

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA**  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

**Tesis Doctoral**



**Interacción Continuo Estructura en Pilotes Sometidos a  
Esfuerzos Laterales en el Rango de Deformaciones  
Bajas a Moderadas**

Autor: Ing. Diego Fernando Turello

Director: Prof. Dr. Federico Pinto

Noviembre de 2015



Interacción Continuo Estructura en Pilotes Sometidos a  
Esfuerzos Laterales en el Rango de Deformaciones Bajas a  
Moderadas

Autor: Ing. Diego Fernando Turello.  
FCEFN-UNC, FRSF-UTN

Director: Prof. Dr. Federico Pinto.  
FCEFN-UNC, IDIT UNC-CONICET

**COMISIÓN ASESORA:**

Prof. Dr. Carlos A. Prato.  
FCEFN-UNC

Prof. Dr. Pablo J. Sánchez.  
CIMEC UNL-CONICET, GIMNI FRSF-UTN

Esta tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba para cumplimentar los requerimientos de obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina.

Noviembre de 2015.





**ACTA DE EXAMENES**

Libro: 00001

Acta: 03282

Hoja 01/01

LLAMADO: 1

20/11/2015

CATEDRA - MESA:

DI002 TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NUMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGRESO	COND.	NOTA	FIRMA
27761133	TURELLO, Diego Fernando	DNI: 27761133	2010	T	APROBADO	

SUAREZ COLCHE, Luis - GIUSTI, Sebastián - PANDO, Miguel - FLORES, Fernando Gabriel - CEBALLOS, Marce

Observaciones:

MARCELO A. CEBALLOS

Córdoba, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_-

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: \_\_\_\_\_

1 0 1 0 1  
Inscriptos Ausentes Examinados Reprobados Aprobados  
17/11/2015 08:39:52

Libro/Acta: 0000103282

Hoja: 01/01



## Resumen

La modelación de problemas de interacción suelo-pilote debido a cargas laterales mediante métodos numéricos requiere la representación de dos sub-dominios: el suelo y el pilote. Con el objeto de optimizar el proceso de modelación, resulta atractiva la idea de representar el pilote mediante elementos de viga y el suelo mediante elementos de sólidos. En los últimos años se desarrolló el concepto de elementos finitos de vigas embebidos en sólidos, donde los elementos de vigas interactúan directamente con los elementos de sólidos circundantes. En los elementos embebidos desarrollados hasta el momento, esta interacción se establece exclusivamente en base a consideraciones puramente numéricas, sin contar con una formulación mecánica rigurosa del fenómeno de interacción. Como consecuencia, el modelo numérico conseguido no representa apropiadamente la física del problema de interacción, lo que resulta en que la solución sea dependiente de la malla y que no converja a las soluciones de referencia para estos problemas. Por ello, uno de los objetivos de este trabajo es formular un elemento de viga embebido en sólidos que considere estrictamente la superficie de interacción entre los dos sub-dominios. Por otro lado, la respuesta mecánica del pilote sometido a carga lateral en el rango de deformaciones laterales bajas a moderadas, está influenciada por el comportamiento no-lineal material del suelo en la zona cercana al pilote. Actualmente, uno de los métodos más empleados para estimar la respuesta lateral no-lineal del pilote, es el método de las curvas  $p - y$ , donde la interacción suelo-estructura se tiene en cuenta a través de curvas no-lineales, calibradas con ensayos a escala real, que representan la respuesta no-lineal de resortes discretos distribuidos en la longitud del pilote. En este trabajo se propone desarrollar y acoplar una interfaz no-lineal a los elementos de vigas embebidos propuestos, a fin de tener en cuenta el comportamiento plástico en las proximidades del pilote. Debido a la gran aceptación que tiene el método de las curvas  $p - y$ , se propone usar este tipo de curvas para la definición del comportamiento mecánico de esta interfaz. Como alternativa a la definición de la interfaz no-lineal en función de las curvas  $p - y$ , se plantea un modelo de interfaz directamente en el dominio tridimensional utilizando modelos constitutivos elasto-plásticos de sólidos. Finalmente, se valida el desempeño numérico del modelo que resulta de acoplar el elemento de viga embebido y las interfaces no-lineales propuestas y se presentan ejemplos de interacción suelo-estructura en donde el método aporta valiosos resultados.





## Abstract

The modelling of soil-pile interaction problems subject to lateral loads using numerical methods requires the discretization of two sub-domains: the pile and the soil. In order to optimize the modelling process, it is suitable to use beam elements to represent the pile and solid elements to represent the soil. In the last few years the concept of embedded beam element has been developed, in this method the beam elements interact with their neighborhood solid elements. The interaction in the embedded beam elements developed hitherto is established exclusively from a numerical point of view, without a rigorous theoretical mechanic framework for the interaction phenomena. Thus, the numerical model achieved does not represent the physics of the problem properly, which leads to mesh dependent and non-convergent solutions for some special occasions. Therefore, one of the main goals of this work is to develop an embedded beam element which explicitly considers the interaction surface between both sub-domains. Besides, the mechanical response of piles under lateral loads within the rank of low to moderate lateral displacements is influenced by the non-linear material behavior in the soil next to the pile. At present, one of the most used method to estimate the non-linear response of piles is the  $p - y$  method, by which the soil-structure interaction is taken into account through non-linear curves which are calibrated with full scale tests, and represent non-linear springs discretely distributed along the pile. In this work a non-linear interface is developed and fit together with the proposed embedded beam element, with the aim of taking into account the plastic behavior in the soil surrounding the pile. Due to the fact that the  $p - y$  method is widely spread in engineering practice, it is proposed to use this method to calibrate the non-linear interface. A three dimensional non-linear interface defined in terms of solid elasto-plastic material models is presented as an alternative to the non-linear interface. Finally, it is shown the numerical model performance for the proposed embedded beam element with non-linear interfaces.



## Resumo

A modelagem mediante métodos numéricos de problemas de interação solo-estaca devida a cargas laterais requer a representação de dois subdomínios: o solo e a estaca. Para otimizar o processo de modelagem representa-se a estaca como elementos de viga e o solo mediante elementos de sólidos. Nos últimos anos tem-se desenvolvido o conceito de elementos finitos de vigas embutidas nos sólidos, onde os elementos de vigas interagem diretamente com os elementos de sólidos circundantes. Nos elementos embutidos atualmente desenvolvidos, essa interação estabelece-se somente segundo considerações estritamente numéricas, não havendo uma formulação mecânica rigorosa para o fenômeno de interação. Em consequência, o modelo numérico conseguido não representa, de maneira apropriada, o fenômeno físico do problema de interação, daí que a solução obtida dependa da malha e não haja convergência com as soluções referenciadas nesse tipo de problemas. O presente trabalho tem como principal objetivo formular um elemento de viga embutida nos sólidos considerando estritamente a superfície de interação entre os dois subdomínios. Por outro lado, a resposta mecânica da estaca submetido a carregamento lateral no intervalo de deformações laterais de baixas para moderadas, é influenciada pelo comportamento não linear material do solo na zona adjacente à estaca. Hoje, um dos métodos mais desenvolvidos para estimar a resposta lateral não-linear da estaca é o das curvas  $p - y$ , no qual leva-se em conta a interação solo-estrutura através de curvas não-lineares, calibradas com ensaios em escala real, que representam a resposta não linear de molas discretas distribuídas ao longo da altura da estaca. O propósito nesse trabalho é desenvolver e acoplar uma interface não linear aos elementos de vigas embutidos propostos, levando em conta o comportamento plástico na adjacência da estaca. Dada a grande aceitação do método das curvas  $p - y$ , nossa proposta é procurar a definição do comportamento mecânico desta interface, utilizando esse tipo de curvas. Uma alternativa para a definição da interface não-linear em função das curvas  $p - y$  surge um modelo de interface diretamente no domínio tridimensional, utilizando modelos constitutivos elasto-plásticos de sólidos. Finalmente, valida-se o desempenho numérico do modelo como resultado de acoplar o elemento de viga embutido com as interfaces não-lineares propostas, aliás, apresentam-se exemplos de interação solo-estrutura, nos quais a contribuição do método é marcadamente valiosa.



*A Ana Paula*



## Agradecimientos

Quiero agradecer a mi director de tesis, Federico Pinto, por ofrecerme sus conocimientos de forma tan desinteresada, por estar presente cada vez que lo necesité, por brindarme la posibilidad de realizar mis estudios de posgrado y por su constante apoyo y fe en mí. Además quiero agradecer a Pablo Sanchez, quien ha estado de forma incondicional, siempre dispuesto a discutir los problemas y ofrecerme enriquecedores puntos de vista. A Carlos Prato por su orientación siempre valiosa.

Agradezco el apoyo económico brindado por el CONICET y la UTN-FRSF a través de las becas de posgrado. Además, agradezco al Departamento de Estructuras de la FCEFYN-UNC y al CIMEC UNL-CONICET por los lugares de trabajo brindados.

En especial quiero agradecer a José Luperi y Mauro Maza, mis compañeros de oficina en la 203, con quienes entre mate y mate hemos discutido y compartido aspectos que van más allá de lo técnico. Siempre guardo un sentimiento de añoranza para esa oficina 203 y los almuerzos junto a Andrés y Luis.

A Luis Soria Castro, quien además de brindarme su amistad me abrió las puertas de su casa y de su familia, quienes me recibieron con los brazos abiertos.

A Ana Paula, mi compañera en esta vida, quien me alentó a llevar adelante este proyecto, pero más allá de eso, porque día a día elige compartir su vida conmigo, siendo un baluarte de sensatez y cariño.





