

Universidad Nacional de Córdoba  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

April 7, 2015

Trabajo Especial de la Licenciatura en Física

# Simulación Numérica de Superradiancia en Agujeros Negros Rotantes

Autor: Julián María Fernández Tío

Director: Oscar Reula



Simulación Numérica de Superradiancia en Agujeros Negros Rotantes por Julián M. Fernández Tío, Oscar Reula se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina](https://creativecommons.org/licenses/by/2.5/argentina/).

# Agradecimientos

A mi familia, por el apoyo y por ayudarme a venir a estudiar a FaMAF.

A mis amigos y a mis compañeros de facultad, sin los cuales la carrera habría sido mucho más difícil.

A Charly, por sacarme de apuro con el cluster en repetidas ocasiones.

Y a Leco, mi director, por la excelente disposición y la ayuda en los momentos de crisis.

## Abstract

Debido al fenómeno de superradiancia, se podría extraer energía a un agujero negro rotante (ANR) mediante una onda que incide con ciertas condiciones iniciales. Se busca mediante simulación numérica observar este proceso.

## 1 Introducción

El primer antecedente teórico de un fenómeno de extracción de energía-momento a un ANR es propuesto por Penrose [1], mostrando que un proceso de scattering en la ergoesfera puede generar partículas de alta energía, escapando de la ergoregión a grandes distancias del ANR [2]. Luego, Teukolsky y Press [3] estudiaron un proceso similar, llamado superradiancia, para su análogo gravitacional y electromagnético.

La motivación para estudiar este tipo de fenómenos es tratar de entender la formación de jets astrofísicos (flujos de materia a gran energía y altamente colimados) emergentes de ANR supermasivos. Si bien hasta hace poco el convencimiento general era que éstos se debían a un fenómeno magnetohidrodinámico, consecuencia de las corrientes magnéticas que se producen en el disco de acreción (Blandford y Znajek, 1976), análisis recientes de geodésicas de partículas en un background de Kerr dieron indicios de que los efectos puramente gravitacionales (en particular por la generación de pares del proceso de Penrose) podrían estar jugando un rol más importante del que se creía. En estudios numéricos como [4] se observa a través del método Monte Carlo, que un gran número de partículas emergentes de un ANR mediante el proceso de Penrose tendrían un alto grado de colimación. Este tipo de resultados concuerda con mediciones en las cuales se encuentra que un gran porcentaje de las partículas del jet tienen velocidades ultra-relativistas [5], lo cuál es más acorde al modelo de un efecto puramente geométrico. Además, la observación de partículas de carga neutra obligan a hacer una reconsideración respecto de los efectos magnéticos del modelo magnetohidrodinámico.

En particular, en este trabajo se estudió el comportamiento de un campo escalar (Klein Gordon). Un antecedente importante del estudio de este tipo de campos en ANR se pueden ver en [6]; aquí, el fenómeno de superradiancia es observado. Sin embargo, recientemente [7] se repitió el estudio con otro método numérico (puramente espectral) y, a diferencia de en [6], con un dato inicial de soporte compacto (igual a cero dentro de la ergoregión), y la onda incidente, en lugar de extraer energía, se refleja completamente en el borde de la ergoregión. El objetivo de este trabajo es ofrecer un análisis que ayude a entender la diferencia entre estas dos publicaciones.

Las secciones están ordenadas como sigue. En Sección 2 presentamos el problema y en Sección 3 las distintas coordenadas usadas en el código. En Sección 4 analizamos cómo será el Flujo que estudiaremos, Sección 5 explica el dato inicial utilizado y en Sección 6 la ecuación de onda que obedece. Sección 7 tiene una descripción de cómo leer las imágenes incluidas, Sección 8 los resultados obtenidos, en Sección 9 se analiza la convergencia y por último en Sección 10 las conclusiones.

## 2 Presentación del problema

Queremos analizar numéricamente el fenómeno de superradiancia. La superradiancia se produce cuando, bajo ciertas condiciones iniciales, una onda que se dirige hacia a un ANR regresa luego con más energía de la que tenía en un principio. Esa ganancia de energía de la onda es a costa de extraerle energía de rotación al ANR cuando interacciona con la ergoregión.

Para hacer el estudio numérico, necesitaremos entonces representar una región del espacio-tiempo. Primero foliamos el espacio-tiempo con superficies de Cauchy, parametrizadas con un tiempo  $t$ , y de cada superficie consideramos una sección que abarque toda la ergoregión y una porción del espacio-tiempo circundante. Esta región se muestra en Figura 1.

En ella se representa dos superficies de Cauchy espaciales  $\Sigma_o$  y  $\Sigma_t$ , es decir el espacio a tiempo  $t = 0$  y a un tiempo  $t$  posterior, y en cada una de esas superficies tomamos dos esferas: una

interior de radio  $c_{in}$ , que esté dentro del horizonte de eventos exterior (por lo tanto también dentro de la ergoregión) y por fuera del horizonte de eventos interior; y otra de radio  $c_{out}$ , por fuera de la ergoregión.

La sucesión de esferas en cada superficie entre  $\Sigma_o$  y  $\Sigma_t$  nos dará los dos cilindros mostrados en la figura. Nuestra región total de interés es la que se abarca desde el cilindro interior hasta el exterior. Será dentro de este intervalo que pondremos el dato inicial.

El dato, que inicialmente está lejos de  $c_{in}$ , irá cayendo hacia el ANR, llegará a la ergoregión, y luego, lo que no cayó dentro del ANR saldrá de la ergoregión dirigiéndose ahora en sentido contrario hacia  $c_{out}$ . Nuestra forma de analizar si se está produciendo el fenómeno de superradiancia es mediante el flujo. Supongamos que el dato inicial es no nulo en el intervalo  $[c_i, c_f]$  (con  $c_{in} < c_i < c_f < c_{out}$ ), lo que haremos entonces será tomar un radio  $c_{Flujo}$  entre el dato inicial y el radio interior ( $c_{in} < c_{Flujo} < c_i$ ) y calcular el flujo que pasa por esa esfera. Si esperamos un tiempo suficiente, todo el dato pasará por esa región, llegará al ANR, y volverá a pasar al regresar.

Pueden entonces darse tres situaciones: que el flujo total será cero (como por ejemplo en Minkowski, donde como no hay agujero negro, toda la onda regresa de la misma forma); que el flujo sea mayor que cero porque se perdió parte del dato en el ANR (como se dará en general para Kerr); o bien que sea negativo. Este último sería el caso superradiante ya que significaría que pasó por  $c_{Flujo}$  más energía al regresar.

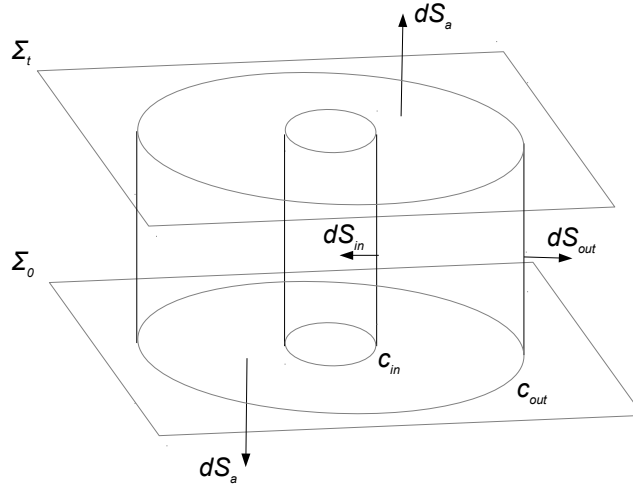


Figura 1: Región a estudiar

### 3 Coordenadas

Como las evoluciones numéricas necesitan una representación plana, cada esfera se cubre con seis parches (ver Figura 2), y se realiza luego un cambio de coordenadas, para cada parche, de  $(t, x, y, z)$  a  $(t, a, b, c)$ . Los cambios de coordenadas se encuentran en [8].

