

# DINÁMICA DE OBJETOS COMPACTOS Y RADIACIÓN GRAVITACIONAL

AUTOR: LIC. GONZALO D. QUIROGA

PRESENTADO ANTE LA FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA  
COMO PARTE DE LOS REQUERIMIENTOS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE  
DOCTOR EN FÍSICA DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

DIRECTOR: DR. CARLOS N. KOZAMEH

© FAMAF - UNC



DINÁMICA DE OBJETOS COMPACTOS Y RADIACIÓN GRAVITACIONAL ESTÁ DISTRIBUIDO BAJO UNA LICENCIA CREATIVE  
COMMONS ATRIBUCIÓN-NOComercial-SINDerivadas 2.5 ARGENTINA.

[HTTP://CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY-NC-ND/2.5/AR/](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/ar/)

Córdoba, Argentina

Abril de 2015



## PRÓLOGO

A mi querido hijo Gonzalo:

Este libro no es ni más ni menos que el fruto de tu pasión y dedicación por esta ciencia. Quizás este Prologo sea corto de palabras, pero estas palabras van llenas por el amor y la admiración que tengo hacia ti.

Poder escribir este libro es sin duda alguna un paso muy importante para tu vida profesional, la que será brillante y llena de éxitos, y no lo digo simplemente por ser tu padre sino porque los logros conseguidos hasta aquí así lo demuestran.

Felicitaciones hijo mío y solo pido a Dios que te de la madurez necesaria e ilumine tu inteligencia para seguir en este camino.

*Papá Horacio Quiroga*



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera agradecer a mi esposa Liliana, por todo su amor, por su tiempo y porque desde el día que nos conocimos me brindó su apoyo para llegar a completar este grado académico y este libro de Tesis. Además quisiera agradecer al Dr. Carlos Kozameh, quien posibilitó realizar mi anhelo de investigar en Relatividad General, disfrutar de su amistad, amabilidad y calidez como ser humano y maestro. Por todo lo que nos brindaron junto a Graciela, a nuestra vida y matrimonio, le estamos profundamente agradecidos. También quisiera agradecer a mis padres y a mis hermanos, por estar siempre y haber hecho lo imposible para que yo pudiese estar donde estoy. Este trabajo tampoco hubiese sido posible, sin la beca de doctorado otorgada por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Agradezco también a la FaMAF, por haberme permitido utilizar dicho lugar de trabajo para la elaboración de esta tesis, y en particular al grupo de Relatividad General y a todos mis compañeros doctorandos.



## RESUMEN

En esta Tesis haciendo uso de la estructura asintótica del espaciotiempo y del formalismo de Newman-Penrose definimos la noción de centro de masa y spin para sistemas gravitacionales que emiten radiación gravitacional y electromagnética. A diferencia de otras formulaciones disponibles en la literatura, una de las características centrales de nuestro formalismo es el uso de cortes reales de Newman-Unti que son generados por líneas mundo del espaciotiempo. A partir de estos cortes se obtienen las ecuaciones para el momento angular y el momento dipolar másico, estas ecuaciones son similares con su contraparte newtoniana a pesar de que en nuestra formulación estas cantidades han sido definidas utilizando variables en la frontera nula de un espaciotiempo asintóticamente plano. Finalmente derivamos las ecuaciones que vincula la evolución temporal del momento dipolar másico y el momento angular con la radiación gravitacional emitida y encontramos la ecuación de movimiento para el centro de masa del sistema.



## ABSTRACT

In this thesis we define the notion of center of mass and spin for gravitational systems that emits gravitational and electromagnetic radiation, to do this we use the asymptotic structure of the spacetime and the Newman-Penrose formalism. Unlike other approaches, a central feature in our formulation is the use of real Newman-Unti cuts at null infinity that are generated by worldlines of the spacetime. From these cuts we obtain the equation for the angular momentum and mass dipole, these equations are similar to their Newtonian counterparts although in our formulation these amounts have been defined using only variables at the null boundary of an asymptotically flat spacetime. Finally we derive equations linking their time evolution to the emitted gravitational radiation and also we get the equation of motion for the center of mass of the system.



# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Estructura Asintótica del Espaciotiempo</b>	<b>9</b>
1.1. Espacios asintóticamente simples . . . . .	9
1.2. Sistema de coordenadas y tetradas nulas . . . . .	10
1.3. Escalares y coeficientes de spin . . . . .	13
1.4. Solución asintótica de los escalares y los CS . . . . .	14
1.5. Coordenadas y cortes de Bondi . . . . .	16
1.6. Masa y momento lineal de Bondi . . . . .	18
<b>2. Familia de Cortes y Puntos del espaciotiempo</b>	<b>21</b>
2.1. Cortes de Bondi y de NU . . . . .	21
2.2. Ecuación de los NCC . . . . .	25
2.3. NCC Regularizados . . . . .	27
2.4. Factor conforme y operadores diferenciales . . . . .	30
2.5. Construcción de tétradas nulas . . . . .	32
2.6. Transformación de escalares . . . . .	34
<b>3. Espaciotiempos de Einstein-Maxwell Axialmente Simétricos</b>	<b>37</b>
3.1. Integral de Komar . . . . .	37
3.2. Komar en el formalismo de NP . . . . .	39
3.3. Definición de centro de masa . . . . .	41
3.4. Ecuaciones de movimiento . . . . .	44
3.5. Ejemplos y Aplicaciones . . . . .	46

3.5.1.	Espaciotiempo de Kerr . . . . .	46
3.5.2.	Gravedad linealizada . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>Spin y Centro de Masa en Espaciotiempos Asintóticamente Planos</b>	<b>49</b>
4.1.	Linkage y Killing asintótico . . . . .	50
4.2.	Grupo BMS y supertranslaciones . . . . .	52
4.3.	Momento dipolar y momento angular . . . . .	54
4.4.	Aproximaciones y supuestos . . . . .	56
4.5.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	58
4.6.	Transformaciones de Lorentz . . . . .	60
<b>5.</b>	<b>Comparación con otros Formalismos</b>	<b>61</b>
5.1.	Comparación con las ecuaciones ANK . . . . .	61
5.2.	Comparación con las ecuaciones PN . . . . .	63
<b>6.</b>	<b>Comentarios Finales y Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A.</b>	<b>Campos Electromagnéticos en el Infinito Nulo</b>	<b>69</b>
A.1.	Momento dipolar electromagnético . . . . .	69
A.2.	Contribución electromagnética a las ecuaciones de movimiento . . . . .	70
<b>B.</b>	<b>Armónicos Tensoriales con peso de spin</b>	<b>73</b>
B.1.	Operador $\tilde{\delta}$ y Armónicos Tensoriales . . . . .	73
B.2.	Expansion de Clebsch-Gordan . . . . .	74

# Introducción

Esta tesis se presenta como requisito para la obtención del grado de Doctor en Física de la Universidad Nacional de Córdoba y tiene como objetivo principal describir y analizar el comportamiento de sistemas gravitacionales generales estudiados como si fuesen sistemas aislados. Para ello, es necesario utilizar herramientas matemáticas específicas y brindar definiciones apropiadas para ciertas cantidades físicas. Cabe destacar, que en esta descripción se desean incluir los efectos producidos debido a la emisión de radiación gravitacional y electromagnética. Sin embargo, para lograr este objetivo es necesario abordar problemas como el dar definiciones físicamente aceptables de cantidades tales como el momento angular, el spin y el centro de masa en el marco de la Teoría de la Relatividad General (RG) y además derivar ecuaciones para estas variables que muestren explícitamente cómo la radiación gravitacional y electromagnética afecta la dinámica del sistema.

Naturalmente el primer interrogante que se presenta es si es posible dar una definición análoga en RG de lo que llamaríamos un sistema aislado en una teoría Newtoniana. Para ello se introduce la noción de espaciotiempos asintóticamente planos, los cuales brindan una herramienta adecuada y poderosa para analizar la radiación proveniente de una fuente compacta arbitraria.

La noción de centro de masa de un sistema aislado juega un rol muy importante en la teoría Newtoniana. Este se utiliza para definir el momento angular intrínseco y el momento lineal de un sistema. Estas cantidades son conservadas en dicha teoría, sin embargo, su generalización en RG no es una tarea sencilla. Uno de los mayores obstáculos para una definición relativista es el hecho de que la energía y/o el momento no pueden ser cantidades locales. Además, hay que tener en cuenta que, a menos que

el espacio tiempo sea estacionario, la energía y el momento del sistema aislado no son cantidades conservadas debido a la emisión de radiación gravitacional. En espaciotiempo asintóticamente planos es posible definir la masa y el momento lineal de Bondi [1], como estas cantidades no son conservadas se espera que el centro de masa del sistema adquiera una aceleración cuando la radiación gravitacional y electromagnética sea emitida.

El primer obstáculo a superar es elegir una definición acorde de momento angular. En la literatura existen varias definiciones de momento angular para un sistema aislado. Algunos autores que han abordado la problemática del momento angular en RG son: Dray y Streubel [2], Bramson [3], Geroch [4], Moreschi [5], Penrose [6] y Winicour [7], Szabados [8] entre otros. En principio, esperamos que una definición razonable de centro de masa y momento angular en RG sea una generalización de una 2-forma disponible en relatividad especial donde estas variables sean las seis componentes no triviales de dicha forma [9].

Por otra parte y en analogía con la definición de centro de masa Newtoniano, el centro de masa debería ser una lineamundo  $R^i(u)$  en el espaciotiempo que esté relacionada con el momento  $P^i$  y la masa  $M$  mediante una ecuación de la forma  $P^i = M\dot{R}^i + \text{correcciones radiativas}$ , donde estos términos extras serán nulos cuando la radiación gravitacional y electromagnética este ausente. Por lo tanto una de las dificultades que afrontamos es el como seleccionar esta lineamundo particular.

En este contexto, existen diferentes tratamientos al problema que se pretende resolver en esta tesis. Uno de ellos, desarrollado por Newman y colaboradores [10], está basado en congruencias nulas las cuales en  $\mathcal{S}$  tienen shear nulo, es decir  $\sigma^{0*} = 0$ . Esta condición asintótica para el shear genera una familia compleja de dos-superficies  $u_B = G(\tau, \zeta, \bar{\zeta})$ , denominadas “good cuts” (GC), construidas a partir de la solución de una ecuación llamada “good cut equation”(para más detalles a cerca de esta construcción se puede consultar el trabajo de Newman y colaboradores [10]). Esta familia esta caracterizada por una lineamundo compleja en un espacio holográfico fiducial llamado espacio- $\mathcal{H}$  [11]. Luego para una lineamundo en particular de esta familia se exige que el momento dipolar másico complejo se anule en el infinito nulo. A partir de esta condición se puede definir el centro de masa y el momento angular del sistema mediante la parte real e imaginaria del momento dipolar.

El formalismo AKN, desde nuestra perspectiva, tiene al menos dos puntos para mejorar:

1. El momento angular del sistema se define únicamente para espaciotiempos asintóticamente planos con radiación cuadrupolar. Por lo tanto no es fácil generalizar esta definición a espaciotiempo para radiación gravitacional y electromagnética arbitraria, incluso para cuando el espaciotiempo tiene una simetría rotacional.
2. Por suposición, este formalismo esta basado en congruencias nulas con shear nulo en el infinito nulo. Sin embargo, en general en el infinito nulo el shear del cono de luz futuro de cualquier punto no se anula. Esto se debe a la ecuación óptica dado que un tensor de Weyl no nulo en el cono nulo induce un shear distinto de cero. Así la lineamundo del centro de masa definida en el espacio solución de un shear que se anula asintóticamente no corresponde a la lineamundo del espacio subyacente.

Otro método ha sido desarrollado por Moreschi [5]. En este caso primero se define la noción de “supermomento” en  $\mathcal{S}$  y luego se busca una familia especial de cortes llamados “nice cuts” (NC), para los cuales el supermomento solo tiene componente  $l = 0, 1$  en su descomposición en término de esféricos armónicos. De nuevo se obtiene otro espacio de soluciones holográfico donde se elige una lineamundo como la lineamundo del centro de masa, mediante una condición similar al tratamiento anterior. Además, Moreschi da una noción del momento angular total [12], cuando se restringe esta definición a la lineamundo del centro de masa como resultado se obtiene el momento angular intrínseco del sistema.

Estas dos formulaciones coinciden a nivel lineal cuando se considera que la radiación gravitacional es puramente cuadrupolar. Por otra parte ni los NC o los GC son el cono de luz futuro de un punto que se encuentra en el interior del espaciotiempo. Por lo tanto una de las ideas claves en nuestro formalismo es el de trabajar en un espacio de soluciones que esté mas estrechamente vinculado con el espaciotiempo del sistema.

Dado que hay muchos detalles técnicos involucrados en este desarrollo, es conveniente delinear las ideas principales de nuestro formalismo. Primeramente introduciremos la noción de los “null cone cuts” (NCC) como la intersección de los conos de luz futuro

provenientes de los puntos  $x^a$  del espaciotiempo con el infinito nulo. Luego definimos los NCC regularizados como la parte Huygens de los NCC. Por construcción estos cortes regularizados son una 2-superficie suave en el infinito nulo que a orden lineal depende paramétricamente de los puntos del espacio de soluciones de la ecuación de los NCC. Si los puntos  $x^a(u)$  describen una lineamundo los NCC regularizados originan una familia especial de cortes de Newman-Unti.

El momento angular para el caso de espaciotiempo axialmente simétrico se define a partir de la integral de Komar. Sin embargo para espaciotiempos sin simetrías global vamos a definir el momento dipolar másico y el momento angular en termino de los linkages de Geroch-Winicour [13], ya que esta definición coincide con la de Komar cuando el espaciotiempo tiene un campo de Killing asociado con una simetría rotacional y porque es una integral geométrica en una superficie global. A pesar de que los linkages tiene un número infinito de grados de libertad asociado a las supertraslaciones [1], podemos fijar estas libertades eligiendo un sistema de coordenadas particular. De esta manera solo nos quedan las traslaciones lo que es análogo a la elección del origen del sistema en la definición Newtoniana del momento angular.

Con la condición que en los RNCC el momento dipolar másico se anule, se selecciona una lineamundo especial la cual se identifica con el centro de masa. Evaluando el momento angular en este corte especial origina el momento angular intrínseco o spin.

Finalmente, nuestro formalismo arroja ecuaciones de movimiento explícitas para el centro de masa y el spin cuando se emite radiación gravitacional.

## Organización de la Tesis

Este libro tiene un total de 6 capítulos y 2 apéndices. En los primeros dos capítulos damos las herramientas necesarias y el formalismo matemático de la estructura asintótica del espaciotiempos. La intención de ambos capítulos es la de preparar el escenario para derivar los resultados y comprender las discusiones que se desarrollaran en los capítulos siguientes.

En el capítulo 3 se comienza analizando el caso de espaciotiempos asintóticamente planos con simetría axial. Este capítulo sirve como base para entender los desarrollos y las herramientas de calculo utilizadas a lo largo de esta tesis. Aquí comenzamos a estudiar el concepto de centro de masa y momento angular que luego será generalizado para casos sin simetría

Los capítulos 4 y 5 forman la estructura principal de esta tesis. En el capítulo 4 se introduce la noción de centro de masa para espaciotiempos sin simetrías globales y se derivan las ecuaciones de movimiento para el sistema mientras que en el capítulo 5 se comparan los resultados del capítulo 4, con las ecuaciones que provienen de otros formalismos como el Post-Newtoniano.

Finalmente en el capítulo 6 cerramos esta tesis con las conclusiones y comentarios generales sobre todo lo tratado.

# Glosario de símbolos y unidades

En esta tesis se utilizará una extensa notación. Los símbolos mas frecuentes se enlistan a continuación

Cuadro 1: Glosario de notación

<i>Símbolo/Acrónimo</i>	<i>Definición</i>
$NCC$	Null cone cut (cortes nullos)
$CS$	Coefficientes de spin
$\mathcal{I}^+$	Futuro del infinito Nulo
$u_B, u, u_{ret}$	Tiempo de Bondi, Tiempo de Newman-Unti, Tiempo retardado
$\partial_{u_B} f = \dot{f}$	Derivada respecto a $u_B$
$\partial_u f = f'$	Derivada respecto a $u$
$(u_B, r_B, \zeta, \bar{\zeta})$	Coordenadas de Bondi
$(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$	Coordenadas de Newman-Unti
$Y_{li..j}^s$	Armónicos esféricos tensoriales con peso de spin $s$
$\eth^*, \eth^*$	Operador diferencial con peso conforme $P$
$\eth, \eth$	Operador diferencial con peso conforme $P_0$
$\eth_{(\alpha)}^*$	Operador $\eth^*$ aplicado a $f$ con $\alpha$ constante
$(l^{a*}, n^{a*}, m^{a*}, \bar{m}^{a*})$	Tetradas nulas en el sistema Newman-Unti
$(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$	Tetradas nulas en el sistema Bondi
$(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$	Componentes del tensor de Weyl en el formalismo de NP
$(\phi_0, \phi_1, \phi_2)$	Componentes del tensor de Maxwell en el formalismo de NP
$\sigma, \sigma^0$	Shear, shear asintótico del formalismo de Newman-Penrose
$\Psi = \psi_2^0 + \eth^2 \sigma^0 + \sigma^0 \dot{\eth}^0$	Aspecto de Masa
$M = -\frac{c^2}{2\sqrt{2}G} \Psi^0$	Masa de Bondi
$P^i = -\frac{c^3}{6G} \Psi^i$	Trimomento lineal de Bondi

Por otra parte, al momento de llevar a cabo nuestros cálculos se trabajará en unidades  $c = G = 1$ , sin embargo los resultados más importantes serán expresados en términos de estas constantes. Es por eso que en esta sección introduciremos una tabla de referencia que contiene las unidades de los objetos mas prominentes con el fin de verificar el correcto uso de las constantes y unidades. La notación  $[\cdot]$  significa las unidades de la cantidad en cuestión [10]

$$L=[\text{longitud}] \quad M=[\text{masa}] \quad T=[\text{tiempo}]$$

Cuadro 2: Unidades

<i>Cantidad</i>	<i>Unidades</i>
$[G]$	$L^3 M^{-1} T^{-2}$
$[Q]$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
$[u_B] = [u]$	$T$
$[R^i(u)] = [\sigma^{ij}(u)]$	$L$
$[J^i]$	$ML^2 T^{-1}$
$[\psi_0^0]$	$L^3$
$[\psi_1^0]$	$L^2$
$[\psi_2^0]$	$L$
$[\psi_3^0]$	$1$
$[\psi_4^0]$	$L^{-1}$
$[\phi_0^0]$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-1}$
$[\phi_1^0]$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
$[\phi_2^0]$	$M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$



# Capítulo 1

## Estructura Asintótica del Espaciotiempo

La estructura asintótica del espaciotiempo es una herramienta muy poderosa para analizar el comportamiento de sistemas aislados en RG. La idea central de esta formulación es el de reescalar la métrica con un factor, el cual se elige apropiadamente para que decaiga a cero en el infinito. Debido a la gran importancia y a la riqueza matemática que tiene esta formulación, focalizaremos este primer capítulo en el estudio de las propiedades básicas que serán de gran importancia en el transcurso de esta tesis.

### 1.1. Espacios asintóticamente simples

Durante los años 60 Bondi, Sachs y colaboradores [14, 15] utilizaron un sistema de coordenadas canónico para definir la masa, el momento lineal y la radiación gravitacional. Luego Penrose define la noción de espacios asintóticamente planos o asintóticamente simples, utilizando la idea de re-escalar la métrica mediante un factor conforme que caiga a cero en el infinito [16] y una frontera nula  $\mathcal{I}$ .

**Definición:** Un espaciotiempo  $(\mathcal{M}, g_{ab})$  es llamado asintóticamente simple si el tensor de curvatura cae a cero a medida que nos acercamos a infinito en la dirección futura de las geodésicas nulas del espaciotiempo. Estas geodésicas finalizan en lo que se

denomina el futuro del infinito nulo  $\mathcal{I}^+$ . Además, si existe una variedad suave  $\hat{\mathcal{M}}$  con frontera  $\mathcal{I}^+ \equiv \partial\mathcal{M}$  junto con una métrica lorentziana suave  $\hat{g}_{ab}$  y una función escalar  $\Omega$  regular en todas partes de  $\hat{\mathcal{M}}$  tal que:

- $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \mathcal{I}^+$ .
- En  $\mathcal{M}$ ,  $\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$  con  $\Omega > 0$ .
- En  $\mathcal{I}^+$ ,  $\Omega = 0$ ,  $n_a \equiv \partial_a \Omega \neq 0$  y  $\hat{g}^{ab} n_a n_b = 0$ .

De estas condiciones es posible demostrar que:

1. Si  $\mathcal{M}$  satisface las ecuaciones de Einstein del vacío cerca de  $\mathcal{I}$  entonces  $\mathcal{I}$  es una frontera nula.
2.  $\mathcal{I}$  consiste de dos piezas disjuntas  $\mathcal{I}^+$  y  $\mathcal{I}^-$ , cada una topológicamente  $S^2 \times R$ .
3. El tensor de Weyl  $C_{abc}{}^d$  se anula en  $\mathcal{I}$ . De hecho el tensor de Weyl de la métrica reescalada  $\hat{C}_{abc}{}^d$  es el que se anula en  $\mathcal{I}$ , pero es posible demostrar que el tensor de Weyl es invariante conforme [17].
4. La suposición de “peeling” [18], establece la forma en que se aproxima a cero el tensor de Weyl.

Esta noción de espaciotiempos asintóticamente planos constituye una herramienta adecuada para analizar la radiación gravitacional y electromagnética proveniente de una fuente compacta arbitraria. Por ende a continuación se introducen todas las herramientas matemáticas necesarias para desarrollar los temas que se trataran en esta tesis.