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>Resumo</b>	<b>xi</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>xxix</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	1
1.2 Antecedentes . . . . .	1
1.3 Metodología . . . . .	6
1.4 Nomenclatura . . . . .	6
1.5 Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2 Revisión de literatura</b>	<b>9</b>
2.1 Método de vigas sobre lecho elástico . . . . .	9
2.1.1 El problema de interacción suelo-estructura . . . . .	9
2.1.2 Pilotes cargados lateralmente . . . . .	11
2.2 Métodos elásticos . . . . .	14
2.3 Método de elementos finitos . . . . .	15
2.4 Método de Randolph . . . . .	16
2.5 Método de curvas de transferencia . . . . .	18
2.6 Método de la cuña de deformación . . . . .	20
2.7 Método de elementos de vigas embebidos en sólidos . . . . .	24
2.8 Discusión . . . . .	27
<b>3 EVE propuesto: formulación elástica-lineal</b>	<b>29</b>
3.1 Formulación variacional del problema . . . . .	29

3.2	Elemento de viga embebido propuesto . . . . .	32
3.2.1	Discretización y funciones de mapeo . . . . .	33
3.2.2	Formulación propuesta del elemento de viga embebido . . . . .	39
3.3	Implementación numérica . . . . .	42
3.3.1	Elementos embebidos . . . . .	42
3.3.2	Integración numérica de las matrices <b>A</b> y <b>B</b> . . . . .	43
<b>4</b>	<b>EVE propuesto: interfaz de plasticidad concentrada</b>	<b>47</b>
4.1	Formato variacional extendido del problema . . . . .	47
4.2	Formulación propuesta para la interfaz no-lineal . . . . .	48
4.3	Fuerzas de interacción en cinemática de vigas . . . . .	50
4.3.1	Cinemática del elemento embebido con interfaz no-lineal . . . . .	50
4.3.2	Ley constitutiva para las fuerzas de interacción . . . . .	53
4.4	Fuerzas de interacción en cinemática de sólidos . . . . .	62
4.4.1	Cinemática del elemento embebido con interfaz no-lineal . . . . .	62
4.4.2	Ley constitutiva para las fuerzas de interacción . . . . .	65
4.5	Implementación numérica . . . . .	65
4.5.1	Rigidez tangente de la interfaz no-lineal . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Validación y ejemplos</b>	<b>69</b>
5.1	Ejemplo 1: Pilote vertical . . . . .	69
5.1.1	Validación para el caso elástico . . . . .	69
5.1.2	Validación para el caso elasto-plástico . . . . .	75
5.2	Ejemplo 2: Pilote inclinado . . . . .	78
5.2.1	Validación para el caso elástico . . . . .	78
5.3	Ejemplo 3: Pilote con columna vertical . . . . .	83
5.3.1	Validación para el caso elasto-plástico. Pilote en Arena . . . . .	83
5.3.2	Validación para el caso elasto-plástico. Pilote en Arcilla . . . . .	85
5.4	Ejemplo 4: Interacción en grupos de pilotes . . . . .	87
5.4.1	Validación para el caso elástico . . . . .	88
5.5	Ejemplo 5: Cargas en suelos . . . . .	94
5.6	Ejemplo 6: Deslizamiento lateral . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>
6.1	Síntesis . . . . .	101
6.2	Conclusiones . . . . .	103
6.3	Aspectos originales . . . . .	104
6.4	Trabajos futuros . . . . .	105

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	xix
<b>A Principio variacional</b>	<b>107</b>
<b>B Derivada del operador de proyección <math>\mathcal{P}</math></b>	<b>113</b>
<b>C Modelos constitutivos de suelos</b>	<b>115</b>
C.1 Modelo Cam Clay Modificado . . . . .	115
C.2 Modelo de plasticidad J2 . . . . .	117



# Índice de figuras

2.1	Esquema de pilote vertical cargado lateralmente modelado como viga sobre fundación elástica . . . . .	11
2.2	Respuesta del modelo de Randolph. (a) Desplazamientos laterales normalizados debido a $H_0$ (b) Momentos flectores normalizados debido a $H_0$ (c) Desplazamientos laterales normalizados debido a $M_0$ (d) Momentos flectores normalizados debido a $M_0$ . . . . .	17
2.3	(a) Esquema de resolución mediante el método de las curvas $p-y$ (b) Forma de las curvas $p-y$ para distintas profundidades $z$ , donde se muestra la reacción última $p_u$ y el desplazamiento lateral último $y_u$ para la profundidad $z_{i-1}$ . . . . .	19
2.4	Método de SWM. (a) Desplazamientos laterales en el modelo VLE y en el modelo SWM (b) Cuña de deformación (c) Tensiones horizontales y ángulo de fricción movilizado $\phi_m$ (d) Ensayo triaxial, curva tensión desviadora vs. deformación . . . . .	21
2.5	Método de SWM. (a) Geometría de la cuña en estado pasivo de empujes y (b) Sección a la profundidad $z$ y las fuerzas intervinientes. . . . .	21
2.6	Modelo empírico adoptado para el nivel de tensión (SL) (a) Curva $SL$ vs. Deformación $\varepsilon$ en el ensayo Triaxial y (b) Variación del parámetro $\lambda$ . . . . .	22
2.7	Esquema del elemento de viga embebido (EVE) propuesto por Randolph [57]. . . . .	24
3.1	Esquema del modelo propuesto. Separación del dominio en el sub-dominio del sólido $\chi_s$ , de la viga $\chi_b$ y superficie de interacción $\Omega$ . . . . .	30
3.2	Esquema del elemento de viga embebido (EVE) con superficie de interacción, $\omega$ . . . . .	33
3.3	Funciones de mapeo que transforman variables evaluadas en el eje de la viga a variables evaluadas en la superficie de interacción del EVE propuesto: (a) $\mathbf{h}_u$ , (b) $\mathbf{h}_f$ . . . . .	34
3.4	Funciones de mapeo en la base del EVE propuesto: (a) $\mathbf{h}_u$ , (b) $\mathbf{h}_f$ . . . . .	34
3.5	Patrones de fuerzas de interacción en los diferentes modos de carga en la superficie de interacción lateral $\omega$ . . . . .	38
3.6	Patrones de fuerzas de interacción en los diferentes modos de carga en la superficie de interacción transversal $\Gamma_0$ . . . . .	39

3.7	Esquema de los elementos de sólidos utilizados en coordenadas locales (a) Elemento H8 y (b) Elemento H27. . . . .	42
3.8	Esquema de los elementos de vigas utilizados en coordenadas locales (a) Elemento B2 y (b) Elemento B3. . . . .	42
3.9	Esquema de variables locales y globales en el dominio de vigas y de sólidos en el punto de integración $k$ . . . . .	43
4.1	(a) Definición del salto de desplazamientos $[[\mathbf{u}_b]]$ en cinemática de vigas y (b) Fuerzas de interacción modeladas en función del salto de desplazamientos. . . . .	50
4.2	Detalle de las componentes del vector $[[\mathbf{u}_b^*]]$ (a) componentes de desplazamientos en el plano $\pi$ (b) componentes de giros en el plano $\pi$ y (c) componentes según el eje del pilote. . . . .	51
4.3	Parámetros para la definición de la curva $p - y$ propuesta por Resse et al. (a) Curva $\bar{A}_s$ para determinación de carga última en el caso estático y (b) Curva $\bar{B}_s$ para determinación de carga intermedia en el caso estático. . . . .	55
4.4	Curvas elasto-plásticas para caracterizar la carga normal distribuida para (a) Endurecimiento lineal y (b) Endurecimiento exponencial. . . . .	55
4.5	Esquema de los modelos utilizados para estimar la rigidez inicial de las diferentes curvas elasto-plásticas (a) Fuerza normal (b) Fuerza axial (c) Momento torsor y (d) Momento flector. . . . .	56
4.6	Curva elasto-plástica que caracteriza la fuerza normal al eje de la viga (a) para un suelo granular y (b) para suelo cohesivo. . . . .	59
4.7	Curvas elasto-plásticas para caracterizar la fuerza axial distribuida para (a) Endurecimiento lineal y (b) Endurecimiento exponencial. . . . .	60
4.8	Curvas elasto-plásticas para caracterizar el momento flector distribuido para (a) Endurecimiento lineal y (b) Endurecimiento exponencial. . . . .	61
4.9	(a) Definición del salto de desplazamientos $[[\mathbf{u}_b]]$ en cinemática de sólidos y (b) Fuerzas de interacción modeladas en función del salto de desplazamientos. . . . .	63
4.10	Definición del salto de desplazamientos en el punto $o$ asociado al punto para evaluación de tensiones $k$ en el sólido para un pilote circular. Vista de la sección transversal del pilote. . . . .	63
5.1	Ejemplo 1. Vista lateral del esquema utilizado. . . . .	69
5.2	Ejemplo 1. Caso elástico. Desplazamiento lateral en la cabeza del pilote, $u_0$ , para (a) H8B2 y (b) H27B2 EVEs. . . . .	70
5.3	Ejemplo 1. Caso elástico. Resultados normalizados para el H8B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u$ , (b) momento flector $M$ y (c) esfuerzo de corte $V$ . . . . .	71

5.4	Ejemplo 1. Caso elástico. Resultados normalizados para el H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u$ , (b) momento flector $M$ y (c) esfuerzo de corte $V$ . . . . .	71
5.5	Ejemplo 1. Caso elástico. Norma del error relativo $\ e\ $ vs $l_m$ . (a) EVE clásico (b) EVE propuesto. . . . .	72
5.6	Ejemplo 1. Caso elástico. Tensión normal $S_{22}$ en el modelo de Abaqus ( $S_{YY}$ según los ejes globales) para el elemento C3D8R que se integra en la sección transversal para hallar los esfuerzos en el modelo de vigas. . . . .	73
5.7	Ejemplo 1. Caso elástico. Desplazamiento lateral $U_1$ (a) Modelo completo en Abaqus ( $U_X$ según los ejes globales) para el elemento C3D8R y (b) Modelo EVE propuesto en GID. . . . .	74
5.8	Ejemplo 1. Caso elasto-plástico. Resultados normalizados para los elementos H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u$ , (b) momento flector $M$ y (c) esfuerzo de corte $V$ . . . . .	76
5.9	Ejemplo 1. Caso elasto-plástico. Desplazamiento en la cabeza del pilote vs. carga externa aplicada. . . . .	77
5.10	Ejemplo 2. Vista lateral del esquema. . . . .	78
5.11	Ejemplo 2. Esquema de la sección transversal utilizada en el modelo 3D del pilote inclinado. . . . .	78
5.12	Ejemplo 2. Vista lateral del corte de la malla por el centro del micro-pilote inclinado. En diferentes colores se muestran los diferentes materiales. . . . .	79
5.13	Ejemplo 2. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u$ , (b) esfuerzo normal $N$ , (c) esfuerzo de corte $V$ y (d) momento flector $M$ . . . . .	80
5.14	Ejemplo 2. Desplazamientos en el sólido $U_1$ : (a) en el modelo de Abaqus para el pilote inclinado y (b) en el modelo EVE H8B2 propuesto en GID. . . . .	81
5.15	Ejemplo 2. Desplazamientos en el sólido $U_2$ : (a) en el modelo de Abaqus para el pilote inclinado y (b) en el modelo EVE H8B2 propuesto en GID. . . . .	82
5.16	Ejemplo 2. Vectores de desplazamiento en el pilote en el Ejemplo 2: (a) en el modelo de Abaqus para el pilote inclinado y (b) en el modelo EVE H8B2 propuesto en GID. . . . .	83
5.17	Ejemplo 3. Vista lateral del esquema utilizado. . . . .	84
5.18	Ejemplo 3. Pilote en arena. Resultados: (a) $P_0$ vs. $u_0$ y en (b) $P_0$ vs. $M_{max}$ . . . . .	84
5.19	Ejemplo 3. Pilote en arcilla. Resultados: $P_0$ vs. $u_0$ para pilotes con cabeza (a) Libre y (b) Empotrada. . . . .	85
5.20	Ejemplo 4. Vista en planta y lateral del esquema utilizado. . . . .	87
5.21	Ejemplo 4. Esquema de la restricción cinemática impuesta por el cabezal rígido. . . . .	88