$a$  y  $b$  son las coordenadas que parametrizan cada parche para un radio fijo. Es decir, representarán las variables angulares. Mientras que  $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  es el radio cartesiano, y es esa la coordenada en la que se representan las esferas comentadas en Sección 2.

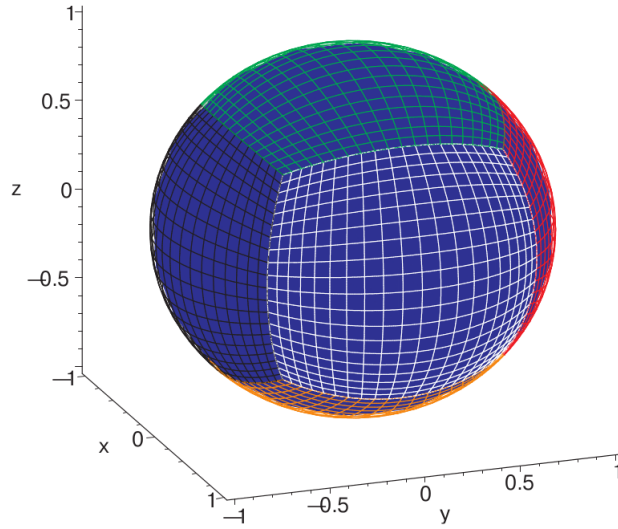


Figura 2: Parches

Debido a que en esta transformación trabajamos entonces con radios cartesianos, para poder introducir la esfera  $c_{in}$  dentro del horizonte de eventos  $r_+$ , será fundamental ver la forma que tienen los horizontes del ANR, pensados como elipsoides en coordenadas cartesianas (ver Figura 3). Pero además, surge otra complicación: es necesario que las velocidades de propagación en  $c_{in}$  se dirijan ambas hacia la singularidad (es decir, que las velocidades nulas que forman los conos sean entrantes), sin embargo en el horizonte de eventos  $r_-$  el cono vuelve a apuntar hacia afuera porque una de las velocidades de propagación cambia nuevamente de signo. Por lo tanto  $c_{in}$  tiene que estar contenida entre  $r_+$  y  $r_-$  (como en la representación derecha en Figura 3).

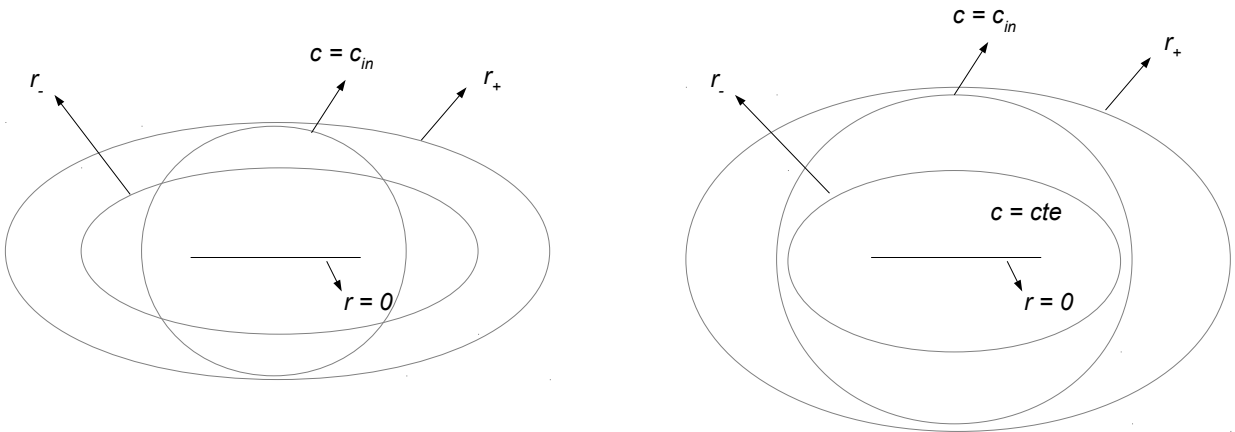


Figura 3: Horizontes

El problema es que esto no siempre se puede. Si la velocidad angular es muy grande, los elipsoides se aplanan de tal forma que se vuelve imposible colocar una esfera entre ellos (como en la representación de la izquierda en Figura 3). Fue necesario entonces encontrar un momento angular tal de que una esfera cartesiana pueda estar contenida entre los elipsoides.

Teniendo en cuenta que el fenómeno de superradiancia se observa mejor para velocidades angulares grandes, se buscó el máximo valor posible, que fue  $a = \frac{J}{m} = 0.96$ .

Para asegurarnos de que esta esfera  $c_{in}$  esté contenida entre los horizontes se controló numéricamente el signo de la velocidad de propagación de la onda en ese radio, buscando que ambas direcciones de propagación tengan el mismo signo.

Respecto a la representación de la métrica de Kerr, el código utiliza las coordenadas Kerr-Schild:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[ \frac{r(x dx + y dy) - a(x dy - y dx)}{r^2 + a^2} + \frac{z dz}{r} + dt \right]^2$$

Es decir es de la forma:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + 2Hl_a l_b$$

Con  $H = \frac{mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \Theta}$  y  $l_a$  nulo respecto a  $\eta_{ab}$  y  $g_{ab}$ .

Esta métrica luego se reescribe en términos de una función *lapse* y un vector *shift* [2]. Para esto foliamos con superficies de Cauchy espaciales,  $\Sigma_t$ , parametrizadas por una función global de tiempo  $t$ . Si  $n^a$  es un vector unitario normal a  $\Sigma_t$  (i.e. temporal), entonces podemos obtener la métrica de la superficie espacial:

$$h_{ab} = n_a n_b + g_{ab}$$

Y vemos que  $h_{ab}n^a = 0$ , es decir que  $h_{ab}$  es la métrica espacial inducida en la superficie  $\Sigma_t$ .

Ahora (con  $t^a$  tal que  $t^a \nabla_a t = 1$ ) descomponemos  $t^a$  en la dirección de  $n^a$  y en  $\Sigma_t$  respectivamente (i.e.  $t^a = \alpha n^a + \beta^a$ ):

$$\alpha = -t^a n_a$$

$$\beta_a = h_{ab} t^b$$

Las componentes de la métrica y la relación entre ambas coordenadas se encuentran en Apéndice A.

## 4 Flujo

Veamos ahora una forma de calcular el flujo que nos servirá para determinar superradiancia.

La corriente  $j^a$  viene dada por:

$$j^\mu = -T^\mu_\nu k^\nu$$

Con  $T^\mu_\nu$  el correspondiente al de un campo escalar:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial\Phi)^2$$

y  $k = \partial/\partial t$ . Entonces:

$$j^\mu = \partial^\mu \Phi \partial_t \Phi - \frac{1}{2} k^\mu (\partial\Phi)^2 \quad (1)$$

Además, como la métrica no depende explícitamente del tiempo,  $k$  es Killing, y entonces esta corriente es conservada  $\nabla_a j^a = 0$ . Si integramos en la región de interés presentada en Figura 1, podemos luego aplicar Stokes en el volumen estudiado y obtener:

$$0 = \int_S \nabla_a j^a \sqrt{-g} d^4x = \int_{\partial S} j^a dS_a$$

$$0 = \int_{borde_{out}} j^a d\hat{S}_a - \int_{borde_{in}} j^a d\hat{S}_a + \int_{\Sigma_t} j^a dS_a - \int_{\Sigma_o} j^a dS_a$$

Los últimos dos términos representan la energía total entre las esferas (las tapas del cilindro hueco). El término integrado en  $\Sigma_o$  corresponde a la energía inicial, mientras que el que se integra sobre  $\Sigma_t$  es la energía a tiempo  $t$  (energía final).