## 1.2. Sistema de coordenadas y tetradas nulas

Para comenzar con el estudio de las propiedades del infinito nulo, se introduce en la vecindad de  $\mathcal{I}^+$ , lo que se conoce como un sistema de coordenadas de Newman-Unti (NU) designado por  $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$  [19]. En este sistema  $u$  representa una superficie nula,  $r$  es el parámetro afín a lo largo de las geodésicas nulas con superficie  $u$  constante y  $\zeta = e^{i\varphi} \cot \frac{\theta}{2}$  corresponden a los ángulos estereográficos complejos que describen las

geodésicas nulas de  $\mathcal{S}^+$ . Para llegar a  $\mathcal{S}^+$ , simplemente dejamos  $r \rightarrow \infty$ , de esta manera el infinito nulo tiene coordenadas  $(u, \zeta, \bar{\zeta})$ . En estas coordenadas y con la elección usual de  $\Omega = \frac{1}{r}$  como el factor conforme, en la variedad  $\mathcal{M}$  la métrica reescalada toma la forma

$$d\hat{s}^2 = \frac{4d\zeta d\bar{\zeta}}{P^2}, \quad (1.1)$$

donde  $P(u, \zeta, \bar{\zeta})$  es una función arbitraria.

Asociado a las coordenadas  $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$  es posible introducir una tétrada de vectores nulos  $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ , donde el primer covector se define a partir de [20]

$$l_a = \nabla_a u. \quad (1.2)$$

Así  $l^a = g^{ab} \nabla_a u$  es un vector nulo tangente a las geodésicas de la superficie  $u = cte$ . El resto de los vectores nulos se eligen para que satisfagan las siguientes relaciones

$$n_a l^a = 1 \quad m_a \bar{m}^a = -1 \quad (1.3)$$

y cero para cualquier otro producto. Luego la métrica del espaciotiempo [20] puede expresarse en términos de estos vectores nulos como

$$g_{ab} = l_a n_b + n_a l_b - m_a \bar{m}_b - \bar{m}_a m_b. \quad (1.4)$$

Es común, encontrar en la bibliografía que la métrica (1.4) se exprese en términos de la tétrada nula con la siguiente notación

$$g^{ab} = \eta^{\mu\nu} \lambda^a_{\mu} \lambda^b_{\nu} \quad (1.5)$$

donde  $\mu$  es el índice de la tétrada que son elevados y bajados con  $\eta^{\mu\nu}$  y  $\eta_{\mu\nu}$ . Aquí  $\lambda^a_{\mu}$  se define como

$$\lambda^a_{\mu} = (l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a); \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (1.6)$$

y donde

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Es importante destacar que la tétrada tiene ciertas libertades, en primer lugar es posible realizar rotaciones nulas. Por ejemplo una rotación nula alrededor de  $l_a$  toma la forma

$$l^a \rightarrow l^a \quad (1.8)$$

$$m^a \rightarrow m^a + Bl^a \quad (1.9)$$

$$n^a \rightarrow n^a + \bar{B}m^a + B\bar{m}^a + B\bar{B}l^a \quad (1.10)$$

Otra de las libertades importantes de los vectores nulos introduce la noción del peso de spin. Una cantidad  $\eta$  que transforme como

$$\eta \rightarrow e^{is\lambda}\eta \quad (1.11)$$

bajo la rotación

$$m^a \rightarrow e^{i\lambda}m^a \quad \text{con } \lambda \text{ real} \quad (1.12)$$

se dice que tiene un peso de spin  $s$  [20].

Es necesario introducir dos operadores diferenciales  $\bar{\partial}$  y  $\partial$  que actúan sobre cualquier función  $f(u, \zeta, \bar{\zeta})$  de peso de spin  $s$ .

$$\bar{\partial}f = P^{1-s} \frac{\partial(P^s f)}{\partial \zeta} \quad (1.13)$$

$$\partial f = P^{1+s} \frac{\partial(P^{-s} f)}{\partial \bar{\zeta}} \quad (1.14)$$

Estos operadores diferenciales aumentan y disminuyen en uno respectivamente el peso de spin, es decir que  $\bar{\partial}f$  tiene peso de spin  $s + 1$  y  $\partial f$  tiene  $s - 1$ .

Por último, debido a que la elección de un sistema de coordenadas de NU no es única, una de las libertades más importantes que tienen las tétradas es que admiten una elección diferente para los cortes a la elección original  $u = cte.$ , es decir que

$$u \rightarrow \tilde{u} = Z(u, \zeta, \bar{\zeta}). \quad (1.15)$$

A partir de estos nuevos cortes se puede construir un nuevo sistema de coordenadas y un nuevo conjunto de vectores nulos asociados a este nuevo sistema.

### 1.3. Escalares y coeficientes de spin

El formalismo de Newman-Penrose (NP) introduce 12 cantidades complejas denominadas coeficientes de spin (CS) y 5 escalares de Weyl complejos. Tanto los escalares de Weyl como los CS se construyen a partir de contracciones utilizando la tétrada definida en la sección anterior [20, 21]. Los coeficientes de rotación de Ricci  $\gamma_{\mu\nu\rho}$  se definen mediante

$$\gamma_{\mu\nu\rho} = \lambda^a{}_\rho \lambda^b{}_\nu \nabla_a \lambda_{b\mu}, \quad (1.16)$$

los cuales satisfacen

$$\gamma_{\mu\nu\rho} = -\gamma_{\nu\mu\rho}. \quad (1.17)$$

donde los índices  $\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4$  son los índices de la tétrada. Los 12 CS se definen como combinaciones de los  $\gamma_{\mu\nu\rho}$  [20]

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}); & \lambda &= -\gamma_{244}; & \kappa &= \gamma_{131} \\ \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}); & \mu &= -\gamma_{243}; & \rho &= \gamma_{134} \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}); & \nu &= -\gamma_{242}; & \sigma &= \gamma_{133} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}); & \pi &= -\gamma_{241}; & \tau &= \gamma_{132} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Finalmente los escalares de Weyl y los campos de Maxwell se definen como

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -C_{abc}{}^d l^a m^b l^c m_d; & \psi_1 &= -C_{abc}{}^d l^a n^b l^c m_d \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2}(C_{abc}{}^d l^a n^b l^c n_d - C_{abc}{}^d l^a n^b m^c \bar{m}_d) \\ \psi_3 &= C_{abc}{}^d l^a n^b n^c \bar{m}_d; & \psi_4 &= -C_{abc}{}^d n^a \bar{m}^b n^c \bar{m}_d \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\phi_0 = F_{ab} l^a m^b; \quad \phi_1 = \frac{1}{2} F_{ab} (l^a n^b + m^a \bar{m}^b); \quad \phi_2 = F_{ab} n^a \bar{m}^b, \quad (1.20)$$

Con estos escalares y coeficientes de spin es posible dar una descripción satisfactoria del espaciotiempo. Cualquier otra coeficiente de spin o escalar que se defina puede ser expresado como combinación de los previamente definidos.

## 1.4. Solución asintótica de los escalares y los CS

A partir de la suposición de “peeling”, introducida por Sachs [18], se puede obtener el comportamiento asintótico de los escalares y coeficientes de spin para cualquier espaciotiempo asintóticamente plano. Estas cantidades caen a cero como potencias inversas de  $r$  de la siguiente manera [20]

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \psi_0^0 r^{-5} + O(r^{-6}), \\
\psi_1 &= \psi_1^0 r^{-4} + O(r^{-5}), \\
\psi_2 &= \psi_2^0 r^{-3} + O(r^{-4}), \\
\psi_3 &= \psi_3^0 r^{-2} + O(r^{-3}), \\
\psi_4 &= \psi_4^0 r^{-1} + O(r^{-2}), \\
\phi_0 &= \phi_0^0 r^{-3} + O(r^{-4}), \\
\phi_1 &= \phi_1^0 r^{-2} + O(r^{-3}), \\
\phi_2 &= \phi_2^0 r^{-1} + O(r^{-2}),
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Además los vectores nulos en el formalismo NP se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
l &= l^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial r} \\
n &= n^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial u} + U \frac{\partial}{\partial r} + X^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + X^{\bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\
m &= m^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \omega \frac{\partial}{\partial r} + \xi^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \xi^{\bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \\
\bar{m} &= \bar{m}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \bar{\omega} \frac{\partial}{\partial r} + \bar{\xi}^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \bar{\xi}^{\bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

con

$$\begin{aligned}
\xi^k &= \xi^{0k} r^{-1} - \sigma^0 \bar{\xi}^{0k} r^{-2} + O(r^{-3}) \quad \text{con } k = \zeta, \bar{\zeta} \\
\omega &= \omega^0 r^{-1} - \left( \sigma^0 \bar{\omega}^0 + \frac{\psi_1^0}{2} \right) r^{-2} + O(r^{-3}) \\
X^k &= (\psi_1^0 \bar{\xi}^{0k} + \bar{\psi}_1^0 \xi^{0k}) (6r^3)^{-1} + O(r^{-4}) \\
U &= U^0 - (\gamma^0 + \bar{\gamma}^0) r - (\psi_2^0 + \bar{\psi}_2^0) (2r)^{-1} + O(r^{-2})
\end{aligned}$$

Los coeficientes de spin están dados como [19].

$$\begin{aligned}
\kappa &= \pi = \varepsilon = 0, & \rho &= \bar{\rho}, & \tau &= \bar{\alpha} + \beta \\
\rho &= -r^{-1} - \sigma^0 \bar{\sigma}^0 r^{-3} + O(r^{-5}) \\
\sigma &= \sigma^0 r^{-2} + [(\sigma^0)^2 \bar{\sigma}^0 - \psi_0^0/2] r^{-4} + O(r^{-5}) \\
\alpha &= \alpha^0 r^{-1} + O(r^{-2}) \\
\beta &= \beta^0 r^{-1} + O(r^{-2}) \\
\gamma &= \gamma^0 - \psi_2^0 (2r^2)^{-1} + O(r^{-3}) \\
\mu &= \mu^0 r^{-1} + O(r^{-2}) \\
\lambda &= \lambda^0 r^{-1} + O(r^{-2}) \\
\nu &= \nu^0 + O(r^{-1})
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Donde las funciones independientes de  $r$  son

$$\begin{aligned}
\xi^{0\zeta} &= -P, & \bar{\xi}^{0\zeta} &= 0 \\
\xi^{0\bar{\zeta}} &= 0, & \bar{\xi}^{0\bar{\zeta}} &= -P \\
\alpha^0 &= -\bar{\beta}^0 = -\frac{1}{2} \bar{\partial} \ln P \\
\gamma^0 &= -\frac{\dot{P}}{2P}, & \nu^0 &= -2\bar{\partial} \gamma^0 \\
\omega^0 &= -\bar{\partial} \sigma^0, & \lambda^0 &= \dot{\sigma}^0 - \bar{\sigma}^0 \frac{\dot{P}}{P} \\
\mu^0 &= U^0 = -\bar{\partial} \bar{\partial} \ln P \\
\psi_2^0 - \bar{\psi}_2^0 &= \bar{\partial}^2 \sigma^0 - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0 \lambda^0 - \sigma^0 \bar{\lambda}^0 \\
\psi_3^0 &= \bar{\partial} \bar{\partial} \bar{\partial} \ln P + \bar{\partial} \lambda^0 \\
\psi_4^0 &= -\bar{\partial}^2 \left( \frac{\dot{P}}{P} \right) - \dot{\lambda}^0 + \lambda^0 \frac{\dot{P}}{P}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Finalmente las ecuaciones diferenciales (identidades de Bianchi), que dan la evolución de los campos son:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_2^0 - 3\psi_2^0 \frac{\dot{P}}{P} &= -\bar{\delta}\psi_3^0 + \sigma^0\psi_4^0 + 2\phi_2^0\bar{\phi}_2^0 \\
\dot{\psi}_1^0 - 3\psi_1^0 \frac{\dot{P}}{P} &= -\bar{\delta}\psi_2^0 + 2\sigma^0\psi_3^0 + 4\phi_1^0\bar{\phi}_2^0 \\
\dot{\psi}_0^0 - 3\psi_0^0 \frac{\dot{P}}{P} &= -\bar{\delta}\psi_1^0 + 3\sigma^0\psi_2^0 + 6\phi_2^0\bar{\phi}_2^0 \\
\dot{\phi}_1^0 - 2\phi_1^0 \frac{\dot{P}}{P} &= -\bar{\delta}\phi_2^0 \\
\dot{\phi}_0^0 - 2\phi_0^0 \frac{\dot{P}}{P} &= -\bar{\delta}\phi_1^0 + \sigma^0\phi_2^0.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

donde el punto denota la derivada respecto a la coordenada temporal  $\partial_u$  y  $\bar{\delta}, \bar{\delta}$  son los operadores diferenciales definidos en la sección anterior.

## 1.5. Coordenadas y cortes de Bondi

Como mencionamos en la sección 1.2, es posible introducir un conjunto de coordenadas en la vecindad de  $\mathcal{I}^+$ , en general las ecuaciones introducidas en las secciones previas estan escritas para un sistema arbitrario cuyas coordenadas se denominan coordenadas de NU. Sin embargo, el factor conforme  $P$  de la métrica (1.1) proporciona una gran libertad al momento de elegir el sistema de coordenadas con el que se desea trabajar. En muchas aplicaciones practicas, es útil restringir la transformación imponiendo la condición

$$P = P_0 = 1 + \zeta\bar{\zeta}. \tag{1.26}$$

de esta manera se obtienen un conjunto de coordenadas que se denominan coordenadas de Bondi, las cuales van a ser representadas por  $(u_B, r_B, \zeta, \bar{\zeta})$ . En esta sección daremos las ecuaciones principales del formalismo de NP escritas en termino de coordenadas de Bondi.

En un sistema de Bondi, el tiempo  $u_B$  representa una familia de superficies esféricas nulas que intersectan  $\mathcal{I}^+$ , donde Bondi eligió estas superficies para obtener la métrica esférica en el infinito nulo. Nuevamente  $r_B$  es el parámetro afín a lo largo de las geodésicas nulas de superficie  $u_B = cte$  y  $\zeta, \bar{\zeta}$  son los ángulos estereográficos complejos [20].

Los cortes de Bondi, son un caso particular de los cortes descritos en las secciones anteriores, donde la elección de  $P$  reduce la métrica (1.1) a la de una 2-esfera. Sin embargo, la elección de un sistema de coordenadas Bondi no es única, existen una variedad de sistemas de coordenadas de Bondi para elegir. Las transformaciones de coordenadas entre dos sistemas de Bondi, es conocido como transformaciones Bondi-Metzner-Sachs (BMS) y se discutirán más adelante.

De ahora en más, para ser consistentes con la notación que se emplea en el resto de la tesis, las tétradas, los CS y los escalares que estén definidos en NU llevaran el símbolo \*. Además, como mencionamos anteriormente, las coordenadas en Bondi serán designadas con los símbolos  $(u_B, r_B, \zeta, \bar{\zeta})$  y las de NU por  $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$ . Además las derivadas respecto al tiempo de Bondi  $u_B$  serán representadas por un punto ( $\dot{\phantom{x}}$ ) mientras que las derivadas respecto a  $u$  por una prima ( $\prime$ ).

Es importante mencionar que las ecuaciones expresadas en las secciones anteriores están escritas con  $P$  arbitrario, dado que el sistema de coordenadas NU y el formalismo de tetradas nulas fue introducido de una manera completamente general. Sin embargo, en Bondi  $\dot{P} = 0$  hay una gran simplificación en las ecuaciones. Por ejemplo, las componentes del tensor de Weyl se reducen a [20]

$$\begin{aligned}\psi_2^0 - \bar{\psi}_2^0 &= \bar{\delta}^2 \sigma^0 - \delta^2 \bar{\sigma}^0 + \bar{\sigma}^0 \dot{\sigma}^0 - \sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0 \\ \psi_3^0 &= \delta \dot{\bar{\sigma}}^0 \\ \psi_4^0 &= -\ddot{\sigma}^0\end{aligned}\tag{1.27}$$

Además los operadores diferenciales  $\delta, \bar{\delta}$  en la esfera unitaria, es decir con  $P = P_0$  aplicados a una función  $f(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$  se reducen a

$$\delta f = P_0^{1-s} \frac{\partial(P_0^s f)}{\partial \zeta}\tag{1.28}$$

$$\bar{\delta} f = P_0^{1+s} \frac{\partial(P_0^{-s} f)}{\partial \bar{\zeta}}\tag{1.29}$$

Es conveniente en muchos casos definir a partir de la ecuación para  $\psi_2^0$  la cantidad denominada aspecto de masa [14]

$$\Psi = \psi_2^0 + \delta^2 \bar{\sigma}^0 + \sigma^0 \dot{\bar{\sigma}}^0\tag{1.30}$$

el cual satisface la condición  $\Psi = \bar{\Psi}$ . Las identidades de Bianchi en un sistema de Bondi toman la forma

$$\dot{\psi}_2^0 = -\bar{\delta}\psi_3^0 + \sigma^0\psi_4^0 + 2\phi_2^0\bar{\phi}_2^0 \quad (1.31)$$

$$\dot{\psi}_1^0 = -\bar{\delta}\psi_2^0 + 2\sigma^0\psi_3^0 + 4\phi_1^0\bar{\phi}_2^0 \quad (1.32)$$

$$\dot{\psi}_0^0 = -\bar{\delta}\psi_1^0 + 3\sigma^0\psi_2^0 + 6\phi_2^0\bar{\phi}_2^0 \quad (1.33)$$

$$\dot{\phi}_1^0 = -\bar{\delta}\phi_2^0 \quad (1.34)$$

$$\dot{\phi}_0^0 = -\bar{\delta}\phi_1^0 + \sigma^0\phi_2^0. \quad (1.35)$$

aquí nuevamente el punto significa derivada respecto de la coordenada temporal en este caso por tratarse de un sistema de Bondi corresponde a  $\partial_{u_B}$ . Utilizando la ecuación para el aspecto de masa se puede escribir la identidad de Bianchi para  $\dot{\psi}_2^0$  como

$$\dot{\Psi} = \dot{\sigma}^0\bar{\sigma}^0 + 2\phi_2^0\bar{\phi}_2^0. \quad (1.36)$$

De igual manera el resto de los coeficientes de spin pueden ser escritos en términos de  $\sigma^0$  y de  $\psi_n^0$  donde  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

## 1.6. Masa y momento lineal de Bondi

En este sistema de coordenadas se puede introducir sin ambigüedad la definición del cuadrimomento de Bondi [19].

$$P^a = -\frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \int_S \Psi \tilde{l}^a d\Omega, \quad (1.37)$$

con

$$\tilde{l}^a = \frac{1}{1 + \zeta\bar{\zeta}} (1 + \zeta\bar{\zeta}, \zeta + \bar{\zeta}, -i(\zeta - \bar{\zeta}), 1 - \zeta\bar{\zeta}) \quad (1.38)$$

donde  $d\Omega = \frac{4id\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{P_0^2}$  es el área de la esfera unitaria. De ahora en más utilizaremos los índices  $i, j, k, l, m, \dots = 1, 2, 3$ , es decir que son tridimensionales. Es importante notar que en  $\mathcal{S}$  los subíndices y superíndices pueden ser subidos y bajados utilizando la métrica plana. Inmediatamente de esta definición se desprende que la masa de Bondi

$$M = -\frac{c^2}{8\pi\sqrt{2}G} \int_S \Psi d\Omega \quad (1.39)$$

Esta definición obviamente esta de acuerdo con las definiciones usuales de masa, por ejemplo la masa de Schwarzschild y es positiva en una vecindad del espaciotiempo. Utilizando las identidades de Bianchi se puede escribir que

$$\dot{M} = -\frac{c^2}{8\pi\sqrt{2}G} \int_S \dot{\Psi} d\Omega \quad (1.40)$$

en virtud de la ecuación (1.36),  $\dot{\Psi}$  siempre es positivo, por lo tanto

$$\dot{M} < 0 \quad \text{si} \quad \dot{\sigma}^0 \neq 0 \quad (1.41)$$

Es decir que  $\dot{M}$  mide la cantidad de masa perdida en forma de radiación gravitacional.



# Capítulo 2

## Familia de Cortes y Puntos del espaciotiempo

En el capítulo anterior se analizaron algunas de las propiedades generales de la estructura asintótica del espaciotiempo y se introdujo el formalismo NP en un sistema de coordenadas general denominado sistema de NU [19], cuyas coordenadas eran designadas por  $(u, r, \zeta, \bar{\zeta})$ . También se introdujo un segundo sistema de coordenadas denominado sistema de Bondi cuyas coordenadas fueron designadas por  $(u_B, r_B, \zeta, \bar{\zeta})$ . En este capítulo vamos a introducir las relaciones entre los distintos sistemas de coordenadas y vamos a indagar a cerca de como relacionar puntos del espaciotiempo con cortes nulos en  $\mathcal{I}^+$ .

### 2.1. Cortes de Bondi y de NU

En el capítulo anterior mencionamos que la elección particular  $P_0 = 1 + \zeta\bar{\zeta}$  nos originan los sistemas de Bondi, con esta elección la métrica en  $\mathcal{I}^+$  (1.1) es independiente del tiempo.