5.22	Ejemplo 4. Resultados normalizados en un pilote individual con restricción al giro en la cabeza para el H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u$ , (b) momento flector $M$ y (c) esfuerzo de corte $V$ . . . . .	89
5.23	Ejemplo 4. Resultados normalizados: corte en la cabeza de los pilotes vs. la separación adimensional $\frac{s}{D_p}$ para: (a) Pilote central (b) Pilote frontal (c) Pilote lado (d) Pilote esquina según el esquema de la Figura 5.20. . . . .	90
5.24	Ejemplo 4. Definición de las variables para estimar los coeficientes de interacción entre pilotes según [46]. . . . .	90
5.25	Ejemplo 4. Eficiencia en el rango elástico en el grupo de pilotes para el modelo EVE propuesto H8B2 y H27B2 y la solución de Randolph. . . . .	91
5.26	Ejemplo 4. Desplazamientos en el sólido: (a) $\frac{s}{D_p} = 2$ (b) $\frac{s}{D_p} = 3$ (c) $\frac{s}{D_p} = 4$ (d) $\frac{s}{D_p} = 5$ . . . . .	92
5.27	Ejemplo 5. Vista lateral del esquema utilizado. . . . .	94
5.28	Ejemplo 5. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u_1$ y (b) desplazamiento axial $u_3$ . . . . .	95
5.29	Ejemplo 5. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) momento flector $M$ , (b) esfuerzo de corte $V$ y (c) esfuerzo normal $N$ . . . . .	96
5.30	Ejemplo 5. Vista lateral de la posición deformada y original en el sólido y el pilote para el caso elástico. Elementos H8B2. . . . .	97
5.31	Ejemplo 6. Vista lateral del esquema utilizado. . . . .	98
5.32	Ejemplo 6. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral $u$ , (b) momento flector $M$ y (c) esfuerzo de corte $V$ . . . . .	99
C.1	Modelo Cam Clay Modificado (CCM). Superficie de fluencia en el espacio $p - q$ . .	115



# Índice de tablas

4.1	Valores de carga de fluencia, $t_{f\pi}^f$ en función de $t_{f\pi}^u$ , según la Figura 4.4. . . . .	57
4.2	Valores de $\varepsilon_{50}$ en función de $s_u$ en MPa. . . . .	58
5.1	Ejemplo 1. Caso elasto-plástico. Desplazamientos máximos en superficie y esfuerzos internos. . . . .	77
5.2	Ejemplo 2. Desplazamientos máximos en superficie y en la cabeza del pilote. . . . .	82
5.3	Ejemplo 5. Desplazamientos máximos en superficie y esfuerzos internos. . . . .	97
5.4	Ejemplo 6. Desplazamientos máximos en superficie y esfuerzos internos. . . . .	100



# Índice de algoritmos

C.1	Mapeo de retorno para el modelo CCM con endurecimiento isotrópico lineal . . .	118
C.2	Tensor consistente constitutivo tangente Para el modelo CCM . . . . .	119
C.3	Mapeo de retorno para el modelo J2 con endurecimiento isotrópico lineal . . . . .	120
C.4	Tensor consistente constitutivo tangente para el modelo J2 en la superficie de fluencia de Von Mises $\Phi_1$ . . . . .	121



# Lista de símbolos

$A$	Parámetro del modelo SWM.
$A_p$	Área de la sección transversal del pilote.
$A_t$	Cociente entre el módulo de elasticidad de la arena y la presión geostática a la profundidad $z$ según Terzaghi.
$B_p$	Lado del pilote de sección cuadrada.
$D_p$	Diámetro del pilote de sección circular.
$E_a$	Módulo de elasticidad del acero.
$E_p$	Módulo de elasticidad del pilote.
$E_s$	Módulo de elasticidad del suelo.
$G^*$	Módulo de corte del suelo equivalente. Randolph.
$G_c$	Módulo de corte del suelo equivalente en $z = l_c$ . Randolph.
$G_i$	Módulo de corte en la interfaz.
$G_s$	Módulo de corte del suelo.
$H$	Módulo de endurecimiento plástico en los modelos de sólidos.
$I_p$	Momento de inercia de la sección transversal del pilote.
$J$	Parámetro empírico del modelo de curva $p - y$ .
$K_0$	Coefficiente de empuje horizontal en reposo.
$K_a$	Coefficiente de empuje horizontal en estado activo.
$K_p$	Coefficiente de empuje horizontal en estado pasivo.
$L_p$	Longitud del pilote total.
$M_0$	Carga externa. Momento flector aplicado en la cabeza del pilote.
$P_0$	Carga externa. Fuerza aplicada en la cabeza del pilote.
$R_p$	Radio del pilote de sección circular.
$SL$	Nivel de tensión.
$S_1, S_2$	Parámetros que dependen de la geometría del pilote. SWM.
$\bar{k}_{s1}$	Módulo de reacción vertical medido en plato de carga de 1 ft. de lado.

$\beta_f$	Parámetro que controla la fricción última en la superficie del pilote.
$\gamma_s$	Peso unitario del suelo.
$\nu_a$	Coefficiente de Poisson del acero.
$\nu_i$	Coefficiente de Poisson en la interfaz.
$\nu_s$	Coefficiente de Poisson del suelo.
$a_f$	Parámetro de ajuste de la carga de fluencia a las curvas $p - y$ .
$c_u$	Cohesión no drenada.
$h_i$	Espesor ficticio de la interfaz.
$k_h$	Módulo de reacción horizontal.
$k_s$	Coefficiente de balasto vertical.
$l_c$	Longitud característica. Randolph.
$l_m$	Tamaño de malla para los elementos de sólidos.
$l_p$	Longitud del elemento de viga.
$m, q$	Parámetros para ajustar $SL$ a los resultados de ensayos triaxiales.
$m_s^*$	Incremento en profundidad del módulo de corte del suelo equivalente. Randolph.
$m_h$	Incremento en profundidad del módulo de reacción horizontal.
$m_s$	Incremento en profundidad del módulo de corte del suelo.
$n_p, n_l$	Número de segmentos utilizados en la integración numérica de la matriz <b>A</b> .
$p$	Presión reactiva de suelo.
$s_u$	Resistencia al corte no drenada.
$y$	Desplazamiento lateral en modelos de vigas.
$z$	Profundidad de la sección del pilote en estudio.
$X_1, X_2, X_3$	Terna global de referencia.
<b>0</b>	Matriz nula con las dimensiones apropiadas.
<b>A, B</b>	Matrices inherentes a la formulación propuesta.
<b><math>C_d</math></b>	Matriz de módulos tangentes de la interfaz no-lineal, de componentes $C_{f\pi}, C_{fa}, C_{m\pi}, C_{mt}$ .
<b><math>C^{ep}</math></b>	Matriz de módulos elasto-plásticos de la interfaz.
$E'_p$	Módulo de elasticidad equivalente del pilote. Randolph.
$M, V, N, T$	Esfuerzos internos en los elementos de vigas, momento flector, esfuerzo de corte, esfuerzo normal, momento torsor respectivamente.
$\rho_c$	Factor de homogeneización. Randolph.

$\hat{\mathbf{F}}_d$	Fuerzas nodales de interacción en cinemática de vigas a nivel global.
$\Gamma_0, \Gamma_c$	Superficies que definen la sección transversal del pié y de la cabeza del pilote, respectivamente.
$\Gamma_D$	Superficie que es frontera del dominio de sólido sobre la que se aplican condiciones tipo Dirichlet.
$\Gamma_b$	Frontera del sub-dominio de vigas.
$\Gamma_s$	Frontera del sub-dominio de sólidos.
$\Gamma$	Sección transversal del pilote.
$H_{f\pi}, H_{fa}, H_{m\pi}$	Módulos de endurecimiento plástico en la interfaz para el modelo de endurecimiento bi-lineal y las distintas componentes.
$\mathbf{I}$	Matriz identidad de $3 \times 3$ .
$\mathbf{K}_{bs}$	Matriz de rigidez global estándar de los elementos de viga en cinemática de sólidos.
$\mathbf{K}_b$	Matriz de rigidez global estándar de los elementos de viga en cinemática de vigas.
$\mathbf{K}_d$	Matriz de rigidez tangente global de la interfaz no-lineal.
$\mathbf{K}_s$	Matriz de rigidez global estándar de los elementos de sólidos en cinemática de sólidos.
$\mathbf{K}_t$	Matriz de rigidez tangente global del sistema.
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange $\in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{N}_{bs}$	Matriz de transformación global. Formulación EVE clásica.
$N_{pg}, W_{pg}$	Número y peso de los puntos de Gauss respectivamente.
$\Omega_l$	Superficie lateral del pilote.
$\Omega$	Superficie interna que es frontera entre los distintos sub-dominios e igual a $\Omega_l \cup \Gamma_0$ .
$\hat{\mathbf{P}}_{bs}$	Vector de fuerzas nodales equivalente en cinemática de sólidos.
$\hat{\mathbf{P}}_b$	Vector de fuerzas nodales convencional de vigas en cinemática de vigas.
$\hat{\mathbf{P}}_{eb}$	Vector de cargas nodales externas de vigas en cinemática de vigas.
$\hat{\mathbf{P}}_{es}$	Vector de cargas externas en sólidos en cinemática de sólidos.
$\hat{\mathbf{P}}_s$	Vector de fuerzas nodales de sólidos.
$\mathbf{Q}$	Matriz de rotación entre las coordenadas locales y superficiales en el elemento maestro de vigas.
$S_r$	Relación de desplazamientos.
$T_d$	Fuerzas de interacción plásticas no-conservativas en cinemática de vigas a nivel global.