Analicemos uno de los dos primeros términos, que corresponden al flujo integrando en el tiempo por una esfera. Debemos integrar, primero sobre la superficie de una esfera, y luego esa esfera a lo largo del tiempo.

$$F = \int_{borde} j^a d\hat{S}_a = \int_{t_i}^{t_f} \int_{esfera} j^a \frac{(dc)_a}{|dc|} dV$$

El elemento de volumen para ese caso será:

$$dV = \det(-M) da db dt$$

Con  $M$  el tensor métrico inducido para un  $r$  constante. El menos viene de que la inducida sobre una superficie  $c = cte$  tiene signatura  $(-, +, +)$ .

Si contraemos  $(dc)_\mu$  con la corriente de (1), obtenemos:

$$j^\mu \frac{(dc)_\mu}{|dc|} = \partial_t \Phi (g^{cj} \partial_j \Phi - g^{tc} \partial_t \Phi) \frac{1}{\sqrt{g^{cc}}}$$

Es decir, estamos integrando el vector de Poynting. Por ejemplo vemos que para Minkowski ( $g^{tc} = 0$  y  $g^{cc} = 1$ ) nos queda  $\partial_t \Phi \partial_c \Phi$ .

Y para los términos de energía tenemos:

$$E = \int_{\Sigma} j^a dS_a = \int_{tapa} j^a \frac{(dt)_a}{|dt|} dV$$

$$j^\mu \frac{(dt)_\mu}{|dt|} = \frac{1}{2} (g^{tt} \partial_t \Phi \partial_t \Phi - g^{ij} \partial_i \Phi \partial_j \Phi) \frac{1}{\sqrt{-g^{tt}}}$$

## 5 Dato inicial

Vemos por ejemplo en [9] que para observar superradiancia, el campo escalar debe ser de la forma:

$$\Phi = \Phi_0 \cos(\omega t - m\phi)$$

Donde  $m$  es el número cuántico que corresponde al momento angular (el  $m$  de los  $Y_{lm}$ ) y  $\omega$  es la frecuencia que deberá estar en el intervalo superradiante.

Dado que la potencia promedio perdida en el horizonte viene dada por:

$$P = \frac{1}{2} \Phi_0^2 A \omega (\omega - m\Omega_H) \quad (2)$$

Con  $\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$ , esta potencia será negativa (es decir se transforma en potencia ganada) cuando  $0 \leq \omega \leq m\Omega_H$ . Es ese entonces el intervalo superradiante.

En nuestro caso usaremos como dato inicial un campo de la forma:

$$\Phi = f(r) \sin^2 \theta \frac{\cos(\omega(r - r_m) - m\phi)}{r}$$

Donde aquí también  $r$  es el radio cartesiano, es decir  $c$  en  $(t, a, b, c)$ , y  $r_m = \frac{r_i + r_f}{2}$  es el centro del dato, cuyo soporte viene dado por la función  $f$ :

$$f(r) = \frac{1}{N}(r - r_i)^n(r - r_f)^n$$

para  $r \in [r_i, r_f]$  y  $f(r) = 0$  para radios fuera de ese intervalo.  $N = (r_m - r_i)^n(r_m - r_f)^n$  es una normalización para que  $f(r_m) = 1$ .

Al ser polinomial, esta función le da forma de pulso y se hace cero en en sus extremos, de tal forma que además el dato inicial sea suave.

Para que esta onda se propague hacia el horizonte de eventos debemos fijar su derivada temporal. Esto lo haremos derivando como si tuviéramos geometría plana, ya que lo único que se busca es una condición inicial para la velocidad que dirija la mayor parte de la onda hacia el ANR<sup>1</sup>. Con un  $r_i$  lo suficientemente grande podemos ver que efectivamente la onda se dirige hacia el ANR. La condición para que esto ocurra en geometría plana es:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = n \left( \frac{f(r)}{(r - r_i)} + \frac{f(r)}{(r - r_f)} \right) \sin^2 \theta \frac{\cos(\omega(r - r_m) - m\phi)}{r} - \omega f(r) \sin^2 \theta \frac{\sin(\omega(r - r_m) - m\phi)}{r}$$

En la siguiente sección veremos la evolución del dato inicial considerando la geometría Kerr.

Deberemos cambiar los parámetros libres  $(n, r_i, r_f, \omega, m)$  para maximizar la proporción de la onda que regresa del ANR. Para esto se partió de los datos iniciales usados en [7], y a partir de ahí se hicieron pruebas haciendo pequeñas variaciones a los parámetros y controlando la integral del flujo era mayor o menor.

Se observa que es menor la proporción de la onda que cae en el ANR para ondas de dominio no nulo grande, pero además se notó que la distancia entre el final de la ergoesfera y el comienzo del pulso debe ser grande, por lo tanto se tomó  $r_i = 41$  y  $r_f = 79$ .

La potencia óptima que se encontró es  $n = 2$  y el armónico esférico  $l = 2$ , siendo  $m = 2, -2$  los valores correspondientes para una onda que rota co-rotante con el ANR y contra-rotante respectivamente.

Finalmente  $\omega$  nos dirá, para un  $\phi$  fijo, cuántos ciclos entran en el pulso. Dado que la potencia extraída viene dada por (2), esta será máxima cuando  $\omega = \Omega_H$  (lo cual se puede ver derivando (2) con respecto a  $\omega$  e igualando a cero).

Los parámetros  $n, r_i, r_f$  y  $\omega$  fueron los que más necesitaron ser testeados, pues no sólo se relacionan entre sí (por ejemplo al cambiar el intervalo  $[r_i, r_f]$ , cambia  $r_m$  y por lo tanto la cantidad de ciclos que nos dará  $\omega$ ), sino también porque intervienen en la precisión con que se representa el dato. Esto ocurre por un lado por el largo del dominio, debido a la cantidad de puntos utilizados para representar la onda, como la potencia del polinomio, ya que si esta es chica, el empalme entre  $f(r) \neq 0$  y  $f(r) = 0$  es menos suave, pero si es muy grande, se notó que la convergencia empeora (ya que la precisión de los operadores derivadas dependen de la potencia). Estas dependencias con la precisión llevaron a que en muchos casos ciertos resultados que parecían buenos con una cantidad de puntos, se volvieron peores que otros al aumentar los puntos, y entonces era necesario hacer simulaciones con muchos puntos para determinar cuál era el adecuado.

## 6 Ecuación de Onda

El código fue previamente construido para evolucionar las ecuaciones de Maxwell en la geometría de Kerr, por lo tanto es necesario reescribir la ecuación de onda de un campo escalar en término de las variables disponibles en el código. Se puede ver (Apéndice A) que la ecuación de onda:

$$\square \Phi = \nabla_a \nabla^a \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\nu\gamma} \partial_\gamma \Phi) = 0$$

<sup>1</sup>Debe tenerse en cuenta que el dato inicial se encuentra lejos del horizonte ( $r_i \gg r_+$ ), por lo tanto esta es una buena aproximación. Se controló numéricamente que el flujo en la dirección opuesta (es decir para un  $r \geq r_f$ ) sea de varios órdenes de magnitud menos.



Se verifica si evolucionamos:

$$\partial_t \Phi = \beta^i \partial_i \Phi - \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_i (\sqrt{h} B^i) \quad (3)$$

Con  $B^i$  que evoluciona como:

$$\partial_t B^i = -\frac{1}{\alpha} \beta^i (\partial_t \Phi) - \alpha g^{ij} \partial_j \Phi$$

Por lo tanto dando  $\partial_t \Phi$  como en Sección 4 y obteniendo  $B^i$  a partir de  $\Phi$ , tenemos la evolución de la ecuación de onda.