Los cortes de Bondi son una familia monoparamétrica de superficies que tiene la particularidad de propagarse paralelamente, es decir que para todos los tiempos  $u_B = cte$  las 2-superficies de los cortes son idénticas y tienen la topología de una 2-esfera con area unitaria. Este comportamiento de los cortes se observa al escribir en el infinito

nulo la ecuación [17]

$$\nabla_a n_b = 0 \quad (2.1)$$

lo que implica que  $\nabla_a n^b = 0$  entonces en  $\mathcal{S}$  el vector  $n^b = \left(\frac{\partial}{\partial u_B}\right)^b$  es covariantemente constante y se propaga paralelamente sobre sí mismo lo que origina que los cortes sean propagados paralelamente hacia  $\mathcal{S}$ .

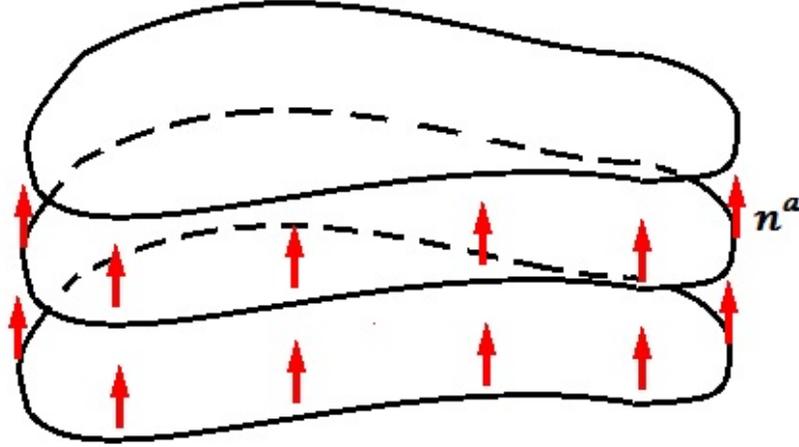


Figura 2.1: Familia de cortes de Bondi, el vector  $n^a$  se propaga paralelamente sobre sí mismo.

Por otra parte los cortes de NU también son una familia monoparamétrica de 2-superficies, que descritos desde las coordenadas de Bondi no son cortes propagados paralelamente es decir que la distancia temporal entre corte y corte no es la misma en  $\mathcal{S}$ . Nuevamente se tiene una familia de cortes suaves, esta es función de las coordenadas angulares  $\zeta, \bar{\zeta}$  y cambian con el parámetro  $u$ , para cada  $u = cte$ ,  $Z(u, \zeta, \bar{\zeta})$  no es una función constante del parámetro  $u$ . Los cortes de NU son cortes más generales que los de Bondi, en el infinito nulo estos están representados por la condición [17]

$$\nabla_a n_b = \frac{f}{2} g_{ab} \quad (2.2)$$

Es claro que para los sistemas de Bondi se elige convenientemente  $f = 0$ .

En Minkowski, existen familias de cortes de Bondi y de NU. Sin embargo, estos cortes de Bondi son cortes muy especiales porque tiene shear nulo, por lo tanto la

intersección del cono de luz futuro de cada punto con el infinito nulo forma una familia de superficies que es trasladada paralelamente. Esquemáticamente una familia de corte de Bondi puede representarse como

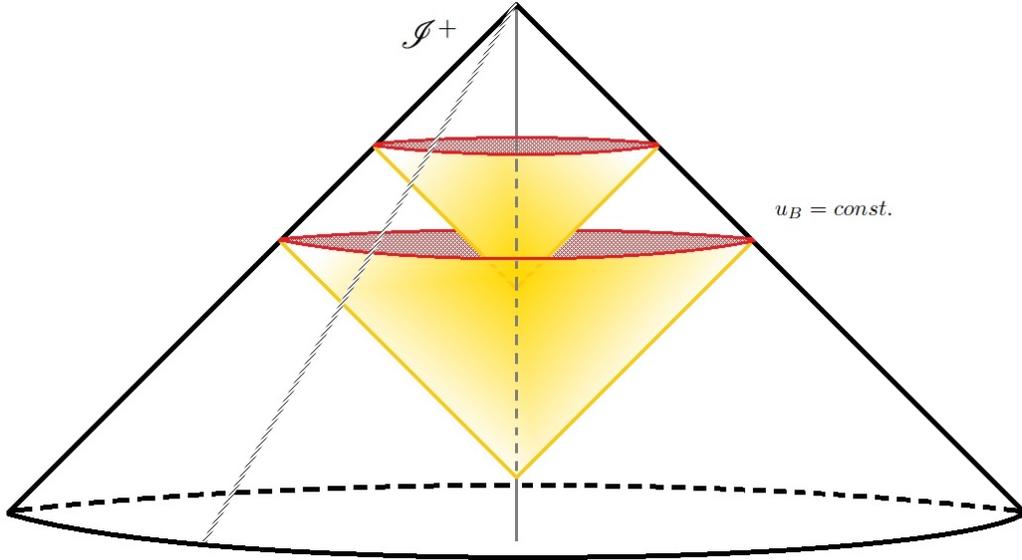


Figura 2.2: Diagrama de  $\mathcal{I}^+$  que muestra una familia de cortes de Bondi designada por el parámetro  $u_B = cte.$

Sin embargo, aún en Minkowski todas aquellas familias de Bondi que tienen shear no vienen de líneas mundo. Solo aquellos cortes de Bondi que tienen shear igual a cero vienen de un punto. Entonces podríamos decir que los cortes producidos por el cono de luz futuro de un punto en el interior del espacio-tiempo de Minkowski corresponden a cortes de Bondi que tienen shear igual a cero.

Por otra parte, en Minkowski también hay cortes de NU, los movimientos acelerados pueden ser descritos por familias de cortes de NU con shear cero. En general si describimos estos movimientos desde un sistema de Bondi, encontraremos que el cono de luz futuro intersecta  $\mathcal{I}^+$  en

$$u_B = Z(u, \zeta, \bar{\zeta}) \quad (2.3)$$

donde  $Z$  es una función suave, real e invertible, cuya inversa  $T$  también es una función real suave y corresponde a los cortes  $u = T(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$ . Esquemáticamente estos cortes se

visualizan como

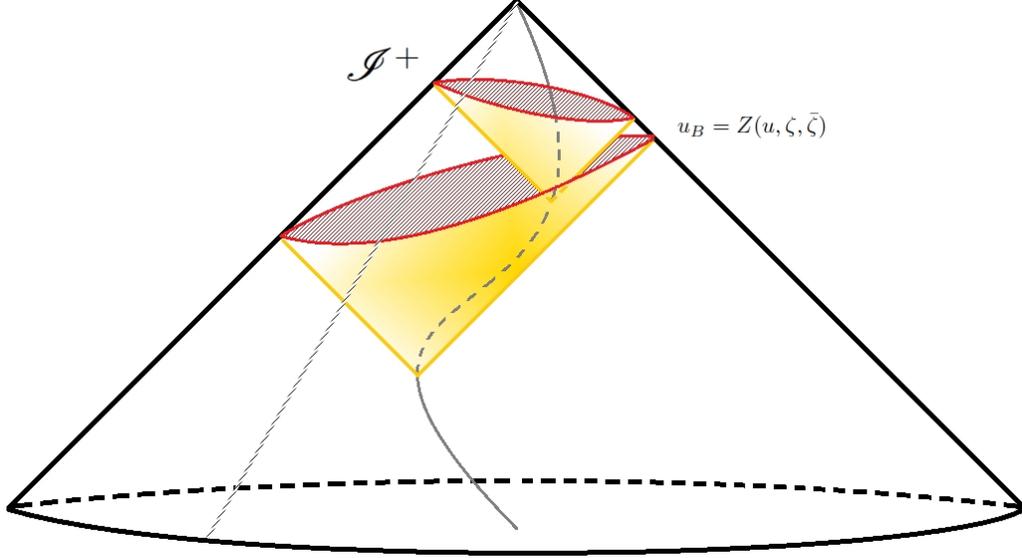


Figura 2.3: Cortes de NU descritos desde un sistema de Bondi. El cono de luz futuro interseca  $\mathcal{I}^+$  en  $u_B = Z(u, \zeta, \bar{\zeta})$ .

Por otra parte se puede demostrar fácilmente que estas funciones satisfacen las siguiente igualdades [10]

$$\dot{T} = \frac{1}{Z'} \quad (2.4)$$

$$\bar{\partial}_{(u_B)} T = -\frac{\bar{\partial}_{(u)} Z}{Z'} \quad (2.5)$$

donde  $\bar{\partial}_{(u_B)}$  y  $\bar{\partial}_{(u)}$  significa aplicar el operador  $\bar{\partial}$  con cualquier peso conforme  $P$  manteniendo  $u_B$  y  $u$  constantes respectivamente. Además la relación entre las coordenadas  $r_B$  y  $r$  esta dada a partir de [10]

$$r = Z' r_B \quad (2.6)$$

donde recordamos nuevamente que a lo largo de esta tesis el punto simbolizaba  $\frac{\partial}{\partial u_B}$  y la prima denota  $\frac{\partial}{\partial u}$ .

## 2.2. Ecuación de los NCC

En espaciotiempos planos es posible construir una familia particular de hipersuperficies nulas, esta familia esta dada por los conos nulos que son emitidos de una lineamundo temporal y corresponden a cortes de Bondi o de NU según lo analizado en la sección anterior. Sin embargo, para el caso no plano, tanto los cortes de Bondi como los de NU no corresponden a la intersección del cono de luz futuro de un punto del espaciotiempo con  $\mathcal{I}^+$ . Esto se debe a que los cortes en  $\mathcal{I}^+$  realizados por el movimiento de una partícula en el interior del espaciotiempo tiene cáusticas y singularidades. En esta tesis estamos interesados en dar una definición de centro de masa y spin, es de suma importancia en nuestro formalismo la construcción de cortes en el infinito nulo que resulten de la intersección de conos de luz futuro con  $\mathcal{I}^+$ . Estos cortes los llamaremos NCC del acrónimo en ingles “null cone cut”.

Dado un punto  $x^a$  en el espaciotiempo y denotando por  $N_x$  el cono futuro de  $x_a$ , se definen los NCC como  $N_x \cap \mathcal{I}^+$ . Esta familia de NCC provienen de una linea mundo del espaciotiempo y juega un papel central en nuestra construcción. Las propiedades locales y globales de los NCC han sido examinadas en muchos artículos, por ejemplo en las referencias [22, 23, 24] pueden encontrarse las propiedades fundamentales de estos cortes. Sin embargo, a continuación vamos a listar algunas de sus características:

- Globalmente los NCC son proyecciones de una sub-variedad suave bidimensional de Legendre a  $\mathcal{I}^+$ . Los cortes genéricos presentan un número finito de singularidades que pueden ser clasificadas como “cusps” y “swallowtails” [24]. Localmente los NCC son una 2-superficie suave en el infinito nulo.
- Los sistemas gravitacionales que pretendemos describir son fuentes compactas que se encuentran dentro del volumen de observación de aLIGO. Para estos sistemas es posible dar una descripción local de los cortes en un sistema de Bondi tal que

$$u_B = Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta}).$$

- En la ecuación anterior la función  $Z$  satisface

$$g^{ab} \partial_a Z \partial_b Z = 0, \tag{2.7}$$

- Los NCC transforman de una forma agradable ante una supertraslación  $\alpha(\zeta, \bar{\zeta})$ . Bajo una supertraslación  $u'_B = u_B + \alpha(\zeta, \bar{\zeta})$  y  $Z$  transforma como  $Z' = Z + \alpha$ . Sin embargo, ni la métrica conforme ni las ecuaciones de campo se ven afectadas por el cambio de  $Z$  ya que todos ellos dependen de las derivadas de  $Z$  respecto de las coordenadas del espaciotiempo.
- La construcción explícita de la métrica conforme es hecha primero seleccionando una familia  $(\zeta, \bar{\zeta})$  de coordenadas nula  $u = Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$ ,  $\omega = \eth Z$ ,  $\bar{\omega} = \bar{\eth} Z$ ,  $R = \bar{\eth}\eth Z$  y luego extrayendo las componentes de la métrica (2.7) aplicando sucesivas derivadas  $\eth, \bar{\eth}$  a (2.7).
- Se puede demostrar que todas las componentes no triviales de la métrica conforme son obtenidas en términos de las derivadas de una función  $\Lambda(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$  definida a partir de

$$\eth^2 Z = \Lambda(x^a, \zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.8)$$

donde esta función satisface la condición de realidad

$$\bar{\eth}^2 \Lambda = \eth^2 \bar{\Lambda}. \quad (2.9)$$

Esta ecuación se utiliza en el formalismo de las NSF para restringir el dato libre en las ecuaciones de campo.

- En general par cualquier  $x^a$  una función arbitraria  $Z(x^a, \zeta, \bar{\zeta})$  no puede reconstruir la métrica (2.7) ya que para cualquier  $x^a$  la ecuación (2.7) es una ecuación algebraica para nueve constantes mientras que visto que  $(\zeta, \bar{\zeta})$  puede tomar cualquier valor. De esta manera es necesario imponer condiciones a  $Z$  oara que la métrica exista, estas condiciones son llamadas condiciones de metricidad y están dadas por

$$\eth^3(g^{ab}(x)\partial_a Z\partial_b Z) = 0, \quad (2.10)$$

y deben ser satisfechas por  $Z$  antes de que se busque la métrica conforme.

- Utilizando el teorema de Sachs, se puede mostrar que  $\Lambda$  satisface

$$\Lambda = \sigma^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}) - \sigma_Z(Z, \eth Z, \bar{\eth} Z, \eth\bar{\eth} Z, \zeta, \bar{\zeta}) \quad (2.11)$$

donde  $\sigma^0$  es el shear de Bondi en el infinito nulo y  $\sigma_Z$  es el shear del cono nulo futuro de  $x^a$  evaluado en el infinito nulo [25].

Para obtener las ecuaciones dinámicas para  $Z$  se debe obtener primero una relación algebraica entre la métrica conforme del espaciotiempo y  $Z$  directamente a partir de (2.7). Entonces se puede construir el tensor de Ricci y Weyl e imponer las ecuaciones de Einstein [25, 26]. Además, asumiendo que el espaciotiempo es Ricci flat en la vecindad de  $\mathcal{I}^+$  se obtiene una ecuación para  $Z$  [25]

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z = \bar{\partial}^2 \sigma^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \Psi(Z, \zeta, \bar{\zeta})|_{l \geq 2} + \int_{\bar{\partial} \bar{\partial} Z}^{\infty} dr_B H[Z^2]|_{l \geq 2}, \quad (2.12)$$

donde el integrando de las integrales es expandido en esférico harmonicas con  $l \geq 2$ ,  $H[Z^2]$  representa las contribuciones cuadráticas en  $Z$  y el limite inferior en la segunda integral identifica el vértice del cono. Aquí  $\sigma^0(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$  es el dato libre de Bondi y se anulan conforme el vértice del cono se aproxima al infinito nulo. Esta ecuación es una ecuación local, sin embargo para desarrollar nuestro formalismo necesitamos tener soluciones globales, además debido a la presencia de cáusticas y autointersecciones un corte nulo dado a partir de (2.12) no corresponde a un corte de NU. En la siguiente sección vamos a regularizar esta ecuación para obtener familias de cortes de NU. La derivación de la ec. (2.12) involucra muchos detalles técnicos que aquí no daremos, sin embargo para poder continuar con nuestro objetivo central vamos a presentar una versión linealizada de esta ecuación.

### 2.3. NCC Regularizados

Como mencionamos anteriormente, la ec. de los NCC (2.12) no va a ser utilizada en forma completa, ya que deseamos utilizar la propiedades globales de las familias de cortes y no poseer problemas con cáusticas ni singularidades. A continuación, vamos a definir la parte regularizada de los cortes de luz como la versión linealizada de la ecuaciones de campo, esta la identificaremos como la parte Huygens de (2.12).

En el formalismo de los NSF se puede comenzar a orden lineal en  $\Lambda$  con

$$\square \Lambda = 0 \quad (2.13)$$

donde  $\square$  es el D'alambertiano en el espacio plano. Así  $\Lambda$  satisface los principios de Huygens y su solución solo depende del dato dado en el corte de cono nulo plano. Además si se imponen las condiciones de metricidad y la condición de realidad para  $\Lambda$  se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial u} [\bar{\partial}^2 \Lambda - \bar{\partial}^2 \sigma^0(u, \zeta, \bar{\zeta}) - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0(u, \zeta, \bar{\zeta})] = 0, \quad (2.14)$$

y como era de esperar esta ecuación es invariante ante supertraslaciones. Una manera alternativa de escribir esta ecuación es

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z = \bar{\partial}^2 \sigma^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 a_R(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (2.15)$$

donde hemos usado que  $\Lambda = \bar{\partial}^2 Z$  y donde  $a_R(\zeta, \bar{\zeta})$  es una función arbitraria que en principio puede ser absorbida en la definición de  $Z$ . Bajo una supertraslación esta ecuación no cambia debido a que  $a_R$  absorbe los términos extras con  $l \geq 2$  que provienen de  $\alpha(\zeta, \bar{\zeta})$ .

En lugar de encontrar la forma más general de la solución a la ecuación anterior vamos a enfocarnos en aquellos sistemas compactos que estamos interesados en dar una descripción. Principalmente nos gustaría describir las fuentes en el volumen de espacio que puede ser observado por aLIGO, tales como sistemas binarios cerrados, supernovas o kicks gravitacionales. Para esas situaciones es razonable suponer que el sistema es asintóticamente estacionario tanto en el pasado como en el futuro ya que la radiación que puede medir aLIGO es emitida en un intervalo corto de tiempo por estos sistemas. Por lo tanto, la parte imaginaria del shear se anula en  $u_B \rightarrow -\infty$  ya que el sistema se asume inicialmente estacionario. Además siempre se puede encontrar un sistema de Bondi para el cual la parte real del shear se anule en ese límite [27]. Este gauge es a menudo denominado como gauge de Newman-Penrose. De esta manera es posible restringir la libertades de supertraslaciones al subgrupo de la traslación. En este gauge particular, donde  $\sigma^0(-\infty, \zeta, \bar{\zeta}) = 0$  y  $a_R(\zeta, \bar{\zeta}) = 0$  se puede escribir que

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z = \bar{\partial}^2 \sigma^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0(Z, \zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.16)$$

Esta ecuación es ampliamente utilizada en esta tesis y la denominaremos como ecuación de los NCC regularizados. Esta fue derivada independientemente por de L. Mason [28] y por Frittelli y colaboradores [26].

La ecuación de los NCC regularizados, se puede resolver mediante la serie

$$Z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots, \quad (2.17)$$

de esta manera cada termino en la serie va a estar determinado por el anterior. Por ejemplo, los primeros dos términos satisfacen que

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z_0 = 0, \quad (2.18)$$

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z_1 = \bar{\partial}^2 \sigma^0(Z_0, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0(Z_0, \zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.19)$$

$$\bar{\partial}^2 \bar{\partial}^2 Z_2 = \bar{\partial}^2 \sigma^0(Z_1, \zeta, \bar{\zeta}) + \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0(Z_1, \zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.20)$$

El primer termino simplemente describe los cortes en Minkowski donde la solución esta dada por

$$Z_0 = x^a \ell_a, \quad x^a = (R^0, R^i), \quad \ell_a = (Y_0^0, -\frac{1}{2}Y_{1i}^0). \quad (2.21)$$

Los otros términos perturbativos están dados por

$$Z_1 = R^0 - \frac{1}{2}R^i Y_{1i}^0 + \frac{1}{12}\sigma_R^{ij} Y_{2ij}^0, \quad (2.22)$$

$$Z_2 = R^0 - \frac{1}{2}R^i Y_{1i}^0 + \left( \frac{1}{12}\sigma_R^{ij} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\dot{\sigma}_I^{jk} R^l e^{kli} - \frac{4}{7}\dot{\sigma}_R^{il}\sigma_R^{jl} \right) Y_{2ij}^0 \quad (2.23)$$

donde  $Y_0^0, Y_{1i}^0, Y_{2ij}^0, \dots$  representan los armónicos tensoriales con peso de spin [29], de ahora en más los subíndices  $I$  y  $R$  representan la parte imaginaria y real del shear respectivamente. Ahora bien, si  $x^a(u)$  describe cualquier trayectoria en el espacio de soluciones de los NCC regularizados, entonces la solución regular de la ec. (2.16) define una foliación de NU. Cabe mencionar que  $Z_1$  depende de la parte real del shear. Mientras que en el segundo orden de perturbación  $Z_2$  aparece la parte imaginaria del shear. Esto es un comportamiento esperable debido a que la parte imaginaria del shear de Bondi está relacionada con los momentos cuadrupolares de corriente mientras que la parte real se relaciona con los momentos cuadrupolares de masa [30].

El espacio de soluciones de esta ecuación es un espacio fiduciario de líneas mundo  $x^a$ . En este tesis solo vamos a considerar la parte regular y lineal de los cortes y vamos a trabajar en el espacio de soluciones de esta ecuación linealizada. La libertad que queda en esta ecuación es una lineamundo arbitraria en el espacio de soluciones. En los próximos capítulos, nos enfocaremos en como elegir una lineamundo que defina el centro de masa.