$\bar{\lambda}$	Variación admisible de los multiplicadores de Lagrange $\in \mathbb{R}^3$ .
$[[\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}]]$	Variación admisible del salto de desplazamientos en cinemática de sólidos.
$\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}$	Variación admisible del campo de desplazamientos en el dominio de viga en cinemática de vigas $\in \mathbb{R}^6$ , de componentes $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$ .
$\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}$	Variación admisible del campo de desplazamientos en el dominio de viga $\in \mathbb{R}^3$ .
$\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}$	Variación admisible del campo de desplazamientos en el dominio de sólidos $\in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{X}$	Vector posición de un punto en coordenadas globales.
$h_t$	Altura del terraplén.
$\bar{A}_s, \bar{B}_s$	Parámetros del modelo de curva $p - y$ propuesta por Resse.
$\beta_m$	Ángulo de la cuña pasiva.
$\beta, p_c, p_t$	Parámetros del modelo Cam Clay Modificado.
$\mathbf{b}_{\mathbf{s}}, \mathbf{b}_{\mathbf{b}}$	Fuerzas máxicas en el sub-dominio de sólidos y vigas respectivamente $\in \mathbb{R}^3$ .
$\chi_s, \chi_b$	Sub-dominio de sólido y de viga respectivamente.
$\mathcal{I}_{ij}$	Coefficientes de influencia. Poulos.
$r, \varphi, \rho$	Coordenadas cilíndricas locales en el elemento maestro de vigas.
$\epsilon, \eta, \zeta$	Coordenadas locales en el elemento maestro de sólido.
$x_1, x_2, r$	Coordenadas cartesianas locales en el elemento maestro de vigas.
$x'_1, x'_2, x'_3$	Coordenadas cartesianas locales sobre la superficie de interacción en el elemento maestro de vigas.
$\epsilon, \epsilon_{50}, \epsilon_{80}$	Deformación longitudinal en ensayo triaxial y deformación longitudinal al 50% y 80% de la tensión última, respectivamente.
$\Delta l_p, \Delta p_p, \Delta \omega$	Longitudes y áreas en la que se discretiza la superficie de interacción.
$\Delta \bar{\sigma}_{hf}$	Incremento en la tensión efectiva horizontal o esfuerzo desviador de falla.
$\Delta \bar{\sigma}_h$	Incremento en la tensión efectiva horizontal o esfuerzo desviador.
$\delta \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{b}}, \delta \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{s}}$	Sistema de desplazamientos virtuales de vigas y de sólidos respectivamente.
$\delta \hat{f}_{\mathbf{b}}, \delta \hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{b}}$	Sistema de fuerzas virtuales en el eje de la viga a nivel elemental y global respectivamente.
$\delta f_{\pi}, \delta f_a, \delta m_{\pi}$	Parámetros de endurecimiento plástico en la interfaz para el modelo de endurecimiento exponencial y las distintas componentes.



$\delta$	Distorsión en la cuña de deformación.
$\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{c}}$	Desplazamiento nodales en el cabezal.
$ J $	Determinante del jacobiano de la transformación al elemento maestro.
$E$	Eficiencia elástica.
$\ e\ $	Norma del error relativo.
$\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1$	Espacio de funciones definidas a trazos de continuidad 0 y 1 respectivamente.
$\mathbf{f}_b, \hat{\mathbf{f}}_b$	Cargas distribuidas en el eje de la viga y sus valores nodales respectivamente.
$\mathbf{f}_b$	Fuerzas de interacción en la superficie de interacción $\Omega$ .
$f_{su}$	Fricción última en la superficie del pilote.
$\gamma_i$	Distorsión angular en la interfaz.
$\nabla^s$	Operador gradiente simétrico.
$\mathbf{h}_f$	Funciones que mapean los valores nodales de fuerzas de interacción a la superficie de interacción $\omega$ .
$\mathbf{h}_u$	Funciones que mapean los valores nodales de desplazamientos a la superficie de interacción $\omega$ .
$h$	Profundidad donde se considera desplazamiento nulo en SWM.
$\lambda$	Parámetro función del $SL$ .
$\mathcal{I}_s$	Matriz de coeficientes de influencia. Poulos.
$\mathbf{m}_b$	Esfuerzos generalizados de vigas.
$\mathbf{m}_f$	Transformación que mapea fuerzas de interacción de cinemática de viga a cinemática de sólido en la superficie de interacción $\omega$ .
$\mathbf{m}_u$	Transformación que mapea cinemática de viga a cinemática de sólido en la superficie de interacción $\Omega$ .
$\mathbf{n}_{bs}$	Matriz de transformación elemental. Formulación EVE clásica.
$\mathbf{n}_f$	Funciones de interpolación de fuerzas en el eje de la viga.
$n_1^H, n_2^H$	Funciones de interpolación polinómicas cúbicas de Hermite.
$n^L$	Funciones de interpolación lineales.
$\mathbf{n}$	Vector normal a una superficie.
$\mathbf{n}_s$	Matriz de interpolación estándar en el elemento de sólidos.
$\mathbf{n}_u$	Funciones de interpolación de desplazamientos en el eje de la viga.
$\omega$	Superficie de interacción elemental.
$\mathcal{B}$	Operador que transforma el vector $\mathbf{u}_b$ en deformaciones conjugadas al vector $\mathbf{m}_b$ .

$\mathcal{P}$	Operador de proyección.
$\mathbf{A}$	Operador de ensamble de elementos finitos.
$M_c$	Pendiente de la línea de estado crítico.
$\phi_m$	Ángulo de fricción movlizado.
$\phi_s$	Ángulo de fricción del suelo.
$\hat{\phi}$	Valores nodales de las rotaciones de viga $\in \mathbb{R}^3$ .
$\Pi$	Energía potencial total del sistema.
$p_u$	Presión reactiva de suelo última.
$\mathbf{Re}$	Matriz de restricción para la cabeza del pilote en el cabezal.
$[[\mathbf{u}'_b]]$	Salto de desplazamientos en la superficie de interacción en coordenadas superficiales.
$[[\hat{\mathbf{U}}_b]]$	Salto de desplazamientos nodal en cinemática de vigas a nivel global.
$[[\mathbf{U}_b]]$	Salto de desplazamientos en cinemática de vigas a nivel global.
$\bar{\sigma}_3$	Tensión horizontal efectiva inicial. SWM.
$\bar{\sigma}_{v0}$	Tensión vertical efectiva inicial. SWM.
$\boldsymbol{\sigma}_b$	Tensor de tensiones en el sub-dominio de vigas.
$\boldsymbol{\sigma}_i$	Tensor de tensiones en la interfaz.
$\boldsymbol{\sigma}_s$	Tensor de tensiones en el sub-dominio de sólidos.
$\sigma'_z$	Tensión vertical efectiva a la profundidad $z$ .
$[[\mathbf{u}^*_b]]$	Salto de desplazamientos en cinemática de vigas a nivel elemental en el plano de la resultante de componentes $[[v^\pi]]$ , $[[v_3]]$ , $[[\phi^\pi]]$ , $[[\phi_3]]$ . Los valores últimos se designan con supra-índice $^u$ y los valores de fluencia con supra-índice $^f$ .
$[[\mathbf{u}_b]]$	Salto de desplazamientos en cinemática de vigas a nivel elemental, de componentes $[[v_1]]$ , $[[v_2]]$ , $[[v_3]]$ , $[[\phi_1]]$ , $[[\phi_2]]$ , $[[\phi_3]]$ .
$\tan \delta$	Ángulo de fricción entre el pilote y el suelo.
$\tau$	Tensión de corte en los laterales del pilote.
$\mathbf{t}^*_d$	Fuerzas de interacción plásticas no-conservativas en cinemática de vigas a nivel elemental en el plano de la resultante, de componentes $t_{f\pi}$ , $t_{fa}$ , $t_{m\pi}$ , $t_{mt}$ . Los valores últimos se designan con supra-índice $^u$ y los valores de fluencia con supra-índice $^f$ .

$\mathbf{t}_d$	Fuerzas de interacción plásticas no-conservativas en cinemática de vigas a nivel elemental.
$\mathbf{t}_d$	Fuerzas de interacción plásticas no-conservativas en cinemática de sólidos a nivel elemental.
$\mathbf{I}$	Tensor de identidad de segundo orden.
$\mathbf{l}_s$	Tensor de identidad de cuarto orden simétrico.
$\mathbf{l}_d$	Tensor de proyección desviador.
$\theta_m$	Ángulo de la cuña pasiva con la horizontal.
$\theta_v, \theta_\phi$	Ángulos que forman el plano de flexión y la resultante de momentos con el eje global $X_1$ respectivamente.
$\mathbf{t}_s, \mathbf{t}_b$	Esfuerzos superficiales en el sub-dominio de sólidos y vigas respectivamente $\in \mathbb{R}^3$ .
$y_0, u_0, Y_0$	Desplazamiento lateral en la cabeza del pilote. Su uso queda evidenciado en el contexto.
$\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\mathbf{U}}_b$	Valores nodales de los desplazamientos de vigas en cinemática de vigas a nivel elemental y global, respectivamente, $\in \mathbb{R}^6$ .
$\mathbf{u}_b$	Campo de desplazamientos en el dominio de viga en cinemática de vigas $\in \mathbb{R}^6$ , de componentes $v_1, v_2, v_3, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ .
$\mathbf{u}_b$	Campo de desplazamientos en el dominio de viga $\in \mathbb{R}^3$ .
$\hat{\mathbf{u}}_s, \hat{\mathbf{U}}_s$	Valores nodales de los desplazamientos de sólidos a nivel elemental y global, respectivamente, $\in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{u}_s$	Campo de desplazamientos en el dominio de sólidos $\in \mathbb{R}^3$ .
$\mathbf{u}_s^\omega$	Campo de desplazamiento de sólidos evaluado en la superficie de interacción y expresado en cinemática de vigas.
$\boldsymbol{\varepsilon}_b$	Tensor de deformaciones en el sub-dominio de vigas.
$\varepsilon_i$	Deformación especí longitudinal en la interfaz.
$\boldsymbol{\varepsilon}_i$	Tensor de deformaciones en la interfaz.
$\boldsymbol{\varepsilon}_s$	Tensor de deformaciones en el sub-dominio de sólidos.
$\hat{\mathbf{v}}$	Valores nodales de las translaciones de viga $\in \mathbb{R}^3$ .
$y_u$	Desplazamiento lateral último en modelos de vigas.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

El objetivo del presente trabajo es desarrollar herramientas analítico-numéricas basadas en la teoría de interacción continuo-estructura, que permitan realizar estudios de interacción suelo-estructura para procesos de carga y deformación horizontal de pilotes sometidos tanto a cargas directas como a cargas inducidas por movimientos de suelos, en el rango de deformaciones bajas y moderadas. Aunque la aplicación específica que se aborda en esta tesis se desarrolla para el estudio de la interacción suelo-pilote, la metodología conceptual subyacente puede utilizarse en otros campos de interés ingenieril que involucren la interacción de elementos estructurales de vigas inmersos en sólidos.

Si bien el problema de interacción suelo-estructura ha sido extensamente estudiado por más de un siglo, hay algunos aspectos de la problemática que aún no se encuentran resueltos en forma cerrada. Esto se debe a que la demanda del estudio teórico-científico suele acompañar a los procesos de desarrollos tecnológicos y a la demanda desde el sector productivo, es decir que la necesidad de la innovación productiva motiva al desarrollo científico. Por otro lado, el avance de las capacidades de las simulaciones numéricas en los últimos años marca una línea de quiebre en el nivel de detalle analizado y la calidad de las predicciones que se pueden obtener.

En la actualidad, con el nivel de desarrollo alcanzado en los modelos computacionales el desafío es generar herramientas que permitan efectuar análisis de interacción continuo-estructura complejos con relativa sencillez, mejorando la calidad de la modelación en estos problemas. Es en este punto específico donde se concentran las contribuciones de este trabajo.

