y  $\sqrt{M^2 + Q^2}$ , no hay restricciones para el valor de  $Q$ . De todos modos, es de esperarse que éste sea pequeño.

Por último, consideraremos el agujero negro de Dilaton, modificado en [Sha19] para introducir el momento angular. Esta teoría contempla la existencia de cargas tanto eléctricas  $Q_E$  como magnéticas  $Q_M$ , siendo cualitativamente similar al modelo de Kerr-Newman. Aquí se introduce la carga de Dilaton  $r_0 = (Q_M^2 - Q_E^2)/2M$  y el parámetro  $q = Q_E^2 + Q_M^2 - r_0^2$ . Nuevamente, si deseamos evitar encontrarnos ante una singularidad desnuda, llegamos a la condición  $a^2 + q < M^2$ , de modo que el valor absoluto de  $a$  esta limitado a moverse entre 0 y  $\sqrt{M^2 - q}$ . Esto a su vez da  $M^2$  como cota superior de  $q$ . La elección del parámetro  $M$  determina el resto de restricciones para los valores de  $q$  y  $r_0$ .

Métrica	$R_M(r)$	$R_\Sigma(r)$	$\rho(r, \theta)$	Horizonte
Kerr	$2M$	1	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta$	$r_h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$
K-N	$2M - \frac{Q^2}{r}$	1	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta$	$r_h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$
K-M	$2M + \frac{\eta}{r^2}$	1	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta$	$0 = r_h^2 - 2Mr_h - \frac{\eta}{r_h} + a^2$
K-S	$2M$	$1 + \frac{2b}{r}$	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2br$	$r_h = M - b \pm \sqrt{(M - b)^2 - a^2}$
BW	$2M + \frac{Q^2}{r}$	1	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta$	$r_h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 + Q^2}$
Di	$2M - \frac{q+r_0^2}{r}$	$1 - \frac{r_0^2}{r^2}$	$r^2 + a^2 \cos^2 \theta - r_0^2$	$r_h = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - q}$

CUADRO 3.1: Métricas mas comunes de agujeros negros. En cada modelo se tiene  $R_B = 1$ .

En general, se espera que toda desviación del espaciotiempo de Kerr sea pequeña, es decir, que los parámetros  $Q$ ,  $\eta$ ,  $q$  y  $r_0$  sean relativamente pequeños, aunque el estudio de los casos en que estos parámetros tienen valores extremos es de interés académico. Nótese que todos los modelos recién mencionados resultan idénticos al espaciotiempo de Kerr cuando sus respectivos parámetros característicos se anulan. Por este motivo, de ahora en adelante no consideraremos al modelo de Kerr como una métrica independiente del resto, sino como un caso particular de las demás.

<sup>3</sup>Como se expuso en la discusión de estrellas de neutrones, en estas teorías  $Q$  no necesita ser de origen eléctrico si no que posee una contribución tidal proveniente del espacio 5-dimensional donde la brana está inmersa.

### 3.3. La Sombra del Agujero Negro

Para un observador que apunta su telescopio en la dirección de un agujero negro, existirá una región en el cielo que permanecerá oscura, siempre que no haya fuentes de luz entre ambos. Para determinar la forma de ésta, es conveniente considerar rayos de luz enviados hacia el pasado desde la posición del observador en las coordenadas de Boyer–Lindquist  $(r_O, \vartheta_O)$ , que se encuentra fijo en el dominio de la comunicación exterior. Para lograr esto, invertiremos la componente temporal del 4-momento del fotón  $p_t = +\omega_\infty^4$ , de modo que los fotones serán enviados hacia el pasado, desde el observador hacia la región de fotones del agujero negro.

Si asumimos que existe una distribución continua y uniforme de fuentes de luz que llena el Universo, excluyendo la región entre el observador y el agujero negro, podemos distinguir entre dos tipos de trayectorias. Por un lado, aquellas donde la coordenada radial, luego de ser desviadas por el agujero negro, aumenta hasta infinito llegando a una fuente de luz, por lo que asignaremos brillo a la dirección inicial de tales trayectorias. Por otro lado, aquellas donde la coordenada radial disminuye hasta alcanzar el horizonte en  $r = r_+$ , por lo que asignaremos oscuridad a las direcciones iniciales de estas trayectorias, que determinarán la sombra del agujero negro. El límite de la sombra corresponde a los rayos de luz en la frontera entre ambos tipos. Estos decaen en espiral aproximándose asintóticamente a órbitas esféricas inestables en la región de fotones. Por lo tanto, la información esencial para determinar la forma de la sombra del agujero negro se encuentra allí. De este modo, podemos afirmar que la sombra es una imagen de la región de fotones y no del horizonte de eventos.

Por Simplicidad, de ahora en adelante emplearemos las métricas propuestas por Konoplya, Stuchlík y Zhidenko en [KSZ18]. De todos modos, los procedimientos que realizaremos aquí son perfectamente válidos y aplicables a las métricas obtenidas mediante el algoritmo de Newman-Janis, por lo que no debería haber problema en generalizarlos.

El hamiltoniano de un fotón que viaja atravesando un entorno plasmático interactuante no magnetizado y libre de presión, de frecuencia electrónica  $\omega_p$  ya ha sido expresado anteriormente en este mismo trabajo y esta dado por el lado izquierdo la Ecuación de Hamilton-Jacobi (3.9), satisfaciendo además dicha ecuación con  $H(x^\mu, \partial S / \partial x^\mu) = 0$ , siendo

$$S(t, \phi, r, \theta) = p_t t + p_\phi \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (3.12)$$

Al mismo tiempo, la dinámica del fotón estará regida por la Ec. (2.4).

Dado que el plasma es un medio dispersivo, la propagación de la luz dependerá de la frecuencia  $\omega(x)$  de esta, la cual dependerá a su vez de la 4-velocidad  $V^\mu(x)$  del observador, resultando

$$\begin{aligned} \omega(x) &= p_\mu V^\mu(x), \\ k^\mu(x) &= p^\mu + p_\nu V^\nu(x) V^\mu(x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde  $k^\mu$  es un 4-vector tipo espacial, representando el vector de propagación número de onda. Por su parte, la relación de dispersión se expresa como

$$\omega^2(x) = k_\mu(x) k^\mu(x) + \omega_p^2(x), \quad (3.14)$$

de donde podemos deducir, dado que  $k^\mu$  es un 4-vector tipo espacial, la siguiente condición de propagación

$$\omega^2(x) \geq \omega_p^2(x). \quad (3.15)$$

---

<sup>4</sup>Notar que estamos usdando unidades donde  $\hbar = 1$ .

Introduciendo la métrica general de KSZ expresada en las Ec. (3.5) y (3.6), podemos reescribir dicho hamiltoniano de la siguiente manera

$$H = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \left[ -\frac{((r^2 R_\Sigma + a^2)p_t + ap_\phi)^2}{\Delta} + \frac{\Delta}{R_B^2} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left( a \sin \theta p_t + \frac{1}{\sin \theta} p_\phi \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \rho^2 \omega_p^2 \right]. \quad (3.16)$$

De esta última expresión, donde hemos introducido las constantes de movimiento  $p_t$  y  $p_\phi$ , relativas a la energía  $E$  y al momento angular  $L$  respectivamente, podemos deducir que la ecuación de Hamilton-Jacobi,  $H = 0$ , será separable en las variables  $r$  y  $\theta$  si y solo si la distribución de plasma presenta un perfil de la siguiente forma

$$\omega_p^2(r, \theta) = \frac{f_r(r) + f_\theta(\theta)}{\rho^2(r, \theta)}, \quad (3.17)$$

donde  $f_r(r)$  es una función solo de  $r$ , mientras que  $f_\theta(\theta)$  es una función solo de  $\theta$ . Recordemos además que  $\rho^2(r, \theta) = r^2 R_\Sigma(r) + a^2 \cos^2 \theta$ . De este modo, podemos garantizar que las ecuaciones de movimiento son completamente integrables, y definimos la constante generalizada de Carter como

$$\begin{aligned} K &:= \frac{((r^2 R_\Sigma(r) + a^2)p_t + ap_\phi)^2}{\Delta(r)} - \frac{\Delta(r)}{R_B^2(r)} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - f_r(r) \\ &:= \left( a \sin \theta p_t + \frac{1}{\sin \theta} p_\phi \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + f_\theta(\theta), \end{aligned} \quad (3.18)$$

siendo  $\partial S / \partial r = p_r$  una función solo de  $r$  y  $\partial S / \partial \theta = p_\theta$  una función solo de  $\theta$ , como puede verse en la Ec. (3.12). Ahora, empleando la frecuencia de plasma en el infinito  $\omega_\infty$ , el parámetro de impacto del fotón  $b$  y la recientemente incorporada constante de Carter  $K$ , podemos expresar las componentes del 4-momento del fotón como

$$\begin{aligned} p_t &= \omega_\infty, \\ p_r^2 &= \frac{R_B^2(r)}{\Delta(r)} \left[ -K + \frac{((r^2 R_\Sigma(r) + a^2)p_t + ap_\phi)^2}{\Delta(r)} - f_r(r) \right], \\ p_\theta^2 &= K - \left( a \sin \theta p_t + \frac{1}{\sin \theta} p_\phi \right)^2 - f_\theta(\theta), \\ p_\phi &= \omega_\infty b n_\theta, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde, como se mencionó anteriormente, la elección del signo de  $p_t$  se debe a que estamos considerando rayos de luz desde el observador hacia el agujero negro, dirigidos hacia el pasado. A su vez, tomaremos  $p_r$  negativo, mientras que el signo de  $p_\theta$  será positivo para determinar el borde superior de la sombra y negativo para determinar el borde inferior.

La constante de movimiento  $p_t = \omega_\infty$  corresponde a la energía del fotón en el infinito, fuera de la influencia gravitacional del agujero negro. por otro lado, el observador se sitúa en  $(r_O, \vartheta_O)$ , dentro de la influencia gravitacional del agujero negro. Por este motivo, la frecuencia observada  $\omega_{obs}$  no será igual a  $\omega_\infty$ , sino que estarán relacionadas de la siguiente forma

$$\omega_{obs} = \frac{(r^2 R_\Sigma + a^2)\omega_\infty + ap_\phi}{\rho \sqrt{\Delta}}, \quad (3.20)$$

donde el miembro de la derecha debe evaluarse en  $(r_O, \vartheta_O)$ . Notemos que  $\omega_{obs} \rightarrow \omega_\infty$  para  $r_O \rightarrow \infty$ , de modo que no habría diferencia entre ambos casos si el observador se encuentra lo suficientemente lejos.

Introduciendo las expresiones presentadas en la Ec. (3.19) en la ecuación de Hamilton (3.9) obtenemos las ecuaciones de movimiento de primer orden para el fotón,

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( a^2(1-y^2) - \frac{(r^2 R_\Sigma + a^2)^2}{\Delta} \right) p_t - \frac{arR_M}{\Delta} p_\phi \right], \\
\dot{r}^2 &= \frac{1}{\rho^4} \frac{-K\Delta + ((r^2 R_\Sigma + a^2)p_t + ap_\phi)^2 - \Delta f_r}{R_B^2}, \\
\dot{\theta}^2 &= \frac{1}{\rho^4} \left[ K - \left( a\sqrt{1-y^2}p_t + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}p_\phi \right)^2 - f_\theta \right], \\
\dot{\phi} &= \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{1}{1-y^2} - \frac{a^2}{\Delta} \right) p_\phi - \frac{arR_M}{\Delta} p_t \right].
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Para encontrar la región de fotones, debemos resolver  $\dot{r} = 0$  y  $\dot{\theta} = 0$ . Estas condiciones nos conducen al siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned}
0 &= -(K + f_r)\Delta + ((r^2 R_\Sigma + a^2)p_t + ap_\phi)^2, \\
0 &= -(K + f_r)\Delta' - f_r'\Delta + 4rR_\Sigma ((r^2 R_\Sigma + a^2)p_t + ap_\phi) p_t,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

de las cuales podemos deducir las siguientes expresiones para las constantes de movimiento

$$K = \Delta \left( \frac{2rR_\Sigma p_t}{\Delta'} \right)^2 \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta'}{2rR_\Sigma p_t} \right)^2 \frac{f_r'}{\Delta'}} \right]^2 - f_r, \tag{3.23}$$

$$p_\phi = 2 \frac{\Delta}{\Delta'} \frac{rR_\Sigma p_t}{a} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta'}{2rR_\Sigma p_t} \right)^2 \frac{f_r'}{\Delta'}} \right] - \left( \frac{r^2 R_\Sigma}{a} + a \right) p_t, \tag{3.24}$$

donde la elección del signo + o - dependerá de la distribución y densidad del plasma en consideración. Para una amplia variedad de distribuciones, incluyendo las que se tratarán en este trabajo, estas ecuaciones tienen solución solo si se toma el signo + (Ver [PT17] para mas detalles). El límite de la región de fotones puede deducirse de la expresión para  $\dot{\theta}$  en la Ec. (3.21), de donde se desprende

$$(1-y^2)(K - f_\theta) = (p_\phi + a(1-y^2)p_t)^2, \tag{3.25}$$

al exigir que  $\dot{\theta}$  sea un número real no negativo.

Para construir la silueta de la sombra, proponemos la siguiente tetraada ortonormal nula

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{r^2 R_\Sigma + a^2}{\rho\sqrt{\Delta}} \partial_t + \frac{a}{\rho\sqrt{\Delta}} \partial_\phi, \\
e_1 &= \frac{1}{\rho} \partial_\theta, \\
e_2 &= -\frac{1}{\rho \sin \theta} \partial_\phi - \frac{a \sin \theta}{\rho} \partial_t, \\
e_3 &= -\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho R_B} \partial_r.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Esta tetraada tiene la particularidad de ser elegida de forma tal que los vectores  $e_0 \pm e_3$  se reducen a las direcciones nulas principales de entrada y salida en el espaciotiempo de Kerr. Si bien esta elección no tiene nada en especial, hacemos uso de ella para comparar con los resultados de [PT17]. Otra opción

natural sería elegir observadores ZAMO (zero angular momentum observers). Aclaremos que estos vectores deben evaluarse en la posición del observador  $(r_O, \vartheta_O)$ .

El vector tangente a la trayectoria del fotón en la posición del observador puede expresarse como

$$\dot{\lambda} = \dot{r}\partial_r + \dot{\vartheta}\partial_{\vartheta} + \dot{\varphi}\partial_{\varphi} + \dot{t}\partial_t, \quad (3.27)$$

siendo  $\lambda(r(s), \vartheta(s), \varphi(s), t(s))$  la trayectoria del fotón. Al mismo tiempo, el vector tangente puede escribirse como

$$\dot{\lambda} = -\alpha e_0 + \beta (\sin \Theta \cos \Phi e_1 + \sin \Theta \sin \Phi e_2 + \cos \Theta e_3), \quad (3.28)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son factores positivos, mientras que  $\Theta$  es la colatitud y  $\Phi$  es el ángulo azimuta en el cielo del observador. La dirección dada por  $\Theta = 0$  será entonces la dirección hacia el agujero negro, mientras que  $\Theta = \pi$  será la dirección contraria.

Dada la Ec. (3.9) tenemos que  $g(\dot{\lambda}, \dot{\lambda}) = -\omega_p^2$ , de lo que resulta

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega_p^2(r_O, \vartheta_O). \quad (3.29)$$

Al mismo tiempo,  $\alpha = g(\dot{\lambda}, e_0)$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(r^2 R_{\Sigma} + a^2)p_t + ap_{\varphi}}{\rho\sqrt{\Delta}}, \\ \beta &= \sqrt{\frac{((r^2 R_{\Sigma} + a^2)p_t + ap_{\varphi})^2}{\rho^2 \Delta} - \omega_p^2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde, remarcamos, tanto  $\alpha$  como  $\beta$  deben evaluarse en las coordenadas del observador  $(r_O, \vartheta_O)$ .

Comparando las expresiones para el vector tangente presentadas en las Ec. (3.27) y (3.28), podemos parametrizar el borde de la sombra en las coordenadas vistas por el observador de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sin \Theta &= \sqrt{\frac{\Delta(r_O)(K(r_p) - f_{\vartheta}(\vartheta_O))}{((r_O^2 R_{\Sigma}(r_O) + a^2)p_t + ap_{\varphi}(r_p))^2 - \Delta(r_O)(f_r(r_O) + f_{\vartheta}(\vartheta_O))}}, \\ \sin \Phi &= -\frac{p_{\varphi}(r_p) + ap_t \sin^2 \vartheta_O}{\sin \vartheta_O \sqrt{K(r_p) - f_{\vartheta}(\vartheta_O)}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $r_p$  es un parámetro que nos permitirá describir la curva de contorno de la sombra, cuyos límites superior e inferior son las soluciones de la Ec. (3.25), evaluada en  $\vartheta_O$ .

Las trayectorias que se corresponden al límite de la sombra se aproximarán asintóticamente a órbitas circulares de la región de fotones, cayendo en espirales cada vez mas cerradas, por lo que sus constantes de movimiento  $K$  y  $p_{\varphi}$  deben tener los mismos valores a los de las trayectorias que habitan las esferas límite en la región de fotones. Para  $a \neq 0$  (de lo contrario estaríamos en Schwarzschild, donde  $r_p = 3M = cte$  y por ende no se puede utilizar para parametrizar a la curva frontera de la sombra), podemos evaluar las constantes  $K(r_p)$  y  $p_{\varphi}(r_p)$  según las Ec. (3.23) y (3.24) y emplearlas en la Ec. (3.31) para obtener el borde de la sombra. El parámetro  $r_p$  va de un valor mínimo  $r_{p,min}$  hasta un valor máximo  $r_{p,max}$ , siendo estos determinados por la ecuación  $\sin^2 \Phi = 1$ , que se corresponde con la Ec. (3.25). De esta forma, la curva de contorno estará conformada por una parte inferior con  $-\pi/2 \leq \Phi \leq \pi/2$  y una parte superior con  $\pi/2 \leq \Phi \leq 3\pi/2$ , ambas yendo de  $r_{p,min}$  a  $r_{p,max}$ , y a cada valor de  $r_p$  en dicho intervalo le corresponderán dos puntos en el borde de la sombra cuyas correspondientes coordenadas  $\Theta$  serán idénticas.

De esta forma, barriendo los valores de  $r_p$  en el intervalo  $[r_{p,min}, r_{p,max}]$ ,  $\Theta$  y  $\Phi$  describirán mediante la Ec. (3.31) forma y el tamaño angular de la sombra para un observador en  $(r_O, \vartheta_O)$  y 4-velocidad  $e_0$ . Si

el observador se mueve a 4-velocidades diferentes, la imagen será distorsionada por la aberración. Siguiendo a [GPL14], emplearemos proyecciones estereográfica sobre un plano tangente a la esfera celeste en el polo  $\Theta = 0$ , y sobre dicho plano usar las coordenadas cartesianas adimensionales

$$\begin{aligned} X(r_p) &= -2 \tan \left[ \frac{\Theta(r_p)}{2} \right] \sin [\Phi(r_p)], \\ Y(r_p) &= -2 \tan \left[ \frac{\Theta(r_p)}{2} \right] \cos [\Phi(r_p)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

directamente relacionadas con medidas angulares en el cielo del observador.

### 3.3.1. Resumen

Para la comodidad del lector, presentamos un resumen del método de construcción de la sombra en un procedimiento paso a paso.