## 7 Sobre las imágenes

Antes de pasar a los resultados, veamos cómo interpretar las imágenes. Como dijimos, cada esfera de radio cartesiano constante se representa por medio de seis parches, por lo tanto la representación de un armónico esférico  $l = 2$  cuando ponemos la esfera desarmada en un plano, se verá como en Figura 4.

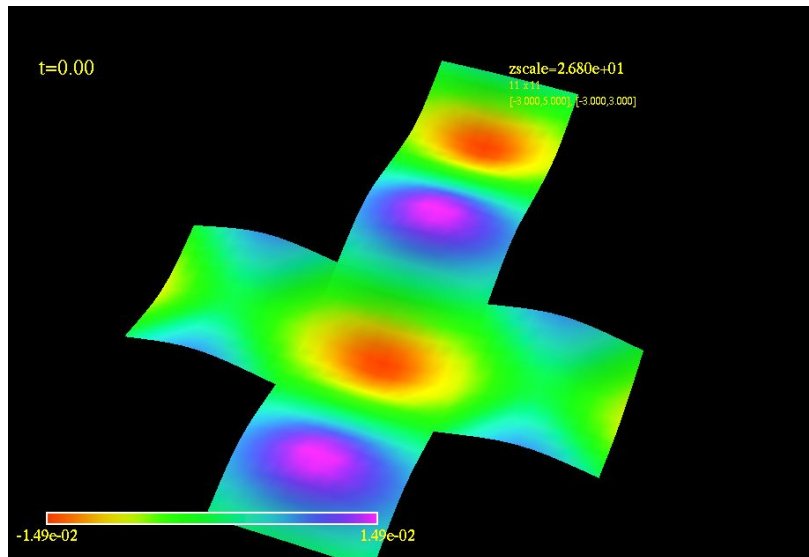


Figura 4: Corte a radio constante

Luego, si agregamos ahora la dimensión radial, el resultado será lo que se observa en Figura 5.

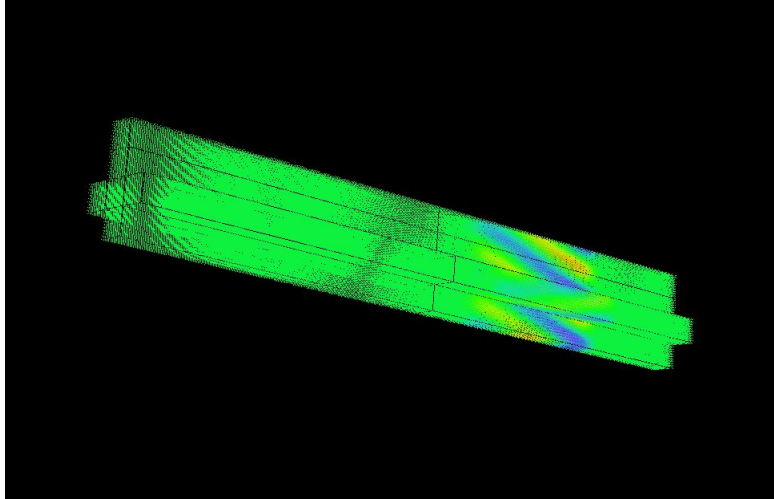


Figura 5: Representación completa

Sin embargo, en esta última representación no podemos apreciar el valor del dato en cada punto porque necesitamos una dimensión extra, por lo tanto la forma más práctica será haciendo cortes transversales. Por ejemplo, un posible corte, sería tomando de cada esfera solamente su ecuador. En figura Figura 6 a se muestra cómo se realizó el corte y 6 b su representación en el código.

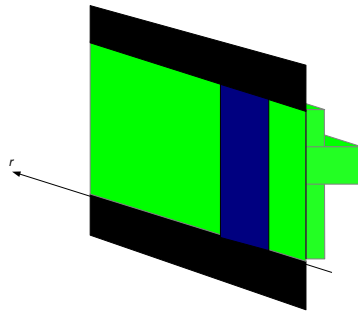


Figura 6 a: Corte transversal

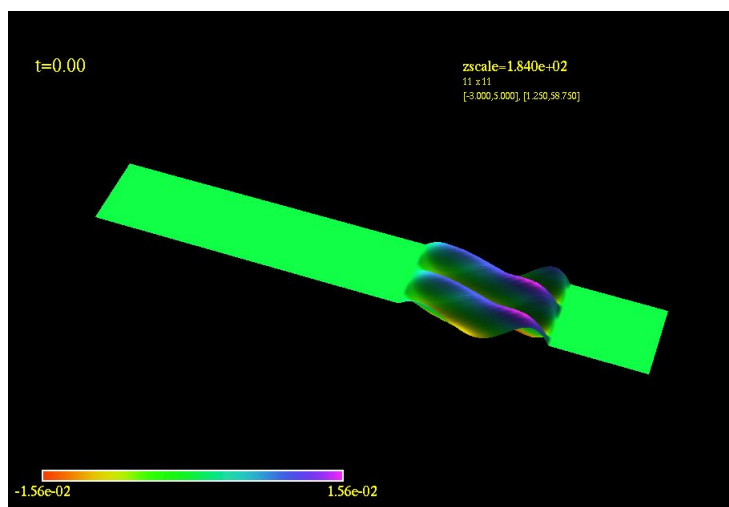


Figura 6 b: Corte transversal

## 8 Resultados

Lo primero que deberemos estudiar es Minkowski pues es el caso más sencillo y nos permite tener una prueba del cálculo del flujo, observando si el flujo total por un radio fijo es cero.

Dada la singularidad de coordenadas en el origen, lo que se hizo fue simular “un espejo” en un radio determinado. Esto significa poner una condición de contorno que corresponda a la solución saliente de la ecuación de onda.

$$\dot{\Phi}_{espejo} = -\dot{\Phi}_{incidente}$$

$$(\partial_r \Phi)_{espejo} = (\partial_r \Phi)_{incidente}$$

Y con esa condición controlamos que la energía se mantenga constante y que el flujo total integrado sea cero. En Figura 7 se puede ver la evolución de la onda y cómo regresa. A la derecha se encuentran los radios más chicos (con límite en  $c_{in}$ ) y a la izquierda los radios grandes (terminando en  $c_{out}$ ). Vemos que la onda se dirige hacia  $r = 0$ , se refleja en un radio  $r = 1.250$  y regresa conservando la forma.

Luego en Figura 8 podemos ver que la energía se mantiene constante, con una pequeña perturbación del orden de una parte en diez mil al momento se reflejarse. En Figura 9 vemos que el flujo integrado en  $r = 3$  llega a un máximo cuando la toda la onda pasó, y luego vuelve a cero cuando regresa. Además, en Figura 10 se muestra en detalle el momento en el que la onda termina de regresar, ahí se puede ver que vuelve a cero con un error menor a una parte en diez mil.