### 1.2 Antecedentes

El análisis de interacción continuo-estructura ha suscitado gran interés por parte de la comunidad ingenieril motivado principalmente por la necesidad práctica de realizar estimaciones de esfuerzos

y desplazamientos de pilotes sometidos a cargas laterales. Si bien los pilotes son tradicionalmente utilizados como elementos de fundación para transmitir cargas verticales a una cierta profundidad, es frecuente también su utilización como elementos para soportar cargas laterales (ver por ejemplo [19]). En cuanto a las aplicaciones prácticas ingenieriles que requieren la utilización de pilotes para resistir cargas laterales caben destacarse: las obras de defensa portuaria, defensa contra impacto de embarcaciones en puentes, fuerzas de tiro en estructuras atirantadas, esfuerzos sísmicos en estructuras de gran envergadura, fuerzas laterales en estribos de puentes, torres de transmisión de energía.

Terzaghi [60] es quizás el primer trabajo que hace referencia al comportamiento lateral de pilotes mediante consideraciones referidas a interacción suelo-estructura. Si bien el trabajo de referencia se limita a comportamiento lineal (o lineal equivalente), y sugiere la representación del comportamiento del suelo mediante resortes independientes equivalentes, sienta las bases para importantes desarrollos subsiguientes.

Reese y Matlock [51], y McClelland y Focht [30], desarrollan lo que hoy es comúnmente conocido como teoría de las curvas  $p - y$ . Estas curvas representan leyes de variación, en general no-lineal, de la reacción lateral del suelo sobre pilotes, considerando a la acción del mismo como resortes independientes no-lineales y monotónicos. Con el advenimiento de la computadora digital, la industria petrolera de ultramar desarrolló un amplio programa de ensayos a escala real a fines de calibrar la teoría de las curvas  $p - y$  mediante técnicas analítico-experimentales. En este sentido, merecen mencionarse los trabajos de Matlock y Ripperger [29] sobre la medición de momentos y determinación de desplazamientos y resistencia de suelos. En la década del 70 se realizaron grandes avances en la teoría de curvas  $p - y$ , fundamentalmente a partir de programas de ensayos realizados en Austin, Texas por Matlock [27] y en Mustang Island, Texas (EE.UU.) por Reese *et al.* [49]. Entre los avances, cabe destacar el desarrollo de curvas para arcillas blandas (Matlock, [27]), curvas para arenas (Reese *et al.* [49]) y curvas para arcillas duras (Reese *et al.*, [54]).

Paralelamente, en la década del 70 se vieron los primeros avances en el análisis del problema de carga lateral de pilotes mediante la teoría de interacción continuo-estructura, la cual considera a la masa de suelo como un medio continuo, a diferencia de los resortes independientes considerados por las aproximaciones anteriores. En este contexto cabe destacar el trabajo pionero de Poulos ([42], [43]), para soluciones elásticas de pilotes embebidos en suelos homogéneos, mediante técnicas que hoy podrían encuadrarse dentro de los Métodos de Elementos de Contorno [41].

En la década del 80, se realizaron sucesivos desarrollos en el campo de las curvas  $p - y$ , destacándose los trabajos de Murchinson y O'Neill [34] para el caso de curvas en arenas y Dnnavant y O'Neill [16] para arcillas.

Por otra parte, en este mismo período se dan grandes avances en el análisis de carga lateral de pilotes mediante técnicas de interacción continuo-estructura, principalmente propiciados por

desarrollos en el campo del análisis numérico tanto mediante elementos finitos (Zienkiewicz y Cheung, [67]) como elementos de contorno (Banerjee y Butterfield, [6]). Cabe destacar además los trabajos de Randolph [46] en comportamiento lateral elástico para el caso de suelos no-homogéneos, Kaynia y Kausel [24] en comportamiento elasto-dinámico para pilotes y grupos de pilotes en suelos estratificados y Randolph y Houlsby [47] en el análisis de la presión límite lateral de pilotes en medios continuos elasto-plásticos para el caso de pilotes circulares en deformación plana.

En las últimas dos décadas, se han desarrollado una gran variedad de curvas  $p - y$  para distintos materiales geológicos, por ejemplo: curvas para rocas meteorizadas (Reese [48], Gabr *et al.* [20]), rocas calizas (McVay y Niraula, [31]), curvas para rocas en general (Liang y Yang [26]). Estas curvas han sido obtenidas en base a estudios experimentales particularizados a formaciones rocosas regionales. Sin embargo, los autores postulan su aplicabilidad genérica a otras formaciones similares.

Por otra parte, a fines de la década del 90 y a comienzos del 2000, Ashour *et al.* [3] proponen un método alternativo a las curvas  $p - y$  con el fin de analizar el comportamiento lateral no-lineal de pilotes mediante el método de la *cuña de deformación* (Strain Wedge Method, SWM). Mediante este método es posible determinar la respuesta lateral de pilotes en función de propiedades de suelo obtenidas de ensayos convencionales, a diferencia de las curvas  $p - y$  las cuales son definidas a través de parámetros que no representan propiedades reales de los suelos, sino más bien parámetros de calibración del método para los distintos tipos de suelos y condiciones de carga. Sin embargo, la práctica actual recae mayormente en la utilización de las curvas  $p - y$ , dado que estas han sido establecidas con anterioridad y cuentan con mayor aceptación y experiencia por parte de la comunidad ingenieril, lo cual se ve evidenciado por la popularidad de los programas comerciales de análisis lateral que utilizan este método, como por ejemplo: FB Multiplier (Hoit *et al.*, [23]) y LPILE (Reese *et al.*, [53]).

La técnica de elementos finitos, si bien se aplica a la resolución de estos problemas, lleva consigo un costo computacional elevado si se pretende modelar mediante elementos sólidos el suelo y pilote, dado que en general resultan modelos tridimensionales (3D) con un gran número de grados de libertad. El tamaño de malla se ve influenciado por el tamaño de los pilotes a modelar mediante elementos finitos. Para resolver estas limitaciones se han planteado elementos de viga embebidos en sólidos (Sadek y Shahrouh [57]) donde el suelo es representado mediante elementos sólidos y los pilotes mediante modelos de viga. Con estas aproximaciones se debe prestar especial atención a la hora de ensamblar las contribuciones de los elementos de viga en el problema de sólidos, debido a la diferencia de significado físico entre las variables nodales, como consecuencia de las diferentes aproximaciones cinemáticas involucradas.

La gran ventaja de los elementos de vigas embebidos (EVE) es que la malla de elementos de vigas no representa una limitación o restricción a la malla de sólidos, la cual se genera inde-

pendientemente de la malla de vigas. De esta manera, una vez generada la malla del problema de sólidos se le superpone la malla de los elementos de vigas, lo que es realmente ventajoso frente a los modelos completos 3D con elementos de sólidos, donde se debe prestar especial atención al mallado de los pilotes y su entorno. Otra ventaja de este tipo de aproximación frente a los modelos completos 3D de pilotes, es que la vinculación de las estructuras de fundación con las superestructuras, generalmente representadas mediante teorías técnicas (vigas, placas, etc.), se dá de forma natural, sin necesidad de colocar elementos de transición entre las diferentes cinemáticas.

Cabe destacar que los elementos de vigas embebidos propuestos por Sadek y Shahrour no consideran la transferencia de cargas entre suelo y pilote a través de una superficie de interacción en forma explícita, y degeneran en un simple ensamble de una matriz de rigidez de viga con una de sólido para el caso en que el eje del pilote coincida con una arista del elemento de sólido. Según los resultados obtenidos en [61], el modelo convencional de vigas embebidos en sólidos carece de un sentido mecánico estricto, hecho que se evidencia en un modelo numérico no convergente para tamaños de malla decrecientes. A pesar de esta grave inconsistencia, este tipo de elementos finitos ya se encuentran disponibles en programas comerciales de análisis por elementos finitos como Plaxis 3D Foundation [11], por lo que es de sumo interés desarrollar una formulación mecánica rigurosa al problema.

La respuesta no-lineal inicial en este tipo de estructuras, obedece a la interacción de un gran conjunto de factores, haciendo muy compleja la tarea de determinar correctamente la rigidez inicial del sistema y los mecanismos a través de los cuales se desarrollan las deformaciones plásticas. Para capturar correctamente el mecanismo que se genera en el suelo, en el supuesto que se modele toda la geometría con elementos 3D, es necesario una malla extremadamente fina y por ende un gran número de grados de libertad.

Del breve resumen de los avances en el área de análisis de comportamiento lateral de pilotes realizado en esta sección se desprende que el progreso ha sido notable. Sin embargo hay cuestiones fundamentales de la problemática que no han sido acabadamente resueltas. Los aspectos de interés a abordar y desarrollar en este trabajo se mencionan a continuación:

a) Rango de bajas deformaciones

Tanto las curvas  $p - y$  como los modelos de *cuña de deformación* han sido desarrollados principalmente teniendo en cuenta el rango de deformaciones medias a grandes. Esto es evidenciado por los experimentos llevados a cabo a fines de validar dichos métodos, los cuales no han estudiado en detalle el rango de bajas deformaciones mediante técnicas específicas a ese fin (Matlock [27]; Reese *et al.* [49]; Ashour *et al.* [3]). Se ha puesto especial énfasis en la determinación de las presiones últimas a ser soportadas por el suelo y no demasiada atención se ha prestado al comportamiento carga-deformación para el rango inicial de deformaciones (Randolph y Houlsby, [47]). Por otra parte algunas familias de curvas  $p - y$  contienen singu-



laridades para el rango de bajas deformaciones (particularmente las propuestas por Matlock, [27]), las cuales predicen rigideces infinitas para el rango inicial de deformaciones, con los consecuentes problemas numéricos e inexactitudes en el análisis que estas hipótesis generan. Las curvas  $p - y$  encontradas en la literatura no permiten incorporar directamente los parámetros de rigidez de suelos a bajas deformaciones. Este hecho no permite caracterizar apropiadamente la respuesta de los pilotes para este rango de desplazamiento, lo que constituye una clara desventaja, debido a que generalmente los pilotes en su etapa de servicio se encuentran en ese rango de deformaciones.

b) Problemas de interacción suelo-estructura

Si bien el problema de cargas laterales aplicadas en pilotes es un problema muy frecuente en el ámbito práctico de la ingeniería civil, existen otros problemas de interacción no infrecuentes en los cuales el suelo tiende a desplazarse con respecto al pilote generando esfuerzos cuya evaluación es vital para el correcto diseño de estas estructuras. Entre ellos, cabe destacar los siguientes casos:

- Deslizamientos laterales activados por licuefacción, comúnmente conocidos por su designación en inglés *lateral spreading*. Este fenómeno se produce cuando un estrato no confinado lateralmente, que se encuentra por encima de un estrato licuable, se desliza durante o luego de un sismo.
- Deformaciones laterales en estribos de puentes debidas a sobrecargas de terraplenes sobre suelos blandos. Este fenómeno puede producirse con cierto retardo en el tiempo, por lo cual puede afectar a pilotes aún cuando estos sean construidos con posterioridad al terraplén.
- Deformaciones laterales debidas a sobrecargas en terraplenes. Es un caso muy frecuente cuando se presentan falsos estribos en puentes, estando los pilotes sobre los que se apoya el tablero, inmersos en el material de relleno. Cuando la sobrecarga actúa sobre el terreno del terraplén, éste tiende a desplazarse lateralmente produciendo esfuerzos sobre los pilotes cuya magnitud frecuentemente es estimada en la práctica en base a consideraciones de equilibrio límite o fórmulas empíricas (ASHTO [1]).

c) Elementos de vigas embebidos

Debido a las incertidumbres acerca del funcionamiento de los elementos de vigas embebidos propuestos por Sadek y Shahrour, resulta necesario analizar su formulación mecánica para poder proponer alternativas que modelen en forma consistente la fenomenología en la interfaz entre suelo y pilote.