1. Seleccione una métrica. Algunos ejemplos se muestran en el Cuadro 3.1.
2. Elija el momento angular  $a$  y el resto de los parámetros característicos de la métrica, verificando que satisfagan las restricciones correspondientes ( $\Delta(r_h) = 0$ ,  $r_h \in \mathbb{R}_{>0}$ ).
3. Seleccione las funciones  $f_r(r)$  y  $f_\theta(\theta)$ , dando la distribución del plasma  $\omega_p(r, \theta)$  alrededor del agujero negro.
4. Elija la frecuencia del fotón en el infinito  $\omega_\infty$  o en el observador  $\omega_{obs}$  (relacionadas por la Ec. (3.20)) y verifique que se satisfaga la Ec. (3.15) durante toda la trayectoria. En las ecuaciones que emplearemos, esta constante de movimiento estará presente sólo en el cociente  $\omega_p(x)/\omega_{\infty/obs}$ , por lo que recomendamos expresar ambas frecuencias en función de una misma magnitud  $\omega_c$ .
5. Seleccione la posición del observador  $(r_O, \vartheta_O)$ . Recuerde que  $r_O$  debe ser mayor a  $r_h$ , mientras que los efectos de rotación serán mas apreciables para  $\vartheta_O$  próximo a  $\pi/2$ .
6. Escriba las coordenadas celestes  $\sin \Theta$  y  $\sin \Phi$  evaluándolas en  $(r = r_O, \vartheta = \vartheta_O)$ , en términos de las constantes de movimiento  $K$  y  $p_\phi$  como se muestra en la Ec. (3.31).
7. Sustituya en las expresiones para  $\sin \Theta$  y  $\sin \Phi$  las expresiones  $K(r_p)$  y  $p_\phi(r_p)$  según las Ec. (3.23) y (3.24), evaluadas en  $r = r_p$ , el cual pertenece al intervalo de coordenadas radiales para las que existen órbitas esféricas inestables. Esto nos da  $\sin \Theta$  y  $\sin \Phi$  como funciones de  $r_p$ , de modo que hemos parametrizado el contorno de la sombra en el cielo del observador.
8. Resuelva la ecuación  $\sin^2[\Phi(r_p)] = 1$  para  $r_p$ , obteniendo los valores límite  $r_{p,min}$  y  $r_{p,max}$ . Tenga en cuenta que esta ecuación puede tener varias soluciones reales, por lo que deberá determinar, dependiendo de las características del problema, cuál es el límite relevante para la formación de la sombra.
9. Calcule  $\sin[\Theta(r_p)]$  y  $\sin[\Phi(r_p)]$  evaluando  $r_p$  en el intervalo  $[r_{p,min}, r_{p,max}]$ .
10. Calcule las coordenadas cartesianas adimensionales  $X(r_p)$  e  $Y(r_p)$  de la curva límite de la sombra según la Ec. (3.32). Eligiendo  $-\pi/2 \leq \Phi(r_p) \leq \pi/2$  y dejando que  $r_p$  corra desde  $r_{p,min}$  a  $r_{p,max}$  se obtiene la mitad inferior de la curva de contorno de la sombra. La mitad superior será la imagen espejular de ésta respecto a un eje horizontal.

### 3.3.2. La Sombra en Entornos Libres de Plasma

En esta subsección estudiaremos la sombra de los agujeros negros en entornos libres de plasma, y como esta se ve influenciada por factores tales como el momento angular  $a$ , la distancia hasta el observador  $r_O$  o el ángulo de inclinación entre éste y el eje de rotación  $\vartheta_O$ . Esto se hará considerando distintos valores para el parámetro característico  $Q$ , comparando los resultados obtenidos para distintas métricas.

A fin de uniformizar los resultados y facilitar su estudio, estandarizaremos las distintas variedades de espaciotiempos sobre las que trabajaremos de la siguiente forma. Cada una de las métricas propuestas cuenta con un único parámetro  $Q_p$  cuyo valor puede influir en la forma y tamaño de la sombra. Estos son la carga  $Q$  en Kerr-Newman, la desviación  $\eta$  en Kerr modificada, la relación  $b$  en Kerr-Sen, la carga mareomotriz  $Q$  en Braneworld y la relación  $r_0$  en Dilaton (en esta última métrica, tomaremos por simplicidad y capricho  $q = 2r_0$ , de modo que quede un único parámetro libre). De ahora en adelante, nos referiremos a todos ellos por  $Q$ , el cual se referirá a una métrica u otra de acuerdo al contexto en que se este usando. En la mayoría de los casos existe un valor  $Q_{max}$  que acota superiormente los valores permitidos para  $Q$  en cada métrica. En las métricas donde no existe tal cota, que son Kerr modificada y Braneworld, se espera de todos modos que el parámetro  $Q$  sea relativamente pequeño. En el Cuadro 3.2 se muestran los valores para  $Q_{max}$  que emplearemos según la métrica, derivados o bien de las limitaciones físicas de cada modelo o bien del criterio del autor.

Métrica	Kerr-Newman	Kerr modificada	Kerr-Sen	Braneworld	Dilaton
$Q_{max}$	1	0,2	0,5	1	0,5
$a_{max}$	$\sqrt{1 - Q^2}$	1	$1 - Q$	$\sqrt{1 + Q^2}$	$\sqrt{1 - 2Q}$

CUADRO 3.2: Valores límite para el parámetro característico  $Q_{max}$  y el momento angular  $a_{max}$  según la métrica.

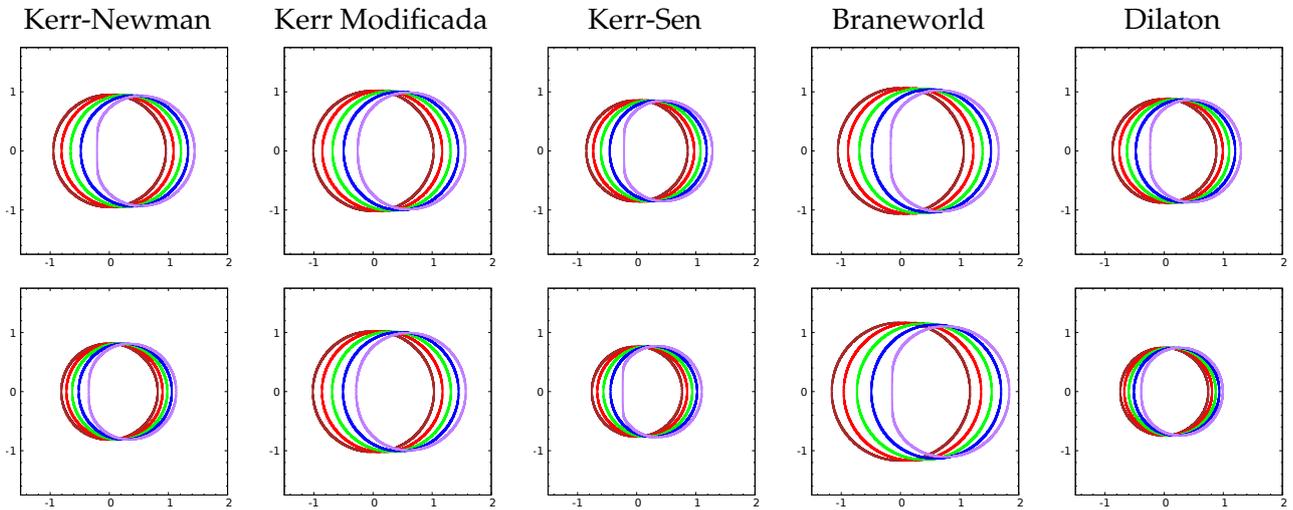
Al mismo tiempo, a partir de las ecuaciones para el horizonte de eventos expresadas en el Cuadro 3.1, podemos encontrar las cotas superiores para el momento angular del agujero negro en función de la métrica, expresadas también en el Cuadro 3.2. Nuevamente, no todos los modelos imponen una cota superior para el momento angular, por lo que en estos la elección de  $a_{max}$  estará librada al criterio del autor. Para uniformizar los resultados que mostraremos a continuación, las magnitudes  $Q$  y  $a$  se expresarán en función de los parámetros  $Q_{max}$  y  $a_{max}$  respectivamente.

En los Cuadros 3.3, 3.4 y 3.5 se muestra respectivamente como el momento angular  $a$  del agujero negro, la distancia  $r_O$  entre el observador y el agujero negro y el ángulo  $\vartheta_O$  entre la posición del observador y eje de simetría axial del agujero negro influyen sobre la forma y tamaño de su sombra. Además, estos resultados se repiten para distintos valores del parámetro  $Q$ , lo que permite al mismo tiempo estudiar su influencia. En cada tabla, la fila superior se realizó tomando  $Q/Q_{max} = \sqrt{0,25}$  mientras que la inferior toma  $Q/Q_{max} = \sqrt{0,75}$ . El procedimiento se repite para los distintos modelos de métricas introducidos anteriormente.

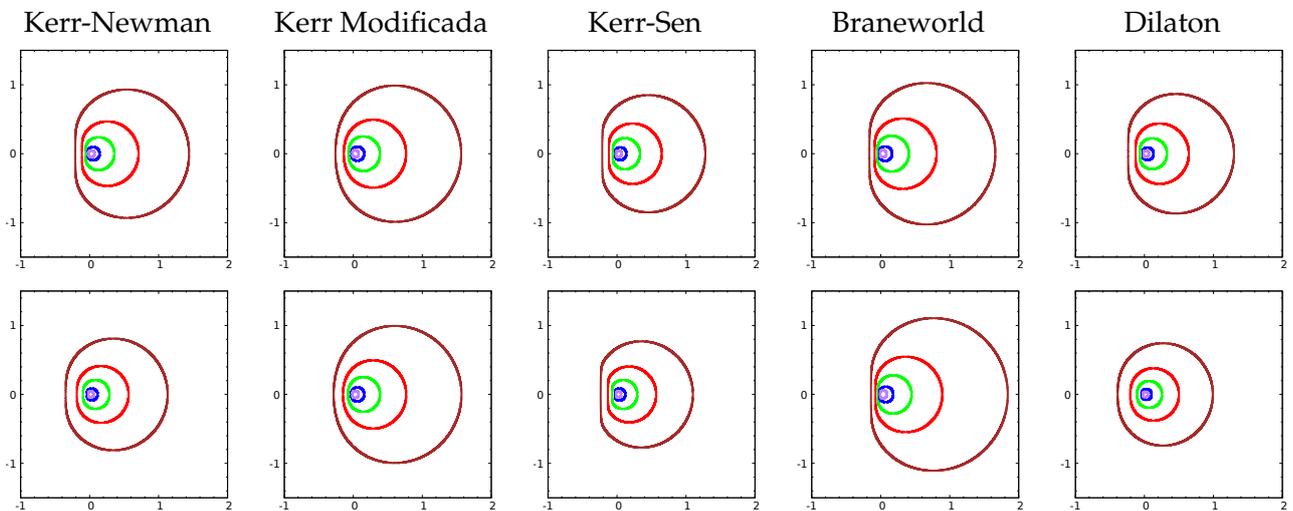
Aclaremos que, si bien es esperable que un observador físicamente realista se encuentre lejos del horizonte de eventos ( $r_O \gg 10$ ), emplearemos en general  $r_O = 5$  para poder comparar mejor nuestros resultados con los presentados en [PT17], donde se emplea este mismo valor.

En las figuras que se muestran en el Cuadro 3.3 se comparan los resultados obtenidos para distintos valores del momento angular  $a$ , que van desde ser casi nulos hasta prácticamente el valor máximo que se expresa en el Cuadro 3.2. Al estudiarlos podemos ver que, en general, el momento angular perturbará la sombra del agujero negro en tres formas características. La primera es la reducción del tamaño, mientras mayor sea el momento angular menor será el área que ocupe la sombra en el cielo del observador, siendo también menores sus diámetros horizontal y vertical. La segunda perturbación se produce en la forma de la sombra. Mientras que para agujeros negros con  $a \ll 1$  la sombra es prácticamente esférica, resultando casi indistinguible de la de Schwarzschild, vemos que esta adopta una forma de  $D$  al incrementar el valor de  $a$ , siendo mas notable este efecto al aproximarnos al valor  $a_{max}$ . También notamos que este efecto sucede de la misma forma en todas las métricas, siendo el lado que se aplana

paralelo al eje de rotación del agujero negro y proviniendo, como es de esperarse, de órbitas de fotones co-rotantes con el sentido de giro del agujero negro, como está discutido cualitativamente en la Fig. (3.3). La tercera perturbación es el desplazamiento de la posición de la sombra. Nuevamente este efecto es prácticamente despreciable para valores de  $a$  pequeños y se incrementa con este, siendo la dirección del desplazamiento opuesta al lado aplanado.



CUADRO 3.3: Dependencia de la sombra con el momento angular. Se tomaron los parámetros  $r_O = 5$  y  $\vartheta_O = \pi/2$ . En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los momentos angulares  $a/a_{max} = 0,01, 0,25, 0,50, 0,75$  y  $0,99$ .

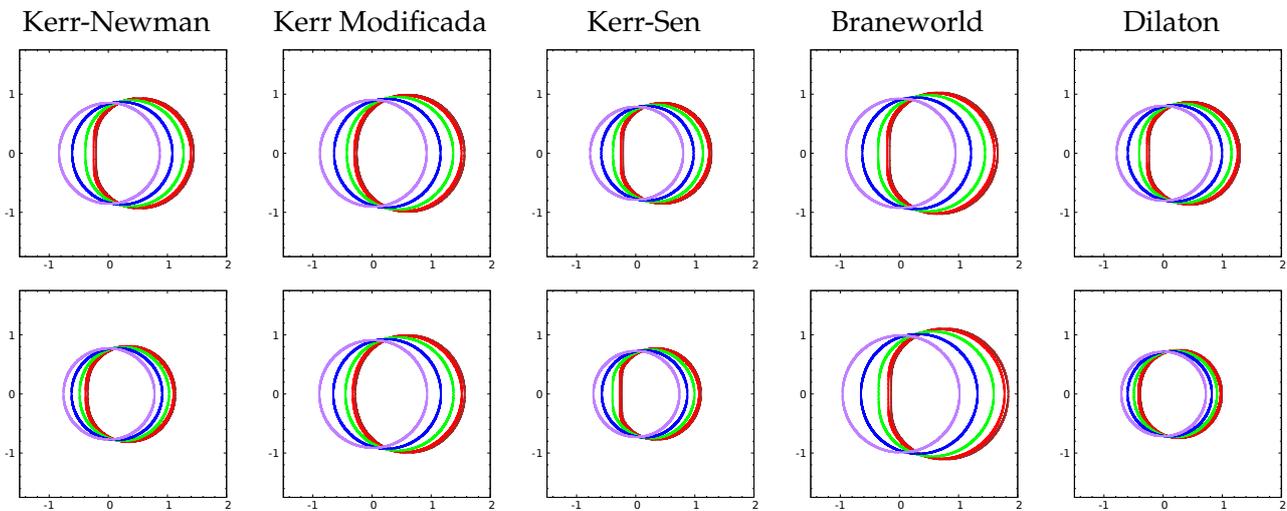


CUADRO 3.4: Dependencia de la sombra con la distancia al observador. Se tomaron los parámetros  $a/a_{max} = 0,999$  y  $\vartheta_O = \pi/2$ . En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a las distancias  $r_O = 5, 10, 20, 50$  y  $100$ .

En el Cuadro 3.4 vemos que, como es de esperarse, el tamaño aparente de la sombra disminuye con la distancia entre el agujero negro y el observador. Sin embargo, esta distancia no parece producir diferencias notables en la forma de la sombra. Lo que si notamos es que, a pesar de estar desplazadas horizontalmente por efecto del momento angular, el reescalo entre sombras se hace dejando fija la posición del origen de coordenadas. Es decir, la relación entre el tamaño de la sombra y su distancia a la

posición euclídea del agujero negro (el origen de coordenadas) es la misma sin importar la distancia entre el observador y el agujero negro.

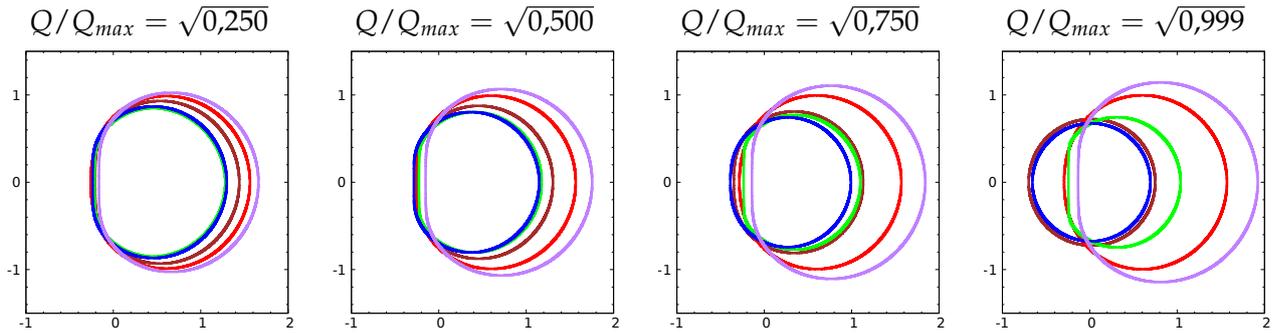
Al examinar el Cuadro 3.5 vemos que, como ocurría con el momento angular, el ángulo entre la posición del observador y el eje de rotación del agujero negro modificará la sombra en tamaño, forma y posición. Sin embargo, la relación entre el ángulo  $\vartheta_O$  y el área de la sombra ocurre en sentido inverso a lo observado con el momento angular. Mientras mayor sea  $\vartheta_O$  mayor será también el área que ocupe la sombra en el cielo del observador, incrementando principalmente su diámetro vertical. Al mismo tiempo, vemos que para observadores situados próximos al eje de rotación, esto es  $\vartheta_O \approx 0$ , la deformación de la sombra es prácticamente imperceptible, mientras que la forma de  $D$  se vuelve mas notable al aproximarnos al plano perpendicular al eje de rotación, en  $\vartheta_O = \pi/2$ . Finalmente, el desplazamiento de la sombra se incrementa con el valor de  $\vartheta_O$  en forma similar a lo sucedido con  $a$ , en sentido contrario al lado aplanado.



CUADRO 3.5: Dependencia de la sombra con el ángulo del observador. Se tomaron los parámetros  $a/a_{max} = 0,999$  y  $r_O = 5$ . En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente al ángulo  $\vartheta_O = \pi/2, 3\pi/8, \pi/4, \pi/8$  y  $\pi/100$ .

Por su parte, en el Cuadro 3.6 se comparan las sombras obtenidas por las distintas métricas, empleando los mismos valores de  $a$ ,  $r_O$  y  $\vartheta_O$ , repitiendo los resultados para distintos valores del parámetro  $Q$ . Aquí podemos ver como los distintos modelos de espaciotiempo afectan a la forma de la sombra, y que rol desempeña  $Q$  en cada uno de ellos. Lo primero que notamos es que, como dijimos anteriormente, los distintos modelos métricos convergen al espaciotiempo de Kerr a medida que el parámetro  $Q$  se vuelve mas pequeño. Esto se debe a que dichos modelos se obtienen proponiendo modificaciones a la métrica de Kerr, siendo  $Q$  en cierta forma la medida de dichas modificaciones. De todas formas, vemos que al aumentar el valor de  $Q$  las sombras evolucionan de formas completamente diferentes, de acuerdo con las distintas propiedades métricas.