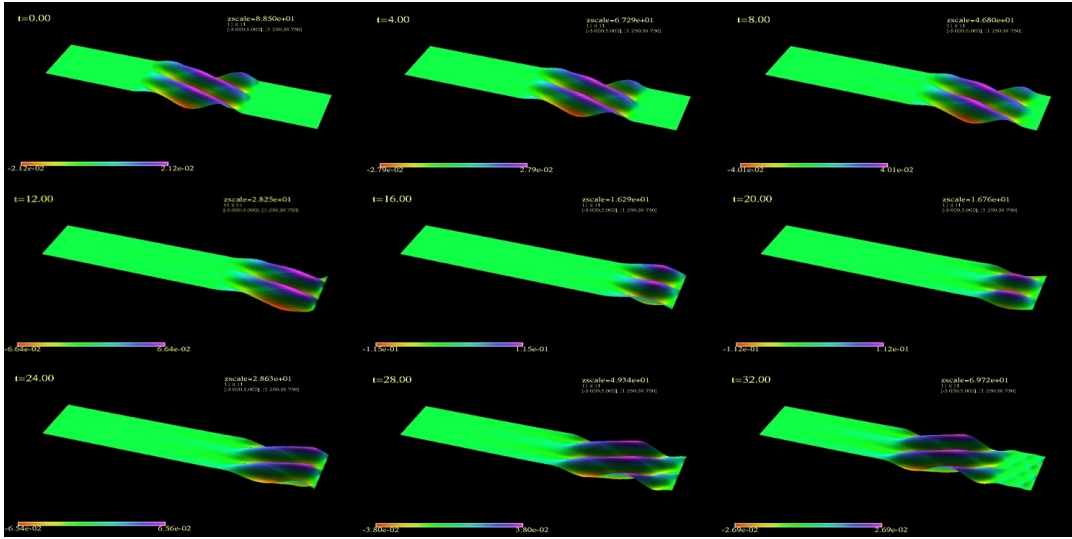


Figura 7: Evolución

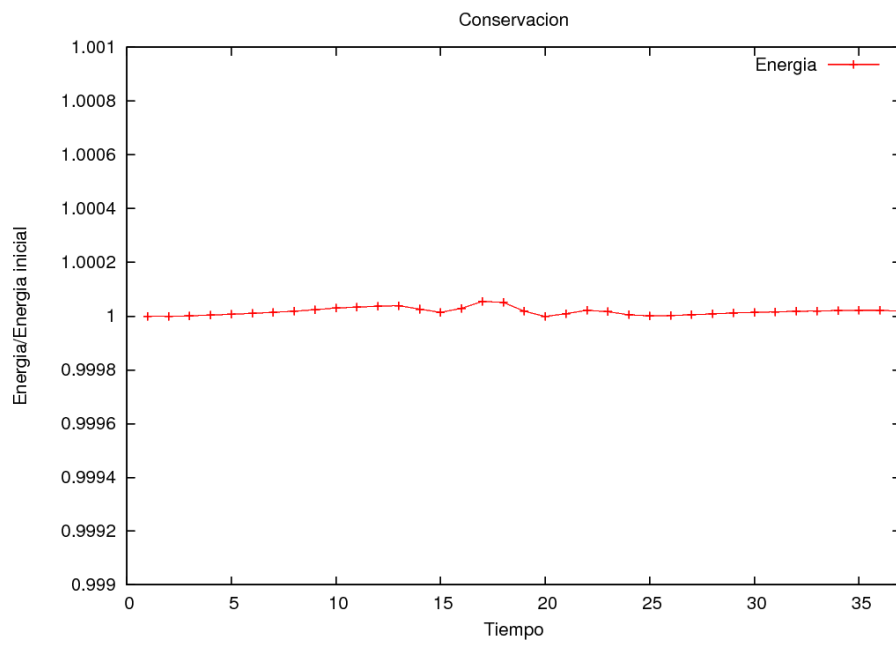


Figura 8: Energía

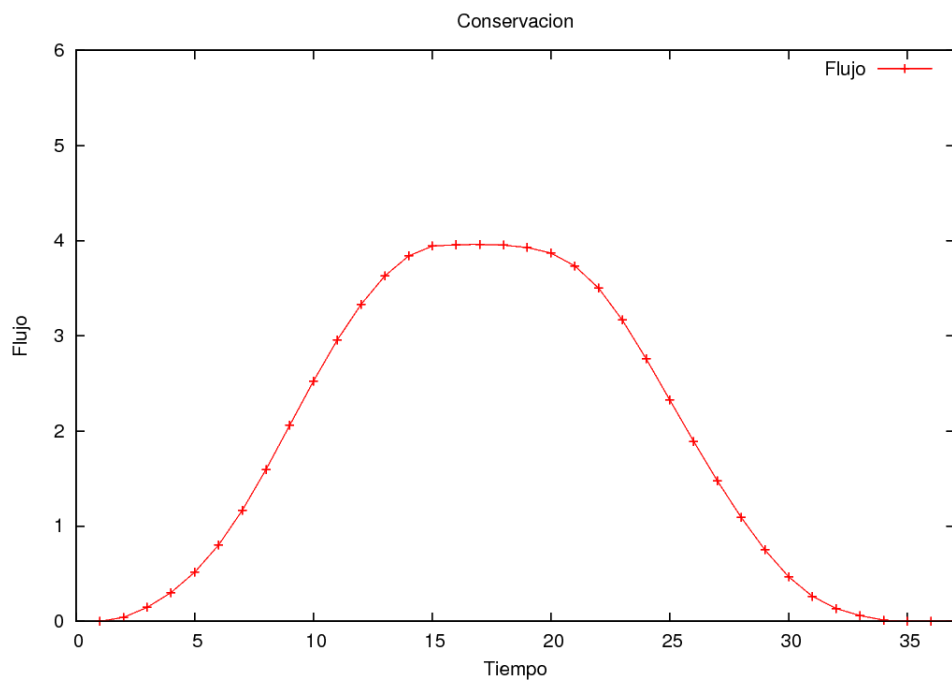


Figura 9: Flujo

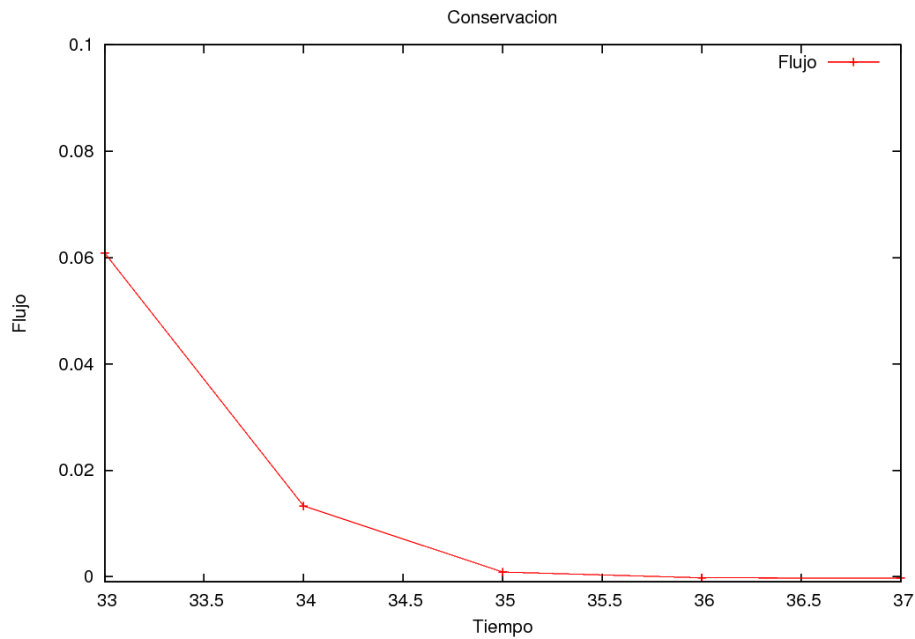


Figura 10: Flujo, detalle

Además de testear la energía y el flujo, hay un tercer test que podemos realizar, que consiste en relacionar ambas cantidades. Lo que se hizo es calcular la energía en la región que ocupa el dato inicial a tiempo  $t = 0$  y el flujo en el límite inferior de esa misma región. Entonces, a medida que pase el tiempo, la onda irá saliendo, y por lo tanto disminuyendo la energía en esa región, mientras que el flujo integrado irá aumentando en esa misma cantidad. Por lo tanto, sumando ambas cantidades tendremos un test que las combina. Este se muestra en Figura 11. La razón por la cual cae en un principio es que aquí estamos comparando dos integrales que numéricamente son distintas: la energía es una integral espacial y por lo tanto depende de los pasos espaciales, mientras que el flujo involucra la combinación de dos coordenadas espaciales con una temporal. Entonces, para cada tiempo, estamos tomando una aproximación de la integral de flujo, sin embargo podemos ver que cuando toda la energía ha salido de la región, el valor total del flujo es igual al de la energía en una parte en diez mil.