### 1.3 Metodología

En esta tesis se desarrollan herramientas numéricas dentro del campo de la mecánica de sólidos, cuya codificación se ha realizado en entorno Matlab [33].

El pre-proceso y post-proceso de los problemas se realiza en GID [56]. Se ha desarrollado un *problem type* para GID que contiene todos los elementos necesarios para la correcta definición de los problemas, es decir, los tipos de cargas, tipología de elementos finitos (sólidos y vigas), los distintos materiales y condiciones de borde, etc.

El desarrollo teórico-mecánico del modelo propuesto se basa en una formulación variacional, en la cual se ponen en evidencia los dos dominios de análisis (el suelo y el pilote) y la superficie de interacción entre ambos. Sobre la superficie de interacción se consideran restricciones cinemáticas específicas y, como consecuencia de ello, surgen explícitamente fuerzas de interacción necesarias para satisfacer la compatibilidad cinemática en la piel del pilote. En este mismo contexto variacional es posible modelar fuerzas de interacción constitutivas en la interfaz suelo-pilote. Posteriormente, la formulación mecánica a nivel continuo se discretiza y aproxima haciendo uso del método de elementos finitos (MEF).

Los resultados obtenidos con los modelos propuestos se contrastan y validan con modelos de elementos finitos (modelo completo 3D) generados en Abaqus [22], ensayos a escala real u otros resultados publicados en la bibliografía.

### 1.4 Nomenclatura

A través de esta tesis las letras minúsculas y mayúsculas se usan para identificar objetos a nivel elemental o global (ensamblado), respectivamente. Las letras en negrita se utilizan para definir vectores y matrices. El tipo de caligrafía itálica se asocia a cinemática de vigas, mientras que el tipo normal a cinemática convencional de sólidos. Finalmente, el símbolo de sombrero sobre las variables implica que se trata de variables nodales y el símbolo de barra sobre las variables implica que se trata de variaciones cinemáticamente admisibles de las variables.

### 1.5 Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se discute el estado del arte sobre el problema de interacción suelo-estructura, particularmente en pilotes cargados lateralmente, donde se describe cómo ha evolucionado el tratamiento de esta problemática en el tiempo. Al final de este capítulo se describen los elementos de vigas embebidos propuestos por Sadek y Shahrour [57] y se establecen las principales deficiencias de esta formulación.

En el Capítulo 3 se propone una formulación novedosa para elementos de vigas embebidos en sólidos que representan la mecánica involucrada de una manera físicamente consistente. En

estos elementos se incorpora de forma explícita la superficie de interacción entre el pilote y el suelo, donde se plantean restricciones cinemáticas a los campos de desplazamientos de manera que el problema quede bien definido.

En el Capítulo 4 se proponen dos modelos de interfaz nuevos, los cuales se incorporan a los elementos de vigas embebidos propuestos, con el fin de modelar la plasticidad que se desarrolla en el entorno del pilote. Estos modelos de interfaz se definen en la cinemática de vigas y en la cinemática de sólidos.

Los Capítulos 3 y 4 contienen las contribuciones teóricas y numéricas más importantes de esta tesis.

En el Capítulo 5 se validan los resultados contra soluciones de referencia y se analizan, mediante ejemplos, problemas dominados por la interacción suelo-estructura donde se muestran las bondades de la aproximación propuesta.

Finalmente en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de la tesis así como futuras líneas de trabajo.

En el Anexo A se presenta la formulación variacional del problema conformado por dos subdominios y restricciones cinemáticas en la superficie de interacción entre ambos.

En el Anexo B y el Anexo C se presentan algunos aspectos necesarios para la modelación de las fuerzas de interacción en la interfaz suelo-pilote.



## Capítulo 2

# Revisión de literatura

En este capítulo, se hace una revisión crítica de los métodos existentes para estimar la respuesta mecánica de pilotes sometidos a cargas laterales. Estos métodos, cubren una amplia gama de hipótesis acerca del comportamiento mecánico, tanto para el suelo, los pilotes y los modelos de interacción suelo-estructura que adoptan, lo que resulta en modelos con diferentes capacidades de predicción y grados de complejidad a la hora de su implementación. Por ejemplo, el dominio de los pilotes se puede representar mecánicamente mediante sólidos continuos 3D o modelos de vigas 1D (pudiendo adoptarse para ambos un comportamiento material lineal o no-lineal). El dominio del suelo se puede modelar mediante sólidos continuos 3D, modelos donde los efectos del suelo se calculan en función de soluciones analíticas elásticas, o modelos más simples aún como los de resortes, donde todo el medio continuo se reemplaza por resortes 1D. Los fenómenos de interacción suelo-estructura se pueden incorporar a través de interfaces entre los dos sub-dominios, para las cuales por ejemplo, se puede adoptar un comportamiento elásto-plástico, un modelo que capture el posible despegue del suelo sometido a tracción, etc.

En lo que sigue, se mencionarán y comentarán los puntos destacados, así como el alcance y las limitaciones, de diferentes métodos que se han desarrollado a través del tiempo, ante la necesidad de dar respuesta a problemas de interacción suelo-estructura, y más precisamente, la estimación de la respuesta mecánica de pilotes cargados lateralmente.

### 2.1 Método de vigas sobre lecho elástico

#### 2.1.1 El problema de interacción suelo-estructura

Históricamente, el método de Viga sobre Lecho Elástico (VLE), que utiliza el concepto de módulo de reacción del suelo, fue uno de los primeros métodos que consideró la interacción suelo-estructura en problemas elásticos donde era necesario modelar dos sub-dominios, el suelo y la estructura. Este método fue introducido por Winkler [66] para el análisis de fundaciones flexibles, en el año 1867. Posteriormente, Zimmermann [68] utilizó las ideas de Winkler para calcular

las tensiones de contacto en rieles flexibles de trenes apoyados uniformemente sobre balasto. La interacción suelo-estructura se incorporó en los modelos mecánicos a través de resortes independientes distribuidos en el área de contacto entre la estructura y el suelo, los cuales modelan las fuerzas reactivas que ejerce el suelo sobre la estructura, y que son función del desplazamiento de esta última. De esta manera, se reemplaza todo el medio elástico continuo por una serie de resortes individuales que se vinculan a la estructura. El coeficiente de proporcionalidad de estos resortes se conoce en la literatura como módulo de balasto o módulo de reacción del suelo,  $k_s$ , donde el subíndice  $s$  está tomado de la literatura en inglés, *Coefficient of subgrade reaction*. Este módulo tiene unidades de presión sobre desplazamiento,  $[FL^{-3}]$ . De esta forma, la carga reactiva de suelo sobre la estructura se expresa como  $p(y) = -k_s y$ , donde  $p(y)$  es la carga reactiva de suelo e  $y$  es el desplazamiento del punto estudiado.

El modelo de resortes propuesto por Winkler, para representar el medio elástico continuo, tiene el inconveniente que no modela la transferencia de las tensiones de corte entre resortes adyacentes. Además, y como una consecuencia natural de lo anterior, este modelo de resortes genera una discontinuidad en el patrón de desplazamientos en la superficie (en el caso de VLE), entre la zona cargada y el suelo circundante. Otra desventaja del método es que el módulo de reacción del suelo,  $k_s$ , no representa un parámetro material sino que identifica un parámetro que modela la interacción suelo-estructura en un problema determinado, que depende tanto de los coeficientes mecánicos de suelo y de la estructura como de la geometría de la misma (por ejemplo el ancho y el largo de la viga, etc.).

Con el fin de mejorar la representación que los modelos de resortes hacen del medio elástico continuo, distintos investigadores han propuesto hipótesis auxiliares a las consideradas por Winkler. En general, bajo estas hipótesis extras se requieren dos parámetros elásticos para caracterizar el comportamiento de los resortes, por lo que se conocen en la literatura como modelos de dos parámetros.

Dentro de estas aproximaciones, se destacan principalmente dos líneas de investigación. En la primera se incorporan diferentes elementos mecánicos a los resortes de Winkler, con el objeto de garantizar la continuidad en los desplazamientos entre la zona cargada (donde se encuentra la estructura) y el suelo adyacente, como por ejemplo vincular los resortes con una membrana sometida a esfuerzos de tracción constantes en la superficie, incluir vigas o plateas elásticas en la superficie o incluir en la representación del continuo capas que solo deforman en modo de corte. Se destacan aquí los trabajos de Filonenko-Borodich [18], Hetényi [21], Pasternak [40] y Kerr [25]. Sobre la segunda línea de trabajo se encuentran los trabajos de Reissner [55] y Vlasov [65], donde se introducen hipótesis cinemáticas sobre el campo de desplazamientos que se puede presentar en el medio continuo (por ejemplo, adoptando la forma de la variación en profundidad de los desplazamientos verticales), y se colocan restricciones sobre los campos de tensiones en el medio continuo. Luego, a través del uso de métodos variacionales, se logra expresar la relación

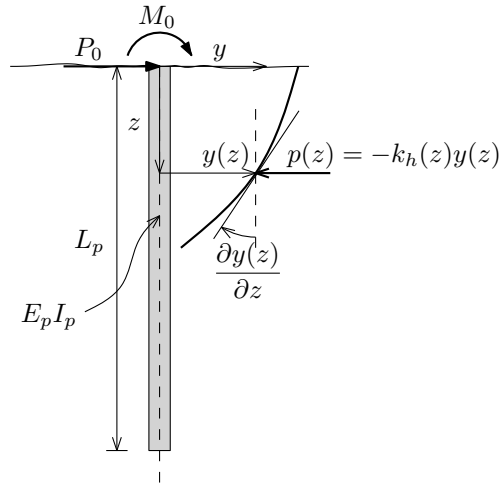


Figura 2.1: Esquema de pilote vertical cargado lateralmente modelado como viga sobre fundación elástica

entre las tensiones reactivas del suelo y los desplazamientos y curvaturas en la superficie del estrato.