## 2.4. Factor conforme y operadores diferenciales

Antes de investigar como transforman los vectores nulos, es importante encontrar una relación entre los factores conformes de ambos sistemas. Esto es necesario ya que los operadores  $\bar{\delta}$  y  $\bar{\delta}$  de NU y Bondi estarán relacionados entre si, y esta relación se utilizará en las definiciones de momento angular y momento dipolar másico que se introducirán en los siguientes capítulos. Como se ha mencionado en la sección (1.5) el factor conforme de Bondi  $P_0 = 1 + \zeta\bar{\zeta}$ . Para encontrar el factor conforme del sistema NU es necesario partir de las métricas no físicas. Para ello de la definición de espacios asintóticamente simples tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ab} &= \Omega_B^2 g_{ab} \\ \hat{g}_{ab}^* &= \Omega_{NU}^2 g_{ab}\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde  $g_{ab}$  es la métrica física del espaciotiempo,  $\hat{g}_{ab}$  es la métrica no física de Bondi y  $\hat{g}_{ab}^*$  es la métrica no física de NU. A continuación designemos por  $V$  al cociente de funciones

$$\frac{\Omega_B}{\Omega_{NU}} = V\tag{2.25}$$

A partir de las ecuaciones (2.24) y (2.25) se puede escribir que

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ab}^* &= \frac{1}{V^2} \hat{g}_{ab} \\ \hat{g}^{*ab} &= V^2 \hat{g}^{ab}\end{aligned}\tag{2.26}$$

los vectores no físicos  $\hat{l}_a$  y  $\hat{l}_a^*$  satisfacen que

$$\hat{l}_a^* = l_a^*\tag{2.27}$$

$$\hat{l}_a = l_a\tag{2.28}$$

Utilizando entonces las relaciones de ortonormalidad de los vectores nulos se puede demostrar que la tétrada no física en  $\mathcal{S}$  tiene la forma

$$\begin{aligned}l_a^* &= \partial_a u = \frac{1}{Z'} l_a \\ \hat{n}_a^* &= \frac{1}{Z'} \hat{n}_a \\ \hat{m}_a^* &= \frac{1}{Z'} \hat{m}_a\end{aligned}$$

Cabe destacar que la primer ecuación indica que el parámetro afín en  $\mathcal{S}^+$  reescala como  $r = Z' r_B$ . A partir de estos vectores se puede expresar la métrica no física inducida en  $\mathcal{S}^+$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ab}^* dx^a dx^b &= \frac{1}{Z'^2} [2l_{(a} \hat{n}_{b)} - 2\hat{m}_{(a} \hat{m}_{b)}] dx^a dx^b \\ &= \frac{1}{Z'^2} \hat{g}_{ab} dx^a dx^b \\ &= \frac{1}{Z'^2} \frac{4d\zeta d\bar{\zeta}}{P_0^2}\end{aligned}$$

Comparando con la ecuación 1.1 se concluye que

$$V = Z' \tag{2.29}$$

$$P = Z' P_0. \tag{2.30}$$

A partir de la ec. (2.30) podemos hallar la relación entre los operadores diferenciales  $\bar{\partial}, \bar{\partial}$  con peso  $P$  y  $P_0$  aplicados a una función  $f(u, \zeta, \bar{\zeta})$  con peso de spin  $s$ . De ahora en más, llamaremos  $\bar{\partial}^*, \bar{\partial}^*$  a los operadores con peso conforme  $P = Z' P_0$ , y  $\bar{\partial}, \bar{\partial}$  a los operadores con  $P = P_0$ . Directamente de la definición (1.28) se puede mostrar que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^* f &= P^{1-s} \frac{\partial(P^s f)}{\partial\zeta} \\ &= (P_0 Z')^{1-s} \frac{\partial(P_0^s Z'^s f)}{\partial\zeta} \\ &= Z' P_0^{1-s} \frac{\partial(P_0^s f)}{\partial\zeta} + s P_0 f \frac{\partial Z'}{\partial\zeta} \\ &= Z' \bar{\partial} f + s f \bar{\partial} Z'.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Análogamente se puede demostrar a partir de (1.29) que

$$\bar{\partial}^* f = Z' \bar{\partial} f - s f \bar{\partial} Z'. \tag{2.32}$$

Estas derivadas se hacen manteniendo el tiempo  $u$  constante, esta transformación es necesaria ya que los esféricos armónicos tensoriales que se utilizarán posteriormente están definidos en la esfera, es decir con  $P = P_0$ , por lo tanto los operadores que actúan sobre ellos son  $\bar{\partial}, \bar{\partial}$ .

Por otra parte haciendo uso de la relación entre los tiempo de Bondi y de NU  $u = T(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$  es posible mostrar que para cualquier función  $f(u, \zeta, \bar{\zeta})$ , el operador  $\bar{\partial}$  con  $u_B$  constante en vez de  $u$  constante transforma como

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{(u_B)}^* f(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= P^{1-s} \left[ \frac{\partial(P^s f(u, \zeta, \bar{\zeta}))}{\partial \zeta} + \frac{\partial(P^s f(T(u_B, \zeta, \bar{\zeta}), \zeta, \bar{\zeta}))}{\partial T} \frac{\partial T(u_B, \zeta, \bar{\zeta})}{\partial \zeta} \right] \\ &= \bar{\partial}_{(u)}^* f + s f \frac{P'}{P} \bar{\partial}_{(u_B)}^* T + f' \bar{\partial}_{(u_B)}^* T\end{aligned}\quad (2.33)$$

Finalmente esta ecuación puede ser escrita como

$$\bar{\partial}_{(u_B)}^* f = \bar{\partial}^* f + s f \frac{P'}{P} \bar{\partial}_{(u_B)}^* T + f' \bar{\partial}_{(u_B)}^* T \quad (2.34)$$

donde  $P' = Z''$ . Análogamente para el operador  $\bar{\partial}^*$  se tiene la siguiente relación

$$\bar{\partial}_{(u_B)}^* f = \bar{\partial}^* f - s \frac{P'}{P} f \bar{\partial}_{(u_B)}^* T + f' \bar{\partial}_{(u_B)}^* T \quad (2.35)$$

Ahora si se restringe  $P = P_0 = 1 + \zeta \bar{\zeta}$  con lo cual  $P' = 0$ , entonces para la función  $f(u, \zeta, \bar{\zeta})$  se encuentra

$$\bar{\partial}_{(u_B)} f = \bar{\partial} f + f' \bar{\partial}_{(u_B)} T \quad (2.36)$$

$$\bar{\partial}_{(u_B)}^* f = \bar{\partial}^* f + f' \bar{\partial}_{(u_B)}^* T. \quad (2.37)$$

Donde hemos utilizado el hecho que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{(u)}^* f(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= \bar{\partial}^* f(u, \zeta, \bar{\zeta}) & \bar{\partial}_{(u)}^* f(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= \bar{\partial}^* f(u, \zeta, \bar{\zeta}) \\ \bar{\partial}_{(u)} f(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= \bar{\partial} f(u, \zeta, \bar{\zeta}) & \bar{\partial}_{(u)} f(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= \bar{\partial} f(u, \zeta, \bar{\zeta}).\end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones serán de mucha importancia en los capítulos siguientes.

## 2.5. Construcción de tétradas nulas

A continuación nos enfocaremos en construir dos bases de vectores nulos, una en NU y otra en Bondi. Para relacionar ambas bases de vectores debemos comenzar definiendo el primer elemento de la tétrada de Bondi y de la tétrada de NU a partir de

$$l_a = \nabla_a u_B \quad (2.38)$$

$$l_a^* = \nabla_a u = \nabla_a T(u_B, \zeta, \bar{\zeta}) \quad (2.39)$$

Luego, el resto de los vectores nulos se construyen siguiendo los pasos de la sección (1.2). De esta manera se obtienen dos bases  $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$  y  $(l^{*a}, n^{*a}, m^{*a}, \bar{m}^{*a})$  para el espaciotiempo. La métrica del espaciotiempo ec. (1.4) se puede expresar en termino de ambas tétradas como

$$g_{ab} = 2l_{(a}n_{b)} - 2m_{(a}\bar{m}_{b)} = 2l_{(a}^*n_{b)}^* - 2m_{(a}^*\bar{m}_{b)}^*. \quad (2.40)$$

Recordemos que el símbolo \* designa todas aquellas cantidades que se definan en el sistema NU.

Dado que ambas tétradas son base, es posible expandir una de de estas bases en términos de la otra. Nosotros vamos es expresar los vectores NU en términos de los de Bondi. Utilizando la ortonormalización de los vectores nulos se puede mostrar que entre dos tétradas cualesquiera se cumplen las siguientes relaciones algebraicas

$$\begin{aligned} l_a^* &= Al_a + B\bar{m}_a + \bar{B}m_a + \frac{B\bar{B}}{A}n_a \\ n_a^* &= A^{-1}n_a \\ m_a^* &= m_a + \frac{B}{A}n_a \\ \bar{m}_a^* &= \bar{m}_a + \frac{\bar{B}}{A}n_a \end{aligned} \quad (2.41)$$

Donde las funciones  $A, B, \bar{B}$  son funciones que deben ser determinadas. Cabe destacar que bajo el cambio  $u_B = Z(u)$ , los vectores  $l_a$  y  $n_a$  transformar según la forma [20]

$$\begin{aligned} l_a^* &\sim \dot{T}l_a \\ n_a^* &\sim \dot{T}^{-1}n_a \end{aligned} \quad (2.42)$$

Cuando  $u_B = Z(u, \zeta, \bar{\zeta})$  los términos proporcionales a  $B$  caen a cero como potencias inversas de  $r_B$  en  $\mathcal{S}^+$ . Además como todos los términos deben tener el mismo peso de spin de ambos lados de las igualdades se deduce que  $A = \dot{T}$  y  $B = \partial T/r_B$ , con lo cual  $l_a^*$  toma la forma

$$l_a^* = \dot{T} \left( l_a + \frac{\partial T}{\dot{T}r_B} \bar{m}_a + \frac{\bar{\partial} T}{\dot{T}r_B} m_a + \frac{\partial T \bar{\partial} T}{\dot{T}^2 r_B^2} n_a \right) \quad (2.43)$$

$$= \frac{1}{Z'} \left( l_a - \frac{L}{r_B} \bar{m}_a - \frac{L}{r_B} m_a + \frac{L\bar{L}}{r_B^2} n_a \right) \quad (2.44)$$

donde utilizando la notación introducida en la sección anterior se tiene que

$$L(u_B, \zeta, \bar{\zeta}) = -\frac{\bar{\partial}_{(u_B)}^* T}{\bar{I}} = \bar{\partial}_{(u)}^* Z(u, \zeta, \bar{\zeta}) \quad (2.45)$$

$$= \bar{\partial}^* Z(u, \zeta, \bar{\zeta}) \quad (2.46)$$

Finalmente la tétrada nula se puede expresar como

$$l_a^* = \frac{1}{Z'} \left( l_a - \frac{L}{r_B} \bar{m}_a - \frac{\bar{L}}{r_B} m_a + \frac{L\bar{L}}{r_B^2} n_a \right), \quad (2.47)$$

$$n_a^* = Z' n_a, \quad (2.48)$$

$$m_a^* = m_a - \frac{L}{r_B} n_a, \quad (2.49)$$

$$\bar{m}_a^* = \bar{m}_a - \frac{\bar{L}}{r_B} n_a, \quad (2.50)$$

## 2.6. Transformación de escalares

Una vez obtenida la relación entre las dos tétradas es necesario encontrar la ley de transformación entre los escalares de Weyl, los de Maxwell y el shear de cada sistema. Solo mostraremos el desarrollo para alguno de ellos ya que el procedimiento para encontrar dicha relación es análogo. Iniciando con el  $\psi_1^*$

$$\begin{aligned} \psi_1^* &= -C_{abc}{}^d l^{a*} n^{b*} l^{c*} m_d^* \\ &= -C_{abc}{}^d \left[ l^a - \frac{L}{r_B} \bar{m}^a - \frac{\bar{L}}{r_B} m^a + \frac{L\bar{L}}{r_B^2} n^a \right] n^b \frac{1}{Z'} \left[ l^c - \frac{L}{r_B} \bar{m}^c - \frac{\bar{L}}{r_B} m^c + \frac{L\bar{L}}{r_B^2} n^c \right] \left[ m_d - \frac{L}{r_B} n_d \right] \\ &= -\frac{C_{abc}{}^d}{Z'} \left[ l^a n^b l^c m_d - \frac{L}{r_B} (l^a n^b l^c n_d + l^a n^b \bar{m}^c m_d + \bar{m}^a n^b l^c m_d) \right. \\ &\quad \left. + \frac{L^2}{r_B^2} (\bar{m}^a n^b \bar{m}^c m_d + \bar{m}^a n^b l^c n_d + l^a n^b \bar{m}^c n_d) - \frac{L^3}{r_B^3} \bar{m}^a n^b \bar{m}^c n_d \right] \end{aligned}$$

De donde utilizando las propiedades del tensor de Weyl y a partir de las definiciones (1.19) se puede escribir que

$$\psi_1^* = \frac{1}{Z'} \left[ \psi_1 - 3 \frac{L}{r_B} \psi_2 + 3 \frac{L^2}{r_B^2} \psi_3 - \frac{L^3}{r_B^3} \psi_4 \right] \quad (2.51)$$

Utilizando el teorema de “peeling”

$$\begin{aligned}\psi_1^* \simeq \frac{\psi_1^{0*}}{r^4} &= \frac{1}{Z'} \left[ \frac{\psi_1^0}{r_B^4} - 3 \frac{L}{r_B} \frac{\psi_2^0}{r_B^3} + 3 \frac{L^2}{r_B^2} \frac{\psi_3^0}{r_B^2} - \frac{L^3}{r_B^3} \frac{\psi_4^0}{r_B} \right] \\ \frac{\psi_1^{0*}}{r^4} &= Z'^3 \left[ \frac{\psi_1^0}{Z'^4 r_B^4} - 3L \frac{\psi_2^0}{Z'^4 r_B^4} + 3L^2 \frac{\psi_3^0}{Z'^4 r_B^4} - L^3 \frac{\psi_4^0}{Z'^4 r_B^4} \right]\end{aligned}$$

además como  $r = Z' r_B$  se tiene que

$$\frac{\psi_1^{0*}}{Z'^3} = [\psi_1^0 - 3L\psi_2^0 + 3L^2\psi_3^0 - L^3\psi_4^0] \quad (2.52)$$

Esta ecuación es similar a la relación entre los escalares de Weyl cuando se realiza una rotación nula de  $l^a \rightarrow l^{*a}$  alrededor de  $n^a$  [10], a no ser por el factor  $Z'$ . Similarmente se puede hallar la transformación de todos los escalares y de los coeficientes de spin.

Finalmente colocamos el conjunto de las transformaciones más importantes.

*Escalares de Weyl*

$$\begin{aligned}\frac{\psi_0^{0*}}{Z'^3} &= \psi_0^0 - 4L\psi_1^0 + 6L^2\psi_2^0 - 4L^3\psi_3^0 + L^4\psi_4^0 \\ \frac{\psi_1^{0*}}{Z'^3} &= \psi_1^0 - 3L\psi_2^0 + 3L^2\psi_3^0 - L^3\psi_4^0 \\ \frac{\psi_2^{0*}}{Z'^3} &= \psi_2^0 - 2L^2\psi_3^0 + L^2\psi_4^0 \\ \frac{\psi_3^{0*}}{Z'^3} &= \psi_3^0 - L\psi_4^0 \\ \frac{\psi_4^{0*}}{Z'^3} &= \psi_4^0\end{aligned} \quad (2.53)$$

*Escalares de Maxwell*

$$\begin{aligned}\frac{\phi_0^{0*}}{Z'^2} &= \phi_0^0 - 2L\phi_1^0 + L^2\phi_2^0 \\ \frac{\phi_1^{0*}}{Z'^2} &= \phi_1^0 - L\phi_2^0 \\ \frac{\phi_2^{0*}}{Z'^2} &= \phi_2^0\end{aligned} \quad (2.54)$$

*Shear NU*

$$\frac{\sigma^{0*}}{Z'} = \sigma^0 - \delta^{*2} Z \quad (2.55)$$



# Capítulo 3

## Espaciotiempos de Einstein-Maxwell Axialmente Simétricos

En este capítulo comenzaremos con el caso mas sencillo de spaciotiempos asintóticamente planos: spaciotiempos de Einstein-Maxwell axialmente simétricos. Deseamos brindar una noción bien definida de spin y centro de masa que incluya tanto la radiación gravitacional como la contribución electromagnética a las ecuaciones de movimiento. Por otra parte, debido a que existe una simetría global, que está dada por el vector de Killing axial  $\xi_{(\varphi)}^a$  podemos utilizar para definir el momento angular y el spin alguna cantidad conservada asociada a dicho campo vectorial. En particular para este tipo de spaciotiempo y en vacío la integral de Komar brinda esta noción definida sin ningún tipo de ambigüedad.

### 3.1. Integral de Komar

Para un spaciotiempo axialmente simétrico es posible dar una definición simple y sin ambigüedad de momento angular [31]. Esta definición aprovecha la simetría global del spaciotiempo para escribir una cantidad conservada

$$J = \frac{1}{16\pi} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} \quad (3.1)$$

donde  $\xi_{(\varphi)}^a = \frac{\partial x^a}{\partial \phi}$  es un vector de Killing y la integral se evalúa en el límite cuando la 2-superficie  $S$  tiende a infinito[32].

A continuación deseamos generalizar esta integral para que tenga en cuenta la contribución electromagnética al momento angular. Para ello partiendo de la definición (3.1) y usando el teorema de Stokes se puede escribir que

$$\oint_S \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} = 2 \int_{\Sigma} R_{ab} \xi_{(\varphi)}^b d\Sigma^a \quad (3.2)$$

donde se ha usado el hecho que el vector de Killing satisface  $\nabla^c \nabla_c \xi^a = -R^a_b \xi^b$ . Utilizando las ecuaciones de Einstein se puede reemplazar el tensor de Ricci por el tensor de stress-energía  $T_{ab}$ , por tanto, a partir de la ecuación (3.2) se puede expresar la integral (3.1) como

$$\oint_S \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} = 16\pi \int_{\Sigma} (T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) \xi_{(\varphi)}^b d\Sigma^a \quad (3.3)$$

Recordemos que estamos interesados en obtener una definición momento angular que involucre la contribución electromagnética. Para ello vamos a sustituir el tensor de stress-energía de Maxwell  $T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd})$  en la ecuación anterior

$$\oint_S \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} = 4 \int_{\Sigma} (F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd}) \xi_{(\varphi)}^b d\Sigma^a \quad (3.4)$$

$$= 4 \int_{\Sigma} F_a^c F_{bc} \xi_{(\varphi)}^b d\Sigma^a \quad (3.5)$$

$$= 4 \int_{\Sigma} F_a^c (\nabla_b A_c - \nabla_c A_b) \xi_{(\varphi)}^b d\Sigma^a \quad (3.6)$$

Donde en la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que  $g_{ab} \xi_{(\varphi)}^b d\Sigma^a = 0$ , ya que  $\xi_{(\varphi)}^b$  es proporcional a las direcciones  $x^2, x^3$  y  $d\Sigma^a$  depende del vector normal a la superficie  $n^{*a}$ , por lo tanto la contracción con la métrica (1.4) es cero. Además debido a la simetría axial del espaciotiempo, el potencial de Maxwell es simétrico axial y dado que los campos que llegan a  $\mathcal{S}^+$  son puramente radiación, se tiene que la derivada de Lie  $\mathcal{L}_{\varphi} A_c = 0$

$$\xi_{(\varphi)}^b \nabla_b A_c + A_b \nabla_c \xi_{(\varphi)}^b = 0 \quad (3.7)$$

además para campos de Maxwell se tiene que

$$\nabla^c F_{ac} = 0. \quad (3.8)$$

De esta manera la integral (3.6) puede ser escrita como

$$\oint_S \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} = -4 \int_{\Sigma} \nabla_c (A_b \xi_{(\varphi)}^b F_a{}^c) d\Sigma^a. \quad (3.9)$$

Finalmente usando Stokes una vez más se obtiene que

$$-4 \int_{\Sigma} \nabla_c (A_b \xi_{(\varphi)}^b F^{ac}) d\Sigma_a = -2 \oint_S A_b \xi_{(\varphi)}^b F^{ac} dS_{ac}. \quad (3.10)$$

lo que demuestra que

$$\oint_{\partial\Sigma^+} [\nabla^a \xi_{(\varphi)}^b + 2A_c \xi_{(\varphi)}^c F^{ab}] dS_{ab} = \oint_{\partial\Sigma^-} [\nabla^a \xi_{(\varphi)}^b + 2A_c \xi_{(\varphi)}^c F^{ab}] dS_{ab} \quad (3.11)$$

Como las fronteras son arbitrarias, la integral the integral (3.11) es constante en el infinito nulo. Finalmente definimos el momento angular total del sistema como

$$\begin{aligned} J_T &= \frac{1}{16\pi} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S [\nabla^a \xi_{(\varphi)}^b + 2A_c \xi_{(\varphi)}^c F^{ab}] dS_{ab} \\ J_T &= J + J_{EM} \end{aligned} \quad (3.12)$$

esta integral se toma sobre cualquier 2-superficie. El primer integrando es el término gravitacional original  $J$  (3.1), mientras que el segundo corresponde a la contribución electromagnética  $J_{EM}$ .