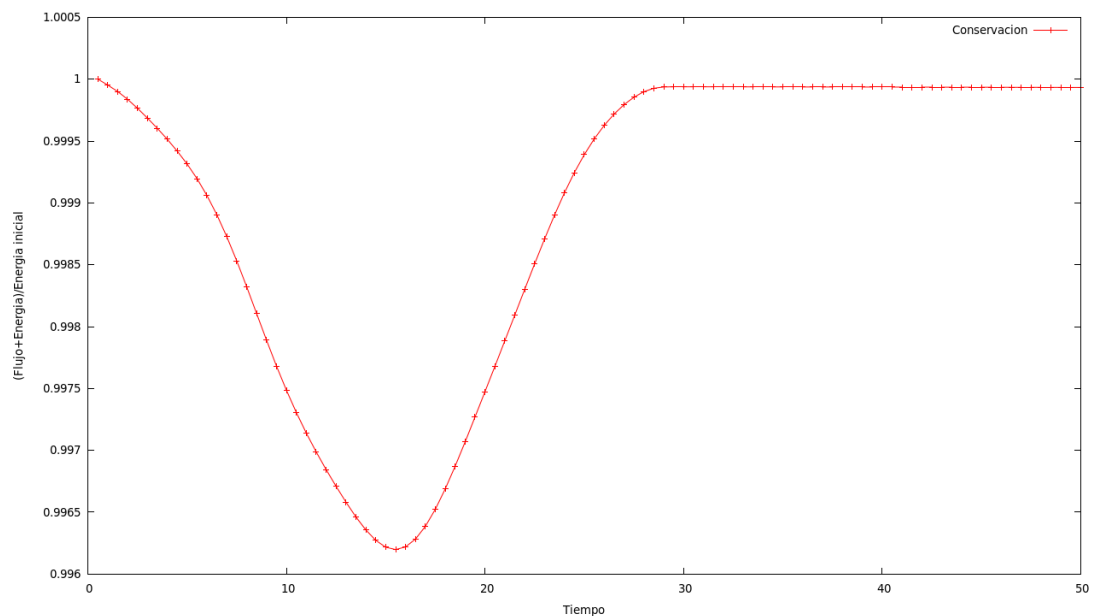


Figura 11: Conservación

Veamos ahora el caso Kerr. La evolución, para los datos presentados en Sección 4, se observa en Figura 12. Vemos que la onda regresa de la ergoregión manteniendo la forma. La curva del flujo se presenta en Figura 13 y la energía en figura 14. Aquí el control de la energía y el flujo se realizó como en la conservación de Minkowski. Es decir, se tomó un intervalo que abarque sólo el dato inicial y controlamos cómo evolucionan esas variables, primero por separado, y luego su combinación.