Observando las figuras que se muestran en el Cuadro 3.6 podemos ver que métricas como la Kerr-Newman y la Dilaton, que tienen fuertemente relacionados los valores  $a_{max}$  y  $Q_{max}$ , presentan sombras prácticamente esféricas para valores elevados de  $Q$  debido a que, como puede comprobarse en el Cuadro 3.2,  $a$  tiende a cero a medida que  $Q$  tiende a  $Q_{max}$ , de modo que el momento angular se vuelve despreciable. En estas métricas, los efectos sobre la sombra asociados al momento angular, tales como el incremento en el tamaño, la forma de  $D$  y el desplazamiento horizontal se verán reducidos al incrementarse el parámetro  $Q$ . Algo particular ocurre con la métrica de Kerr-Sen, donde el valor de  $Q_{max}$  se eligió de forma tal que no es suficiente para anular el momento angular. Esta elección se tomó debido a la aparición de problemas numéricos en el cálculo de las sombras, y se justifica alegando que se espera que el valor de  $Q$  sea pequeño de todos modos. Igual que en las métricas Kerr-Newman y Dilaton, un



CUADRO 3.6: Comparación entre métricas. Se tomaron los parámetros  $a/a_{max} = 0,999$ ,  $r_O = 5$  y  $\vartheta_O = \pi/2$ . En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a las métricas Kerr-Newman, Kerr modificada, Kerr-Sen, Dilaton y Braneworld.

mayor parámetro  $Q$  implica disminuir el momento angular permitido. Sin embargo, contrario a lo que sucede en dichas métricas, al incrementar el parámetro  $Q$  en el espaciotiempo de Kerr-Sen la forma de  $D$  se vuelve mas abrupta y pronunciada, si bien los efectos sobre el tamaño y el desplazamiento se atenúan levemente. De esta forma, no se espera aproximarnos a una sombra de Schwarzschild al incrementar el valor de  $Q$ . Por otro lado, en métricas como Kerr modificada y Braneworld donde el valor de  $a$  no se ve tan limitado por el parámetro  $Q$ , vemos que los efectos asociados al momento angular se conservan aún para valores próximos a  $Q_{max}$ . Es más, en Braneworld dichos efectos pueden incluso incrementarse, dado que un mayor parámetro  $Q$  permite incrementar el momento angular máximo  $a_{max}$ , por lo que los efectos sobre la sombra son aún más evidentes.

Discutiremos ahora como los efectos principales del momento angular se ven afectados por las distintas métricas. Respecto al tamaño, vemos que Kerr-Sen produce las sombras mas pequeñas, seguido por Dilaton. Kerr-Newman podría considerarse de tamaño mediano, siendo menor que Kerr modificada y que Braneworld, resultando esta última la de mayor tamaño. Respecto a la forma de  $D$ , vemos que este efecto es mas evidente en Kerr-Sen, donde destacan la rectitud del lado plano y el ángulo en que este se inserta al resto de la sombra. En Kerr-Newman, Braneworld y Dilaton la forma de  $D$  es relativamente similar, sin ser tan marcada como en Kerr-Sen. Por su parte, Kerr modificada presenta la sombra mas redondeada, siendo apenas apreciable la forma de  $D$ . Respecto al desplazamiento de la sombra, la relación es similar a lo que sucede con el tamaño. Por último, como explicamos anteriormente, al incrementar el parámetro  $Q$  estos efectos se ven mitigados en Kerr-Newman y Dilaton e incrementados en Kerr modificada y Braneworld, mientras en Kerr-Sen disminuyen el tamaño y el desplazamiento al tiempo que se exagera la forma de  $D$ .

### 3.3.3. La Sombra en Entornos Plasmáticos

En esta subsección analizaremos distintas distribuciones de plasma y como estas afectan a la formación de la sombra de los agujeros negros. Para garantizar la separabilidad de las ecuaciones de Klein-Gordon y Hamilton-Jacobi, estas distribuciones deberán satisfacer la Ec. (3.17), por lo que nuestro trabajo aquí será proponer las funciones  $f_r(r)$  y  $f_\theta(\theta)$ . Esto se llevará a cabo considerando principalmente las distribuciones de plasma presentadas en [PT17], así como la empleada en [Rog15].

El primer caso en consideración es el de gravedad pura, donde tanto la densidad de electrones  $N_e$  como la frecuencia del plasma  $\omega_p$  se anulan. Por consiguiente, tenemos

$$f_{r,1}(r) = 0, \quad f_{\theta,1}(\theta) = 0, \quad \omega_{p,1}^2(r, \theta) = 0. \quad (3.33)$$

Este caso también se consigue en el límite donde la frecuencia de observación es muchísimo mas grande que la del plasma, haciendo su influencia despreciable sobre el camino de los fotones asociados. Ya

que este es precisamente el perfil que se empleó en la subsección anterior, no lo consideraremos en lo siguiente.

El segundo ejemplo que tendremos en cuenta será una distribución de plasma con  $f'_r(r) = 0$ . Dado que esto deja  $f_r(r)$  constante, puede ser absorbida por la función  $f_\theta(\theta)$ , por lo que tomaremos  $f_r(r) = 0$ . Por otro lado, como la densidad de electrones  $N_e$  es un número real,  $\omega_p^2$  debe ser mayor que cero, por lo que deberá cumplirse  $f_\theta(\theta) \geq 0$  en todo momento. La densidad de plasma elegida será de la forma

$$f_{r,2}(r) = 0, \quad f_{\theta,2}(\theta) = \omega_c^2 m^2 (1 + 2 \sin^2 \theta), \quad \omega_{p,2}^2(r, \theta) = \frac{\omega_c^2 m^2 (1 + 2 \sin^2 \theta)}{r^2 R_\Sigma(r) + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.34)$$

donde  $\omega_c$  es una constante con dimensión de frecuencia, que nos facilitará relacionar la frecuencia del plasma  $\omega_p$  con la frecuencia del fotón  $\omega$ . Las sombras obtenidas para esta densidad de plasma se presentan en el Cuadro 3.8.

Como nuestro siguiente ejemplo, consideramos un plasma inhomogéneo con una densidad asintóticamente proporcional a  $r^{-3/2}$ , siendo esta última la densidad de un medio constituido por polvo. Considerando que debemos satisfacer la condición de separabilidad, la distribución de plasma resulta

$$f_{r,3}(r) = \omega_c^2 \sqrt{m^3 r}, \quad f_{\theta,3}(\theta) = 0, \quad \omega_{p,3}^2(r, \theta) = \frac{\omega_c^2 \sqrt{m^3 r}}{r^2 R_\Sigma(r) + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.35)$$

de modo que la proporcionalidad propuesta se cumple cuando nos encontramos lo suficientemente lejos del agujero negro, y la contribución dependiente de  $\theta$  es despreciable. Las sombras modeladas con esta distribución de plasma se muestran en el Cuadro 3.9.

Un ejemplo típico de interés académico es el caso de un plasma homogéneo, resultando

$$f_{r,4}(r) = \omega_c^2 r^2 R_\Sigma(r), \quad f_{\theta,4}(\theta) = \omega_c^2 a^2 \cos^2 \theta, \quad \omega_{p,4}^2(r, \theta) = \omega_c^2. \quad (3.36)$$

En el Cuadro 3.12 se muestran las sombras formadas en este entorno. Lo característico de este perfil, en comparación con los ejemplos anteriores, es la existencia órbitas esféricas estables de fotones. Esto implica que desde algunas posiciones de observación hay rayos de luz que son enviados hacia el pasado y que no van ni al infinito ni al horizonte, sino que permanecen dentro de una región espacialmente compacta. Si nos atenemos a la regla de que asignamos oscuridad sólo a aquellos rayos de luz orientados al pasado que van al horizonte, tenemos que asignar brillo a estos rayos de luz, (ver [PT17]).

Por su parte, en [Rog15] se propone un perfil de plasma que va como  $\omega_p^2 \propto r^{-3}$ , siendo además el modelo empleado en la sección sobre estrellas de neutrones en este trabajo. Esta elección se basa en [GJ69], tomando en cuenta la magnetósfera de púlsares cargados. Si bien no es el ambiente que estamos considerando, es un perfil interesante desde el punto de vista académico. Por otro lado, mientras que el perfil original de Rogers dependía solo de  $r$ , nosotros buscamos que se satisfagan las condiciones de separabilidad, por lo que tendremos un perfil de forma

$$f_{r,5}(r) = \frac{\omega_c^2 m^3}{r}, \quad f_{\theta,5}(\theta) = 0, \quad \omega_{p,5}^2(r, \theta) = \frac{\omega_c^2 m^3}{r(r^2 R_\Sigma(r) + a^2 \cos^2 \theta)}, \quad (3.37)$$

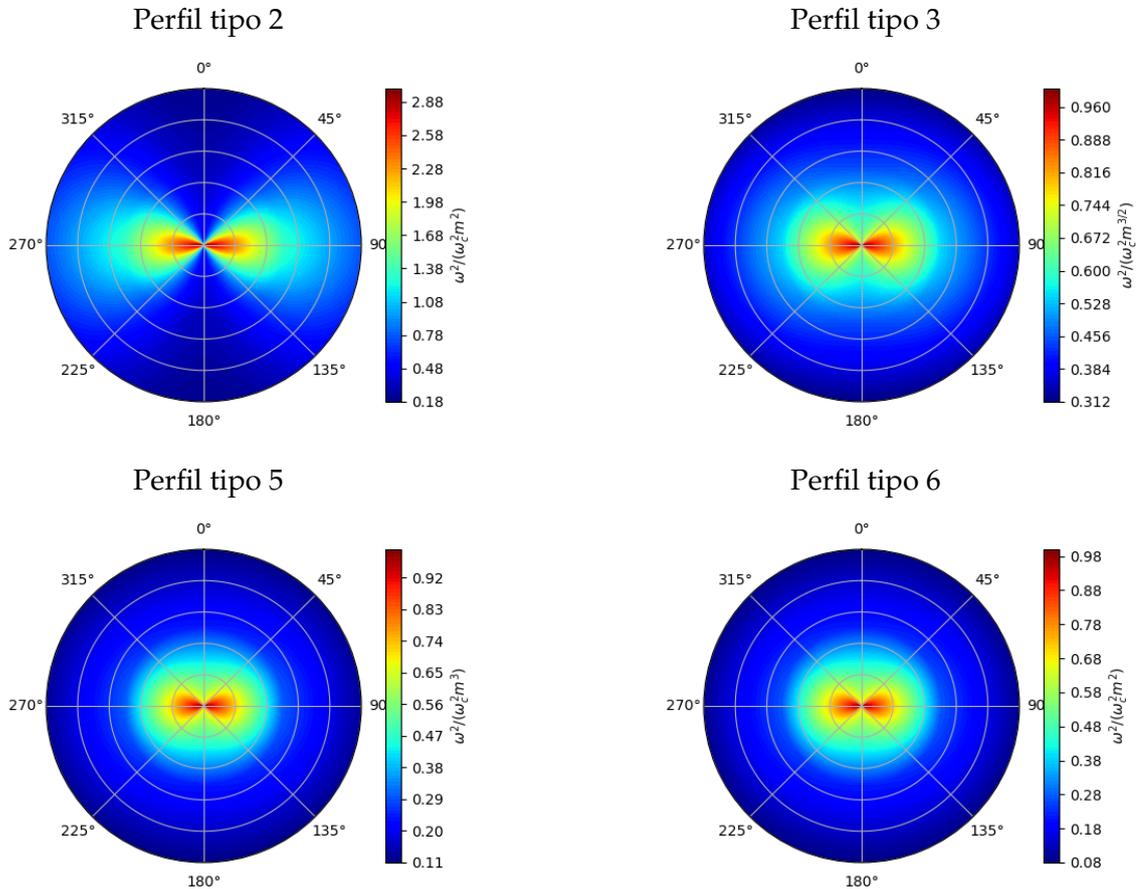
que tiende al de Rogers a medida que nos alejamos del agujero negro. Las sombras obtenidas para este perfil de plasma se muestran en el Cuadro 3.10.

Por último, presentaremos un perfil de interés puramente académico, con una densidad electrónica que decae exponencialmente a medida que nos alejamos del agujero negro, siendo este decaimiento mayor al que podríamos lograr con una simple ley de potencias como las que veníamos utilizando. La densidad de plasma estará dada entonces por

$$f_{r,6}(r) = \omega_c^2 m^2 \exp\left(\frac{r_1 - r}{r_0}\right), \quad f_{\theta,6}(\theta) = 0, \quad \omega_{p,6}^2(r, \theta) = \frac{\omega_c^2 m^2 \exp((r_1 - r)/r_0)}{r^2 R_\Sigma(r) + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (3.38)$$

siendo  $r_0$  y  $r_1$  dos constantes arbitrarias que caracterizan al decaimiento exponencial en  $r$ . Por simplicidad, tomaremos  $r_0 = r_1 = 1$ . En el Cuadro 3.11 pueden verse algunos ejemplos de sombras obtenidas con esta densidad de plasma.

La forma de estos perfiles puede verse representada en el Cuadro 3.7, donde se muestra la frecuencia del plasma en función de  $r$  y  $\theta$  para los perfiles de tipo 2, 3, 5 y 6 (los perfiles 1 y 4 son triviales).



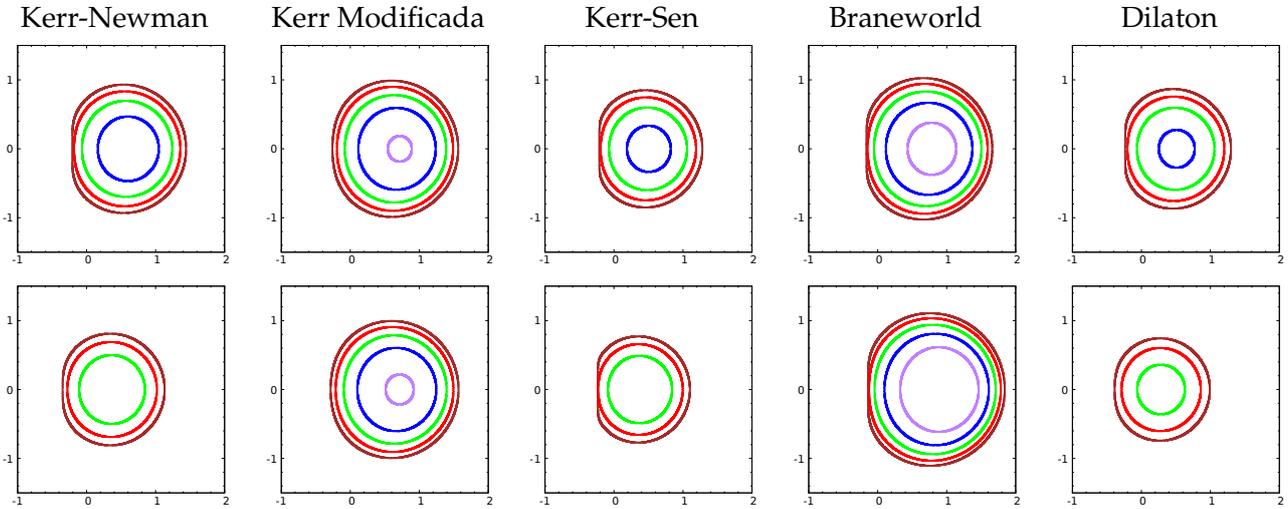
CUADRO 3.7: Frecuencia del plasma  $\omega_p^2(r, \theta)$  para los perfiles de tipo 2,3,5 y 6.

Para todas los Cuadros 3.8, 3.9, 3.12, 3.10 y 3.11 se tomaron los parámetros  $a/a_{max} = 0,999$ ,  $r_O = 5$  y  $\theta_O = \pi/2$ . En cada cuadro, la fila superior se realizó tomando  $Q/Q_{max} = \sqrt{0,25}$  mientras que la inferior toma  $Q/Q_{max} = \sqrt{0,75}$ .

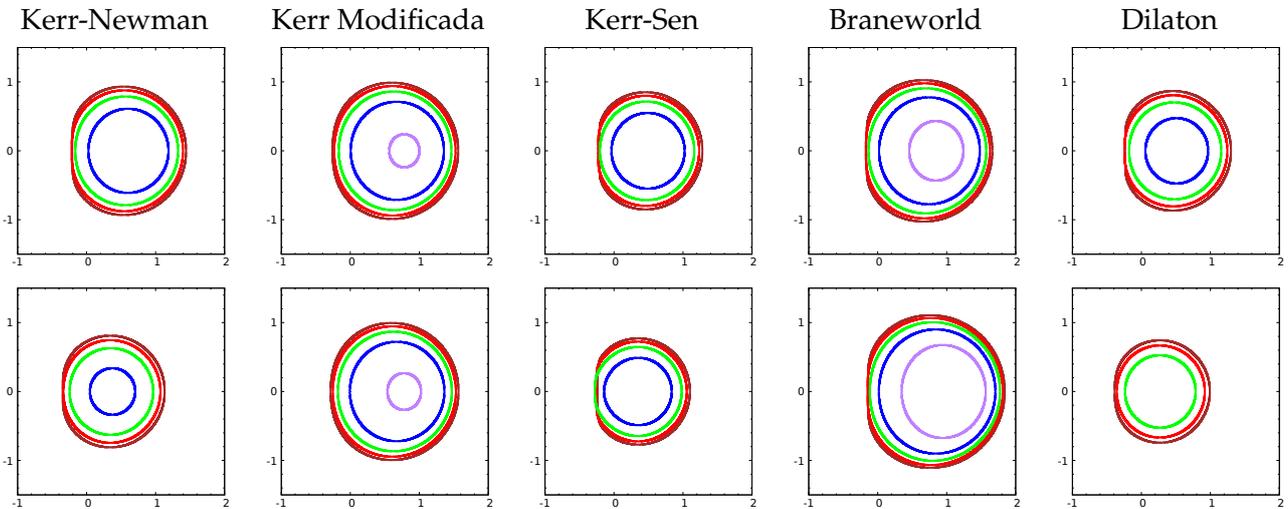
En el Cuadro 3.8 podemos ver que existe cierta frecuencia de plasma crítica  $\omega_{p,cri}$  (o de fotones crítica  $\omega_{\infty,cri}$ ) por encima (debajo) de la cual la sombra deja de ser visible, resultando en un cielo completamente iluminado. En [PT17] se explica que la región de fotones se divide en dos secciones inconexas centradas en los polos, separándose en el plano ecuatorial al alcanzar el valor de frecuencia crítica, dando lugar una región donde los fotones con frecuencia menor a  $\omega_{\infty,cri}$  no pueden acceder. Por este motivo, los observadores cercanos al plano ecuatorial ( $\theta_O = \pi/2$ ) dejan de ver la sombra. Esto solo sucede si el observador se encuentra lo suficientemente lejos, si está entre la región prohibida y el agujero negro, su cielo será oscuro.

Al estudiar el Cuadro 3.9 notamos que, como sucedía con el ejemplo 2, existe una frecuencia crítica de plasma  $\omega_{p,cri}$  por encima de la cual el agujero negro deja de producir sombra. En [PT17] se explica que todas las órbitas esféricas de fotones son inestables, formándose una región prohibida cuando  $\omega_{p,cri} \leq \omega_c$ . Sin embargo, contrario a lo que sucedía en el ejemplo 2, la región de fotones se separa ahora por el eje de rotación en lugar del plano ecuatorial. Como consecuencia, para ciertos valores de  $\omega_c$  los observadores próximos al plano ecuatorial todavía verán una sombra mientras que los observadores

cercanos al eje no. Si el cociente  $\omega_c/\omega_\infty$  se vuelve demasiado grande, la sombra desaparece para todos los observadores. Al examinar los Cuadros 3.10 y 3.11, vemos que lo mismo sucede con los ejemplos 5 y 6, y dado que su distribución de plasma es similar a la del ejemplo 3, las causas son las mismas.