## 3.2. Komar en el formalismo de NP

Usando el formalismo NP se puede expresar el momento angular total (3.12) en término de los coeficientes de spin y de los escalares de Weyl. Esto se puede realizar tanto en coordenadas NU como en coordenadas de Bondi, dado que la integral permanece constante en cualquiera de los dos cortes. Sin embargo por simplicidad vamos a realizar el cálculo en coordenadas de Bondi. Para ello es necesario expresar el vector de Killing en términos de los vectores de la tetra de Bondi. Por otra parte como los vectores complejos  $m^a$  y  $\bar{m}^a$  tienen componente en la dirección  $x^1$  debemos quitar la contribución a lo largo de la dirección  $l^a$  para que el vector de killing sea proporcional solo a las direcciones  $x^2$  y  $x^3$ . De esta manera podemos escribir que

$$\xi_{(\varphi)}^b = -(ar_B \bar{\omega} + \bar{a}r_B \omega) l^b + ar_B \bar{m}^b + \bar{a}r_B m^b \quad (3.13)$$

donde  $a = a(\zeta, \bar{\zeta})$  con  $\bar{\delta}a = 0$ . Por otra parte, el elemento de superficie  $dS_{ab}$  esta dado como

$$dS_{ab} = -2l_{[a}n_{b]}r_B^2 d\Omega. \quad (3.14)$$

Estas dos ecuaciones se pueden introducir directamente en el integrando de la ec. (3.12) para obtener la relación buscada. Inicialmente vamos a trabajar sobre la contribución gravitatoria dada por la integral

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} = -2 \lim_{r_B \rightarrow \infty} \int \nabla^a [-(ar_B \bar{\omega} + \bar{a}r_B \omega)l^b + ar_B \bar{m}^b + \bar{a}r_B m^b] l_{[a}n_{b]}r_B^2 d\Omega. \quad (3.15)$$

donde se han introducido las ecuaciones (4.1) y (3.14). Simplificando esta integral y expresando el resultado en término de los coeficientes de spin (Sec. 1.3), se encuentra que [33]

$$\begin{aligned} \int \nabla^a \xi_{(\varphi)}^b dS_{ab} &= \int \left( a(\bar{\sigma}^0 \omega^0 + \bar{\psi}_1^0/2)r_B^{-2} + \bar{a}(\sigma^0 \bar{\omega}^0 + \psi_1^0/2)r_B^{-2} + a \frac{\bar{\psi}_1^0}{2r_B^2} + \bar{a} \frac{\psi_1^0}{2r_B^2} \right) r_B^2 d\Omega \\ &= \int \left( a(\bar{\sigma}^0 \omega^0 + \bar{\psi}_1^0/2) + \bar{a}(\sigma^0 \bar{\omega}^0 + \psi_1^0/2) + a \frac{\bar{\psi}_1^0}{2} + \bar{a} \frac{\psi_1^0}{2} \right) d\Omega \\ &= \int [a(\bar{\psi}_1^0 - \bar{\sigma}^0 \bar{\delta}\sigma^0) + \bar{a}(\psi_1^0 - \sigma^0 \delta\bar{\sigma}^0)] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cabe destacar, que al introducir los coeficientes de spin que caen como potencias inversas de  $r_B$ , solo contribuirán aquellos términos que caigan como  $1/r_B^2$  ya que términos con un decaimiento mayor van a cero en el limite.

Ahora, para trabajar sobre la contribución electromagnética es necesario expresar el tensor de Maxwell  $F_{ab}$  en términos de los escalares de Maxwell de la siguiente manera

$$F_{bc} = 2\phi_0 \bar{m}_{[b}n_{c]} + \phi_1 (n_{[b}l_{c]} + m_{[b}\bar{m}_{c]}) + 2\phi_2 l_{[b}m_{c]} \quad (3.17)$$

La contribución de  $F_{bc}$  en la integral de Komar toma la forma

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow \infty} \oint_S 2A_c \xi_{(\varphi)}^c F^{ab} dS_{ab} &= -4 \lim_{r_B \rightarrow \infty} \int A_c \xi_{(\varphi)}^c [2\phi_0 \bar{m}_{[a}n_{b]} + \phi_1 (n_{[a}l_{b]} + m_{[a}\bar{m}_{b]}) \\ &\quad + 2\phi_2 l_{[a}m_{b]})] l^{[a}n^{b]} r_B^2 d\Omega \\ &= -2 \lim_{r_B \rightarrow \infty} \int A_c \xi_{(\varphi)}^c \phi_1 r_B^2 d\Omega \\ &= -2 \lim_{r_B \rightarrow \infty} \int A_c [-(a\bar{\omega} + \bar{a}\omega)l^c + a\bar{m}^c + \bar{a}m^c] \phi_1^0 r_B d\Omega \\ &= -2 \int [a\bar{A}^0 + \bar{a}A^0] \phi_1^0 d\Omega \end{aligned} \quad (3.18)$$

con

$$\lim_{r_B \rightarrow \infty} r_B A_c(m^c - \omega l^c) = A^0, \quad (3.19)$$

donde  $A^0(u_B, \zeta, \bar{\zeta})$  es dato libre del potencial de Maxwell que se relaciona con la radiación electromagnética mediante

$$\bar{\phi}_2^0 = \frac{1}{2} A^0. \quad (3.20)$$

Finalmente el momento angular (3.12) se puede expresar como

$$J_T = \frac{1}{8\pi} Re \int [\bar{a}(\psi_1^0 - \sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - 2A^0 \phi_1^0)] d\Omega \quad (3.21)$$

en esta ecuación  $a = ia^i Y_{1i}^1$  donde  $a^i$  son tres constantes reales [34] y  $Y_{1i}^1$  es un armónico tensorial con peso de spin 1 [29].

### 3.3. Definición de centro de masa

A partir de la ecuación (3.21) tenemos una definición concisa del momento angular. Ahora, tenemos que dar una definición para el centro de masa, para ello vamos introducir el momento dipolar másico.

En mecánica Newtoniana, el momento dipolar másico y el momento angular no tienen relación alguna, sin embargo en Relatividad Especial (RE) forman parte del mismo tensor [9]. En espaciotiempo estacionarios el shear es cero por lo que el momento angular está dado por la parte imaginaria de la componente  $l = 1$  de  $\psi_1^0$ , es decir  $[\psi_1^0]^i$  y teniendo en mente RE es natural asumir que el momento dipolar másico esta dado por la parte real de  $\psi_1^0$ . En claro que en espaciotiempos planos, estas definiciones coinciden con las utilizadas por otros autores en el caso de gravedad linearizada [10].

Es claro que la integral de Komar no brinda información a cerca de la parte real del integrando (3.21), además para el caso axisimétrico la parte real de  $[\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0]^i$  es cero. Por lo tanto podemos definir el momento dipolar másico utilizando la definición usual en gravedad linearizada. En otras palabras, la manera más simple es definir el momento

dipolar másico como [33],

$$D^{i*} = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G} \text{Re} \left[ \frac{\psi_1^{0*}}{Z'^3} \right]^i \quad (3.22)$$

$$D^i = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G} \text{Re}[\psi_1^0]^i \quad (3.23)$$

Cabe destacar que la definición de  $D^i$  y  $D^{i*}$  es una definición puramente cinemática ya que no contienen términos proporcionales a  $\sigma^0$ . A partir de estas cantidades buscamos definir el centro de masa.

Por suposición el espaciotiempo tiene simetría axial, asumiremos que el centro de masa esta dado por una lineamundo  $x^a(u)$  (en el sentido descrito en la sec. (2.3)) a lo largo del del eje de simetría, llamado eje  $z$ . La idea básica de nuestra definición de centro de masa es comenzar con el momento dipolar másico en el sistema de NU, hallar la ecuación de transformación a un sistema de Bondi y pedir que el momento dipolar se anule en  $u = cte$ , es decir  $D^{i*} = 0|_{u=cte}$  [33]. Para obtener el orden dominante de las ecuaciones de movimiento solo necesitamos utilizar la perturbación a primer orden de la parte Huygens de los NCC regularizados (2.16), es decir que comenzamos escribiendo que

$$Z_1(u, \zeta, \bar{\zeta}) = R^0(u) - \frac{1}{2}R^i(u)Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{1}{12}\sigma_R^{ij}(u)Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{1}{60}\sigma_R^{ijk}(u)Y_{3ijk}^0(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (3.24)$$

para velocidades pequeña se tiene que  $R^0(u) = u + O(v^2)$  con lo cual podemos escribir que

$$\begin{aligned} Z_1(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= u + \delta u, \\ \delta u &= -\frac{1}{2}R^i(u)Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{1}{12}\sigma_R^{ij}(u)Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{1}{60}\sigma_R^{ijk}(u)Y_{3ijk}^0(\zeta, \bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Donde  $\sigma_R^{ij}$  y  $\sigma_R^{ijk}$  corresponden a la parte real del momento cuadrupolar y octupolar del shear definidos mediante la ecuación

$$\sigma^0 = \sigma^{ij}(u)Y_{2ij}^2(\zeta, \bar{\zeta}) + \sigma^{ijk}(u)Y_{3ijk}^2(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (3.26)$$

En espaciotiempos asintóticamente planos axialmente simétricos es necesario utilizar la parte octupolar del shear para que el momento de Bondi no sea una cantidad conservada,

es decir que  $P^{i'} \neq 0$ . Por otra parte, debido a que nuestra definición de centro de masa es pedir que el momento dipolar se anule en  $u = cte$ , es necesario hacer una expansión de Taylor al r.h.s de la ecuación (2.52) para tener la misma dependencia temporal en ambos lados de la igualdad, con lo cual

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\psi_1^{0*}}{Z'^3} \right]^i &= \psi_1^{0i}(u + \delta u) - 3[\eth\delta u \psi_2^0(u + \delta u)]^i \\ &= \psi_1^{0i}(u) + [\psi_1^{0'}(u)\delta u]^i - 3[\eth\delta u \psi_2^0(u)]^i \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde por simplicidad hemos conservado solo términos lineales en  $\delta u$  y en sus derivadas. A continuación debemos obtener una expresión para  $\psi_1^{0'}(u)$ . Para ello partimos del lado izquierdo de la identidad (1.32) y la escribimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1^0(u_B) &= \frac{\partial \psi_1^0(u_B)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u_B} \\ &= \frac{\psi_1^{0'}(u_B)}{Z'}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

reemplazamos  $\psi_1^{0'}(u_B) = \psi_1^{0'}(u + \delta u)$  y hacemos una expansión de Taylor a orden lineal en  $\delta u$ . Además para baja velocidad se tiene que  $Z^{-1'} = 1 - \delta u'$ , sustituyendo todo en la última ecuación se obtiene que

$$\dot{\psi}_1^0(u_B) = \psi_1^{0'}(u) + \psi_1^{0''}(u)\delta u - \psi_1^{0'}(u)\delta u' - \psi_1^{0''}(u)\delta u\delta u' \quad (3.29)$$

Como por simplicidad estamos trabajando a orden lineal en  $\delta u$  y en sus derivadas, solo vamos a conservar el orden cero de esta última expansión. Es decir que vamos a sustituir  $\psi_1^{0'}(u) = \dot{\psi}_1^0(u_B)$  en la ec. (3.27) y así utilizar la identidad de Bianchi para  $\psi_1^0$ . simplemente reemplazando en el lado derecho de (1.32)  $u_B$  por  $u$  y el punto por la prima. Finalmente en término del aspecto de masa  $\Psi$  la ec. (3.27) toma la forma

$$\left[ \frac{\psi_1^{0*}}{Z'^3} \right]^i = \psi_1^{0i} - [(\eth\Psi - \eth^3\bar{\sigma}^0)\delta u + 3\eth\delta u(\Psi - \eth^2\bar{\sigma}^0)]^i. \quad (3.30)$$

En término del momento dipolar másico se puede escribir

$$D^{i*} = D^i - [(\eth\Psi - \eth^3\bar{\sigma}^0)\delta u + 3\eth\delta u(\Psi - \eth^2\bar{\sigma}^0)]^i \quad (3.31)$$

Insertando en esta ecuación la siguiente expansión en armónicos

$$\begin{aligned}
\sigma^0 &= \sigma^{ij} Y_{2ij}^2(\zeta, \bar{\zeta}) + \sigma^{ijk} Y_{3ijk}^2(\zeta, \bar{\zeta}) \\
\psi_1^0 &= \psi_1^{0i} Y_{1i}^1(\zeta, \bar{\zeta}) + \psi_1^{0ij} Y_{2ij}^1(\zeta, \bar{\zeta}) \\
\Psi &= -\frac{2\sqrt{2}G}{c^2} M - \frac{6G}{c^3} P^i Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \Psi^{ij} Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}) \\
\phi_0^0 &= \phi_0^{0i} Y_{1i}^1(\zeta, \bar{\zeta}) \\
\phi_1^0 &= Q + \phi_1^{0i} Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) \\
\phi_2^0 &= \phi_2^{0i} Y_{1i}^{-1}(\zeta, \bar{\zeta}),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

tomando la parte real de la componente  $l = 1$  y poniendo  $D^{*i} = 0$  se obtiene

$$MR^i = D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{ij} P^j. \tag{3.33}$$

Si calculamos  $D^i$  de un sistema compuesto por varias fuentes, en ausencia de radiación, con masas  $m_A$  y posiciones  $R_A^i$  obtendríamos la expresión usual para el centro de masa

$$\sum_A m_A X_A^i = MR^i \quad \text{con} \quad M = \sum_A m_A. \tag{3.34}$$

Debido a la simetría axial todas las cantidades vectoriales están alineadas con el eje de simetría  $z$  y las variables tensoriales son simétricas y de traza nula. Con esto en mente se puede obtener la forma simplificada de las ecuaciones

$$MR^z = D^z + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{zz} P^z. \tag{3.35}$$

El momento angular del sistema esta dado por la integral de Komar (3.21) con lo que

$$J^z = S^z = -\frac{c^3}{6\sqrt{2}G} \text{Im}[\psi_1^0 - \sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \frac{2G}{c^3} A^0 \phi_1^0]^z. \tag{3.36}$$

### 3.4. Ecuaciones de movimiento

Para obtener la relación entre la velocidad del centro de masa y el momento lineal de Bondi hay que tomar la derivada de la ecuación (3.35). Sin embargo, para obtener los factores numéricos correctos en las expresiones finales debemos insertar un factor

$\sqrt{2}$  y expresar los resultados en términos del tiempo retardado  $u_{ret} = \sqrt{2}u$  [10]. La utilización del tiempo retardado es importante ya que corrige los factores  $\sqrt{2}$  en las derivadas temporales, de esta forma se puede escribir que

$$MR^{z'} = D^{z'} + \frac{8}{5\sqrt{2}c}(\sigma_R^{zz}P^z)'. \quad (3.37)$$

De ahora en más solo vamos a retener términos cuadráticos en el shear y cuadráticos en los campos de Maxwell debido a que la nuestra definición de momento angular a través de la integral de Komar es cuadrática en  $\sigma^0$  y en Maxwell. De esta manera la ec. (3.37) puede se reescrita como

$$MR^{z'} = D^{z'} + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{zz'}P_0^z, \quad (3.38)$$

donde  $P_0^z$  corresponde a el momento inicial del centro de masa ya que hemos depreciado la parte cuadrática en el shear de  $P^z$ . Es decir que de la ecuación (1.36)  $P^i = [\int \sigma^{0'}\bar{\sigma}^{0'} du]^i + P_0^i$ . Sin perdida de generalidad podríamos suponer que la velocidad inicial  $V_0^z = 0$ , con lo que a orden cero en sigma  $P_0^z = MV_0^z = 0$ , y el segundo término de esta ecuación sería nulo. Sin embargo vamos a retenerlo para contemplar el caso de que la velocidad inicial del sistema sea pequeña pero distinta de cero.

A partir de la ecuación (1.32) y utilizando el mismo razonamiento seguido para obtener 3.29 se encuentra que

$$D^{z'} = P^z + \frac{3\sqrt{2}c^2}{14G}(\sigma_R^{zjk'}\sigma_R^{jk} - \sigma_R^{jk'}\sigma_R^{zjk} + \sigma_I^{zjk'}\sigma_I^{jk} - \sigma_I^{jk'}\sigma_I^{zjk}) - \frac{1}{3c}Q\phi_{2R}^{0z} \quad (3.39)$$

Combinando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} MR^{z'} &= P^z + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{zz'}P_0^z + \frac{3\sqrt{2}c^2}{14G}(\sigma_R^{zjk'}\sigma_R^{jk} - \sigma_R^{jk'}\sigma_R^{zjk}) \\ &+ \frac{3\sqrt{2}c^2}{14G}(\sigma_I^{zjk'}\sigma_I^{jk} - \sigma_I^{jk'}\sigma_I^{zjk}) - \frac{1}{3c}Q\phi_{2R}^{0z} \end{aligned} \quad (3.40)$$

La ecuación de movimiento para el centro de masa se obtiene al tomar una derivada más de (3.40), para ello es necesario evaluar  $P^{z'}$  a partir de la ec. (1.36). Nuevamente para pequeñas desviaciones se puede reemplazar el punto por la prima y  $u_B$  por  $u$  en la identidad (1.36) con lo cual se tiene

$$P^{z'} = -\frac{\sqrt{2}c^2}{7G}(\sigma_R^{jk'}\sigma_R^{zjk'} + \sigma_I^{jk'}\sigma_I^{zjk'}) \quad (3.41)$$

además la componente  $l = 0$  de (1.36) da la ecuación para la pérdida de masa

$$M' = -\frac{c}{10G}(\sigma_R^{ij'}\sigma_R^{ij'} + \sigma_I^{ij'}\sigma_I^{ij'}) - \frac{3c}{7G}(\sigma_R^{ijk'}\sigma_R^{ijk'} + \sigma_I^{ijk'}\sigma_I^{ijk'}) - \frac{1}{6c}(\phi_{2R}^{0i}\phi_{2R}^{0i} + \phi_{2I}^{0i}\phi_{2I}^{0i}). \quad (3.42)$$

Finalmente combinando estas dos ecuaciones se puede escribir que

$$MR^{z''} = -\frac{\sqrt{2}c^2}{7G}(\sigma_R^{jk'}\sigma_R^{zjk'} + \sigma_I^{jk'}\sigma_I^{zjk'}) + \frac{3\sqrt{2}c^2}{14G}(\sigma_R^{zjk''}\sigma_R^{jk} - \sigma_R^{jk''}\sigma_R^{ijk}) + \frac{3\sqrt{2}c^2}{14G}(\sigma_I^{zjk''}\sigma_I^{jk} - \sigma_I^{jk''}\sigma_I^{zjk}) + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{zz''}P_0^z - \frac{1}{3c}Q\phi_{2R}^{0z'} \quad (3.43)$$

Por otra parte, en virtud de la integral de Komar se sabe que

$$J^{i'} = S^{i'} = 0 \quad (3.44)$$

Cabe mencionar que  $\sigma_R^{ij} = h_+^{ij}$  y  $\sigma_I^{ij} = h_-^{ij}$  en el TT-gauge [35]. Las ecuaciones obtenidas en este capítulo dan la descripción completa del movimiento del centro de masa en espaciotiempos axialmente simétricos.

## 3.5. Ejemplos y Aplicaciones

En esta sección vamos a chequear nuestro formalismo con dos ejemplos sencillos para verificar nuestras ecuaciones. El primero de los ejemplos es un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico, mientras que el segundo es gravedad linealizada.

### 3.5.1. Espaciotiempo de Kerr

Consideremos inicialmente la métrica de Kerr; es claro que al tratarse de un espaciotiempo estacionario, todas las derivadas temporales son nulas. Además se espera que el shear  $\sigma^0 = 0$  ya que es independiente del tiempo y puede ser fijado en  $-\infty$  como cero, lo que indica que  $\sigma^0 = 0$  para todo  $u$ . Por otra parte a partir de la ecuación (1.30) se tiene que  $P^i = 0$ . Estos resultados se pueden demostrar a partir del cálculo explícito de los escalares de Weyl y los coeficientes de spin en coordenadas Boyer-Lindquist o algún

otro tipo de coordenada asintótica [36]. Siguiendo esta referencia podemos escribir los escalares

$$\psi_2^0 = \frac{-2\sqrt{2}G}{c^2}M \quad (3.45)$$

$$\psi_1^0 = \frac{-6i\sqrt{2}G}{c^3}aM \quad (3.46)$$

$$\sigma^0 = 0 \quad (3.47)$$

donde  $a$  es el parámetro angular. A partir de estos escalares y utilizando nuestra definición de momento dipolar másico y momento angular se tiene que

$$J^z = S^z = aM \quad (3.48)$$

$$MR^i = 0 \quad (3.49)$$

$$(3.50)$$

Estas ecuaciones recupera el resultado conocido para el momento angular de Kerr ya que se trata de la integral de Komar, mientras que la segunda ecuación muestra que el centro de masa está en el origen del espacio de soluciones.

### 3.5.2. Gravedad linealizada

Como segundo ejemplo vamos a hacer una linealización de las ecuaciones de Einstein. Asumiendo que la radiación gravitacional es débil, podemos considerar a  $\sigma^0$  y a  $\sigma^{0'}$  como pequeños y por simplicidad suponemos que no hay radiación electromagnética. Manteniendo el orden lineal en las identidades de Bianchi se puede escribir que

$$\psi_1^{0'} = -\bar{\delta}\Psi + \bar{\delta}^3\bar{\sigma}^0 \quad (3.51)$$

$$\Psi' = 0 \quad (3.52)$$

En gravedad linealizada el centro de masa y el momento angular [10] pueden definirse como

$$D^i = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G}\psi_{1R}^0 \quad (3.53)$$

$$J^i = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G}\psi_{1I}^0 \quad (3.54)$$

La version linealizada de la ecuación 3.31 toma la forma

$$D^{i*} = D^i - 3[\partial\delta u\Psi]^i \quad (3.55)$$

de donde utilizando nuestra definición de centro de masa  $D^{*i} = 0|_{u=cte} = 0$  y haciendo una expansión en esféricos armónicos se tiene

$$MR^i = D^i \quad (3.56)$$

$$J^i = S^i \quad (3.57)$$

Además a partir de las identidades de Bianchi linealizadas se obtiene las expresiones cinemática del momento lineal y momento angular

$$MR^{i'} = P^i \quad (3.58)$$

$$J^{i'} = 0 \quad (3.59)$$

derivando una vez mas la ecuación para  $P^i$  se obtiene una ecuación de movimiento trivial para la aceleración del centro de masa.

$$MR^{i''} = 0 \quad (3.60)$$

debido a que las contribuciones radiactivas son cuadráticas es claro que en gravedad linealizada el centro de masa no se acelera.