Si bien, entre los modelos de dos parámetros mencionados anteriormente las hipótesis de partida son muy disímiles, la expresión matemática a la que arriban es muy similar (y en algunos casos coincidente, como por ejemplo en [40] y [18]). El primero de los dos parámetros elásticos relaciona la tensión reactiva de suelo con los desplazamientos de la superficie, el segundo parámetro elástico relaciona la tensión reactiva de suelo y algún orden de derivada de los desplazamientos en la superficie, dependiendo del método.

Las desventajas de los modelos de dos parámetros para representar el medio elástico continuo son, por un lado, la necesidad de incluir en la modelación las regiones adyacentes a la zona cargada (donde se encuentra la estructura) o bien la consideración de condiciones de borde complejas que modelen la depresión de corte que se genera en el suelo.

Uno de los puntos críticos a la hora de utilizar estos modelos en la práctica es la dificultad de estimar los parámetros elásticos a utilizar, debido a que no son parámetros habituales en la práctica de la ingeniería geotécnica. En modelos como el de Vlasov, esta estimación requiere la adopción de funciones arbitrarias para la ley de variación de algún parámetro en particular, que depende de la configuración del problema.

### 2.1.2 Pilotes cargados lateralmente

Quizás fue Terzaghi [60] quien utilizó por primera vez las ideas de Winkler, relacionadas a vigas sobre fundaciones elásticas, para realizar estimaciones sobre la respuesta mecánica de pilotes verticales cargados lateralmente. En este método, se modela el pilote como un elemento unidimensional para el cual se adopta una teoría convencional de vigas, donde se considera que las

secciones transversales, originalmente planas y normales al eje baricéntrico, permanecen planas y normales al eje baricéntrico luego de la deformación. Además, se asume que las deformaciones y los desplazamientos en el pilote son pequeños y que el material, suelo y pilote, es elástico, lineal, isótropo y homogéneo. En la Figura 2.1 se muestra el esquema de un pilote vertical, sometido a un estado de carga general aplicado en la cabeza del pilote. En el mismo gráfico se muestra la deformada y las cargas intervinientes ( $M_0$  es el momento flector y  $P_0$  es la fuerza externa aplicada en la cabeza del pilote).

En este modelo se verifican las siguientes ecuaciones en el dominio y en la frontera del pilote:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 y(z)}{\partial z^4} + k_h(z)y(z) = 0 \quad \forall \quad 0 < z < L_p \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_p I_p \frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2} + M_0 = 0 & \text{en } z = 0 \\ E_p I_p \frac{\partial^3 y(z)}{\partial z^3} + P_0 = 0 & \text{en } z = 0 \\ E_p I_p \frac{\partial^2 y(z)}{\partial z^2} = 0 & \text{en } z = L_p \\ E_p I_p \frac{\partial^3 y(z)}{\partial z^3} = 0 & \text{en } z = L_p \end{array} \right. \quad (2.2)$$

en donde  $k_h$  es el módulo de reacción horizontal del suelo,  $E_p$  es el módulo de elasticidad del pilote e  $I_p$  es el momento de inercia de la sección transversal del pilote.

En este modelo la respuesta está controlada principalmente por el parámetro  $k_h$ , siendo la misma muy sensible al valor adoptado.

Los principales inconvenientes de este método son dos: (i) al trabajar con suelos elásticos, la respuesta es lineal con las cargas aplicadas y (ii) como el parámetro  $k_h$  no depende del nivel de deformación lateral, el modelo no tiene la capacidad de considerar la degradación de rigidez en el suelo en función del nivel de deformación en el mismo. Es por ello que en la práctica, se suele estimar a priori el nivel de carga al que se verá sometido el suelo con el objeto de adoptar una rigidez secante para ese nivel de deformación. Con ese valor de  $k_h$  se obtiene la respuesta del modelo de vigas sobre fundación elástica y se verifica que las cargas reactivas en el suelo sean similares a lo estimado en el momento de determinar el  $k_h$  secante. Si las cargas reactivas en el suelo difieren de la estimación realizada a priori, se debe ajustar el valor del parámetro  $k_h$  adoptado hasta obtener cargas en el suelo acorde a la estimación utilizada para determinar  $k_h$ . Este procedimiento se conoce como modelo lineal equivalente.

En ese mismo trabajo [60] Terzaghi presentó casos de pilotes verticales dispuestos en suelos con rigidez creciente en forma lineal con la profundidad. El parámetro que controla la interacción suelo-estructura es  $m_h$ , que es el incremento de rigidez con la profundidad  $z$ , de forma tal que el módulo de reacción horizontal a la profundidad  $z$  se expresa como:  $k_h(z) = m_h z$ .



Como se mencionó anteriormente, el módulo de reacción no es un parámetro material del suelo, sino uno que caracteriza la interacción entre el suelo y el pilote, por lo que su valor depende del tipo de estructura, la forma y dimensiones de la misma, del material del suelo y del pilote, etc. En este sentido, numerosos investigadores han trabajado sobre cómo estimar correctamente el módulo de reacción para distintos tipos de estructuras y suelos.

En complejidad decreciente los métodos disponibles para estimar el módulo de reacción son: ensayos a escala real de pilotes, ensayos a escala reducida (ensayo de plato de carga horizontal), correlaciones empíricas con otros parámetros geotécnicos.

La instrumentación de pilotes a escala real es la forma más directa de medir el módulo de reacción. No obstante este método es muy costoso y se requieren cuidados extremos en la disposición de los elementos de medición y en la protección de los mismos [13].

Para el caso de pilotes cuadrados de lado  $B_p$  embebidos en arcillas, Terzaghi [60] recomienda estimar el valor del módulo de reacción horizontal  $k_h$  en función del módulo de reacción vertical  $\bar{k}_{s1}$ <sup>1</sup> obtenido en ensayos de carga sobre platos cuadrados de 1 ft<sup>2</sup> de lado, según la siguiente ecuación:

$$k_h = \frac{1 \text{ ft.}}{1.50 B_p} \bar{k}_{s1} \quad , B_p \text{ en ft.} \quad (2.3)$$

para pilotes de sección circular, en la Ecuación 2.3, se debe usar el diámetro  $D_p$  en vez del lado  $B_p$ .

Vesic [64], utilizando la solución analítica de Biot [9] de una viga infinita sobre fundación elástica, logró expresar al módulo de reacción vertical  $k_s$  en función de los parámetros que caracterizan la deformabilidad del suelo (módulo de elasticidad  $E_s$  y el coeficiente de Poisson  $\nu_s$ ) y parámetros que caracterizan a la viga (módulo de elasticidad de la viga  $E_p$ , el momento de inercia de la sección transversal de la viga  $I_p$  y el ancho  $B_p$  de la misma) en una expresión como la que se muestra a continuación:

$$k_s = \frac{0.65}{B_p} \sqrt[12]{\frac{E_s B_p^4}{E_p I_p} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2}} \quad (2.4)$$

En el caso de pilotes, considerando un comportamiento elástico del suelo y que tanto el suelo que se encuentra delante del pilote como el que está ubicado detrás del mismo colaboran (no hay despegue entre el suelo y el pilote), se debería adoptar un valor para el módulo de reacción horizontal  $k_h$  el doble del valor arrojado por la Ecuación 2.4 de Vesic.

Numerosos autores han propuesto expresiones empíricas para estimar el valor del módulo de reacción horizontal  $k_h$ . Por ejemplo, Broms [12] propuso para arcillas un valor constante de  $k_h$  en profundidad según la siguiente expresión:

$$k_h = 1.67 \frac{E_{50}}{D_p} \quad (2.5)$$

<sup>1</sup> Terzaghi asume que en arcillas el módulo de reacción horizontal y vertical son similares, no cometándose mucho error usando uno u otro. <sup>2</sup> 1ft = 0.3048 m

donde  $E_{50}$  es el módulo de elasticidad secante, al 50% de la tensión última en ensayos no drenados, y  $D_p$  es el diámetro del pilote.

Skempton [59] adopta un valor de  $E_{50}$  de entre 50 - 200 veces el valor de cohesión no drenada  $c_u$ , por lo tanto define al módulo de reacción  $k_h$  como sigue:

$$k_h = (80 - 320) \frac{c_u}{D_p} \quad (2.6)$$

Para el caso de pilotes en arena, Terzaghi [60] propone una expresión para  $k_h(z)$ , en función de la densidad relativa de la arena, dada por:

$$k_h(z) = \frac{A_t \gamma_s}{1.35} \frac{z}{D_p} \quad (2.7)$$

donde  $\gamma_s$  es peso unitario de la arena,  $A_t$  es el cociente entre el módulo de elasticidad de la arena y la presión geostática a la profundidad  $z$  y para el cual Terzaghi propone como valores medios 200, 600 y 1500 para arenas sueltas, medias y densas, respectivamente.

Otro factor que afecta en gran medida el valor del módulo de reacción, es el desplazamiento lateral del pilote, ya que el valor de  $k_h$  disminuye conforme aumenta el desplazamiento lateral.

Cuando los pilotes se disponen en grupos, el valor del módulo de reacción efectivo varía con la cantidad de pilotes y la separación entre ejes, pudiendo llegar a valores del 25% del obtenido para un solo pilote, en el caso de filas de 5 pilotes o más y espaciados 3 diámetros entre ejes.

## 2.2 Métodos elásticos

Dentro de los métodos donde el dominio del suelo se modela como un medio elástico continuo, se destaca el trabajo de Poulos [42], quien utilizando la solución de Mindlin [32], para una fuerza puntual en un medio elástico semi-infinito, logró expresar la solución de pilotes verticales cargados lateralmente, dispuestos en un medio elástico semi-infinito. Las técnicas desarrolladas por Poulos *et al.* [45], se pueden entender como los orígenes de los métodos inversos de elementos de contorno (cuyo acrónimo en inglés es IBEM).

En los modelos introducidos por Poulos *et al.*, se modela y discretiza el pilote en segmentos de vigas de igual longitud y se aproxima la ecuación diferencial de equilibrio de una viga:

$$E_p I_p \frac{\partial^4 y(z)}{\partial z^4} + p(z) = 0 \quad \forall \quad 0 < z < L_p \quad (2.8)$$

por medio de un esquema en diferencias finitas, donde  $p(z)$  es la presión reactiva de suelo a la profundidad  $z$ .