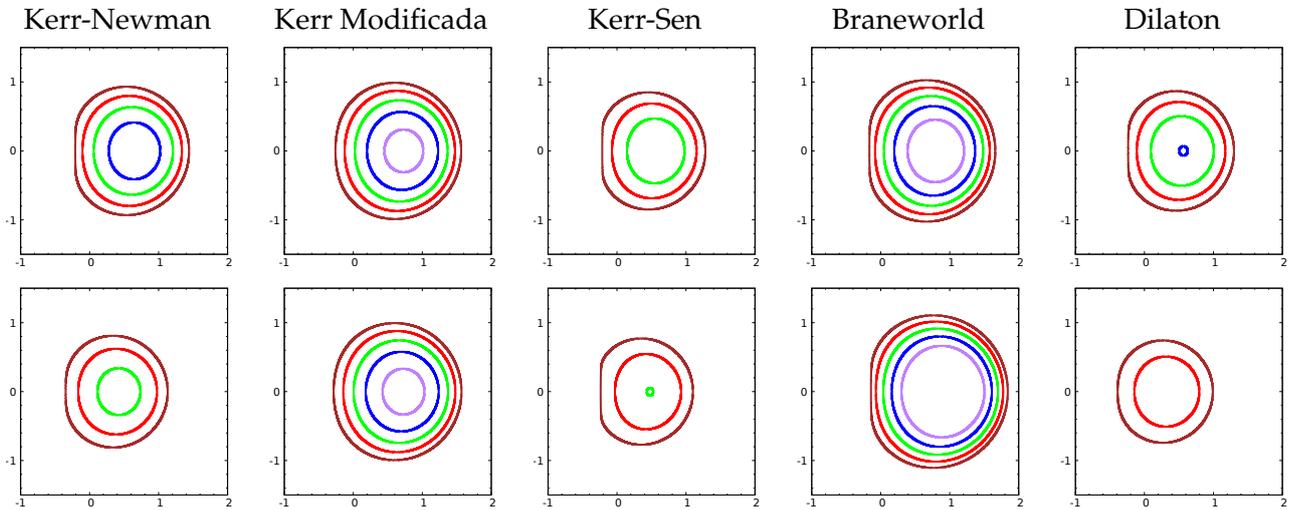
CUADRO 3.8: Perfil de plasma 2. En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,00, 2,25, 4,50, 6,75$  y  $8,90$ .



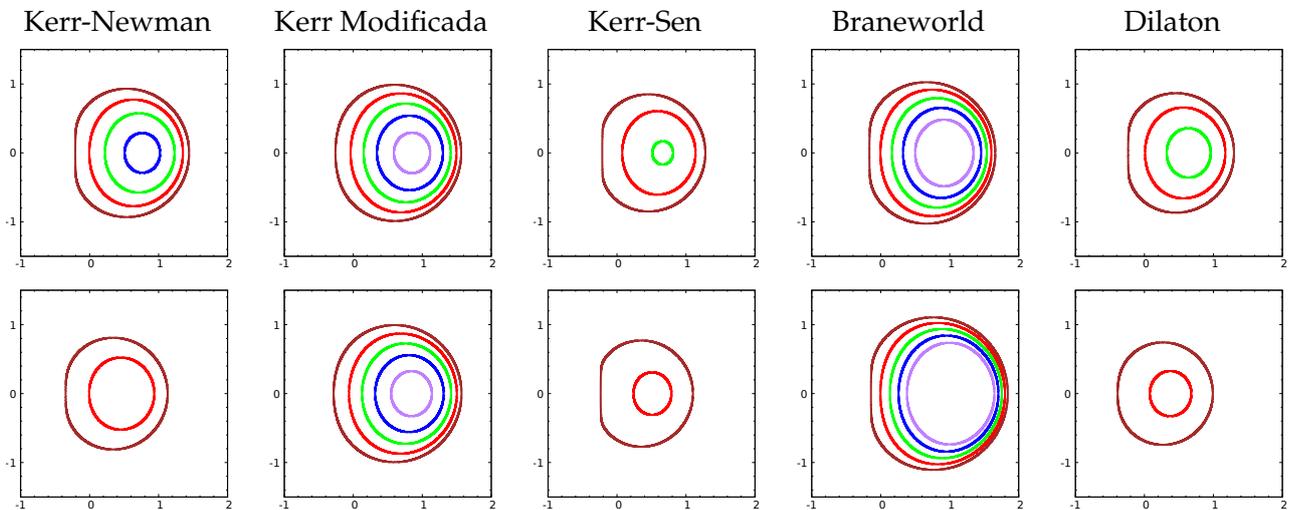
CUADRO 3.9: Perfil de plasma 3. En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,00, 3,75, 7,50, 11,25$  y  $15,00$ .

En general vemos que la frecuencia crítica depende tanto del modelo métrico como del parámetro  $Q$ . Los resultados sugieren que los valores de  $\omega_{p,cri}$  se ordenan generalmente, de menor a mayor, en Dilaton o Kerr-Sen, Kerr-Newman, Kerr modificada y Braneworld. Por otro lado, a medida que incrementamos el parámetro  $Q$  el valor de la frecuencia crítica disminuye en Kerr-Newman, Kerr-Sen y Dilaton, mientras que aumenta en Kerr modificada y Braneworld. Además, a medida que  $\omega_c \rightarrow \omega_{p,cri}$  el área de la sombra disminuye hasta anularse, cambiando la característica forma de  $D$  por un contorno ovalado, con un diámetro ligeramente mayor en el sentido vertical. Llama la atención que, al encogerse, la sombra no conserva su posición relativa respecto al centro de coordenadas, sino que tiende a ubicarse en el centro geométrico de la sombra correspondiente a  $\omega_c = 0$ , o a desplazarse incluso mas que esta.

El resultado es una serie de anillos (cada uno correspondiente a un valor de  $\omega_c$ ) ubicados uno dentro del otro (casi siempre sin tocarse) y tienden a acumularse hacia la derecha. Por otro lado, vemos que en Kerr-Newman, Kerr-Sen y Dilaton el valor de  $\omega_{p,cri}$  es menor mientras mayor sea el gradiente de la densidad de plasma, es decir, mientras mas rápidamente decaiga  $\omega_p$  con  $r$ . Al mismo tiempo, en Kerr modificada y Braneworld la relación es inversa.



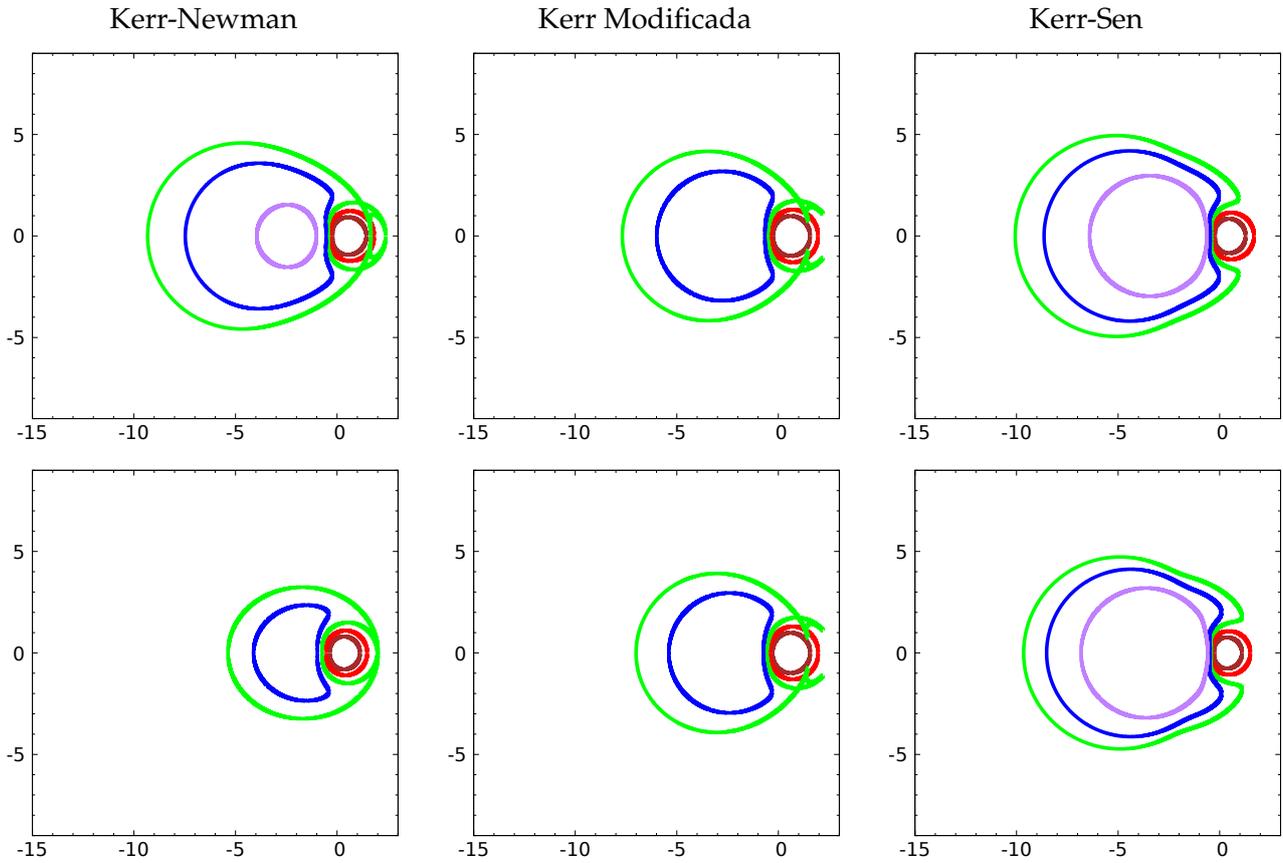
CUADRO 3.10: Perfil de plasma 5. En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,0, 17,5, 35,0, 52,5$  y  $70,0$ .



CUADRO 3.11: Perfil de plasma 6. En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,00, 32,5, 65,0, 97,5$  y  $130,0$ .

Al observar el Cuadro 3.12, vemos que algo particular sucede con el ejemplo 4. Nuevamente, en [PT17] se muestran y discuten las regiones de fotones estables e inestables, así como la denominada región prohibida, donde los fotones no pueden ingresar. En este caso, la presencia del plasma genera una magnificación en el tamaño observado de la sombra, siendo mayor en comparación a la que un observador en la misma posición vería en gravedad pura, llegando al punto en que si  $\omega_c/\omega_\infty$  supera cierto valor límite, la sombra abarca todo el cielo. La región prohibida comienza a existir cuando este cociente llega a valer 1, de forma que la sombra incluye el punto  $\Theta = \pi$ , es decir, la dirección contraria

al agujero negro en la proyección estereográfica. Luego, para un cierto rango de valores de  $\omega_c/\omega_\infty$ , la



CUADRO 3.12: Perfil de plasma 4. En cada imagen, las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,000, 0,800, 1,085, 1,200$  y  $1,345$ .

sombra muestra una estructura que se ha dado en llamar cola de pez, brillante en el interior y oscuro en el exterior. Si  $\omega_c/\omega_\infty$  aumenta aún más, la sombra crece hasta cubrir todo el cielo. Los resultados obtenidos para las sombras que se muestran en estos gráficos podrían verse drásticamente alterados dependiendo de que consideraciones se tomen sobre los fotones provenientes de las órbitas estables, a los cuales podríamos asignar tanto luz como oscuridad. Debido a inconsistencias en los resultados, se eliminaron de este último cuadro los gráficos relativos a Braneworld y Dilaton.

### 3.4. Aberraciones

Las expresiones derivadas en la sección anterior son válidas para un observador  $\mathcal{O}$  ubicado en la posición  $(r_O, \theta_O)$  con 4-velocidad  $e_0$ . Sin embargo, como se explica en [Gre15], de existir una 3-velocidad no nula entre un observador  $\mathcal{O}'$  y  $\mathcal{O}$ , tendríamos que lidiar con los efectos de la aberración relativista. Retomemos el caso del observador  $\mathcal{O}$ . Habíamos encontrado los siguientes elementos para la tetrada ortonormal

$$[e_i^\mu] = \begin{pmatrix} \frac{r^2 R_\Sigma + a^2}{\rho \sqrt{\Delta}} & 0 & 0 & \frac{a}{r \rho \sqrt{\Delta}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{a \sin \theta}{\rho} & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho \sin \theta} \\ 0 & -\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho R_B} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

El vector base  $e_0$  se interpreta como la 4-velocidad del observador, siendo un vector temporal, mientras que  $e_3$  es un vector espacial que apunta en dirección al centro del agujero negro. Un observador con esta tetrada es lo que llamaremos observador estándar.

La forma de la sombra depende del estado de movimiento del observador. Por lo tanto, tendremos que modificar la tetrada elegida si otro observador ubicado en  $(r_O, \theta_O)$  se mueve con 3-velocidad  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , siendo  $v = |\vec{v}| < c = 1$ , en relación con nuestro observador estándar. La 4-velocidad del observador en movimiento nos dará como resultado su tetrada, la que se expresa en [Gre15] como

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 &= \frac{e_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ \tilde{e}_1 &= \frac{(1 - v_2^2) e_1 + v_1 (e_0 + v_2 e_2)}{\sqrt{1 - v_2^2} \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}, \\ \tilde{e}_2 &= \frac{e_2 + v_2 e_0}{\sqrt{1 - v_2^2}}, \\ \tilde{e}_3 &= \frac{(1 - v_1^2 - v_2^2) e_3 + v_3 (e_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2)}{\sqrt{1 - v^2} \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como antes, el vector espacial  $\tilde{e}_3$  corresponde a la dirección entrante hacia el agujero negro, mientras que  $\tilde{e}_1$  y  $\tilde{e}_2$  indican las direcciones vertical y horizontal respectivamente en el plano cartesiano.

Para todo fotón con trayectoria  $\lambda(s) = (t(s), r(r), \theta(s), \phi(s))$  el vector tangente en la posición del observador puede escribirse de dos maneras diferentes, ya sea empleando la base de coordenadas de Boyer-Lindquist o la tetrada introducido anteriormente, resultando

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{t} \partial_t + \dot{r} \partial_r + \dot{\theta} \partial_\theta + \dot{\phi} \partial_\phi, \\ \dot{\lambda} &= -\alpha \tilde{e}_0 + \beta (\sin \Theta \cos \Phi \tilde{e}_1 + \sin \Theta \sin \Phi \tilde{e}_2 + \cos \Theta \tilde{e}_3), \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde  $\Theta$  y  $\Phi$  son las coordenadas celestes del observador, mientras que los factores  $\alpha$  y  $\beta$  deben calcularse tomando en cuenta ahora la 4-velocidad del observador,

$$\begin{aligned} \alpha &= g(\dot{\lambda}, \tilde{e}_0) = k_0^t p_t + k_0^r p_r + k_0^\theta p_\theta + k_0^\phi p_\phi, \\ \beta &= \sqrt{(k_0^t p_t + k_0^r p_r + k_0^\theta p_\theta + k_0^\phi p_\phi)^2 - \omega_p^2}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

Recordemos que ambas expresiones deben evaluarse en las coordenadas del observador  $(r_O, \theta_O)$ .

Si bien la Ec. (3.42) deducida anteriormente es formalmente correcta, no resulta conveniente emplearla al resolver numéricamente la sombra de agujeros negros debido a que no siempre estará bien

definida. En su lugar, recomendamos emplear la expresión

$$\alpha = k_0^t p_t + k_0^r g_{rr} \dot{r} + k_0^\theta g_{\theta\theta} \dot{\theta} + k_0^\phi p_\phi, \quad (3.43)$$

que cuenta con mayor estabilidad numérica.

Para continuar, debemos expresar la nueva tetrad en términos de derivadas parciales, según la expresión genérica

$$\tilde{e}_i = k_i^\mu \partial_\mu, \quad (3.44)$$

donde los elementos  $k_i^\mu$  resultantes se muestran en la siguiente matriz

$$k_i^\mu = \begin{pmatrix} \frac{e_0^t + v_2 e_2^t}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v_3 e_3^r}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v_1 e_1^\theta}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{e_0^\phi + v_2 e_2^\phi}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_1 (e_0^t + v_2 e_2^t)}{\sqrt{1-v_2^2} \sqrt{1-v_1^2 - v_2^2}} & 0 & \sqrt{\frac{1-v_2^2}{1-v_1^2 - v_2^2}} e_1^\theta & \frac{v_1 (e_0^\phi + v_2 e_2^\phi)}{\sqrt{1-v_2^2} \sqrt{1-v_1^2 - v_2^2}} \\ \frac{v_2 e_0^t + e_2^t}{\sqrt{1-v_2^2}} & 0 & 0 & \frac{v_2 e_0^\phi + e_2^\phi}{\sqrt{1-v_2^2}} \\ \frac{v_3 (e_0^t + v_2 e_2^t)}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{1-v_1^2 - v_2^2}} & \sqrt{\frac{1-v_1^2 - v_2^2}{1-v^2}} e_3^r & \frac{v_3 v_1 e_1^\theta}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{1-v_1^2 - v_2^2}} & \frac{v_3 (e_0^\phi + v_2 e_2^\phi)}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{1-v_1^2 - v_2^2}} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Comparando las expresiones en la Ec. (3.41), introduciendo en estas la Ec. (3.44) y agrupando los términos con factor común  $\partial_\mu$  ( $\mu = t, r, \theta, \phi$ ), obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \dot{t} &= -\alpha k_0^t + \beta k_1^t \sin \Theta \cos \Phi + \beta k_2^t \sin \Theta \sin \Phi + \beta k_3^t \cos \Theta, \\ \dot{r} &= -\alpha k_0^r + \beta k_3^r \cos \Theta, \\ \dot{\theta} &= -\alpha k_0^\theta + \beta k_1^\theta \sin \Theta \cos \Phi + \beta k_3^\theta \cos \Theta, \\ \dot{\phi} &= -\alpha k_0^\phi + \beta k_1^\phi \sin \Theta \cos \Phi + \beta k_2^\phi \sin \Theta \sin \Phi + \beta k_3^\phi \cos \Theta \end{aligned} \quad (3.46)$$

de donde podemos despejar las siguientes expresiones para las coordenadas celestes del observador

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{\dot{r} + \alpha k_0^r}{\beta k_3^r}, \\ \sin \Phi &= \frac{\dot{\phi} + \alpha k_0^\phi - (\dot{\theta} + \alpha k_0^\theta) \frac{k_1^\phi}{k_1^\theta} + \beta \frac{\dot{r} + \alpha k_0^r}{\beta k_3^r} \left( k_3^\theta \frac{k_1^\phi}{k_1^\theta} - k_3^\phi \right)}{\beta \sqrt{1 - \left( \frac{\dot{r} + \alpha k_0^r}{\beta k_3^r} \right)^2} k_2^\phi}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde  $\dot{r}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\phi}$  deben ser sustituidos por sus expresiones en las ecuaciones de movimiento (Ec. (3.21)). Al hacer esto, debemos evaluar todas las funciones que se muestran en la Ec. (3.21) en las coordenadas del observador  $(r_O, \theta_O)$ , menos las expresiones explícitas de  $K$  y  $p_\phi$  que deben evaluarse en  $(r_p, \theta_O)$ . Puede verificarse que, si se toma  $\vec{v} = \vec{0}$ , las expresiones en la Ec. (3.47) se reducen a las que se encuentran en la Ec. (3.31). Finalmente, las coordenadas estereográficas  $X(r_p)$  e  $Y(r_p)$  seguirán expresándose de la misma forma que en la sección anterior (Ec. (3.32)).

### 3.4.1. Resumen

Para la comodidad del lector, presentamos un resumen del método de construcción de la sombra en un procedimiento paso a paso que incluye los efectos por aberración.