## Capítulo 4

# Spin y Centro de Masa en Espaciotiempos Asintóticamente Planos

En el capítulo introducimos la noción de momento dipolar másico en espaciotiempos axialmente simétricos, donde el momento angular y spin fue definido utilizando la integral de Komar y el centro de masa se definió a partir de un campo asintótico. Lo que deseamos es generalizar estas definiciones para espaciotiempos sin simetrías globales.

Existe en la bibliografía un gran número de definiciones de momento angular [8], estas se diferencian en factores numéricos, en las correcciones cuadráticas del shear, etc. En particular nosotros vamos a utilizar la definición de Winicour [37] debido a que es la generalización mas simple de la integral del Komar. Por otra parte es bien sabido que en relatividad especial, el momento angular y el momento dipolar másico forman parte de un mismo tensor, así como el campo eléctrico y magnético forman parte del  $F_{ab}$ . Por esta razón no es posible definir una noción de momento angular sin definir simultáneamente un momento dipolar y viceversa.

## 4.1. Linkage y Killing asintótico

En esta sección comenzamos a describir el momento angular en espaciotiempos asintóticamente planos que no poseen simetrías globales. La idea es introducir inicialmente la noción de vectores de Killing asintóticos y luego introducir una generalización de la integral de Komar a través de los linkages de Winicour-Tamburino [38].

La simetría asintótica  $\xi^a$  se introduce en la vecindad de  $\mathcal{I}^+$  como una solución suave de la ecuación asintótica de Killing [13]

$$\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b = O(r^{-n}) \quad (4.1)$$

$$(\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b) l^{b*} = 0 \quad (4.2)$$

Aquí  $l^{*a}$  es el vector tangente a los generadores de cada hipersuperficie nula en  $\hat{\mathcal{M}}$  y el índice  $n$  difiere con la elección de las componentes [19]. La segunda ecuación corresponde a la ley de propagación a lo largo de la hipersuperficie nula [37]. En  $\mathcal{I}^+$  la colección de todas las soluciones forman el algebra de BMS  $\mathcal{L}$  [18]. Cuando  $\xi^a \propto n^a$  se define la subalgebra de las supertraslaciones  $\mathcal{T}$  y el cociente  $\mathcal{L}/\mathcal{T}$  es isomórfico al grupo de Lorentz [13]. Esta subalgebra es realizada mediante clases de equivalencia  $[\xi^a]$  donde  $\xi^a \sim \xi'^a$  si  $\xi^a - \xi'^a \propto n^{a*}$ . Las ecuaciones (4.1) and (4.2) pueden ser resueltas por integración directa empleando los coeficientes de spin de la sección 1.23 [39]. Finalmente el vector asintótico de Killing puede ser escrito como [40]

$$\begin{aligned} \xi^a = & (A + B\bar{\omega}^* \omega^* + C\bar{\omega}^* + \bar{C}\omega^*) l^{a*} + B n^{a*} \\ & + (C + B\omega^*) \bar{m}^{a*} + (\bar{C} + B\bar{\omega}^*) m^{a*} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= A_1 r + A_0 + A_{-1} r^{-1} + O(r^{-2}) \\ B &= B_0 \\ C &= C_1 r + C_0 + C_{-1} r^{-1} + O(r^{-2}) \\ \omega^* &= -(\bar{\partial}^* \sigma^{0*}) r^{-1} + O(r^{-2}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A_1 &= -(1/V)(B_0V)', \\
A_0 &= \bar{\partial}^* \bar{\partial}^* B_0 + B_0 \bar{\partial}^* \bar{\partial}^* \ln P, \\
A_{-1} &= \frac{1}{2}[B_0(\psi_2^{0*} + \bar{\psi}_2^{0*}) + \bar{C}_1 \psi_1^{0*} + C_1 \bar{\psi}_1^{0*}], \\
C_1 &= a(\zeta, \bar{\zeta})/V, \quad \text{with } \bar{\partial}a = 0, \\
C_0 &= \bar{\partial}^* B_0 + \bar{C}_1 \sigma^{0*}, \\
C_{-1} &= 0, \\
B_0 &= b(\zeta, \bar{\zeta})/V - (1/2V) \int_0^u V^3 [\bar{\partial}(\bar{a}V^{-2}) + \bar{\partial}(aV^{-2})] du.
\end{aligned}$$

Donde  $V = \frac{\partial u_B}{\partial u}$  representa la desviación de los cortes de NU respecto a cortes de Bondi [39]. Cabe destacar que la únicas libertades restante en la solución corresponden a la función arbitraria de la esfera  $b(\zeta, \bar{\zeta})$ . Esta libertad es la que origina las supertranslaciones. Y donde  $\bar{\partial}a = 0$  corresponde a la libertad en las transformaciones homogéneas de Lorentz [41] y  $\bar{\partial}$  es el operador diferencial en Bondi. Para un sistema de Bondi  $V = 1$  y las ecuaciones se reducen a [39]

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\dot{B}_0 \\
A_0 &= \bar{\partial}\bar{\partial}B_0 + B_0\bar{\partial}\bar{\partial}\ln P_0 \\
A_{-1} &= \frac{1}{2}[B_0(\psi_2^0 + \bar{\psi}_2^0) + \bar{C}_1\psi_1^0 + C_1\bar{\psi}_1^0] \\
C_1 &= a(\zeta, \bar{\zeta}) \\
C_0 &= \bar{\partial}B_0 + \bar{C}_1\sigma^0 \\
C_{-1} &= 0 \\
B_0 &= b(\zeta, \bar{\zeta}) - ku
\end{aligned}$$

donde  $k = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}a + \bar{\partial}\bar{a})$  es el factor conforme infinitesimal [41]. Para más detalles acerca de este calculo se puede consultar las referencias [37, 39]. Finalmente la integral del linkage puede escribirle como

$$L_\xi(\mathcal{I}^+) = \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int (\nabla^{[a}\xi^{b]} + \nabla_c \xi^c l^{*[a} n^{*b]}) l_a^* n_b^* r^2 d\Omega, \quad (4.4)$$

Utilizando la dependencia radial de los coeficientes de Spin y de los escalares de Weyl,

se puede mostrar que [39]

$$L_{\xi}(\mathcal{I}^+) = \frac{1}{8\pi} Re \int \left[ b \left( \frac{\psi_2^0 + \sigma^0 \lambda^0 - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0}{V^3} \right)^* + \bar{a} \left( \frac{2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)}{V^3} \right)^* \right] d\Omega \quad (4.5)$$

Cabe destacar que en nuestro formalismo  $V = Z'$ , además de la ecuación anterior se puede mostrar que cuando  $a = \bar{a} = 0$  esta ecuación da por definición las componentes del 4-vector energía-momento. Por otra parte para  $b = 0$  se obtiene la definición del tensor momento angular-centro de masa [40].

$$L_{DJ} = \frac{1}{8\pi} Re \int \bar{a} \left[ \frac{2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)}{Z'^3} \right]^* d\Omega \quad (4.6)$$

con  $a = a^i Y_{1i}^0$  donde  $a^i$  son tres constantes complejas. Esta integral forma un representación lineal de los generadores de BMS. El momento angular y el centro de masa se obtienen seleccionando un subgrupo de Lorentz. Aquí es donde aparece una dificultad en la definición del momento angular, ya que no existe una única manera de fijar un subgrupo de Lorentz. Esta situación es análoga a la libertad en la translación de seleccionar un subgrupo de Lorentz a partir del grupo de Poincaré lo cual origina las infinitas libertades en las supertranslaciones. Para un sistema de Bondi, la ecuación (4.6) toma la forma

$$L_{DJ} = \frac{1}{8\pi} Re \int \bar{a} [2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)] d\Omega \quad (4.7)$$

A partir de estas ecuaciones se definirán en los próximos capítulos el centro de masa y el momento angular.

## 4.2. Grupo BMS y supertranslaciones

El conjunto de transformaciones de coordenadas en  $\mathcal{I}^+$  que preserva las condiciones en las coordenadas de Bondi se denomina Grupo de BMS [1, 18, 42]. El grupo Bondi-Metzner-Sachs (BMS) es probablemente el único grupo en RG que puede ser considerado como un grupo de simetría en un gran número de situaciones. Este grupo es el mismo que el grupo de simetría asintótica que surge de los generadores infinitesimales, es decir de los vectores de Killing asintóticos. El grupo de BMS tiene dos partes: consta del grupo

homogéneo de Lorentz y el grupo de supertraslaciones, que contiene el sub-grupo de transformaciones de Poincaré. Es decir que el grupo BMS tiene una estructura similar al grupo de Poincaré, ya que ambos son el producto semidirecto del grupo homogéneo de Lorentz con un grupo abeliano, sin embargo este grupo abeliano es de cuatro parámetros para el grupo de Poincaré mientras que tiene infinitos parámetros para el grupo BMS.

Supongamos que  $(u_B, r_B, \zeta_B, \bar{\zeta}_B)$  son las coordenadas de Bondi estándares para un espaciotiempo asintóticamente plano, para construir el grupo de BMS se comienza con las siguientes transformaciones de las coordenadas  $(u_B, r_B, \zeta_B, \bar{\zeta}_B)$  [20]

$$u = T(u_B, \zeta_B, \bar{\zeta}_B) \quad (4.8)$$

$$\zeta = \frac{a\zeta_B + b}{c\zeta_B + d} \quad ad - bc = 1 \quad (4.9)$$

Esta transformación fraccional de los ángulos es el único mapa uno a uno que transforma la esfera sobre si misma. Sin embargo, el mapeo definido por (4.8) y (4.9) es mas grande que aquel dado por el mapeo BMS y algunas restricciones deben ser impuestas para reducirlo. Una de las condiciones que se impone es que el vector  $\hat{n}^a = \hat{g}^{ab}\Omega_{,b}$ , donde  $\Omega_{,b}$  es el gradiente en  $\mathcal{S}^+$ , tenga una parametrización  $u$ , es decir que [20]

$$\hat{n}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial u} \quad o \quad \hat{n}^a \frac{\partial u}{\partial x^a} = 1. \quad (4.10)$$

Es posible demostrar a partir de (4.8) y (4.9) que la métrica esférica transforma como [41]

$$\frac{4d\zeta d\bar{\zeta}}{P'^2} = K^2 \frac{4d\zeta_B d\bar{\zeta}_B}{P_0^2} \quad (4.11)$$

donde  $K$  es el factor conforme asociado a esta transformación y que se obtiene mediante

$$K = J^{-\frac{1}{2}} \frac{P_{0B}}{P_0} \quad (4.12)$$

$$= (1 + \zeta_B \bar{\zeta}_B)[(a\zeta_B + b)(\bar{a} + \bar{\zeta}_B + \bar{b}) + (c\zeta_B + d)(\bar{c}\bar{\zeta}_B + \bar{d})] \quad (4.13)$$

donde

$$J = \frac{\partial \zeta_B}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{\zeta}_B}{\partial \bar{\zeta}} \quad (4.14)$$

$$P_{0B} = 1 + \zeta_B \bar{\zeta}_B \quad (4.15)$$

$$P_0 = 1 + \zeta \bar{\zeta} \quad (4.16)$$

Si restringimos la transformación (4.8) y (4.9) a el grupo BMS.

$$u = K(u_B + \alpha) \quad (4.17)$$

donde  $\alpha(\zeta_B, \bar{\zeta}_B)$  es una función arbitraria regular en la esfera. Bajo una supertraslación pura  $K = 1$  con lo que

$$\zeta = \zeta_B \quad (4.18)$$

$$u = u_B + \alpha(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (4.19)$$

esta función  $\alpha$  es llamada una supertraslación. La función  $\alpha$  puede ser expandida en términos de infinitas constantes

$$\alpha = \alpha^0 + \alpha^i Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \alpha^{ij} Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \alpha^{ijk} Y_{1ijk}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \dots \quad (4.20)$$

El caso particular  $\alpha = d^a \ell_a$  con  $d^a = (\alpha^0, \alpha^i)$  representan las translaciones ordinarias. Estas supertraslaciones cambian la tetradas y producen cambios en el shear. Si el nuevo corte origen esta dado por la ec. (4.19), entonces el nuevo shear estaría dado por

$$\tilde{\sigma}^0(u, \zeta, \bar{\zeta}) = \sigma^0(u_B - \alpha, \zeta, \bar{\zeta}) + \tilde{\partial}^2 \alpha \quad (4.21)$$

Nuestro interés en este grupo radica en el hecho de que todas las cantidades físicas que surgen de nuestras identificaciones transforman adecuadamente ante estas transformaciones.

### 4.3. Momento dipolar y momento angular

A partir de la integral del linkage (4.6) podemos definir el momento dipolar másico y el momento angular como

$$D^{*i} + ic^{-1} J^{*i} = -\frac{c^2}{12\sqrt{2}G} \left[ \frac{2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \tilde{\partial} \bar{\sigma}^0 - \tilde{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)}{Z'^3} \right]^{*i}. \quad (4.22)$$

Existe una trayectoria especial en la foliación NU para la cual, para cada  $u = cte.$ , el momento dipolar másico  $D^{*i} = 0$ . Esta lineamundo la identificaremos como la lineamundo del centro de masa. Por otra parte, evaluar el momento angular  $J^{*i}$  en el centro

de masa da el spin  $S^i$ . Por lo tanto la lineamundo fiducial del centro de masa esta determinada por la ecuación

$$Re \left[ \frac{2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)}{Z'^3} \right]^{*i} = 0. \quad (4.23)$$

esta ec. (4.23) brinda tres ecuaciones algebraicas de donde se obtienen las componentes espaciales  $R^i(u)$  del centro de masa. Luego, en el centro de masa, el momento angular intrínseco está dado por

$$S^i = -\frac{c^3}{12\sqrt{2}G} Im \left[ \frac{2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)}{Z'^3} \right]^{*i}. \quad (4.24)$$

Estas ecuaciones han sido obtenidas a partir de una integral en una 2-superficie para una familia particular de cortes regularizados. Es conveniente resolver la ecuación (4.23) y obtener la lineamundo fiducial del centro de masa en un sistema de Bondi, dado que la radiación gravitacional, la perdida de masa y el momento lineal tienen un significado preciso en coordenadas de Bondi. Para escribir el momento dipolar másico y el momento angular de Bondi es conveniente definir a partir de (4.22) la cantidad

$$D^i + ic^{-1} J^i = -\frac{c^2}{12\sqrt{2}G} [2\psi_1^0 - 2\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}(\sigma^0 \bar{\sigma}^0)]^i. \quad (4.25)$$

Para realizar este calculo es necesario conocer como transformar los vectores  $(D^{*i}, J^{*i}) \rightarrow (D^i, J^i)$ . Para esto se utilizan la leyes de transformación mostradas en el capítulos 2 para relacionar  $(\psi_1^{0*}, \sigma^{0*}, \bar{\partial}^*) \rightarrow (\psi_1^0, \sigma^0, \bar{\partial})$ . Llamando  $L$  al integrando del linkage se tiene

$$\begin{aligned} L &= \left[ \frac{2\psi_1^0}{Z'^3} \right]^* - \left[ \frac{3\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0}{Z'^3} \right]^* - \left[ \frac{\bar{\sigma}^0 \bar{\partial} \sigma^0}{Z'^3} \right]^* \\ &= 2(\psi_1^0 - 3\bar{\partial} Z \psi_2^0) - 3(\sigma^0 - \bar{\partial}^2 Z)(\bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial} \bar{\partial}^2 Z) - (\bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}^2 Z)(\bar{\partial} \sigma^0 - \bar{\partial}^3 Z) \\ &= [2\psi_1^0 - 3\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\sigma}^0 \bar{\partial} \sigma^0] - 6\bar{\partial} Z \psi_2^0 + 3(\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\partial}^2 Z + \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial} \bar{\partial}^2 Z) \\ &\quad + (\bar{\sigma}^0 \bar{\partial}^3 Z + \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial} \sigma^0 - \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial}^3 Z). \end{aligned}$$

en esta ecuación solo se han retenido términos cuadráticos. Ahora utilizando la ecuación (1.30) se puede sustituir  $\psi_2^0$  por el aspecto de masa  $\Psi$  para escribir [40]

$$D^{*i} + ic^{-1} J^{*i} = (D^i + ic^{-1} J^i) + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G} [\bar{\partial} Z (\Psi - \bar{\partial}^2 \bar{\sigma}^0) + F]^i \quad (4.26)$$

con

$$F = -\frac{1}{2}(\sigma^0 \bar{\partial} \bar{\partial}^2 Z + \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial} \bar{\partial}^2 Z) - \frac{1}{6}(\bar{\sigma}^0 \bar{\partial}^3 Z + \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial} \bar{\sigma}^0 - \bar{\partial}^2 Z \bar{\partial}^3 Z) \quad (4.27)$$

donde el índice  $i$  indica las tres componentes espaciales que aparecen al introducir la descomposición en esféricos tensoriales.

## 4.4. Aproximaciones y supuestos

Estamos listos para introducir nuestro formalismo, para ello partimos de la ecuación del corte (2.22) y vamos a elegir  $u$  como el tiempo propio. Además para realizar nuestro calculo introduciremos las siguientes simplificaciones, para algún tiempo inicial Bondi asumiremos que

- $\sigma^0 = 0$ .
- $R^i$  es una pequeña desviación del origen del sistema de coordenadas.
- $R^0 = u$  suponiendo velocidades pequeñas.
- Asumiremos que el término dominante del shear de Bondi es el cuadrupolar.

El primer item nos permite fijar las supertraslaciones, esta elección es consistente con nuestra elección de cortes, ya que la ec. (2.22) mantiene  $\alpha|_{l \geq 2} = 0$  al realizar un cambio en el corte de la forma  $\hat{Z}(u, \zeta, \bar{\zeta}) = Z(u, \zeta, \bar{\zeta}) + \alpha(\zeta, \bar{\zeta})$ . De esta manera la única libertad que queda es simplemente un traslación entre dos sistemas de Bondi.

La segunda condición es simplemente para e ignorar términos de la forma  $R^2$ , debido a que para recuperar las ecuaciones usuales de la mecánica Newtoniana no es necesario retener términos de la forma  $\delta u^2$  cuando se realiza la expansiones en Taylor, esto mismo fue hecho en el capítulo 3. Mientras que el tercer supuesto es debido a que en la gran mayoría de los procesos astrofísicos que estamos interesados en explicar se espera que el centro de masa del sistema no adquiera velocidades relativista. Es decir, aunque el 25 % de la masa total se pierde como radiación gravitacional el factor  $\gamma \approx 1$ . Por ejemplo, aunque dos estrellas coalescente se aproximen con velocidades relativistas, si el centro

de masa estaba inicialmente en reposo, este no adquirirá grandes velocidades debido al movimiento de cada una de las fuentes y debido a la emisión de radiación gravitacional.

Al igual que para el caso axisimétrico, vamos a trabajar hasta orden cuadrático en la radiación gravitacional, lineal en  $\delta u$  y en sus derivadas. En general, el no usar alguna de estos supuestos agrega términos correctivos, que modifican las ecuaciones en las contribuciones radiactivas a un orden mas alto de los que vamos a mostrar en este capitulo. Sin embargo, la parte Newtoniana de los resultados permanecerá inalterada.

Comenzamos escribimos la ecuación de los NCC regularizados (2.16) a nivel cuadrupolar en la radiación gravitacional. A diferencia del caso axisimétrico, aún utilizando solo la parte cuadrupolar del shear, la ecuación para  $P^{ij}$  no se anula. Entonces para velocidades pequeñas se tiene

$$\begin{aligned} Z_1(u, \zeta, \bar{\zeta}) &= u + \delta u, \\ \delta u &= -\frac{1}{2}R^i(u)Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \frac{1}{12}\sigma_R^{ij}(u)Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Comenzamos haciendo una expansión de Taylor a primer orden en la ecuación (4.26) donde sustituimos  $\delta Z = \delta Z_1 = \delta \delta u$ . A continuación tomamos la parte real de la ecuación para obtener

$$\begin{aligned} D^{*i} &= D^i(u + \delta u) + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G}Re[(\Psi - \delta^2\bar{\sigma}^0)\delta\delta u + F]^i \\ &= D^i(u) + [D'(u)\delta u]^i + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G}Re[(\Psi - \delta^2\bar{\sigma}^0)\delta\delta u + F]^i \end{aligned}$$

A partir de la definición de  $D^i$ , utilizando la ec. (1.32) y siguiendo los mismos argumento que los utilizados para derivar (3.29) se puede encontrar la ecuación para  $D^{ij}$ , de esta manera se obtiene

$$D^{*i} = D^i + \frac{c^2}{6\sqrt{2}G}Re[(\delta\Psi - \delta^3\bar{\sigma}^0)\delta u]^i + \frac{3c^2}{6\sqrt{2}G}Re[\delta\delta u(\Psi - \delta^2\bar{\sigma}^0) + F]^i, \quad (4.29)$$

análogamente para el momento angular se obtiene

$$J^{i*} = J^i + \frac{c^3}{6\sqrt{2}G}Im[(\delta\Psi - \delta^3\bar{\sigma}^0)\delta u]^i + \frac{3c^3}{6\sqrt{2}G}Im[\delta\delta u(\Psi - \delta^2\bar{\sigma}^0) + F]^i, \quad (4.30)$$

En la obtención de estas ecuaciones solo se han retenido aquellos términos que cumplen con las aproximaciones y supuestos que mencionamos en la sección anterior. Sin embargo

es posible remover varias de estas aproximaciones para obtener ecuaciones aún más generales.