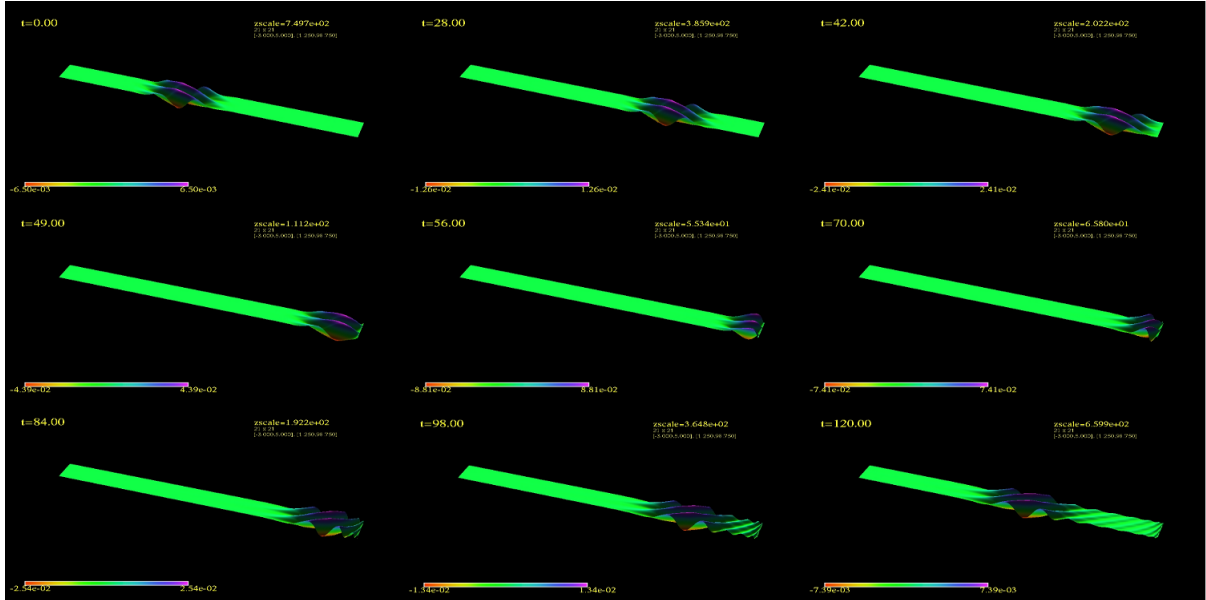


Figura 12: Evolución

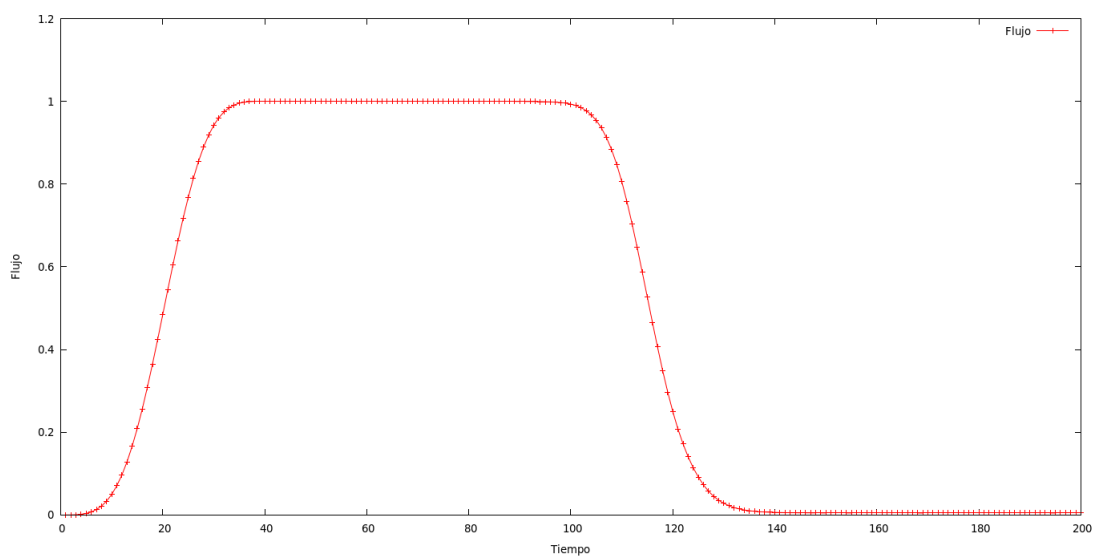


Figura 13: Flujo

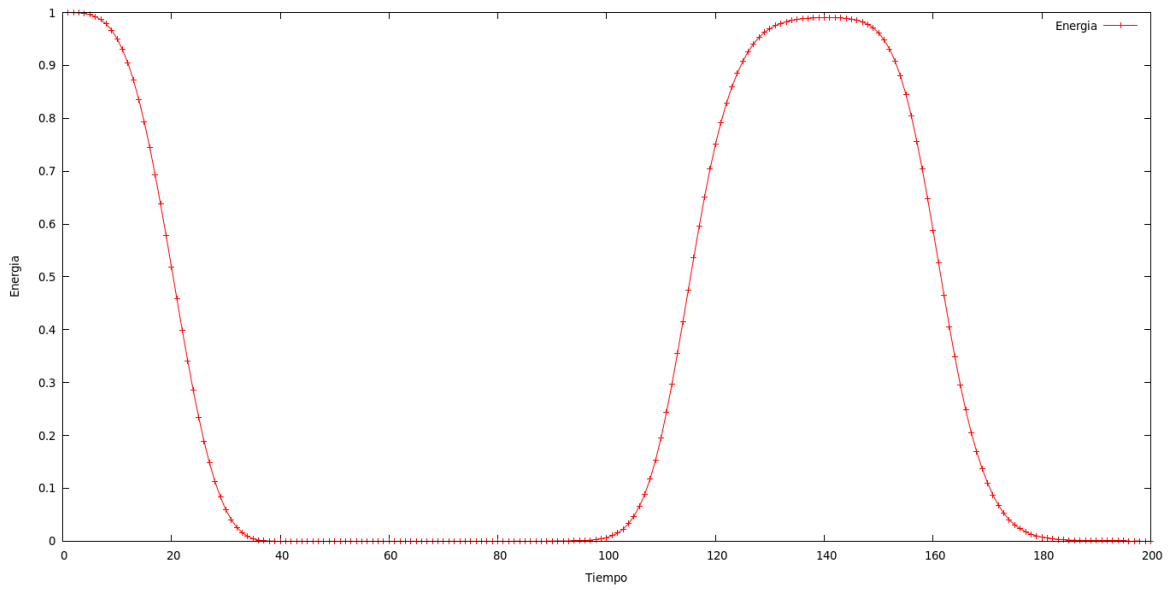


Figura 14: Energía

Vemos que la energía vuelve a tomar su valor inicial, y que el flujo integrado total es cero, es decir, obtenemos el mismo resultado que para Minkowski: toda la onda regresa.

En Figura 15 se muestra la relación entre ambas cantidades. La perturbación en la gráfica al comienzo es, al igual que antes, la consecuencia de que la integral de flujo sea también una aproximación temporal.

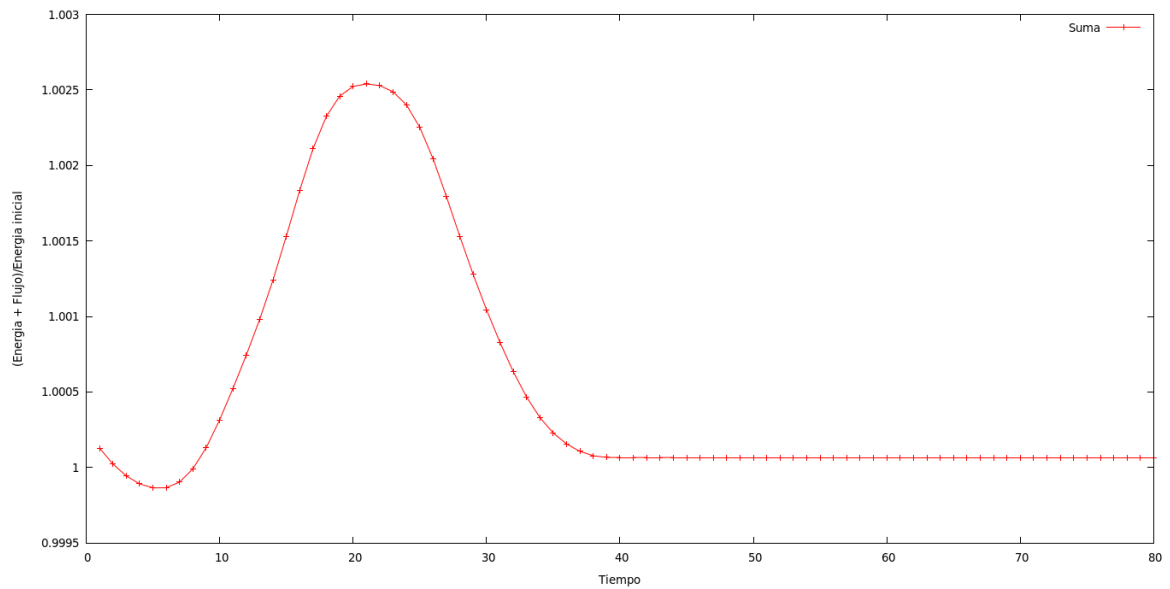


Figura 15: Conservación

## 9 Convergencia

Para analizar la convergencia del código se analizó el coeficiente de precisión dado por:

$$Q(t) := \frac{u^{(1)}(t, x; \Delta t, \Delta x) - u^{(2)}(t, x; \Delta t', \frac{\Delta x}{2})}{u^{(2)}(t, x; \Delta t', \frac{\Delta x}{2}) - u^{(3)}(t, x; \Delta t'', \frac{\Delta x}{4})} = 2^q$$

Donde  $\Delta x$  representa el paso espacial (es decir el largo total dividido en la cantidad de grillas) y los diferentes  $\Delta t$  son tomados de tal forma que el cociente  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.1$ . El valor de  $q$  nos dará el orden del método utilizado pues estamos comparando cómo cambia el error a medida que duplicamos la cantidad de puntos.

En nuestro caso los grillados utilizados fueron (en las coordenadas  $(a, b, c)$  presentadas en Sección 1): 11x11x231, 21x21x461 y 41x41x921. Y con esos puntos el resultado fue el presentado en Figura 16.

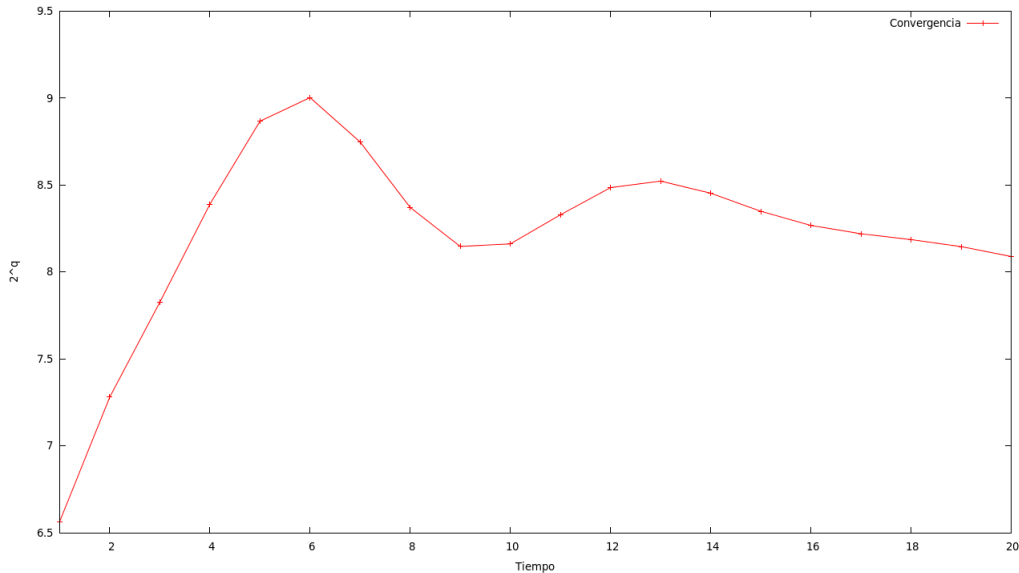


Figura 16: Convergencia

El resultado esperado era  $q = 4$  pues se está utilizando un Runge-Kutta de orden 4, sin embargo vemos que estamos convergiendo a  $q = 3$ . Esto probablemente se debe a que la cantidad de puntos utilizados es muy poca para obtener el resultado óptimo. Como el aumento en la cantidad total de puntos, el siguiente paso (81x81x1841) excede los recursos disponibles en el cluster utilizado, sin embargo se buscará realizar esa simulación en un cluster más grande.