1. Seleccione una métrica. Algunos ejemplos se muestran en el Cuadro 3.1 .
2. Elija el momento angular  $a$  y el resto de los parámetros característicos de la métrica, verificando que satisfagan las restricciones correspondientes ( $\Delta(r_h) = 0$ ,  $r_h \in \mathbb{R}_{>0}$ ).

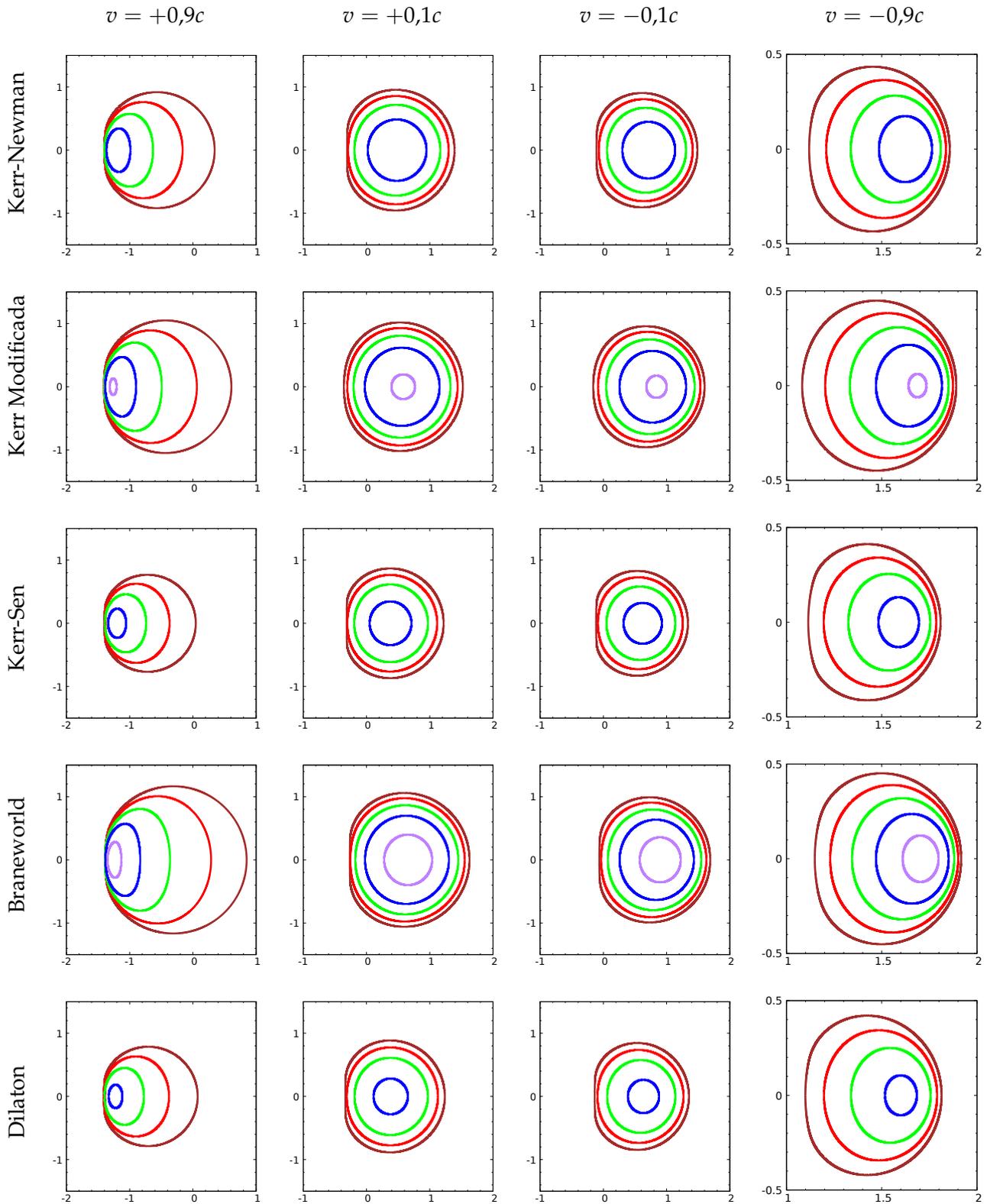
3. Seleccione la posición del observador  $(r_O, \vartheta_O)$ . Recuerde que  $r_O$  debe ser mayor a  $r_h$ , mientras que los efectos de rotación serán mas apreciables para  $\vartheta_O$  próximo a  $\pi/2$ .
4. Seleccione la 3-velocidad del observador  $\vec{v}$  respecto al observador estándar, tal que  $|\vec{v}| < c$ .
5. Calcule los coeficientes  $e_i^\mu$  a partir de la Ec. (3.39) evaluada en la posición del observador  $(r_O, \vartheta_O)$ .
6. Calcule a partir de estos los coeficientes  $k_i^\mu$  según se expresan en la Ec. (3.45).
7. Seleccione las funciones  $f_r(r)$  y  $f_\theta(\theta)$ , dando la distribución del plasma  $\omega_p(r, \theta)$  alrededor del agujero negro.
8. Elija la frecuencia del fotón en el infinito  $\omega_\infty$  o en el observador  $\omega_{obs}$  (relacionadas por la Ec. (3.20)) y verifique que se satisfaga la Ec. (3.15) durante toda la trayectoria. En las ecuaciones que emplearemos, esta contante de movimiento estará presente sólo en el cociente  $\omega_p(x)/\omega_{\infty/obs}$ , por lo que recomendamos expresar ambas frecuencias en función de una misma magnitud  $\omega_c$ .
9. Escriba las ecuaciones de movimiento en términos de  $K$  y  $p_\phi$  como se muestra en la Ec. (3.21).
10. Escriba las coordenadas celestes  $\sin \Theta$  y  $\sin \Phi$  como se muestra en la Ec. (3.47), remplazando las ecuaciones de movimiento por las expresiones obtenidas en el paso anterior.
11. Sustituya en las expresiones para  $\sin \Theta$  y  $\sin \Phi$  las expresiones  $K(r_p)$  y  $p_\phi(r_p)$  según las Ec. (3.23) y (3.24), evaluando en  $r = r_p$ , el cual pertenece al intervalo de coordenadas radiales para las que existen órbitas esféricas inestables. Esto nos da  $\sin \Theta$  y  $\sin \Phi$  como funciones de  $r_p$ , de modo que hemos parametrizado el contorno de la sombra en el cielo del observador.
12. Resuelva la ecuación  $\sin^2[\Phi(r_p)] = 1$  para  $r_p$ , obteniendo los valores límite  $r_{p,min}$  y  $r_{p,max}$ . Tenga en cuenta que esta ecuación puede tener varias soluciones reales, por lo que deberá determinar, dependiendo de las características del problema, cuál es el límite relevante para la formación de la sombra.
13. Calcule  $\sin[\Theta(r_p)]$  y  $\sin[\Phi(r_p)]$  evaluando  $r_p$  en el intervalo  $[r_{p,min}, r_{p,max}]$ .
14. Calcule las coordenadas cartesianas adimensionales  $X(r_p)$  e  $Y(r_p)$  de la curva límite de la sombra según la Ec. (3.32).

### 3.4.2. La Sombra y las Aberraciones Relativistas

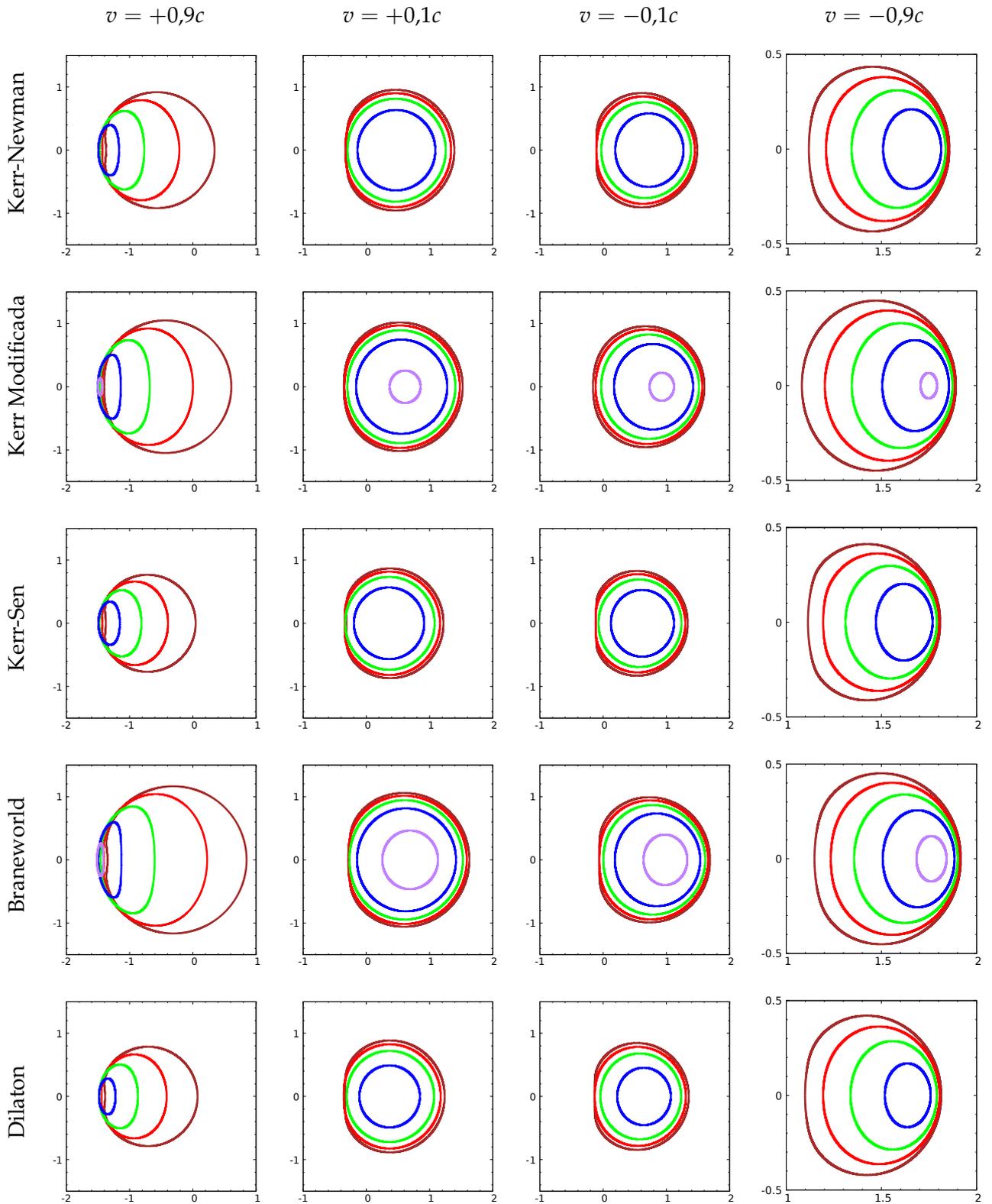
En este trabajo, solo consideraremos velocidades en la dirección del vector de Killing axial  $\partial_\phi$ . De esta forma, la 3-velocidad del observador estará dada por  $\vec{v} = (0, v_\phi, 0)$ , con  $v_\phi > 0$  indicando que el desplazamiento es hacia la izquierda y  $0 < v_\phi$  que es hacia la derecha. Para una discusión mas detallada que incluya otro tipo de desplazamientos, ver [Gre15].

Las sombras resultantes para distintos valores de la velocidad del observador  $v_\phi$  se muestran en los Cuadros 3.13 a 3.17, considerando los distintos perfiles de plasma introducidos anteriormente, y son visualizadas a través de proyección estereográfica desde la esfera celeste a un plano. Cada figura muestra las sombras resultantes para distintos valores de frecuencia  $\omega_c^2/\omega_\infty^2$ . En cada Cuadro de figuras se emplean los parámetros  $a/a_{max} = 0,999$ ,  $r_O = 5$ ,  $\vartheta_O = \pi/2$  y  $Q/Q_{max} = \sqrt{0,25}$ .

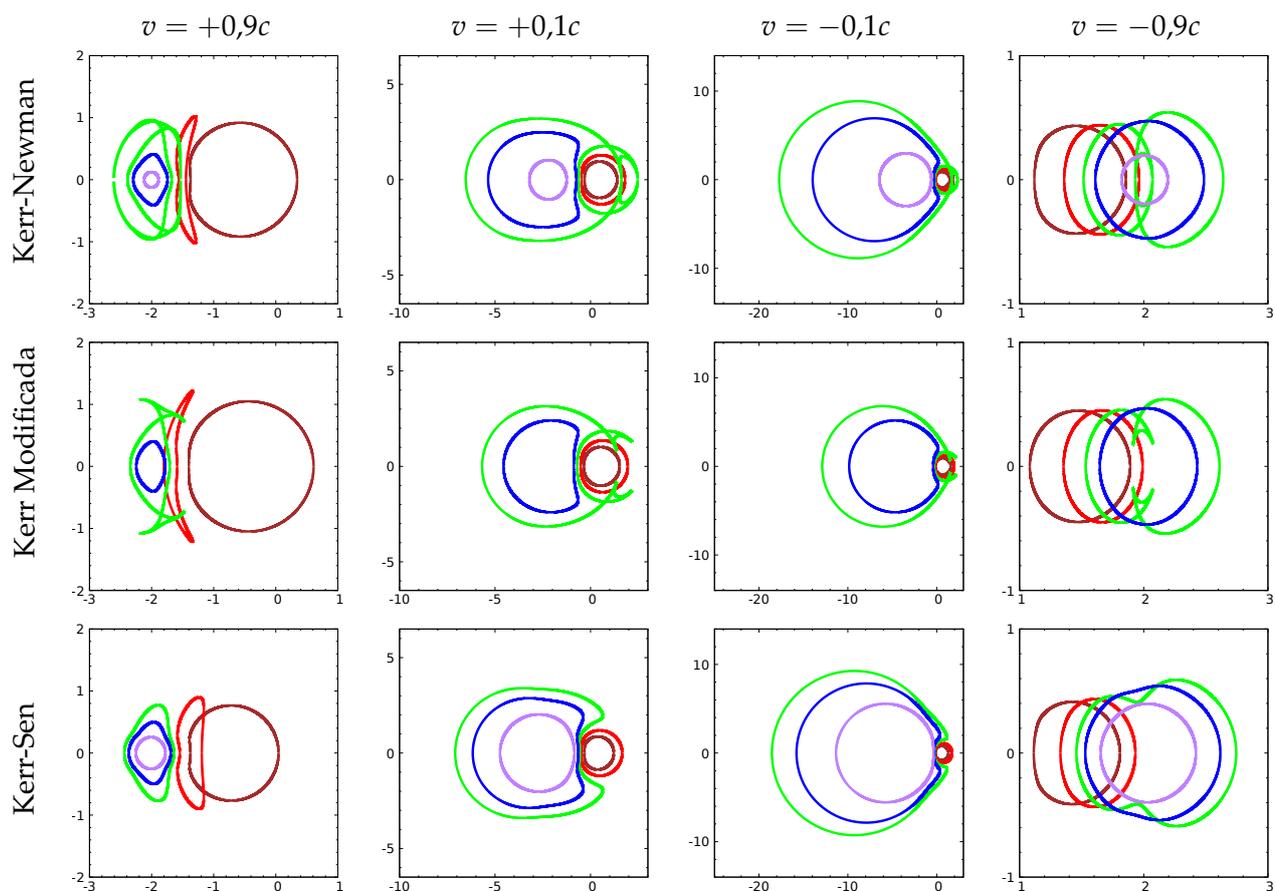
En las imágenes presentadas podemos ver que las sombras se desplazan hacia el ápex, es decir en la dirección del movimiento del observador, como cabe esperar en un fenómeno de aberración. Al mismo tiempo, se ve afectado el tamaño de la sombra. Estos efectos se incrementan mientras mayor sea la velocidad relativa, y pueden ser explicados si relacionamos la dirección del movimiento del observador con el giro del agujero negro y con el plano ecuatorial como plano de simetría, como se afirma en [Gre15].



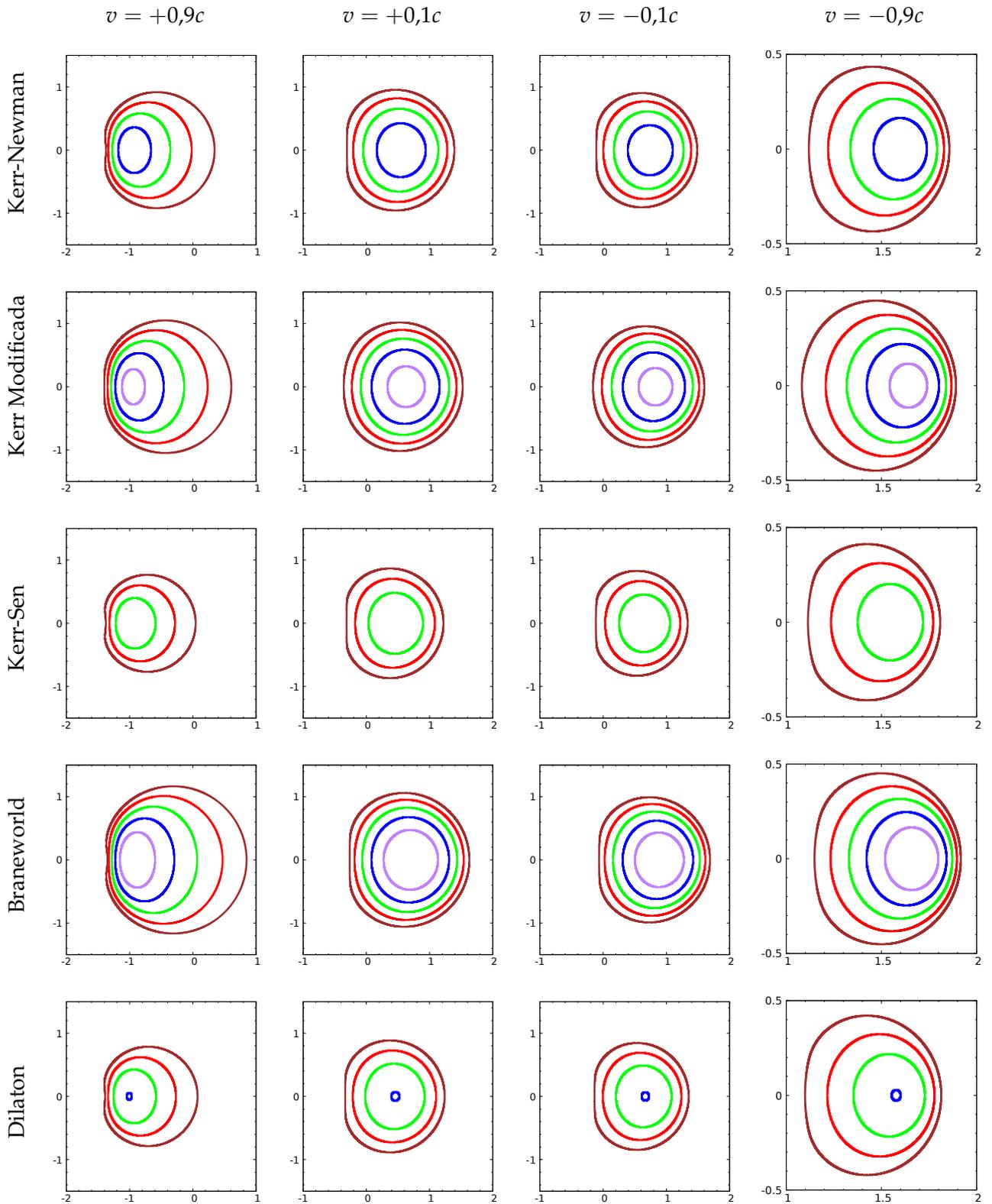
CUADRO 3.13: Aberración relativista en el perfil de plasma 2. Las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,00, 2,25, 4,50, 6,75$  y  $8,90$ .