Para evaluar estas dos ecuaciones es necesario introducir la siguiente expansión en armónicos tensoriales con peso de spin [29]

$$\begin{aligned}
\sigma^0 &= \sigma^{ij} Y_{2ij}^2(\zeta, \bar{\zeta}), \\
\psi_1^0 &= \psi_1^{0i} Y_{1i}^1(\zeta, \bar{\zeta}) + \psi_1^{0ij} Y_{2ij}^1(\zeta, \bar{\zeta}), \\
\Psi &= -\frac{2\sqrt{2}G}{c^2} M - \frac{6G}{c^3} P^i Y_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \Psi^{ij} Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por definición de centro de masa  $D^{*i} = 0$ , evaluando el lado derecho de (4.29) con la expansión (4.31) se obtiene que

$$MR^i = D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{ij} P^j, \tag{4.32}$$

recordemos que los subíndices  $I$  y  $R$  representan la parte imaginaria y real de las cantidades. Nuevamente, en base a nuestros supuestos, en el segundo termino del r.h.s de (4.32) se puede reemplazar el  $P^j$  por el momento inicial del sistema con lo cual

$$MR^i = D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{ij} P_0^j, \tag{4.33}$$

Análogamente el momento angular total se obtiene al tomar la componente  $l = 1$  de la ecuación (4.30) y puesto que en el centro de masa por definición  $J^{*i} = S^i$  se tiene

$$S^i = J^i - R^j P^k \epsilon^{ijk}. \tag{4.34}$$

como era de esperarse esta ecuación es exactamente igual a la formula para el momento angular total en un sistema Newtoniano.

## 4.5. Ecuaciones de movimiento

La evolución temporal de  $D^i$  y de  $J^i$  puede ser obtenida utilizando la identidad de Bianchi para  $\psi_1^0$ , sin embargo debemos insertar el factor  $\sqrt{2}$  para expresar los resultados en término del tiempo retardado  $u_{ret} = \sqrt{2}u$ . Recordemos que la utilización del tiempo retardado es importante para obtener los factores numéricos correctos en las

expresiones finales. Cabe destacar que las últimas dos ecuaciones importantes (4.33) y (4.34) permanecen idénticas en término de  $u_{ret}$  o  $u$ . De ahora en más, adoptaremos el símbolo ' para designar las derivadas  $\partial_{u_{ret}}$ .

Utilizando la parte imaginaria y real de (1.32) en las definiciones (4.25) e insertando la expansion (4.31) para obtener la componente  $l = 1$  se tiene

$$D^{i'} = P^i, \quad (4.35)$$

$$J^{i'} = \frac{c^3}{5G}(\sigma_R^{kl}\sigma_R^{j'l'} + \sigma_I^{kl}\sigma_I^{j'l'})\epsilon^{ijk}. \quad (4.36)$$

Además la ecuación para la perdida de masa y el momento lineal se obtienen de la expansión en armónicos tensoriales de la ec. (1.36)

$$M' = -\frac{c}{10G}(\sigma_R^{ij'}\sigma_R^{ij'} + \sigma_I^{ij'}\sigma_I^{ij'}), \quad (4.37)$$

$$P^{i'} = \frac{2c^2}{15G}\sigma_R^{j'l'}\sigma_I^{kl'}\epsilon^{ijk}. \quad (4.38)$$

Tomando la derivada de la ecuación (4.33) y utilizando (4.35) se puede escribir que

$$MR^{i'} = P^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{ij'}P_0^j, \quad (4.39)$$

esta ecuación da la relación entre la velocidad del centro de masa  $R^{i'}$  y el momento lineal. Esta expresión incluye además un término de radiación. Finalmente la ecuación de movimiento para el centro de masa se obtiene derivando una vez más (4.39) y combinándola con la ecuación (4.38)

$$MR^{i''} = \frac{2c^2}{15G}\sigma_R^{j'l'}\sigma_I^{kl'}\epsilon^{ijk} + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{ij''}P_0^j. \quad (4.40)$$

El lado derecho de esta ecuación solo depende de la radiación en el infinito nulo y de la masa inicial del sistema. Similarmente, derivando (4.34) y usando (4.36) se obtiene la deriva del spin

$$S^{i'} = J^{i'} = -\frac{c^3}{10G}(\sigma_R^{kl}\sigma_R^{j'l'} + \sigma_I^{kl}\sigma_I^{j'l'})\epsilon^{ijk}. \quad (4.41)$$

Este resultado es correcto también en sistemas Newtonianos aislados con  $S^{i'} = J^{i'} = 0$ , sin embargo en RG el momento angular no se conserva debido a la emisión de radiación gravitacional como lo muestra el lado derecho de esta ecuación.

## 4.6. Transformaciones de Lorentz

En esta sección se discute como transforman el momento dipolar  $D^i$  y el momento angular  $J^i$  ante transformaciones de Lorentz. Para analizar esto vamos a comenzar con el caso más sencillo que es un espaciotiempo plano, donde asumiremos nuevamente que el shear es cero en  $-\infty$ . A modo de ejemplo, vamos a comenzar analizando lo que ocurre con los campos electromagnéticos en espacios planos.

Comenzamos con un boost no relativista entre los sistemas  $K^*$  y  $K$ . Las ecuaciones explícitas para los campos  $E^*$  y  $B^*$  del sistema primado en termino de los campos  $E$  y  $B$  del sistemas sin primar son [43]

$$E^{i*} = E^i - V^j B^k \epsilon^{ijk} \quad (4.42)$$

$$B^{i*} = B^i + V^j E^k \epsilon^{ijk} \quad (4.43)$$

donde  $V^i$  corresponde a la velocidad entre los sistemas. Es claro que los campos  $E$  y  $B$  forman parte de un tensor de segundo rango  $F^{ab}$ . En general, para velocidades arbitrarias, los valores en un sistema inercial  $K^*$  pueden ser expresados a partir de los de  $K$  de acuerdo

$$F^{ab*} = \Lambda_c^a \Lambda_d^b F^{cd} \quad (4.44)$$

donde  $\Lambda_c^a$  es la matriz de transformación de Lorentz. A partir del tensor de Maxwell  $F^{ab}$  se puede construir

$$W^{ab+} = F^{ab} + i\bar{F}^{ab}. \quad (4.45)$$

Una transformación de Lorentz aplicada al tensor  $W^{ab+}$  es equivalente a la misma transformación aplicada a [10]

$$\psi_1^{0i} \leftrightarrow (E + iB)^i. \quad (4.46)$$

Lo cual muestra que el vector complejo  $D^i + iJ^i$  transforma de manera análoga a las componentes del campo eléctrico y magnético. Como ya lo hemos mencionado, esta observación concuerda con el hecho de que en relatividad especial el momento dipolar másico y el momento angular forman parte de un tensor de rango dos y ante una transformación de Lorentz transforman mezclando las componentes [9].

# Capítulo 5

## Comparación con otros Formalismos

En este capítulo vamos a compara nuestras ecuaciones con dos tratamientos distintos. El primero de estos tratamientos es el de Newman *et al*, mientras que el segundo es un método Post-Newtoniano. Vamos a buscar similitudes y diferencias respecto de nuestras ecuaciones.

### 5.1. Comparación con las ecuaciones ANK

Vamos a comenzar con las ecuaciones de Adamo-Newman-Kozameh (ANK), para ello comenzamos introduciendo las definiciones de momento angular y momento dipolar dadas en el formalismo ANK [10]

$$D_{ANK}^i = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G}\psi_{1R}^{0i}, \quad (5.1)$$

$$J_{ANK}^i = -\frac{c^3}{6\sqrt{2}G}\psi_{1I}^{0i}, \quad (5.2)$$

$$S_{ANK}^i = cM\xi_I^i. \quad (5.3)$$

Ahoram calculando la parte  $l = 1$  de la ec. (4.25) se tiene

$$D^i = -\frac{c^2}{6\sqrt{2}G}\psi_{1R}^{0i} + \frac{c^2}{5G}\sigma_R^{jl}\sigma_I^{kl}\epsilon^{ijk} + \text{higher harmonics}. \quad (5.4)$$

$$J^i = -\frac{c^3}{6\sqrt{2}G}[\psi_1^0 - \sigma^0\bar{\sigma}^0 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}(\sigma^0\bar{\sigma}^0)]_I^i. \quad (5.5)$$

A simple vista se aprecia que la relación entre el momento dipolar de masa y el momento angular con los campos asintóticos en  $\mathcal{I}$  son diferentes en ambos formalismos. Estas diferencias son una consecuencia de las definiciones utilizadas en ambas formulaciones ya que en nuestro enfoque utilizamos una 2-forma en el álgebra BMS dada por la integral del Linkage mientras que en el enfoque de ANK se utiliza directamente  $\psi_1^{0i}$  para las definiciones.

El momento angular en la formulación ANK sólo se define para la radiación cuadrupolar, este es el caso donde la mayoría de las definiciones disponibles en la literatura coinciden. Sin embargo, esto trae potenciales problemas para  $J_{ANK}^i$  si se consideran momentos multipolares más altos en el shear de radiación y/o espaciotiempos con simetría. En virtud de lo desarrollado en el capítulo 3,  $\psi_{1I}^{0i}$  no se conserva para espaciotiempos axialmente simétricos, esto es una clara indicación de que la definición ANK debe modificarse para contemplar estas dos situaciones [33]. Como ya hemos mencionado sólo para radiación cuadrupolar ambas fórmulas coinciden, sin embargo, nosotros obtenemos términos adicionales cuando se incluye la radiación octupolar. Además de lo dicho previamente, de la definición de ANK para el momento angular se obtiene la siguiente ecuación

$$J_{ANK}^i = S_{ANK}^i + \xi_R^j P^k \epsilon^{ijk} + \frac{4}{5\sqrt{2}} P^k \sigma_I^{ki}. \quad (5.6)$$

mientras que nosotros tenemos

$$J^i = S^i + R^j P^k \epsilon^{ijk}. \quad (5.7)$$

claramente a la contribución usual del spin y el momento angular orbital, a ANK les aparece un termino de radiación.

Otra diferencia sutil pero importante es que nuestra definición de spin es a través del Linkage mientras que en la formulación ANK por definición, el spin, es la parte imaginaria de una línea mundo compleja. Entonces comparemos la relación entre el centro de masa, el spin y las cantidades geométricas en infinito nulo como la masa Bondi, momento lineal, etc., sólo tendremos en cuenta la radiación cuadrupolar. En el formalismo ANK se tiene [10]

$$P^i = M \xi_R^{i'} + \frac{4}{5c\sqrt{2}} \sigma_R^{ij'} P^j + \frac{c^2}{G} (\sigma_R^{jl} \sigma_I^{kl})' \epsilon^{ijk}, \quad (5.8)$$

donde  $\xi_R^i$  es la lineamundo del centro de masa. En nuestro formalismo, a partir de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo 4 se tiene

$$P^i = MR^{i'} - \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{ij'} P^j, \quad (5.9)$$

La diferencia principal entre las ecuaciones anteriores es el último término de la ANK, que no está presente en nuestra ecuación, sin embargo también hay un factor de diferencia con un signo opuesto en el segundo término. Esta diferencia se debe a que en la formulación ANK se utiliza la relación  $\Psi^{ij} = -\bar{\sigma}^{ij}$  en la ecuación (6.33) [10]. Esta relación contradice la eq. (1.36) ya que si se deriva con respecto al tiempo  $\dot{\Psi}^{ij} = -\dot{\bar{\sigma}}^{ij}$ . Sin embargo se desprende de la ecuación (1.36) que  $\dot{\Psi}^{ij}$  debe ser cuadrático en  $\dot{\sigma}^{ij}$ . Por lo tanto, algunas derivaciones en la formulación ANK, y en particular la relación anterior, son incorrectas. Es importante mencionar que la masa de Bondi  $M$  y el momento lineal  $P^i$  tienen la misma definición en ambos enfoques. Finalmente en el formalismo ANK la ecuaciones de movimiento para el centro de masa esta dada por

$$MR^{i''} = \frac{2c^2}{15G} \sigma_R^{jl'} \sigma_I^{kl'} \epsilon^{ijk} - \frac{c^2}{G} (\sigma_R^{jl'} \sigma_I^{kl'})'' \epsilon^{ijk} - \frac{4}{5c\sqrt{2}} \sigma_R^{ij''} P^j, \quad (5.10)$$

mientras que en nuestro formulación

$$MR^{i''} = \frac{2c^2}{15G} \sigma_R^{jl'} \sigma_I^{kl'} \epsilon^{ijk} + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{ij''} P^j. \quad (5.11)$$

A pesar que ambos formalismos concuerdan para el espaciotiempos estacionarios pero difieren cuando la radiación gravitacional esta presente.

## 5.2. Comparación con las ecuaciones PN

En esta sección vamos a comparar parcialmente las ecuaciones de evolución obtenidas en el capítulo 4 con las que provienen del formalismo post-newtoniano (PN). En principio, una comparación completa entre estos enfoques puede ser interesante, ya que las ecuaciones PN utilizan definiciones en la zona cercana a la fuente con multipolos definidos en término de la fuente, mientras que la formulación asintótica se define momentos multipolares radiantes y medidos en el infinito nulo. La formulación asintótica

tiene ecuaciones exactas del movimiento de masa, momento y momento angular, mientras que en el enfoque PN se construye la pérdida de energía y momento debido a la radiación gravitacional hasta el nivel de aproximación considerado y a priori uno no tiene disponible una fórmula exacta. Sin embargo, resulta muy útil comparar entre estos enfoques y ver si se obtienen ecuaciones de movimiento equivalentes para una fuente compacta que emite radiación gravitatoria.

En esta tesis solo compararemos las ecuaciones de evolución para la masa, el momento angular y el momento lineal de una fuente compacta que emite radiación gravitacional. Para comenzar, aclaramos que en ambas formulaciones vamos a utilizar el punto para representar la derivación respecto al tiempo retardado, ya que las ecuaciones PN están expresadas en termino de una coordenada nula en el limite asintótico [44].

En las ecuaciones PN la perdida de energía, de momento lineal y momento angular están dadas por (en unidades de  $G = c = 1$ ) [45, 46]

$$E'_{PN} = -\frac{1}{5}U^{ij'}U^{ij'} - \frac{16}{45}V^{ij'}V^{ij'} - \frac{1}{189}U^{ijk'}U^{ijk'} - \frac{1}{84}V^{ijk'}V^{ijk'} \quad (5.12)$$

$$P'_{PN} = -\left(\frac{16}{45}U^{j'l}V^{kl'} + \frac{1}{126}U^{jlm'}V^{klm'}\right)\epsilon^{ijk} - \frac{2}{63}(U^{jk'}U^{ijk'} + 2V^{jk'}V^{ijk'}) \quad (5.13)$$

$$J'_{PN} = \left(\frac{2}{5}U^{j'l}U^{kl'} + \frac{32}{45}V^{j'l}V^{kl'} + \frac{1}{63}U^{jlm'}U^{klm'} + \frac{1}{28}V^{jkl}V^{klm'}\right)\epsilon^{ijk} \quad (5.14)$$

en la formulación PN,  $U^{ij}$ ,  $U^{ijk}$  corresponde a los momentos cuadrupolares y octupolares de masa, mientras que  $V^{ij}$ ,  $V^{ijk}$  representan los momentos cuadrupolares y octupolares de corriente.

Para comparar estas ecuaciones con las obtenidas en esta tesis, debemos incluir a nuestras ecuaciones  $M'$ ,  $P^{i'}$  and  $J^{i'}$  la contribución octupolar del shear. Para ello escribimos la expansión tensorial del shear hasta orden octupolar

$$\sigma^0 = \sigma^{ij}Y_{2ij}^2(\zeta, \bar{\zeta}) + \sigma^{ijk}Y_{3ijk}^2(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (5.15)$$

La perdida de energía y momento lineal proviene de la componente  $l = 0, 1$  de la ecuación (1.36), mientras que para obtener la contribución cuadrupolar y octupolar al momento angular debemos calcular la derivada temporal de la componente  $l = 1$  de la parte imaginaria de la definición (4.25). Para hacer esto es necesario utilizar la ec.

(1.32) y los productos de armónicos esféricos tensoriales. Finalmente llevando a cabo este procedimiento se tiene (en unidades de  $c = G = 1$ )

$$M^I = -\frac{1}{10}(\sigma_R^{ij'}\sigma_R^{ij'} + \sigma_I^{ij'}\sigma_I^{ij'}) - \frac{3}{7}(\sigma_R^{ijk'}\sigma_R^{ijk'} + \sigma_I^{ijk'}\sigma_I^{ijk'}) \quad (5.16)$$

$$P^{iI} = -\frac{2}{15}\sigma_R^{kl'}\sigma_I^{jl'}\epsilon^{ijk} - \frac{\sqrt{2}}{7}(\sigma_R^{jk'}\sigma_R^{ijk'} + \sigma_I^{jk'}\sigma_I^{ijk'}) - \frac{3}{7}\sigma_R^{klm'}\sigma_I^{jlm'}\epsilon^{ijk} \quad (5.17)$$

$$J^{iI} = \frac{1}{5}(\sigma_R^{kl}\sigma_R^{j'l'} + \sigma_I^{kl}\sigma_I^{j'l'})\epsilon^{ijk} + \frac{9}{7}(\sigma_R^{klm}\sigma_R^{jlm'} + \sigma_I^{klm}\sigma_I^{jlm'})\epsilon^{ijk} \quad (5.18)$$

Finalmente, ambos set de ecuaciones coinciden al establecer la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned} \sigma_R^{ij} &\Leftrightarrow \sqrt{2}U^{ij} \\ \sigma_I^{ij} &\Leftrightarrow \frac{8}{3\sqrt{2}}V^{ij} \\ \sigma_R^{ijk} &\Leftrightarrow \frac{1}{9}U^{ijk} \\ \sigma_I^{ijk} &\Leftrightarrow \frac{1}{6}V^{ijk} \end{aligned}$$

Este es un resultado notable ya que las ecuaciones de evolución provienen de enfoques completamente diferentes. Por un lado  $U, V$  en el formalismo PN son los momentos multipolares de la fuente mientras que en el formalismo de NP,  $\sigma_I, \sigma_R$  es la radiación gravitacional recibida en el infinito nulo. En futuros trabajos, se podría investigar más a cerca de ambos formalismos y comparar las ecuaciones de movimiento para el centro de masa, la energía y el spin del sistema. Es posible que la relación de estas cantidades con las variables cinemática sean distintas en ambas formulaciones, sin embargo no analizaremos más a cerca de las similitudes y diferencias entre ambas formulaciones en esta tesis.



# Capítulo 6

## Comentarios Finales y Conclusiones

Para cerrar este libro mencionaremos las ideas más importantes y haremos un pequeño resumen de lo trabajado. En esta tesis se hace uso de la estructura geométrica de espaciotiempos asintóticamente planos y se utiliza la ecuación de los NCC regularizados. Con estos dos ingredientes hemos sido capaces de identificar líneas mundos cuyos cortes corresponden a cortes NU en el infinito nulo. El centro de masa en este contexto es una línea mundo especial  $R^a$  que se selecciona al imponer la condición de que el momento dipolar másico en el infinito nulo desaparece. Usando las identidades de Bianchi en  $\mathcal{I}^+$  se puede obtener una relación entre la velocidad del centro de masa y el momento de Bondi, así como la ecuación de movimiento de  $R^a$ .

Por otra parte, varios de los puntos importantes de nuestro formalismo se enumeran a continuación

- Hemos definido la noción de centro de masa y spin para espaciotiempos asintóticamente planos, es decir espaciotiempos donde existe una noción precisa de un sistema gravitacional aislado.
- Se han obtenido ecuaciones de movimiento que vinculan estas cantidades con su evolución temporal, las ondas gravitacionales y las ondas electromagnéticas. Las ecuaciones obtenidas son realmente sencillas y muy similares a sus contrapartes newtonianas y deberían ser de gran ayuda para sistemas astrofísicos bien conocidos donde los procesos energéticos sean altos y las emisiones gravitacionales sean considerables.

- Nuestras ecuaciones muestran claramente que la dinámica del sistema se ve afectada debido a la emisión de radiación gravitacional ya que la radiación afecta el movimiento del centro de masa y el spin del sistema.
- Este trabajo puede ser generalizado aún más flexibilizando las aproximaciones y supuestos que introdujimos en el capítulo 3 y 4.
- Hemos comparado nuestro enfoque con la formulación ANK para comprobar las diferencias y similitudes. Esta comparación sugiere que nuestras definiciones de momento dipolar de masa y momento angular son más adecuados cuando se trabaja con modos de radiación mayores al cuadrupolar incluso cuando el espacio-tiempos considerado no posee una simetría de rotación.
- También hemos comparado nuestras ecuaciones de evolución con las derivadas del formalismo PN. Aunque sólo hemos hecho para un conjunto muy simple de variables globales, los resultados fueron muy alentadores, ya que haciendo una identificación de cantidades, se obtiene que el lado derecho de las ecuaciones de evolución de estas variables coinciden.
- En futuros trabajos vamos a tratar de comparar otras variables de los dos formalismos, radiativas vs shear local, centro de masa en ambos enfoques, etc. La idea es tratar de encontrar un puente entre estas formulaciones que se inician en extremos opuestos, uno a partir de las cantidades medidas en el infinito nulo y el otro haciendo uso de las definiciones locales basadas en la fuentes.

# Apéndice A

## Campos Electromagnéticos en el Infinito Nulo

En este capítulo aplicaremos nuestro formalismo a dos sencillos casos donde es importante incluir tanto la emisión de radiación gravitacional como la contribución electromagnética a las ecuaciones de movimiento.