Como se comentó en Sección 5, se observa también que para datos iniciales polinómicos de potencias más chicas la convergencia tiene un orden menor (debido quizás al empalme entre el soporte del dato y el dato cero), sin embargo para potencias altas, donde el empalme es más suave, el dato se concentra en el centro (se vuelve más picudo) y eso provoca también una disminución en la precisión.

Cabe notar además que si bien la forma polinómica es la manera más simple de representar al pulso, es posible mediante interpolación polinómica de Hermite generar un dato que tenga un mayor número de derivadas continuas.



## 10 Conclusiones

Lo más importante que se observa es que el resultado es similar al obtenido en [7], en el cual la onda incidente se refleja completamente. Es decir, tampoco se encontró el fenómeno de superradiancia. Sin embargo, una de las diferencias principales es que incluso para los casos de reflexión total obtenida, la interacción entre la onda y la ergoregión es todavía considerable (es decir, la onda penetra hasta la ergoregión, mientras que en [7] observan que para el caso de reflexión total la onda no llega a entrar a la ergoregión). Como la forma de que la onda extraiga energía del ANR es justamente a través de su ergoregión, los resultados llevan a pensar de que todavía es posible buscar una forma de ajustar el dato de tal forma que se observe el fenómeno.

Otra consideración que se debe tener es que las dificultades para poner una esfera de radio cartesiano constante entre los horizontes (como se presentó en Sección 3), llevaron a que la velocidad angular máxima posible fuera menor a la se usó en [7] ( $a = 0.96$  en lugar de  $a = 0.99$ ). Y siendo que el fenómeno de superradiancia se intensifica para mayores momentos angulares, puede que la velocidad angular no haya sido suficiente.

El siguiente paso es extender lo realizado para el caso de ondas electromagnéticas para descubrir si este fenómeno de reflexión total es en realidad una característica propia del campo escalar. El código tiene incorporada la evolución de las ecuaciones de Maxwell en Kerr (de hecho, como se muestra en Sección 6, se usaron para formar el campo escalar poniendo  $E = 0$  y aprovechando la evolución de  $B$  y su divergencia cero) por lo tanto sólo es necesario poner un dato inicial adecuado para buscar superradiancia.

## Apéndice A

Las componentes de la métrica en término del lapse y el shift son:

$$g_{ab}((\partial t)^a, (\partial t)^b) = g_{00} = \beta^2 - \alpha^2 \quad g_{ab}((\partial t)^a, (\partial x_i)^b) = g_{0i} = \beta_i$$

$$g((\partial x_i)^a, (\partial x_j)^b) = h_{ij}$$

Mientras que podemos obtener componentes de la inversa desarrollando  $t^a$ :

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b$$

$$g^{ab} = h^{ab} - \frac{1}{\alpha^2}((\partial t)^a - \beta^a)((\partial t)^b - \beta^b)$$

$$g^{ab} = -\frac{1}{\alpha^2}(\partial t)^a(\partial t)^b + \frac{2}{\alpha^2}(\partial t)^a\beta^b + (h^{ab} - \frac{\beta^a\beta^b}{\alpha^2})$$

∴

$$g^{00} = -\frac{1}{\alpha^2} \quad g^{0i} = \frac{\beta^i}{\alpha^2} \quad g^{ij} = h^{ij} - \frac{\beta^i\beta^j}{\alpha^2}$$

La correspondencia entre coordenadas es:

$$H = \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{\alpha})$$

$$l^i = (\frac{1 + 2H}{2H})\beta^i$$

## Apéndice B

Para escribir la ecuación de onda en término de los campos en el código partimos de:

$$\square\Phi = \nabla_a \nabla^a \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\nu\gamma} \partial_\gamma \Phi) = 0$$

Desarrollando este término y notando que  $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{h}$ , tenemos:

$$\square\Phi = g^{00} \partial_{tt} \Phi + g^{0i} \partial_i \partial_t \Phi + \frac{1}{\alpha\sqrt{h}} \partial_i (\alpha\sqrt{h} g^{i0} \partial_t \Phi) + \frac{1}{\alpha\sqrt{h}} \partial_i (\alpha\sqrt{h} g^{ij} \partial_j \Phi) = 0$$

Y ahora reemplazamos por las componentes obtenidas en Sección 2:

$$\begin{aligned} \partial_{tt} \Phi &= \alpha^2 g^{0i} \partial_i \partial_t \Phi + \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_i (\alpha\sqrt{h} g^{i0} \partial_t \Phi) + \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_i (\alpha\sqrt{h} g^{ij} \partial_j \Phi) \\ \partial_{tt} \Phi &= \beta^i \partial_i \partial_t \Phi + \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_i \left( \frac{1}{\alpha} \sqrt{h} \beta^i \partial_t \Phi + \alpha\sqrt{h} g^{ij} \partial_j \Phi \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Y para escribirla usando el campo magnético consideremos la expresión de  $B^i$ :

$$\partial_t B^i = -\frac{1}{\alpha} \beta^i (\partial_t \Phi) - \alpha g^{ij} \partial_j \Phi \quad (5)$$

Si ahora multiplicamos (5) por  $\sqrt{h}$  y luego derivamos:

$$\partial_i (\sqrt{h} \partial_t B^i) = -\partial_i \left( \frac{1}{\alpha} \sqrt{h} \beta^i \partial_t \Phi + \alpha\sqrt{h} g^{ij} \partial_j \Phi \right)$$

Reemplazando en (4):

$$\partial_{tt} \Phi = \beta^i \partial_i \partial_t \Phi - \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_i (\sqrt{h} \partial_t B^i)$$

Por lo tanto evolucionamos  $\partial_t \Phi$  como:

$$\partial_t \Phi = \beta^i \partial_i \Phi - \frac{\alpha}{\sqrt{h}} \partial_i (\sqrt{h} B^i)$$

## Referencias

- [1] R. Penrose and R. M. Floyd, "Extraction of Rotational Energy from a Black Hole," *Nature Physical Science* 229, 177 (1971).
- [2] Robert M. Wald. "General Relativity", The University of Chicago Press, 1984.
- [3] Teukolsky, S.A. et al. "Perturbations of a rotating black hole. III - Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation", *Astrophys.J.* 193 (1974) 443-461.
- [4] Williams R K 2004 "Collimated escaping vortical polar e- e+ jets intrinsically produced by rotating black holes and Penrose processes" *The Astrophys. J.* 611 952.
- [5] Junor , Biretta† & Livio 1999 "Formation of the radio jet in M87 at 100 Schwarzschild radii from the central black hole", *Nature Physical Science* 401.
- [6] Andersson N, Laguna P and Papadopoulos P 1998 "Dynamics of scalar fields in the background of rotating black holes. II. A note on superradiance ", *Phys. Rev. D* 58 087503.
- [7] Péter Cszimadia et al 2013 "On the Use of Multipole Expansion in Time Evolution of Non-linear Dynamical Systems and Some Surprises Related to Superradiance", *Class. Quantum Grav.* 30 015010.
- [8] Luis Lehner, Oscar Reula, y Manuel Tiglio "Multi-block simulations in general relativity: high order discretizations, numerical stability, and applications", *Class.Quant.Grav.*, 22:5283–5322, 2005.
- [9] P.K. Townsend "Black Holes", 1997.