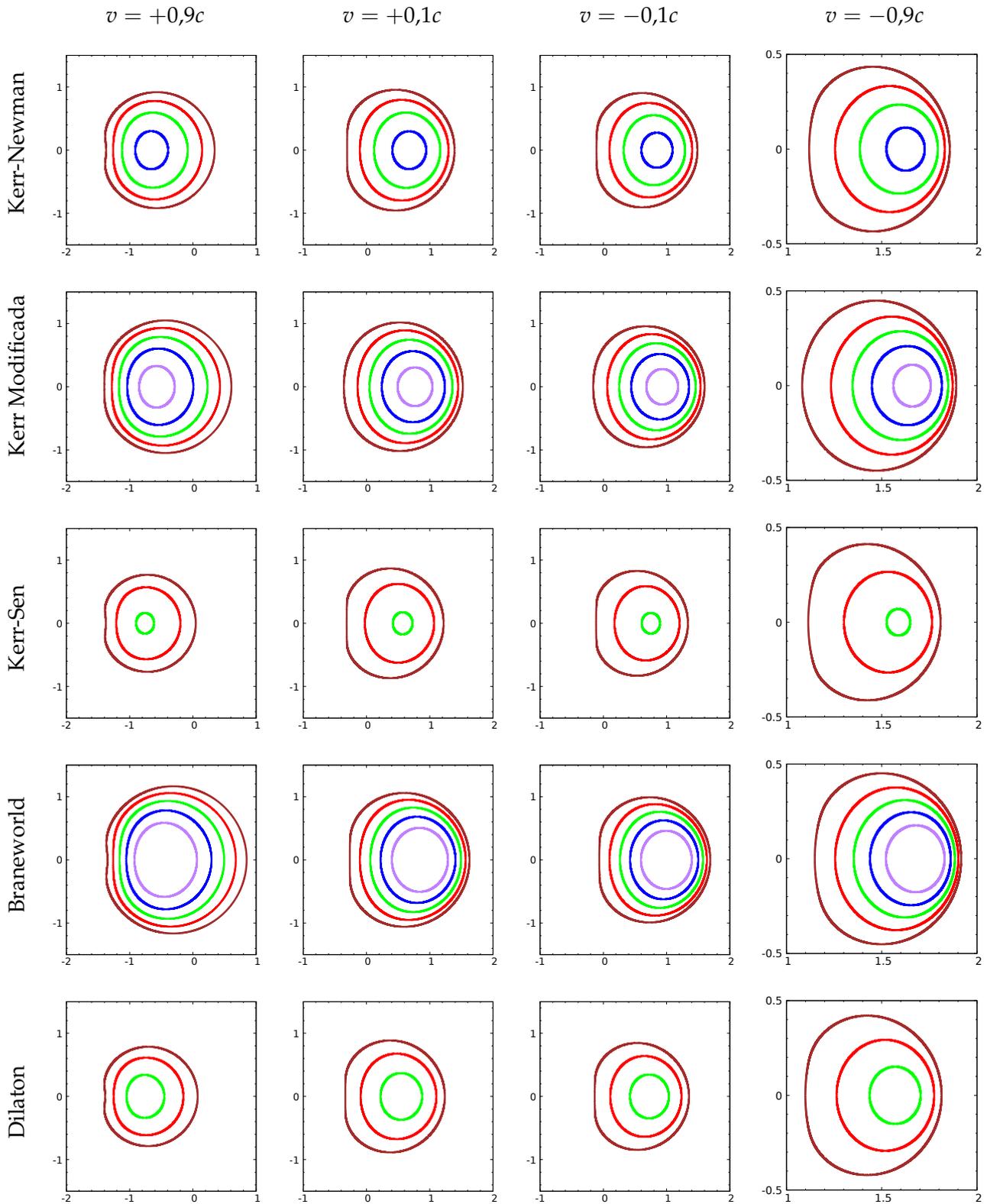
CUADRO 3.14: Aberración relativista en el perfil de plasma 3. Las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,00, 3,75, 7,50, 11,25$  y  $15,00$ .



CUADRO 3.15: Aberración relativista en el perfil de plasma 4. Las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,000, 0,800, 1,085, 1,200$  y  $1,345$ .



CUADRO 3.16: Aberración relativista en el perfil de plasma 5. Las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2/\omega_\infty^2 = 0,0, 17,5, 35,0, 52,5$  y  $70,0$ .



CUADRO 3.17: Aberración relativista en el perfil de plasma 6. Las curvas marrón, roja, verde, azul y púrpura se corresponden respectivamente a los cocientes entre frecuencias  $\omega_c^2 / \omega_\infty^2 = 0,00, 32,5, 65,0, 97,5$  y  $130,0$ .

En general, vemos que los efectos de la aberración para velocidades relativamente bajas ( $|v| \leq 0,1c$ ) no afectan de una forma demasiado drástica la forma o el tamaño de la sombra observada, que se desplaza ligeramente hacia el ápex. Sin embargo, para el caso de un plasma constante (ejemplo 4), una ligera variación en la velocidad del observador puede transformar dramáticamente la sombra observada. Esto se debe a que las frecuencias de observación ( $\omega_c^2/\omega_\infty^2$ ) con las que estamos trabajando se encuentran próximas al límite de no propagación (algunas frecuencias no se transmitirían por el espacio), por lo que el efecto Doppler relativista puede hacernos pasar de una sombra pequeña en un cielo iluminado a una mancha de luz dentro de un cielo oscuro. En el Cuadro 3.15 se han omitido los modelos métricos de Braneworld y Dilaton por inconsistencias en los resultados.

Por otro lado, al trabajar con velocidad demasiado altas ( $|v| \approx 0,9c$ ) vemos que la aberración se encuentran en su máxima expresión, exagerando los efectos mencionados. En el caso del plasma constante, la estructura de cola de pez mencionada anteriormente se transforma, dando lugar a otras un tanto más llamativas. El análisis de estas estructuras no es el objetivo de este trabajo, pero las incluimos como una curiosidad.

Observamos además que en caso de que  $v_\phi$  sea positivo la parte izquierda de la sombra, que se corresponde con el lado recto de la  $D$ , se encoje, de modo que para frecuencias de plasma bajas la sombra se vuelve casi circular, con una ligera hendidura en el costado izquierdo. Al aumentar la frecuencia del plasma, la sombra se comprime en la dirección de movimiento, adoptando una forma lenticular. La magnificación de estas figuras dependerá fuertemente del modelo del espaciotiempo y de la frecuencia observada, sin presentar diferencias demasiado marcadas. Por otro lado, si el ápex se encuentra a la derecha, el lado recto de la  $D$  crece en proporción, dando como resultado una sombra más achatada para frecuencias bajas. Al subir la frecuencia del plasma, contrario a lo sucedido en el caso anterior, la sombra adopta una forma más circular al comprimirse, perdiendo la forma de  $D$ . En este caso, la imagen se ve claramente demagnificada, sin importar el perfil de plasma donde se origine. En todos los casos, la estructura de anillos formada por las sombras correspondientes a distintas frecuencias se agolpa en la dirección de movimiento.

### 3.5. Conclusiones

Es importante aclarar que la clase de agujeros negros considerada aquí no es la más general entre las que permiten la separación de variables en la ecuación de Hamilton-Jacobi, ya que la intención era describir de forma práctica los agujeros negros con las mismas simetrías del modelo de Kerr, en espaciotiempos asintóticamente planos y axisimétricos que presentasen un horizonte de eventos esférico y admitiesen una constante de Carter generalizada, permitiendo un tratamiento analítico simple al poder separar completamente las ecuaciones de geodésicas nulas. Esta clase de agujeros negros, por limitada que sea, incluye las soluciones analíticas exactas conocidas de agujeros negros y muchas otras métricas de agujeros negros obtenidas por deformaciones de la métrica de Kerr o estipuladas por algunos escenarios cosmológicos o de braneworld. Además, como se muestra en [KSZ18], estas pueden servir para aproximar de manera efectiva métricas más complejas que no permitan la separación de variables. Remarcamos fuertemente el hecho de que la sombra está relacionada con la existencia de una región de fotones, no de un horizonte de eventos.

Se estudió la sombra proyectada por un agujero negro rotante dentro de un entorno plasmático en un espaciotiempo estacionario arbitrario, axialmente simétrico y asintóticamente plano, a partir de las métricas KSZ. Con este fin, separamos completamente las ecuaciones de geodésicas nulas utilizando diferentes constantes de movimiento y estudiamos qué criterios debían satisfacer las funciones métricas en orden de garantizar la separabilidad de las ecuaciones de Klein-Gordon y Hamilton-Jacobi, encontrando las distribuciones espaciales de la densidad de electrones del plasma para las cuales existe una constante de Carter generalizada. En los espaciotiempos mencionados, se investigó la propagación de la luz en un plasma no magnetizado y libre de presión, un medio dispersivo con un índice de refracción dependiente de la frecuencia. Para describir la dinámica de los fotones dentro del entorno plasmático se recurrió al formalismo hamiltoniano. No hemos tenido en cuenta los procesos de absorción o dispersión de fotones, así como el campo gravitacional producido por el entorno plasmático, de modo que la presencia del plasma se manifiesta sólo a través de perturbaciones en las trayectorias de los fotones que, al depender de su frecuencia, resultan en una descripción cromática de estos fenómenos. De este modo, en presencia de un entorno plasmático alrededor de un agujero negro, el tamaño y la forma de la sombra se ven afectados, dependiendo fuertemente de la relación entre la frecuencia del plasma y la frecuencia del fotón. Hemos considerado además observadores en diferentes estados de movimiento relativo respecto al agujero negro.

Se derivaron fórmulas analíticas generales que permitieran encontrar la curva de contorno de la sombra proyectada por el agujero negro en el cielo del observador en términos de coordenadas celestes angulares, bajo condiciones altamente idealizadas para una amplia gama de métricas. Las expresiones encontradas son válidas para cualquier frecuencia de fotones en el infinito  $\omega_\infty$ , cualquier valor del momento angular  $a$ , cualquier posición del observador dentro del dominio de comunicación exterior, cualquier distribución de plasma que satisfaga la condición de separabilidad y cualquier velocidad relativa entre el observador y el agujero negro en la dirección  $\phi$ , y pueden ser utilizadas como la aproximación de orden cero para estudiar numéricamente situaciones más realistas. Para la comodidad del lector, escribimos un procedimiento paso a paso para la construcción de la sombra y elaboramos varios ejemplos, considerando varias distribuciones de plasma específicas. Dichas fórmulas fueron empleadas para reproducir los resultados correspondientes a algunos ejemplos conocidos.

Se observó como los distintos modelos de espaciotiempo afectan a la forma y el tamaño de la sombra, y que rol desempeña el parámetro característico  $Q$  en cada uno de ellos. En las métricas de Kerr-Newman y Dilaton, los efectos derivados del momento angular se reducen al considerar valores elevados de  $Q$ , donde  $a$  se vuelve despreciable. En Kerr-Sen, por el contrario, al incrementar el parámetro  $Q$  la forma de  $D$  se acentúa. Por otro lado, en Kerr modificada y Braneworld los efectos asociados al momento angular se conservan aún para valores próximos a  $Q_{max}$ , llegando a incrementarse en Braneworld. Respecto al tamaño, observamos que Kerr-Sen produce las sombras más pequeñas, siendo Braneworld la de mayor tamaño. Respecto a la forma de  $D$ , este efecto es más evidente en Kerr-Sen, mientras que Kerr modificada presenta la sombra más redondeada. Además, observamos que al incrementar el parámetro

Q estos efectos se ven mitigados en Kerr-Newman y Dilaton e incrementados en Kerr modificada y Braneworld, mientras en Kerr-Sen disminuyen el tamaño y el desplazamiento al tiempo que se exagera la forma de  $D$ . Además, la forma de la sombra del agujero negro parece estar determinada principalmente por el momento angular, pudiendo entender a la deformación asimétrica resultante como un efecto de arrastre rotacional. Vimos también que la sombra vista por el observador estándar permanece simétrica con respecto a un eje horizontal, incluso para un observador fuera del plano ecuatorial. Al mismo tiempo, la sombra permanece simétrica con respecto a un eje horizontal siempre y cuando el observador no se mueva en dirección  $\theta$ .

Estudiando el efecto de distintas distribuciones de plasma sobre la formación de la sombra, concluimos que si la frecuencia del plasma es pequeña en comparación con la frecuencia del fotón, la sombra no es muy diferente del caso de gravedad pura. Por el contrario, si la frecuencia del plasma es cercana a la frecuencia del fotón, las propiedades de la sombra cambian drásticamente. Observamos que existe cierta frecuencia de plasma  $\omega_{p,cri}$  por encima de la cual deja de producirse sombra. Ésta depende tanto del modelo métrico como del parámetro  $Q$ , siendo menor en Dilaton y mayor en Braneworld. Por otro lado, al considerar un plasma constante las sombras adoptan formas sumamente llamativas. También estudiamos como la aberración influye sobre la forma y el tamaño de la sombra, la cual se ve desviada hacia el apex.

La dirección próxima a seguir sería estudiar en el régimen de radiofrecuencias, como la luminosidad del mismo disco de acreción afecta a la imagen final de los agujeros negros rotantes. A su vez, se debería incluir un modelo de plasma magnetizado cuya dinámica ha sido previamente discutida por Broderick and Blandford [BB03; BB04]. En esta situación, los métodos analíticos deben dejarse de lado y se debe recurrir a técnicas numéricas para realizar el trazado de rayos e implementar ecuaciones de transferencia radiativas.



## Capítulo 4

# Apéndices

## Apéndice I: Parámetro de Impacto

Partiendo de las Ec. (2.11) y (2.15) podemos ver que

$$\frac{p_\phi}{p_r} = \left[ \frac{B}{A} \left( \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - \frac{A}{C} \right) \right]^{-1/2}. \quad (1)$$

Al mismo tiempo, al ser  $\delta$  el ángulo entre la normal a la superficie estelar y la tangente a la trayectoria del fotón al momento de abandonarla, tenemos

$$\tan(\delta) = \frac{\sqrt{p^\phi p_\phi}}{\sqrt{p^r p_r}}. \quad (2)$$

Desarrollando esta expresión, encontramos

$$\tan(\delta) = \sqrt{\frac{B}{C} \frac{p_\phi}{p_r}} = \sqrt{\frac{B}{C} \left[ \frac{B}{A} \left( \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - \frac{A}{C} \right) \right]^{-1/2}}. \quad (3)$$

Podemos calcular entonces

$$\tan^{-2}(\delta) = \frac{C}{B} \left[ \frac{B}{A} \left( \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - \frac{A}{C} \right) \right] = \frac{C}{A} \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{b^2} - 1, \quad (4)$$

de donde podemos despejar

$$b^2 = \frac{C}{A} \frac{n^2}{n_0^2} \frac{1}{1 + \tan^{-2}(\delta)}, \quad (5)$$

para llegar finalmente a

$$b^2 = \frac{C}{A} \frac{n^2}{n_0^2} \sin^2(\delta). \quad (6)$$

## Apéndice II: Métricas KSZ

En este apéndice, seguiremos de cerca el procedimiento que se muestra en [KSZ18]. Habíamos dicho que el elemento de línea propuesto por KSZ se expresaba como

$$ds^2 = -\frac{N^2 - W^2 \sin^2 \theta}{K^2} dt^2 - 2Wr \sin^2 \theta dt d\phi + K^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \Sigma \frac{B^2}{N^2} dr^2 + \Sigma r^2 d\theta^2, \quad (7)$$

donde  $N$ ,  $W$ ,  $K$ ,  $\Sigma$  y  $B$  son, en principio, funciones arbitrarias de  $r$  y  $\theta$ . Dado un campo escalar masivo  $\Phi$ , la primer exigencia que se hace es que la ecuación de Klein-Gordon,

$$(\square - \mu^2)\Phi = 0, \quad (8)$$

permita no sólo la separación de variables en las coordenadas elegidas ( $r$  e  $y$ ), sino que además esta separación ocurra de manera similar a lo que sucede con Kerr. Es decir, se exige que después de la extracción del prefactor  $N^p(r, y)B^q(r, y)$  de la función de onda genérica  $\Phi(t, r, y, \phi)$ , la ecuación para la función restante  $\Psi(r, y)$  sea separable. De esta forma, el campo escalar puede expresarse como

$$\Phi(t, r, y, \phi) = e^{-i\omega t + im\phi} N^p(r, y) B^q(r, y) \Psi(r, y), \quad (9)$$

lo que, al ser aplicado en la Ec. (8) resulta en

$$0 = e^{-i\omega t + im\phi} \left( P \frac{\partial^2}{\partial y^2} + Q \frac{\partial}{\partial y} + T \frac{\partial^2}{\partial r^2} + U \frac{\partial}{\partial r} + V \right) \Psi, \quad (10)$$

donde  $P$ ,  $Q$ ,  $T$  y  $U$  dependen únicamente de  $N$ ,  $B$  y sus derivadas, mientras que  $V(r, y, \omega, m)$  es el potencial efectivo. Puede verse que la separabilidad de las ecuaciones en las variables  $r$  e  $y$  imponen que el cociente

$$\frac{Q}{P} = \frac{4p}{N} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{4q+1}{B} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{2y}{1-y^2} \quad (11)$$

resulte en una función solo de  $y$ , mientras que el cociente

$$\frac{U}{T} = \frac{4p+2}{N} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{4q-1}{B} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2}{r} \quad (12)$$

debe ser una función solo de  $r$ . Al mismo tiempo, el potencial efectivo  $V(r, y, \omega, m)$  debe poder ser representado en alguna forma que permita la separación de variables.

Al calcular las derivadas del lado derecho de las Ecs. (11) y (12) con respecto a  $r$  e  $y$  se obtienen dos ecuaciones homogéneas, que para  $p+q \neq 1/4$  tienen solución sólo si

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial y} \ln(N) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial y} \ln(B) = 0, \quad (13)$$

lo que lleva a poder expresar las funciones  $N$  y  $B$  como el producto de funciones solo de  $r$  y solo de  $y$ ,

$$N^2(r, y) = R_N(r) S_N(y), \quad B(r, y) = R_B(r) S_B(y). \quad (14)$$

Dado que se ha asumido que el espaciotiempo es asintóticamente plano, se tiene que  $N^2(r \rightarrow \infty, y) \rightarrow 1$  y  $B(r \rightarrow \infty, y) \rightarrow 1$ , de donde se desprende que  $S_N(y) = S_B(y) = 1$ .

Para el caso en que  $p+q = -1/4$ , existe una solución cuando

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial y} \ln(B/N) = 0, \quad (15)$$

de donde se deduce ahora que  $B/N = R(r)S(y)$ . Este caso no es considerado en lo que resta del trabajo de KSZ.

Se tiene entonces que  $N^2 = R_N(r)$  y  $B = R_B(r)$  son funciones solo de  $r$ , de modo que la Ec. (10) toma la siguiente forma

$$0 = \frac{1}{1-y^2} \frac{\partial}{\partial y} (1-y^2) \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{r^2 R_N}{R_B^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \left( \frac{2r R_N}{R_B^2} + \frac{(2p+1)r^2 R'_N}{R_B^2} + \frac{(4q-1)r^2 R_N R'_B}{R_B^3} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left( \omega^2 \frac{r^2 K^2 \Sigma}{R_N} - 2m\omega \frac{r W \Sigma}{R_N} + \frac{m^2 W^2}{R_N K^2} - \frac{m^2 \Sigma}{(1-y^2) K^2} - \mu^2 r^2 \Sigma + H \right) \Psi, \quad (16)$$

donde  $H(r)$  es una función que depende solo de  $R_N$ ,  $R_B$  y sus derivadas. Por simplicidad, de ahora en adelante se asume  $p = q = 0$ , resultando  $H(r) = 0$ . La elección de  $p$  y  $q$  distintos de cero, permitida por las suposiciones hechas en [KSZ18], evidentemente complica los cálculos, pero no conduce a clases más amplias de las funciones métricas resultantes  $N(r, y)$  y  $B(r, y)$ .