### A.1. Momento dipolar electromagnético

En un sistema de Bondi, el momento dipolar electromagnético para un espaciotiempo asintóticamente plano está dado por la componente  $\ell = 1$  del escalar  $\phi_0^0$  [10], es decir

$$p^i + ic^{-1}m^i = \frac{1}{2}\phi_0^{0i} \quad (\text{A.1})$$

A partir de estas dos definiciones, buscamos resolver las identidades de Bianchi para  $\phi_1^0$  and  $\phi_2^0$  y expresarlas en término de  $p^i$  y  $m^i$ . Derivando la ecuación (1.35) y usando (1.34) se obtiene

$$\ddot{\phi}_0^0 = \eth^2\phi_2^0 + (\sigma^0\phi_2^0) \quad (\text{A.2})$$

Al igual que para el caso axisimétrico y el caso general, necesitamos el orden cero de todas las derivadas respecto a  $u$ . Para obtenerlo, debemos seguir el mismo tratamiento

que en el capítulo 3, es decir

$$\phi_0^{0''} = \bar{\partial}^2 \phi_2^0 + (\sigma^0 \phi_2^0)' \quad (\text{A.3})$$

Resolvemos para  $\phi_2^{0i}$  en termino de la definición de momento dipolar electromagnético (A.1) para escribir

$$\begin{aligned} \phi_0^{0i''} &= -2\phi_2^{0i} + \frac{3}{5}(\sigma^{ij} \phi_2^{0j})' \\ \phi_2^{0i} &= -(p^{i''} + im^{i''}) + \frac{3}{10}[\sigma^{ij}(p^{j''} + im^{j''})]' \end{aligned}$$

introduciendo las constantes  $c$  y  $G$  y corrigiendo el factor  $\sqrt{2}$  del tiempo retardado se tiene

$$\phi_{2R}^{0i} = -\frac{2}{c^2} p^{i''} + \frac{3\sqrt{2}}{5c^3} [\sigma_R^{ij} p^{j''} - c^{-1} \sigma_I^{ij} m^{j''}]' \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_{2I}^{0i} = -\frac{2}{c^3} m^{i''} + \frac{3\sqrt{2}}{5c^3} [\sigma_I^{ij} p^{j''} + c^{-1} \sigma_R^{ij} m^{j''}]' \quad (\text{A.5})$$

Siguiendo el mismo razonamiento a partir de estas dos ecuaciones y utilizando (1.35) se puede resolver para  $\phi_1^{0i}$  en la forma

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \phi_1^0 &= -\phi_0^{0'} + \sigma^0 \phi_2^0 \\ \phi_1^{0i} &= (p^{i'} + im^{i'}) - \frac{3}{20} [\sigma^{ij}(p^{j''} + im^{j''})] \end{aligned}$$

nuevamente tomando la parte real y la imaginaria de esta ultima ecuación e introduciendo los factores  $c, G$  y  $\sqrt{2}$  se obtiene

$$\phi_{1R}^{0i} = \frac{\sqrt{2}}{c} p^{i'} - \frac{3}{10c^2} [\sigma_R^{ij} p^{j''} - c^{-1} \sigma_I^{ij} m^{j''}] \quad (\text{A.6})$$

$$\phi_{1I}^{0i} = \frac{\sqrt{2}}{c^2} m^{i'} - \frac{3}{10c^2} [\sigma_I^{ij} p^{j''} + c^{-1} \sigma_R^{ij} m^{j''}] \quad (\text{A.7})$$

en la sección siguiente vamos a utilizar estas ecuaciones para agregar las contribuciones de Maxwell a las ecuaciones de movimiento del centro de masa.

## A.2. Contribución electromagnética a las ecuaciones de movimiento

En esta sección vamos a incluir en las ecuaciones del capítulo 4 las contribuciones electromagnéticas. Recordemos que a partir de las ecuaciones (4.29) y (4.30) se obtu-

vieron las ecuaciones para el momento angular y para el centro de masa del sistema

$$MR^i = D^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{ij}P_0^j, \quad (\text{A.8})$$

$$S^i = J^i - R^j P^k \epsilon^{ijk}. \quad (\text{A.9})$$

A partir de la identidad de Bianchi (1.32) se puede encontrar la ecuación para  $D^{i'}$  y  $J^{i'}$  y utilizando la siguiente expansión en esféricos tensoriales

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \sigma^{ij}Y_{2ij}^2(\zeta, \bar{\zeta}), \\ \psi_1^0 &= \psi_1^{0i}Y_{1i}^1(\zeta, \bar{\zeta}) + \psi_1^{0ij}Y_{2ij}^1(\zeta, \bar{\zeta}), \\ \Psi &= -\frac{2\sqrt{2}G}{c^2}M - \frac{6G}{c^3}P^iY_{1i}^0(\zeta, \bar{\zeta}) + \Psi^{ij}Y_{2ij}^0(\zeta, \bar{\zeta}), \\ \phi_0^0 &= \phi_0^{0i}Y_{1i}^1(\zeta), \\ \phi_1^0 &= Q + \phi_1^{0i}Y_{1i}^0(\zeta), \\ \phi_2^0 &= \phi_2^{0i}Y_{1i}^{-1}(\zeta), \end{aligned}$$

se obtiene

$$D^{i'} = P^i - \frac{2Q}{3c^3}p^{i''} - \frac{Q\sqrt{2}}{5c^4}[\sigma_R^{ij}p^{j''} - c^{-1}\sigma_I^{ij}m^{j''}]' + \frac{2}{3c^5}(m^{j'}p^{k'})'\epsilon^{ijk}, \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} J^{i'} &= \frac{c^3}{5G}(\sigma_R^{kl}\sigma_R^{j'l'} + \sigma_I^{kl}\sigma_I^{j'l'})\epsilon^{ijk} + \frac{2}{3c^3}(p^{j''}p^{k'} + \frac{1}{c^2}m^{j'}m^{k''})\epsilon^{ijk} \\ &\quad - \frac{2Q}{3c^3}m^{i''} + \frac{Q\sqrt{2}}{5c^3}[\sigma_I^{ij}p^{j''} + c^{-1}\sigma_R^{ij}m^{j''}]'. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Estas ecuaciones ya están escritas en termino del tiempo retardado  $u_{ret}$ . Ahora bien, utilizando la expansion de Taylor a orden cero en  $\delta u$  de la ecuación para el aspecto de masa (1.36) se obtiene la perdida de masa y momento lineal de Bondi.

$$M' = -\frac{c}{10G}(\sigma_R^{ij'}\sigma_R^{ij'} + \sigma_I^{ij'}\sigma_I^{ij'}) - \frac{2}{3c^5}(d^{i''}d^{i''} + \frac{1}{c^2}m^{i''}m^{i''}), \quad (\text{A.12})$$

$$P^{i'} = \frac{2c^2}{15G}\sigma_R^{j'l'}\sigma_I^{kl'}\epsilon^{ijk} + \frac{2}{3c^5}m^{j''}p^{k''}\epsilon^{ijk}. \quad (\text{A.13})$$

Cabe destacar que el segundo termino de (A.11) corresponde a la contribución electromagnética del momento angular [33]. Ahora, a partir de las ecuaciones (A.8) y (A.10) obtenemos

$$MR^{i'} = P^i + \frac{8}{5\sqrt{2}c}\sigma_R^{ij'}P_0^j + \frac{2Q}{3c^3}p^{i''} - \frac{Q\sqrt{2}}{5c^4}[\sigma_R^{ij}p^{j''} - \frac{1}{c}\sigma_I^{ij}m^{j''}]' + \frac{2}{3c^5}(m^{j'}p^{k'})'\epsilon^{ijk}. \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, si tomando una derivada más a la ecuación (A.14) obtenemos la ecuación de movimiento para el centro de masa

$$\begin{aligned}
MR^{i''} &= \frac{2c^2}{15G} \sigma_R^{j'l} \sigma_I^{kl'} + \frac{8}{5\sqrt{2}c} \sigma_R^{ij''} P_0^j + \frac{2Q}{3c^3} p^{i''''} - \frac{Q\sqrt{2}}{5c^4} [\sigma_R^{ij} p^{j''} - c^{-1} \sigma_I^{ij} m^{j''}]'' \\
&+ \frac{2}{3c^5} [(m^{j'} p^{k'})'' + m^{j''} p^{k''}] \epsilon^{ijk}. \tag{A.15}
\end{aligned}$$

El lado derecho de esta ecuación solo depende del dato en el infinito nulo y los campos electromagnéticos en  $\mathcal{I}^+$ .

# Apéndice B

## Armónicos Tensoriales con peso de spin

Para ayudar a entender como se obtuvieron las ecuaciones, vamos a escribir algunas nociones básicas de los esféricos armónicos tensoriales. Para mayor detalles a cerca de las definiciones y los productos se pueden consultar la siguiente referencia [29] y para productos de mayor orden se puede ver [33].

### B.1. Operador $\tilde{\partial}$ y Armónicos Tensoriales

Comenzamos dando una pequeña lista de como los operadores  $\tilde{\partial}$  y  $\bar{\partial}$  afectan a los esféricos armónicos tensoriales con peso de spin.

Para  $l = 0$

$$Y_0^0 = 1$$

Para  $l = 1$

$$\begin{aligned}
Y_{1i}^0 &= \partial Y_{1i}^{-1} = \bar{\partial} Y_{1i}^1 \\
\partial Y_{1i}^0 &= -2Y_{1i}^1 \\
\bar{\partial} Y_{1i}^0 &= -2Y_{1i}^{-1} \\
\partial Y_{1i}^1 &= 0 \\
\bar{\partial} Y_{1i}^{-1} &= 0 \\
\partial \bar{\partial} Y_{1i}^1 &= -2Y_{1i}^1 \\
\bar{\partial} \partial Y_{1i}^{-1} &= -2Y_{1i}^{-1}
\end{aligned}$$

Para  $l = 2$

$$\begin{aligned}
Y_{2ij}^1 &= \bar{\partial} Y_{2ij}^2 \\
\partial Y_{2ij}^1 &= \bar{\partial} \bar{\partial} Y_{2ij}^2 = -4Y_{2ij}^2 \\
Y_{2ij}^0 &= \bar{\partial}^2 Y_{2ij}^2 \\
\partial Y_{2ij}^0 &= -6Y_{2ij}^1 \\
\bar{\partial} \bar{\partial} Y_{2ij}^0 &= -6Y_{2ij}^0
\end{aligned}$$

Para  $l = 3$

$$\begin{aligned}
Y_{3ijk}^1 &= \bar{\partial} Y_{3ijk}^2 \\
Y_{3ijk}^0 &= \bar{\partial} Y_{3ijk}^1 \\
\partial Y_{3ijk}^1 &= \bar{\partial} \bar{\partial} Y_{3ijk}^2 = -10Y_{3ijk}^2 \\
\partial Y_{3ijk}^0 &= -12Y_{3ijk}^1 \\
\bar{\partial} \bar{\partial} Y_{3ijk}^1 &= -10Y_{3ijk}^1 \\
\bar{\partial} \partial Y_{3ijk}^0 &= -12Y_{3ijk}^0
\end{aligned}$$

## B.2. Expansion de Clebsch-Gordan

A continuación presentamos una pequeña de tabla de productos de esféricos tensoriales.

Productos entre  $l = 0, 1$

$$\begin{aligned}
Y_{1i}^1 Y_{1j}^0 &= \frac{i}{\sqrt{2}} \epsilon_{ijk} Y_{1k}^1 + \frac{1}{2} Y_{2ij}^1 \\
Y_{1i}^1 Y_{1j}^{-1} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} - \frac{i\sqrt{2}}{4} \epsilon_{ijk} Y_{1k}^0 - \frac{1}{12} Y_{2ij}^0 \\
Y_{1i}^0 Y_{1j}^0 &= \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{3} Y_{2ij}^0
\end{aligned}$$

Productos entre  $l = 2$  y  $l = 1$

$$\begin{aligned}
Y_{1i}^1 Y_{2jk}^2 &= Y_{2ijk}^3 \\
Y_{1i}^1 Y_{2jk}^0 &= -\frac{4}{5} \delta_{kj} Y_{1i}^1 - \frac{3}{5} \delta_{ij} Y_{1j}^1 + \frac{i}{\sqrt{2}} (\epsilon_{ikl} Y_{2jl}^1 + \epsilon_{ijl} Y_{2kl}^1) + \frac{2}{5} Y_{3ijk}^1 \\
Y_{1i}^1 Y_{2jk}^1 &= -\frac{1}{6} \eth(Y_{1i}^1 Y_{2jk}^0) \\
Y_{2ij}^{-1} Y_{1k}^1 &= \frac{3}{10} \delta_{kj} Y_{1i}^0 + \frac{3}{10} \delta_{ik} Y_{1j}^0 - \frac{1}{5} \delta_{ij} Y_{1k}^0 + \frac{i\sqrt{2}}{12} (\epsilon_{jkl} Y_{2il}^0 + \epsilon_{ikl} Y_{2lj}^0) - \frac{1}{30} Y_{3ijk}^0 \\
Y_{1i}^0 Y_{2jk}^1 &= -\frac{2}{5} \delta_{kj} Y_{1i}^0 + \frac{3}{5} \delta_{ik} Y_{1j}^0 + \frac{3}{5} \delta_{ij} Y_{1k}^0 - \frac{i}{3\sqrt{2}} (\epsilon_{ikl} Y_{2jl}^0 + \epsilon_{ikl} Y_{2lj}^0) + \frac{4}{15} Y_{3ijk}^0 \\
Y_{2ij}^2 Y_{1k}^{-1} &= \frac{3}{10} \delta_{kj} Y_{1i}^0 + \frac{3}{10} \delta_{ik} Y_{1j}^0 - \frac{1}{5} \delta_{ij} Y_{1k}^0 - \frac{i\sqrt{2}}{12} (\epsilon_{jkl} Y_{2jl}^0 + \epsilon_{ikl} Y_{2lj}^0) - \frac{1}{30} Y_{3ijk}^0 \\
Y_{2ij}^2 Y_{1k}^0 &= \eth(Y_{2ij}^2 Y_{1k}^{-1})
\end{aligned}$$

Los productos que involucran  $l = 2$  y  $l = 3$  también fueron utilizados para obtener nuestras ecuaciones. Sin embargo, debido a que son muy largo para transcribir dejamos las referencias donde pueden encontrarse [29] y [33].



# Bibliografía

- [1] H. Bondi, M. G. J. van der Burg and A. W. K. Metzner. Gravitational waves in general relativity. vii. waves from axi-symmetric isolated systems. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **269**, 21, 1962.
- [2] T. Dray, and M. Streubel. Angular momentum at null infinity. *Class. Quantum Grav.* **1**, 15-26, 1984.
- [3] B.D. Bramson. Relativistic angular momentum for asymptotically flat einstein maxwell manifolds. *Proc. R. Soc. Lond. A* **341**, 463-90, 1975.
- [4] R. Geroch, and J. Winicour,. Linkages in general relativity. *J. Math. Phys.* **22**, 803-12, 1981.
- [5] O. M. Moreschi. Intrinsic angular momentum and centre of mass in general relativity. *Class Quantum Grav.* **21**, 5409-25, 2004.
- [6] R. Penrose. Quasi-local mass and angular momentum in general relativity. *Proc. R. Soc. Lond. A* **381**, 53-63, 1982.
- [7] A. Ashtekar, and J. Winicour. Linkages and hamiltonians at null infinity. *J. Math. Phys.* **23**, 2410-17, 1982.
- [8] L. B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in GR: A review article. *Liv. Rev. Relativity.* **12**, 4, 2009.
- [9] R. Penrose. The road to reality; a complete guide to the laws of the universe. *Ed. Jonathan Cape (London)*, 2004.

- [10] T. M. Adamo, E. T. Newman and C. N. Kozameh. Null geodesic congruences, asymptotically-flat spacetimes and their physical interpretation. *Liv. Rev. Relativity*. **15**, 1, 2012.
- [11] R. O. Hansen, E. T. Newman, R. Penrose and K. P. Tod. The metric and curvature properties of  $\mathcal{H}$ -space. *Proc. R. Soc. Lond. A* **363**, 445-68, 1978.
- [12] O. M Moreschi. On angular momentum at future null infinity class. *Class Quantum Grav.* **3**, 503-525, year=1986.
- [13] R. Geroch and J. Winicour. Linkages in general relativity. *J. Math. Phys.*, **22**, 803-12, 1981.
- [14] H. Bondi M. van der Burg and A. Metzner. Gravitational waves in general relativity. VII. waves from axi-symmetric isolated systems. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, **269**, 21-52, 1962.
- [15] R. K. Sachs. Gravitational waves in general relativity. VIII. waves in asymptotically flat space-time. *Proc. R. Soc. Lond. A* **270**, 103-126, 1962.
- [16] R. Penrose. Asymptotic properties of fields and spacetimes. *Phys. Rev. Letter.*, **10**, 66-68, 1963.
- [17] F. P. Esposito and L. Witten. Asymptotic structure of spacetime. *Plenum Press. New York and London*, 1977.
- [18] R. K. Sachs. Gravitational radiation. *Relativity, Groups and Topology; The 1963 Les Houches Lectures, B de Witt and C. de Witt, 523-62, (New York: Gordon and Breach)*, 1964.
- [19] E. T. Newman and T. W. J. Unti. Behavior of asymptotically flat empty spaces. *J. Math. Phys.* **3**, 891-901, 1962.
- [20] E. T. Newman and K.P. Tod. Asymptotically flat space-times. *General Relativity and Gravitation, vol. 2, ed. A. Held (New York: Plenum Publishing)*, 1980.

- [21] E. T. Newman and R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.* **3**, 566-78, 1962.
- [22] C.N. Kozameh, P.W Lambertini and O.A. Reula. Global aspects of light cone cuts. *J. Math. Phys.* **32**, 3423-26, 1991.
- [23] M. Iriondo, C. N. Kozameh and A. T. Rojas. Null cones from  $\mathcal{I}^+$  and legendre submanifolds. *J. Math. Phys.* **40**, 2483-93, 1999.
- [24] S. Frittelli, E. T. Newman and G. Silva-Ortigoza. The eikonal equation in asymptotically flat spacetimes. *J. Math. Phys.* **40**, 1041-56, 1999.
- [25] M. Bordcoch, C. N. Kozameh and A. Rojas. A spin weight zero formulation of general relativity. *arXiv:1201.1655*, 2012.
- [26] S. Frittelli, C. N. Kozameh, and E. T. Newman. Linearized einstein theory via null surfaces. *J. Math. Phys.* **36**, 5005-22, 1995.
- [27] E. Newman and R. Penrose. Note on the bondi-metzner-sachs group. *J. Math. Phys.*, **7**, 863-870, 1965.
- [28] L. J. Mason. The vacuum and bach equations in terms of light cone cuts. *J. Math. Phys.* **36**, 3704-21, 1995.
- [29] E. T. Newman and G. Silva-Ortigoza. Tensorial spin-s harmonics. *Class Quantum Grav.* **23**, 497-509, 2006.
- [30] L. E. Kidder. Coalescing binary systems of compact objects to post<sup>5/2</sup>-newtonian order. v. spin effects. *Phys. Rev. D*, **52**, 821-47, 1995.
- [31] A. Komar. Covariant conservation laws in general relativity. *Phy. Rev.* **113**, 934-6, 1959.
- [32] E. Poisson. A relativist's toolkit. *Cambridge University Press. Cambridge*, 2004.
- [33] C. N. Kozameh and G. D. Quiroga. Spin and center of mass in axially symmetric einstein-maxwell spacetimes. *Class. Quantum Grav.* **29**, 235006, 2012.

- [34] J. A. V. Kroon. On killing vector fields and newman-penrose constants. *J. Math. Phys.*, **41**, 898-923, 2000.
- [35] LSC. Data formats for numerical relativity waves. *arXiv:0709.0093v3*, 2012.
- [36] Xuefei Gong, Yu Shang, Shan Bai, Zhoujian Cao, Ziren Luo, and Y. K. Lau. Newman-penrose constants of the kerr-newman metric. *Phys. Rev. D* **76**, 107501, 2007.
- [37] J. Winicour. Angular momentum in general relativity. *General Relativity and Gravitation, vol. 2, ed. A. Held (New York: Plenum Publishing)*, 1980.
- [38] L. A. Tamburino and J. H. Winicour. Gravitational fields in finite and conformal bondi frames. *Phys. Rev.* **150**, 1039-53, 1966.
- [39] R. W. Lind, J. Messmer and E. T. Newman. Equation of motion for the sources of asymptotically flat spaces. *J. Math. Phys.* **13**, 1884-91, 1972.
- [40] C. N. Kozameh and G. D. Quiroga. Spin and center of mass in asymptotically flat spacetimes. *arXiv:1311.5854v3*, 2014.
- [41] A. Held, E. Newman and R. Posadas. The lorentz group and the sphere. *J. Math. Phys.*, **11**, 3145-54, 1970.
- [42] R. K. Sachs. Asymptotic symmetries in gravitational theory. *Phys. Rev.* **128**, 2851-64, 1962.
- [43] J. D. Jackson. Classical electrodynamics. *Classical Electrodynamics 3rd Edition, Jhon Wiley and Sons, Inc.*, 1999.
- [44] L. Blanchet. Gravitational radiation from post-newtonian sources and inspiralling compact binaries. *Liv. Rev. Relativity*, **9**, 4, 2006.
- [45] A. Gopakumar and B. R. Iyer. Gravitational waves from inspiralling compact binaries: Angular momentum flux, evolution of the orbital elements and the wave form to the second post-newtonian order. *Phys. Rev. D*, **56**, 7708-31, 1997.

- [46] L. Blanchet, Moh'd S. S. Qusailah and C. M. Will. Gravitational recoil of inspiralling black-hole binaries to second post-newtonian order. *Class Quantum Grav.* **635**, 508-15, 2005.