En orden de separar variables, se requiere que el coeficiente que acompañan a  $\Psi$  en la Ec. (16) puedan expresarse como la suma de una función solo de  $r$  y una función solo de  $y$  para cualquier  $\omega$ ,  $m$  y  $\mu$  dados. Este coeficiente es el potencial efectivo  $V(r, y, \omega, m)$ , y al exigir que permita la separabilidad de variables en  $r$  e  $y$ , se obtienen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} W(r, y) &= \frac{R_W(r) + S_W(y) R_N(r)/r}{\Sigma(r, y)}, \\ K^2(r, y) &= \frac{R_K(r) + S_K(y) R_N(r)/r^2}{\Sigma(r, y)}, \\ \Sigma(r, y) &= R_\Sigma(r) + \frac{S_\Sigma(y)}{r^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Recordando que la métrica debe ser asintóticamente plana, vemos que  $W(r \rightarrow \infty, y) \propto 1/r$  a menos que  $S_W(y) = 0$ . Por otro lado, se puede elegir  $S_W(y=0) = S_K(y=0) = S_\Sigma(y=0) = 0$  sin pérdida de generalidad, dado que las funciones de  $r$  pueden contribuir con las constantes que sean necesarias.

Consideremos ahora los dos términos proporcionales a  $m^2$  en la Ec. (16), a los que denotaremos por

$$\begin{aligned} F(r, y) &= \frac{W^2}{R_N K^2} - \frac{\Sigma}{(1-y^2) K^2} \\ &= \frac{r^4 (1-y^2) R_W^2 - R_N (r^2 R_\Sigma + S_\Sigma)^2}{r^2 (1-y^2) R_N (r^2 R_K + R_N S_K)}, \end{aligned} \quad (18)$$

expresándose en el plano  $y = 0$  de la forma

$$F(r, 0) = \frac{R_W^2}{R_N R_K} - \frac{R_\Sigma^2}{R_K}. \quad (19)$$

Dados los límites  $\lim_{r \rightarrow \infty} R_K(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} R_N(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} R_\Sigma(r) = 1$  y  $\lim_{r \rightarrow \infty} R_W(r) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} F(r, 0) &= -1, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} F(r, y) &= -1 - \frac{y^2}{1-y^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

y ya que  $F(r, y)$  debe ser separable en las variables  $r$  e  $y$ , en [KSZ18] se concluye que

$$F(r, y) = \frac{R_W^2}{R_N R_K} - \frac{R_\Sigma^2}{R_K} - \frac{y^2}{1-y^2}. \quad (21)$$

Al comparar las Ecs. (18) y (21) y tomar el límite  $y \rightarrow 1$  se llega a la condición

$$R_K(r) = \left( R_\Sigma(r) + \frac{S_\Sigma(1)}{r^2} \right)^2 - \frac{R_N(r)}{r^2} S_K(1), \quad (22)$$

que al sustituir en las Ecs. (18) y (21) y expandir en términos de  $r^{-1}$  conduce a

$$S_\Sigma(y) = S_\Sigma(1)y^2, \quad S_K(y) = S_K(1)y^2, \quad (23)$$

resultando finalmente en

$$R_W(r) = \pm \frac{\sqrt{S_K(1)}}{r} \left( R_\Sigma(r) \frac{S_\Sigma(1)}{S_K(1)} - R_N(r) + \frac{S_\Sigma^2(1)}{S_K(1)r^2} \right). \quad (24)$$

Se sigue que  $S_\Sigma(1) = S_K(1) > 0$ , ya que de otra forma  $R_W(r \rightarrow \infty) \propto r^{-1}$ . Introduciendo el parámetro rotacional  $a := \pm \sqrt{S_K(1)}$ , las funciones métricas de  $y$  se expresan como

$$S_W(y) = 0, \quad S_K(y) = a^2 y^2, \quad S_\Sigma(y) = a^2 y^2 \quad (25)$$

mientras que las funciones de  $r$  están relacionadas por

$$R_K(r) = \left( R_\Sigma(r) + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 - a^2 \frac{R_N(r)}{r^2}. \quad (26)$$

Por conveniencia, se introduce aquí la función  $R_M(r) = \frac{r^2}{a} R_W(r)$ . De esta forma, se tienen tres funciones arbitrarias de  $r$ ,  $R_M$ ,  $R_B$  y  $R_\Sigma$ . La función  $R_N(r)$ , que define el horizonte de eventos, está dada por

$$R_N(r) = R_\Sigma(r) - \frac{R_M(r)}{r} + \frac{a^2}{r^2}. \quad (27)$$

De esta manera, las funciones que describen la métrica son expresadas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} B(r, y) &= R_B(r), \\ \Sigma(r, y) &= R_\Sigma(r) + \frac{a^2 y^2}{r^2}, \\ W(r, y) &= \frac{a R_M(r)}{r^2 \Sigma(r, y)}, \\ N^2(r, y) &= R_\Sigma(r) - \frac{R_M(r)}{r} + \frac{a^2}{r^2}, \\ K^2(r, y) &= \frac{1}{\Sigma(r, y)} \left[ R_\Sigma^2(r) + \frac{a^2 R_\Sigma(r)}{r^2} + \frac{a^2 R_M(r)}{r^2} + \frac{a^2 y^2}{r^2} N^2(r, y) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

## Apéndice III: Métodos Numéricos

Aprovechamos este momento para hacer algunas aclaraciones y sugerencias sobre el tratamiento numérico de las ecuaciones mostradas en el presente trabajo

### Funciones Elementales

En general, definir una función como el arc cos o el arcsin de otra puede traer problemas si la imagen de esta última no está acotada al rango  $[-1, 1]$ . Esto es lo que sucede con la definición de  $h(\theta, \theta_c, \theta_0)$  en la Ec. (2.34). Esta función en particular, debe calcularse de la siguiente forma

$$h(\theta, \theta_c, \theta_0) = \begin{cases} 2\pi, & \Delta \leq -1 \\ 2 \arccos(\Delta), & -1 < \Delta < +1 \\ 0, & +1 \leq \Delta \end{cases} \quad (29)$$

siendo  $\Delta$  el argumento de la función  $\cos^{-1}$  en la Ec. (2.34). Sin embargo, no todas las funciones definidas como el arc cos o el arcsin de otra pueden ser calculadas de esta forma. Por ejemplo, si hacemos lo mismo en la Ec. (2.56), obtendremos que el ángulo máximo  $\theta_F$  permanece en  $\pi$  para estrellas de compacticidad excesiva. En este caso, es conveniente obtener el error numérico, dado que esto nos indicará que la trayectoria en cuestión no es válida. De todos modos, y para evitar errores numéricos, recomendamos que una vez verificado que la trayectoria es válida, todas las inversas de funciones sinusoidales se tomen de forma análoga a lo mostrado en la Ec. (29). Al mismo tiempo, recomendamos implementar alguna subrutina para que toda raíz cuadrada con argumento negativo de como resultado cero.

### Estrellas de Neutrones: Cálculo de $\theta$

Es sabido que el método de cuadratura de Gauss es sumamente eficiente para la integración numérica de funciones "suaves", pudiendo minimizar el error de gran cantidad de ellas a un orden sumamente bajo, alrededor de  $n = 10$ . Se vale de los polinomios de Legendre  $P_n$  y sus  $i$ -ésimas raíces  $x_i$  para determinar los puntos de evaluación óptimos de la función a integrar y sus respectivos pesos para integrar mediante una suma ponderada.

Para resolver numéricamente la Ec. (2.17) y encontrar la coordenada  $\theta$  del fotón, generalmente basta con no más de una decena de puntos a evaluar para alcanzar una precisión significativa. Sin embargo, al considerar rayos con un parámetro de impacto  $b$  próximo a  $b_{max}$ , el integrando de la Ec. (2.17) deja de ser tan bien comportado, por lo que se requiere aumentar el orden  $n$  de la integración. Esto empeora al considerar estrellas de alta compacticidad, dado que las trayectorias de los rayos marginales se ven altamente perturbadas, generando que la integración requiera del orden de  $n = 100$  puntos para no perder precisión.

Por este motivo, para la resolución numérica de la Ec. (2.17) recomendamos emplear el método de cuadratura de Gauss a un orden  $n$  que atienda a la compacticidad de la estrella y la marginalidad del rayo. Un ejemplo es tomar  $n$  de la siguiente forma

$$n = 10 + 10 \left( \frac{3,2}{R} \right)^m + \left[ 20 + 60 \left( \frac{3,2}{R} \right)^m \right] \left( \frac{b}{b_{max}} \right)^p \quad (30)$$

con  $m$  y  $p$  del orden de 5, y siendo la parte entera de esta expresión el número de puntos a evaluar. De esta forma, no desperdiciaremos potencia computacional donde no es requerida y conservaremos la precisión en las trayectorias más difíciles de integrar.

### Estrellas de Neutrones: Cálculo del flujo

Dado que el integrando en la Ec. (2.44) no es "suave", no es recomendable usar el método de Gauss para resolver dicha integral. En su lugar, recomendamos emplear el método de Simpson, combinado con un sistema de muestreo por importancia. En este caso, tomaremos el número  $n$  de punto a evaluar atendiendo a la compacticidad de la estrella

$$n = 500 \left[ 1 + 9 \left( \frac{3,2}{R} \right)^m \right] \quad (31)$$

tomando  $m$  del orden de 5 y siendo la cantidad de puntos a evaluar el número par mas cercano a esta expresión. Para seleccionar los puntos a evaluar y sus respectivos pesos atenderemos ahora a la marginalidad del rayo, tomando por ejemplo

$$x_i = x_{max} \left[ 2 \frac{i}{n} - \left( \frac{i}{n} \right)^2 \right], \quad (32)$$

$$dx_i = x_i - x_{i-1},$$

siendo  $i$  un número entero entre 0 y  $n$ . Esta no es la única opción para seleccionar los  $x_i$ . En general, deberá tomarse una distribución tal que  $x_i/x_{max} = 0$  para  $i = 0$  y tenga derivada primera siempre positiva y derivada segunda siempre negativa respecto a  $i$  hasta alcanzar  $x_i/x_{max} = 1$  en  $i = n$ , de modo que los puntos a evaluar se acumulen en torno a  $x_{max}$ , recorriendo todo el intervalo.

Otra distribución posible es

$$x_i = x_{max} \sin^{1/m} \left( \frac{\pi i}{2n} \right), \quad (33)$$

$$dx_i = x_i - x_{i-1},$$

siendo  $m$  algún número real, preferiblemente mayor que 1.

Una vez seleccionados los puntos a evaluar y sus respectivos pesos, nos basamos en el método de Simpson para integrar el flujo

$$F = I_0 \frac{A^{3/2}(R)}{C(R)} \left[ \frac{I_n}{3} + \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{n/2} I_{2i-1} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} I_{2i} \right], \quad (34)$$

$$I_i = f_B[\delta(x_i)] h[\theta(x_i), \theta_c, \theta_0] x_i dx_i$$

siendo  $I_i$  el integrando de la Ec. (2.44) evaluado en  $x_i$ . Con este muestreo por importancia acumulamos puntos de evaluación donde mas sensible es la función a integrar respecto a variaciones, empleando la potencia computacional donde mas es requerida.

### Agujeros Negros: Límites de la región de fotones

Generalmente, los límites radiales inferior y superior de la región de fotones se obtienen al resolver el siguiente par de ecuaciones

$$\sin[\Phi(r_{p,min})] = +1, \quad \sin[\Phi(r_{p,max})] = -1. \quad (35)$$

Sin embargo, bajo ciertas condiciones como por ejemplo una densidad de plasma constante, el contorno de la sombra no encierra el origen de coordenadas, por lo que tanto  $r_{,min}$  como  $r_{,max}$  son soluciones de la ecuación  $\sin[\Phi(r_p)] = +1$  o  $\sin[\Phi(r_p)] = -1$ . Cuando esto sucede, las raíces de estas expresiones deben analizarse concienzudamente a fin de determinar los parámetros  $r_{,min}$  y  $r_{,max}$ .

Para esto recomendamos emplear el método de la bisección o el método de la secante, según se tenga una estimación del valor de la raíz o del intervalo al que pertenece. Nosotros empleamos el método de la bisección, buscando ambas raíces en el intervalo  $[1, 13]$  en todas las métricas menos en la de Kerr-Sen, donde recurrimos al intervalo  $[1 - Q, 13]$ , siendo  $Q$  el parámetro métrico característico. No sabemos por qué el límite radial de la región de fotones actúa de esta forma, pero el método funciona.

### Agujeros Negros: Distribución de los radios a evaluar

Recomendamos emplear algún método de Importance Sampling para distribuir los valores de  $r_p$  a evaluar entre  $r_{,min}$  y  $r_{,max}$ , ya que al aproximarnos a estos límites la posición angular de la sombra se vuelve sumamente sensible, siendo estos puntos los más relevantes al realizar el gráfico.

A continuación presentamos un modelo simple de muestreo por importancia que permite acumular los valores de  $r_p$  cerca de dichos límites. Si deseamos construir un gráfico con un total de  $n$  puntos, los valores de  $r_p$  a evaluar pueden tomarse de la siguiente forma

$$r_{p,i} = r_{p,min} + 0,5 \left[ 1 - \cos^{1/m} \left( \pi \frac{i}{n} \right) \right] [r_{p,max} - r_{p,min}], \quad (36)$$

donde  $i$  es un número entero entre 0 y  $n$  y  $m$  un número entero impar, preferiblemente mayor a 1.

### Agujeros Negros: Plasma constante y extensión de la sombra

Siguiendo con el ejemplo del plasma constante, algo particular sucede cuando la densidad del plasma  $\omega_c$  es mayor a uno. La ecuación

$$\begin{aligned} X(r_p) &= -2R \tan \left[ \frac{\Theta(r_p)}{2} \right] \sin [\Phi(r_p)], \\ Y(r_p) &= -2R \tan \left[ \frac{\Theta(r_p)}{2} \right] \cos [\Phi(r_p)], \end{aligned} \quad (37)$$

que hasta el momento no fallaba al darnos el contorno de la sombra, resulta ahora insuficiente. Esta expresión solo sirve para graficar la sombra dentro de un círculo de radio  $2R$ , pero si el tamaño de esta excede dicho círculo, debemos complementar el gráfico con la siguiente expresión

$$\begin{aligned} X(r_p) &= -2R \tan \left[ \frac{\pi - \Theta(r_p)}{2} \right] \sin [\Phi(r_p)], \\ Y(r_p) &= -2R \tan \left[ \frac{\pi - \Theta(r_p)}{2} \right] \cos [\Phi(r_p)], \end{aligned} \quad (38)$$

que describe el contorno de la sombra por fuera del círculo de radio  $2R$ . Encontrar los valores límites de  $r_p$  entre los cuales debe evaluarse cada expresión no es para nada trivial, siendo un problema que hemos dejado sin resolver. Generalmente, al evaluarlas fuera de sus rangos correspondientes, estas expresiones simplemente dan NaN (Not a Number), aunque en otros casos contribuyen graficando curvas que no pertenecen a la sombra.

### Agujeros Negros: Cálculo de $\alpha$

Como señalamos en 3.4, es preferible calcular  $\alpha$  empleando la Ec. (3.43),

$$\alpha = k_0^t p_t + k_0^r g_{rr} \dot{r} + k_0^\theta g_{\theta\theta} \dot{\theta} + k_0^\phi p_\phi, \quad (39)$$

y no la Ec. (3.42)

$$\alpha = k_0^t p_t + k_0^r p_r + k_0^\vartheta p_\vartheta + k_0^\varphi p_\varphi, \quad (40)$$

ya que esta última presenta cierta inestabilidad numérica proveniente del cálculo de los momentos  $p_r$  y  $p_\vartheta$ . Este comportamiento se ha encontrado empíricamente y se desconoce su origen.



# Bibliografía

- [Ein15] Albert Einstein. «The field equations of gravitation». En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1915 (1915), págs. 844-847.
- [Ein16] A Einstein. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Annalen der Physik49: 769–822». En: *The collected works of Albert Einstein* 6 (1916), págs. 283-339.
- [Rei16] Hans Reissner. «Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie». En: *Annalen der Physik* 355.9 (1916), págs. 106-120.
- [Sch16] Karl Schwarzschild. «On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory». En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )* 1916 (1916), págs. 189-196. arXiv: [physics/9905030](https://arxiv.org/abs/physics/9905030).
- [Nor18] Gunnar Nordström. «On the energy of the gravitation field in Einstein's theory». En: *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences* 20 (1918), págs. 1238-1245.
- [Edd19] Arthur Stanley Eddington. «The total eclipse of 1919 May 29 and the influence of gravitation on light». En: *The Observatory* 42 (1919), págs. 119-122.
- [Syn60] John Lighton Synge. *Relativity: The General Theory*. 1960.
- [Ker63] Roy P. Kerr. «Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics». En: *Phys. Rev. Lett.* 11 (5 sep. de 1963), págs. 237-238. DOI: [10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>.
- [New+65] Ezra T Newman y col. «Metric of a rotating, charged mass». En: *Journal of mathematical physics* 6.6 (1965), págs. 918-919.
- [MJ66] DO Muhleman e ID Johnston. «Radio propagation in the solar gravitational field». En: *Physical Review Letters* 17.8 (1966), págs. 455.
- [Syn66] J. L. Synge. «The Escape of Photons from Gravitationally Intense Stars». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 131.3 (1966), págs. 463-466. DOI: [10.1093/mnras/131.3.463](https://doi.org/10.1093/mnras/131.3.463).
- [GJ69] Peter Goldreich y William H. Julian. «Pulsar Electrodynamics». En: *apj* 157 (ago. de 1969), págs. 869. DOI: [10.1086/150119](https://doi.org/10.1086/150119).
- [MEF70] Duane O Muhleman, Ronald David Ekers y EB Fomalont. «Radio interferometric test of the general relativistic light bending near the sun». En: *Physical Review Letters* 24.24 (1970), págs. 1377.
- [Col71] Stirling A Colgate. «Neutron-star formation, thermonuclear supernovae, and heavy-element reimplosion». En: *The Astrophysical Journal* 163 (1971), págs. 221.
- [Bar73] James M Bardeen. «Timelike and null geodesics in the Kerr metric». En: *Black holes* 215 (1973).
- [BH75] J Bicak y P Hadrava. «General-relativistic radiative transfer theory in refractive and dispersive media». En: *Astronomy and Astrophysics* 44 (1975), págs. 389-399.
- [MT77] Richard N Manchester y Joseph H Taylor. «Pulsars». En: (1977).

- [BE80] RA Breuer y Jürgen Ehlers. «Propagation of high-frequency electromagnetic waves through a magnetized plasma in curved space-time. I». En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 370.1742 (1980), págs. 389-406.
- [PFC83] K.R. Pechenick, C. Ftaclas y J.M. Cohen. «Hot spots on neutron stars - The near-field gravitational lens». En: *apj* 274 (nov. de 1983), págs. 846-857. DOI: [10.1086/161498](https://doi.org/10.1086/161498).
- [ST83] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. 1983. ISBN: 978-0-471-87316-7.
- [BH86] DC Backer y RW Hellings. «Pulsar timing and general relativity». En: *Annual review of astronomy and astrophysics* 24.1 (1986), págs. 537-575.
- [WW86] S Eo Woosley y Thomas A Weaver. «The physics of supernova explosions». En: *Annual review of astronomy and astrophysics* 24.1 (1986), págs. 205-253.
- [GHS91] David Garfinkle, Gary T Horowitz y Andrew Strominger. «Charged black holes in string theory». En: *Physical Review D* 43.10 (1991), pág. 3140.
- [KL92] Russell Kulsrud y Abraham Loeb. «Dynamics and gravitational interaction of waves in nonuniform media». En: *Physical Review D* 45.2 (1992), pág. 525.
- [Sen92] Ashoke Sen. «Rotating charged black hole solution in heterotic string theory». En: *Physical Review Letters* 69.7 (ago. de 1992), págs. 1006-1009. ISSN: 0031-9007. DOI: [10.1103/physrevlett.69.1006](https://doi.org/10.1103/physrevlett.69.1006). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1006>.
- [DO95] Mariusz P. Dąbrowski y Janusz Osarczuk. «Light curves of relativistic charged neutron star». En: *apss* 229.1 (jul. de 1995), págs. 139-155. DOI: [10.1007/BF00658572](https://doi.org/10.1007/BF00658572).
- [Bil98] Lars Bildsten. «Thermonuclear burning on rapidly accreting neutron stars». En: *The Many Faces of Neutron Stars*. 515 (1998), pág. 419.
- [Mel99] Y. Mellier. *Cosmological Applications of Gravitational Lensing*. 1999. DOI: [10.48550/ARXIV.ASTRO-PH/9901116](https://doi.org/10.48550/ARXIV.ASTRO-PH/9901116). URL: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9901116>.
- [PC+99] S Perlmutter, SCP Collaboration y col. «Astrophys. J. 517 565 Riess AG et al 1998». En: *Astron. J* 116 (1999), pág. 1009.
- [FMA00] Heino Falcke, Fulvio Melia y Eric Agol. «Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center». En: *The Astrophysical Journal* 528.1 (ene. de 2000), págs. L13-L16. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/312423](https://doi.org/10.1086/312423). URL: <http://dx.doi.org/10.1086/312423>.
- [Bel02] Andrei M. Beloborodov. «Gravitational Bending of Light Near Compact Objects». En: *The Astrophysical Journal* 566.2 (feb. de 2002), págs. L85-L88. ISSN: 1538-4357. DOI: [10.1086/339511](https://doi.org/10.1086/339511). URL: <http://dx.doi.org/10.1086/339511>.
- [BB03] A. Broderick y R. Blandford. «Covariant magnetoionic theory – I. Ray propagation». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342.4 (jul. de 2003), págs. 1280-1290. ISSN: 1365-2966. DOI: [10.1046/j.1365-8711.2003.06618.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06618.x). URL: <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06618.x>.
- [Goo03] Marcel Goossens. *An introduction to plasma astrophysics and magnetohydrodynamics*. Vol. 294. Springer Science & Business Media, 2003.
- [BB04] Avery Broderick y Roger Blandford. «Covariant magnetoionic theory. 2. Radiative transfer». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 349 (2004), pág. 994. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.07582.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07582.x). arXiv: [astro-ph/0311360](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0311360).
- [AG05] Alikram N. Aliev y A. Emir Gumrukcuoglu. «Charged rotating black holes on a 3-brane». En: *Physical Review D* 71 (2005), pág. 104027.
- [LC06] Antony Lewis y Anthony Challinor. «Weak gravitational lensing of the CMB». En: *Physics Reports* 429.1 (2006), págs. 1-65.

- [PB06] Juri Poutanen y Andrei M Beloborodov. «Pulse profiles of millisecond pulsars and their Fourier amplitudes». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 373.2 (2006), págs. 836-844.
- [Boz10] Valerio Bozza. «Gravitational lensing by black holes». En: *General Relativity and Gravitation* 42.9 (2010), págs. 2269-2300.
- [Dem+10] Paul B Demorest y col. «A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay». En: *nature* 467.7319 (2010), págs. 1081-1083.
- [Kiz10] Bulent Kiziltan. *Reassessing the fundamentals: On the evolution, ages and masses of neutron stars*. University of California, Santa Cruz, 2010.
- [CDS12] Laurent Canetti, Marco Drewes y Mikhail Shaposhnikov. «Matter and Antimatter in the Universe». En: *New Journal of Physics* 14.9 (2012), pág. 095012.
- [Har13] Alice K Harding. «The neutron star zoo». En: *Frontiers of Physics* 8.6 (2013), págs. 679-692.
- [Hoe+13] Henk Hoekstra y col. «Masses of Galaxy Clusters from Gravitational Lensing». En: *Space Science Reviews* 177.1-4 (abr. de 2013), págs. 75-118. DOI: [10.1007/s11214-013-9978-5](https://doi.org/10.1007/s11214-013-9978-5). URL: <https://doi.org/10.1007/s11214-013-9978-5>.
- [TB13] Oleg Yu Tsupko y Gennady S Bisnovaty-Kogan. «Gravitational lensing in plasma: Relativistic images at homogeneous plasma». En: *Physical Review D* 87.12 (2013), pág. 124009.
- [TN13] R. Turolla y L. Nobili. «PULSE PROFILES FROM THERMALLY EMITTING NEUTRON STARS». En: *The Astrophysical Journal* 768.2 (abr. de 2013), pág. 147. ISSN: 1538-4357. DOI: [10.1088/0004-637x/768/2/147](http://dx.doi.org/10.1088/0004-637x/768/2/147). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637x/768/2/147>.
- [Gio+14] Carlo Giocoli y col. «Mass and concentration estimates from weak and strong gravitational lensing: a systematic study». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 440.2 (2014), págs. 1899-1915.
- [GPL14] Arne Grenzebach, Volker Perlick y Claus Lämmerzahl. «Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant». En: *Physical Review D* 89.12 (jun. de 2014). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/PhysRevD.89.124004](http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.124004). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.124004>.
- [PÖ14] Dimitrios Psaltis y Feryal Özel. «Pulse profiles from spinning neutron stars in the Hartle-Thorne approximation». En: *The Astrophysical Journal* 792.2 (2014), pág. 87.
- [PÖC14] Dimitrios Psaltis, Feryal Özel y Deepto Chakrabarty. «Prospects for measuring neutron-star masses and radii with X-ray pulse profile modeling». En: *The Astrophysical Journal* 787.2 (2014), pág. 136.
- [Ber+15] Emanuele Berti y col. «Testing general relativity with present and future astrophysical observations». En: *Classical and Quantum Gravity* 32.24 (dic. de 2015), pág. 243001. DOI: [10.1088/0264-9381/32/24/243001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/24/243001). URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/24/243001>.
- [BMB15] A Budianu, Arjan Meijerink y Marinus Jan Bentum. «Swarm-to-Earth communication in OLFAR». En: *Acta astronautica* 107 (2015), págs. 14-19.
- [Gla+15] Kostas Glampedakis y col. «Post-Tolman-Oppenheimer-Volkoff formalism for relativistic stars». En: *Physical Review D* 92.2 (2015), pág. 024056.
- [Gre15] Arne Grenzebach. «Aberrational Effects for Shadows of Black Holes». En: *Equations of Motion in Relativistic Gravity* (2015), págs. 823-832. ISSN: 2365-6425. DOI: [10.1007/978-3-319-18335-0\\_25](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-18335-0_25). URL: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-18335-0\\_25](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-18335-0_25).
- [Mof15] J. W. Moffat. «Black Holes in Modified Gravity (MOG)». En: *Eur. Phys. J. C* 75.4 (2015), pág. 175. DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3405-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3405-x). arXiv: [1412.5424](https://arxiv.org/abs/1412.5424) [gr-qc].

- [Rog15] Adam Rogers. «Frequency-dependent effects of gravitational lensing within plasma». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 451.1 (mayo de 2015), págs. 17-25. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/stv903](https://doi.org/10.1093/mnras/stv903). URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stv903>.
- [Abb+16] Benjamin P Abbott y col. «Observation of gravitational waves from a binary black hole merger». En: *Physical review letters* 116.6 (2016), pág. 061102.
- [Bog16] Slavko Bogdanov. «Prospects for neutron star equation of state constraints using “recycled” millisecond pulsars». En: *The European Physical Journal A* 52.2 (2016), págs. 1-7.
- [Bro+16] Avery E Broderick y col. «Modeling seven years of Event Horizon Telescope observations with radiatively inefficient accretion flow models». En: *The Astrophysical Journal* 820.2 (2016), pág. 137.
- [CC+16] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration y col. «First targeted search for gravitational-wave bursts from core-collapse supernovae in data of first-generation laser interferometer detectors». En: *Physical Review D* 94.10 (2016), pág. 102001.
- [DRD16] Rajat K. Dey, Sabyasachi Ray y Sandip Dam. «Searching for PeV neutrinos from photo-meson interactions in magnetars». En: *EPL* 115.6 (2016), pág. 69002. DOI: [10.1209/0295-5075/115/69002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/115/69002). arXiv: [1603.07833](https://arxiv.org/abs/1603.07833) [astro-ph.HE].
- [Gre16] Arne Grenzebach. *The Shadow of Black Holes, An Analytic Description*. Springer, 2016.
- [KZ16] Roman Konoplya y Alexander Zhidenko. «Detection of gravitational waves from black holes: Is there a window for alternative theories?». En: *Physics Letters B* 756 (mayo de 2016), págs. 350-353. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/j.physletb.2016.03.044](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.03.044). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2016.03.044>.
- [ÖF16] Feryal Özel y Paulo Freire. «Masses, radii, and the equation of state of neutron stars». En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 54 (2016), págs. 401-440.
- [Pét16] Jérôme Pétri. «Theory of pulsar magnetosphere and wind». En: *Journal of Plasma Physics* 82.5 (2016).
- [BBS17] Mark J Bentum, Luca Bonetti y Alessandro DAM Spallicci. «Dispersion by pulsars, magnetars, fast radio bursts and massive electromagnetism at very low radio frequencies». En: *Advances in space research* 59.2 (2017), págs. 736-747.
- [BT17] Gennady Bisnovatyi-Kogan y Oleg Tsupko. «Gravitational Lensing in Presence of Plasma: Strong Lens Systems, Black Hole Lensing and Shadow». En: *Universe* 3.3 (jul. de 2017), pág. 57. ISSN: 2218-1997. DOI: [10.3390/universe3030057](https://doi.org/10.3390/universe3030057). URL: <http://dx.doi.org/10.3390/universe3030057>.
- [GLP17] Samuel E Gralla, Alexandru Lupsasca y Alexander Philippov. «Inclined pulsar magnetospheres in general relativity: Polar caps for the dipole, quadrupole, and beyond». En: *The Astrophysical Journal* 851.2 (2017), pág. 137.
- [PT17] Volker Perlick y Oleg Yu. Tsupko. «Light propagation in a plasma on Kerr spacetime: Separation of the Hamilton-Jacobi equation and calculation of the shadow». En: *Physical Review D* 95.10 (mayo de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.104003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.104003). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.104003>.
- [Sot17] Hajime Sotani. «Pulse profiles from a pulsar in scalar-tensor gravity». En: *Physical Review D* 96.10 (2017), pág. 104010.
- [SM17] Hajime Sotani y Umpei Miyamoto. «Sensitivity of pulsar light curves to spacetime geometry and efficacy of analytic approximations». En: *Physical Review D* 96.10 (nov. de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.104018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.104018). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.104018>.

- [Ann+18] Eemeli Annala y col. «Gravitational-wave constraints on the neutron-star-matter Equation of State». En: *Physical review letters* 120.17 (2018), pág. 172703.
- [BH18] Gianfranco Bertone y Dan Hooper. «History of dark matter». En: *Reviews of Modern Physics* 90.4 (2018), pág. 045002.
- [Cav+18] Antonio Cava y col. «The nature of giant clumps in distant galaxies probed by the anatomy of the cosmic snake». En: *Nature Astronomy* 2.1 (2018), págs. 76-82.
- [Col+18a] Hitomi Collaboration y col. «Temperature structure in the Perseus cluster core observed with Hitomi». En: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 70.2 (2018), pág. 11.
- [Col+18b] Thomas E Collett y col. «A precise extragalactic test of General Relativity». En: *Science* 360.6395 (2018), págs. 1342-1346.
- [CK18] Arthur B Congdon y Charles R Keeton. «Principles of Gravitational Lensing». En: *Astronomy and Planetary Sciences, Springer International Publishing* 10 (2018), págs. 978-3.
- [CG18] Gabriel Crisnejo y Emanuel Gallo. «Weak lensing in a plasma medium and gravitational deflection of massive particles using the Gauss-Bonnet theorem. A unified treatment». En: *Physical Review D* 97.12 (jun. de 2018). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.97.124016](https://doi.org/10.1103/physrevd.97.124016). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.124016>.
- [ER18] Xinzhong Er y Adam Rogers. «Two families of astrophysical diverging lens models». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 475.1 (2018), págs. 867-878.
- [KSZ18] R. A. Konoplya, Z. Stuchlík y A. Zhidenko. «Axisymmetric black holes allowing for separation of variables in the Klein-Gordon and Hamilton-Jacobi equations». En: *Physical Review D* 97.8 (abr. de 2018). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.97.084044](https://doi.org/10.1103/physrevd.97.084044). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.084044>.
- [Mai+18] Robert Main y col. «Pulsar emission amplified and resolved by plasma lensing in an eclipsing binary». En: *Nature* 557.7706 (mayo de 2018), págs. 522-525. ISSN: 1476-4687. DOI: [10.1038/s41586-018-0133-z](https://doi.org/10.1038/s41586-018-0133-z). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41586-018-0133-z>.
- [SV18] Sebastian Schuster y Matt Visser. «Boyer-Lindquist space-times and beyond: Meta-material analogues». En: *arXiv preprint arXiv:1802.09807* (2018).
- [SM18] Hajime Sotani y Umpei Miyamoto. «Pulse profiles of highly compact pulsars in general relativity». En: *Physical Review D* 98.4 (ago. de 2018). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.98.044017](https://doi.org/10.1103/physrevd.98.044017). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.98.044017>.
- [CC19] Che-Yu Chen y Pisin Chen. «Separability of the Klein-Gordon equation for rotating spacetimes obtained from Newman-Janis algorithm». En: *Physical Review D* 100.10 (nov. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.100.104054](https://doi.org/10.1103/physrevd.100.104054). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.104054>.
- [Col+19] Event Horizon Telescope Collaboration y col. «First M87 event horizon telescope results. II. Array and instrumentation». En: *arXiv preprint arXiv:1906.11239* (2019).
- [CGR19] Gabriel Crisnejo, Emanuel Gallo y Adam Rogers. «Finite distance corrections to the light deflection in a gravitational field with a plasma medium». En: *Physical Review D* 99.12 (jun. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.99.124001](https://doi.org/10.1103/physrevd.99.124001). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.124001>.
- [CGV19] Gabriel Crisnejo, Emanuel Gallo y José R. Villanueva. «Gravitational lensing in dispersive media and deflection angle of charged massive particles in terms of curvature scalars and energy-momentum tensor». En: *Physical Review D* 100.4 (ago. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.100.044006](https://doi.org/10.1103/physrevd.100.044006). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.044006>.

- [Loc+19] Will Lockhart y col. «X-ray light curves from realistic polar cap models: inclined pulsar magnetospheres and multipole fields». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 490.2 (2019), págs. 1774-1783.
- [Sha19] Rajibul Shaikh. «Black hole shadow in a general rotating spacetime obtained through Newman-Janis algorithm». En: *Physical Review D* 100.2 (jul. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.024028](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024028). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.024028>.
- [SY19] Hector O. Silva y Nicolás Yunes. «Neutron star pulse profiles in scalar-tensor theories of gravity». En: *Physical Review D* 99.4 (feb. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.99.044034](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.044034). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.044034>.
- [SSP19] Hajime Sotani, Hector O. Silva y George Pappas. «Finite size effects on the light curves of slowly-rotating neutron stars». En: *Physical Review D* 100.4 (ago. de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.043006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.043006). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.100.043006>.
- [TB19] Oleg Yu Tsupko y Gennady S Bisnovatyi-Kogan. «Hills and holes in the microlensing light curve due to plasma environment around gravitational lens». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 491.4 (dic. de 2019), págs. 5636-5649. ISSN: 1365-2966. DOI: [10.1093/mnras/stz3365](https://doi.org/10.1093/mnras/stz3365). URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stz3365>.
- [Tur+19] Bobur Turimov y col. «Gravitational lensing by a magnetized compact object in the presence of plasma». En: *International Journal of Modern Physics D* 28.16 (2019), pág. 2040013.
- [Gra20] Samuel E. Gralla. «Measuring the shape of a black hole photon ring». En: *Phys. Rev. D* 102.4 (2020), pág. 044017. DOI: [10.1103/PhysRevD.102.044017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.044017). arXiv: [2005.03856](https://arxiv.org/abs/2005.03856) [astro-ph.HE].
- [GSH20] Jenny E Greene, Jay Strader y Luis C Ho. «Intermediate-mass black holes». En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 58 (2020), págs. 257-312.
- [Joh+20] Michael D. Johnson y col. «Universal interferometric signatures of a black hole's photon ring». En: *Science Advances* 6.12 (mar. de 2020). ISSN: 2375-2548. DOI: [10.1126/sciadv.aaz1310](https://doi.org/10.1126/sciadv.aaz1310). URL: <http://dx.doi.org/10.1126/sciadv.aaz1310>.
- [Pét20] Jérôme Pétri. «Electrodynamics and radiation from rotating neutron star magnetospheres». En: *Universe* 6.1 (2020), pág. 15.
- [Sot20] Hajime Sotani. «Light curves from highly compact neutron stars with spot size effect». En: *Physical Review D* 101.6 (mar. de 2020). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/PhysRevD.101.063013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.063013). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.063013>.
- [BF21] Thomas Bronzwaer y Heino Falcke. «The Nature of Black Hole Shadows». En: *The Astrophysical Journal* 920.2 (oct. de 2021), pág. 155. DOI: [10.3847/1538-4357/ac1738](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac1738).
- [CJL21] Andrew Chael, Michael D. Johnson y Alexandru Lupasasca. «Observing the Inner Shadow of a Black Hole: A Direct View of the Event Horizon». En: *Astrophys. J.* 918.1 (2021), pág. 6. DOI: [10.3847/1538-4357/ac09ee](https://doi.org/10.3847/1538-4357/ac09ee). arXiv: [2106.00683](https://arxiv.org/abs/2106.00683) [astro-ph.HE].
- [Dey+21] Rajat K. Dey y col. «Newly Born Extragalactic Millisecond Pulsars as Efficient Emitters of PeV Neutrinos». En: *Braz. J. Phys.* 51.5 (2021), págs. 1406-1415. DOI: [10.1007/s13538-021-00958-9](https://doi.org/10.1007/s13538-021-00958-9). arXiv: [2111.04656](https://arxiv.org/abs/2111.04656) [astro-ph.HE].
- [Lat21] JM Lattimer. «Neutron Stars and the Nuclear Matter Equation of State». En: *Annual Review of Nuclear and Particle Science* 71 (2021), págs. 433-464.
- [Men21] Massimo Meneghetti. *Introduction to Gravitational Lensing: With Python Examples*. Vol. 956. Springer Nature, 2021.
- [PT21] Volker Perlick y Oleg Yu. Tsupko. *Calculating black hole shadows: review of analytical studies*. 2021. arXiv: [2105.07101](https://arxiv.org/abs/2105.07101) [gr-qc].