La interacción suelo-estructura se incorpora en el modelo expresando la presión reactiva de suelo  $p(z)$  (en los puntos de colocación, que en este caso son los nudos del pilote) en función del desplazamiento lateral  $y(z)$  y de una matriz de coeficientes de influencia  $\mathcal{I}_s$ , cuyas componentes  $\mathcal{I}_{ij}$  se calculan integrando en la zona de influencia de cada nodo la solución de Mindlin para el

desplazamiento horizontal del nudo  $i$ , producto de una carga horizontal en el nudo  $j$ . De esta forma, el desplazamiento del nodo  $i$  se halla como:

$$y_i = \frac{D_p}{E_s} \mathcal{I}_{ij} p_j \quad (2.9)$$

donde se usa notación de Einstein.

Las soluciones propuestas por Poulos tienen el inconveniente de no poder capturar naturalmente el comportamiento plástico del suelo<sup>1</sup> ni la degradación de la rigidez del suelo con la deformación.

La gran ventaja que tienen los métodos inversos de elementos de contorno es que, si se elige una solución fundamental adecuada, no es necesaria la discretización del medio elástico ni de la superficie del mismo (como en los métodos directos de elementos de contorno). De esta forma solo se debe discretizar la superficie de interacción entre los dos dominios, es decir la superficie del pilote [41].

Poulos y Davies [44] presentan una gran cantidad de casos de pilotes cargados lateralmente, donde cubren distintas condiciones de vinculación en la cabeza de los pilotes (empotrados o articulados) y de cargas. Además presentan los coeficientes de influencia para considerar la interacción elástica en grupos de pilotes cargados lateralmente [43].

## 2.3 Método de elementos finitos

El Método de Elementos Finitos (MEF) se desarrolló en la década de 1950, y fue gracias a la evolución de los ordenadores que el método adquirió popularidad masiva en el modelado mecánico de problemas dentro del ámbito de la ingeniería. La característica principal del MEF, común a todos los métodos numéricos, es que reduce la cantidad de incógnitas o variables necesarias para describir los fenómenos, pasando de trabajar con funciones continuas escalares o vectoriales 3D con infinitos grados de libertad (GDL) a problemas discretos con GDL finitos (proceso de discretización). Este método se aplica a problemas de ecuaciones diferenciales generales (posiblemente no-lineales), donde se resuelve de manera aproximada el problema variacional obtenido tras debilitar las ecuaciones de gobierno en el dominio de análisis ([7] [67]).

El MEF se aplica a la resolución de una amplia gama de problemas geotécnicos gobernados por la interacción suelo-estructura, como los pilotes y grupos de pilotes cargados lateralmente, pilotes en pendientes, etc. La gran ventaja del MEF, aplicado a este tipo de problemas, es que permite modelar la respuesta del suelo y de la estructura de forma conjunta, a diferencia de los métodos descritos anteriormente donde las hipótesis hechas sobre la respuesta mecánica del suelo se incorpora en forma desacoplada a un modelo de vigas 1D.

---

<sup>1</sup> En [45] se indica como proceder para tener en cuenta cargas límites en el suelo

En el MEF se pueden tratar las geometrías complejas e interacciones 3D, además de incorporar el comportamiento no-lineal material del suelo y el pilote, utilizando diferentes modelos constitutivos para cada material interviniente.

Actualmente existen diferentes softwares comerciales que implementan formulaciones de MEF para el modelado de problemas geotécnicos, como puede ser Plaxis y Flac<sup>1</sup>, y otros de propósito general, como Abaqus y ANSYS, permitiendo abordar una amplia gama de problemas, no solo geotécnicos.

Para modelar la respuesta 3D del medio continuo se recurre a discretizar el problema mediante elementos finitos de sólidos. Este tipo de elementos se pueden usar también para discretizar el dominio del pilote.

Los principales inconvenientes que tiene la simulación por MEF de problemas geotécnicos con elementos de sólidos 3D están asociados, en general, al hecho de que resultan modelos con una gran cantidad de GDL, exigiendo por ende un gran poder de procesamiento. Además, se pueden presentar dificultades en el mallado de los dominios. Otro inconveniente de modelar los problemas de interacción suelo-estructura con elementos de sólido 3D, es que la vinculación de las estructuras de fundación con la superestructura no se realiza en forma directa, ya que estas últimas usualmente se representan mediante teorías técnicas, por ejemplo la teoría de vigas de Euler-Bernoulli [8], teoría de placas de Reissner-Mindlin, etc.

Por esos motivos resulta atractiva la idea de utilizar diferentes aproximaciones para los dos dominios intervinientes, el de vigas y el de sólidos, de forma tal de aprovechar las ventajas de cada uno de ellos y obtener modelos con un número acotado de GDL.

## 2.4 Método de Randolph

Randolph [46] realizó un estudio paramétrico sobre la respuesta de pilotes verticales dispuestos en medios elásticos, utilizando Modelos de Elementos Finitos (MEF), que incluían tanto al suelo como al pilote. A través de este estudio, Randolph pudo establecer un serie de ecuaciones que ajustan a los resultados de sus modelos de elementos finitos de manera razonable. En estos modelos, el dominio del suelo esta caracterizado por un material elástico con un módulo de corte  $G_s$  constante en profundidad o con variación lineal, en función del parámetro  $m_s$ , de forma tal que  $G_s(z) = m_s z$ .

Randolph establece un parámetro  $G^*$  (o  $m_s^*$ ), que tiene en cuenta la variación del coeficiente de Poisson del suelo  $\nu_s$ :

$$G^* = G_s \left( 1 + \frac{3}{4} \nu_s \right) \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup> En rigor, a diferencia del MEF, Flac implementa un método numérico en diferencias finitas.

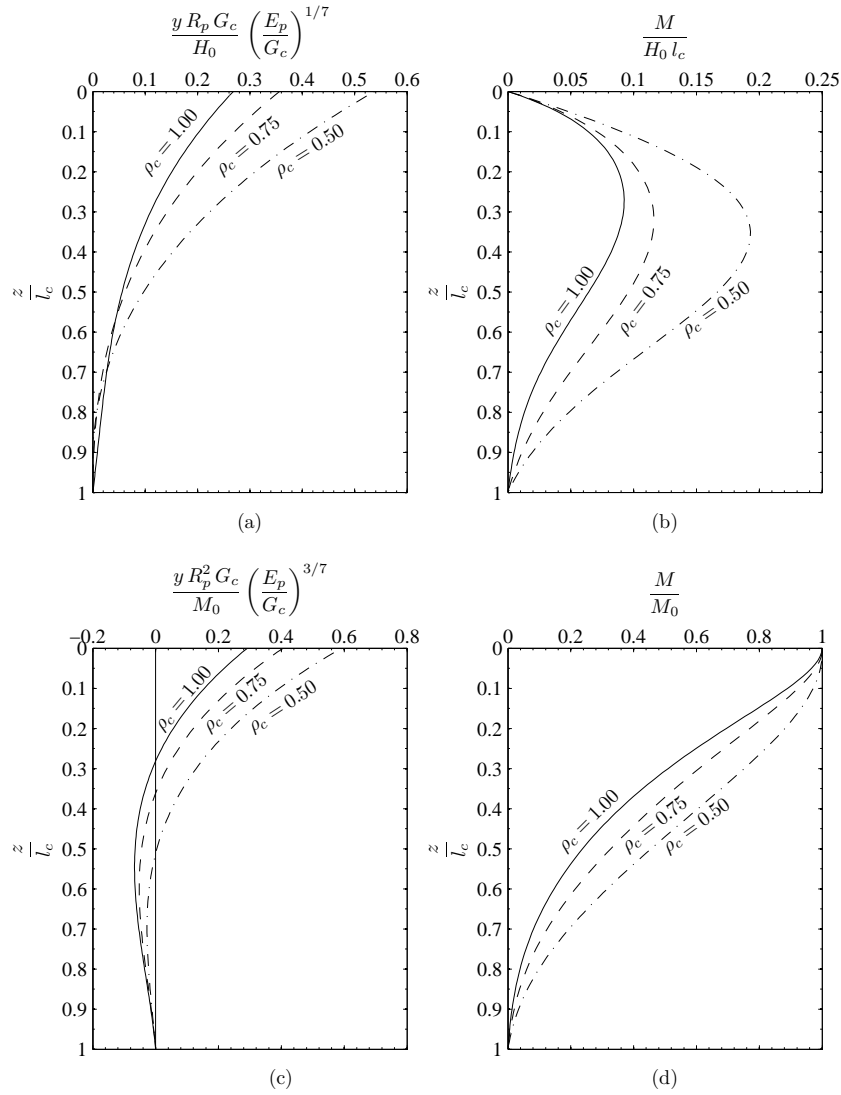


Figura 2.2: Respuesta del modelo de Randolph. (a) Desplazamientos laterales normalizados debido a  $H_0$  (b) Momentos flectores normalizados debido a  $H_0$  (c) Desplazamientos laterales normalizados debido a  $M_0$  (d) Momentos flectores normalizados debido a  $M_0$

y para el caso de variación lineal de la rigidez

$$m_s^* = m_s \left( 1 + \frac{3}{4} \nu_s \right) \quad (2.11)$$

Randolph define además, para el caso de rigidez constante en profundidad, una longitud crítica  $l_c$  como:

$$l_c = 2R_p \left( \frac{E'_p}{G^*} \right)^{\frac{2}{7}} \quad (2.12)$$

donde

$$E'_p = \frac{4E_p I_p}{\pi R_p^4} \quad (2.13)$$

siendo  $R_p$  el radio del pilote. Para el caso de rigidez variable en profundidad, la longitud crítica debe calcularse como:

$$l_c = 2R_p \left( \frac{E'_p}{m_s^* R_p} \right)^{\frac{2}{9}} \quad (2.14)$$

Si la longitud del pilote es mayor a  $l_c$  se lo puede considerar como un pilote infinito, ya que los efectos de las cargas laterales y los momentos aplicados en la cabeza del pilote son despreciables a profundidades mayores a  $l_c$ . Es decir, toda la fenomenología en los pilotes cargados lateralmente se concentra en la porción superior de pilote, de longitud  $l_c$ .

Randolph define un factor de homogeneización  $\rho_c$ , como:

$$\rho_c = \frac{G^*(z = l_c/4)}{G^*(z = l_c/2)} \quad (2.15)$$

Este factor  $\rho_c$  vale 1 para perfiles de suelos con rigidez constante en profundidad y llega a 0.50 para cuando la variación en profundidad es lineal.

A partir de las definiciones previas, Randolph establece los desplazamientos laterales,  $y_0$ , y giros en la cabeza del pilote,  $\phi_0$ , en función de las cargas aplicadas como:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{(E_p/G_c)^{1/7}}{\rho_c G_c} \left( 0.27 \frac{H_0}{(l_c/2)} + 0.30 \frac{M_0}{(l_c/2)^2} \right) \\ \phi_0 &= \frac{(E_p/G_c)^{1/7}}{\rho_c G_c} \left( 0.30 \frac{H_0}{(l_c/2)^2} + 0.80 \sqrt{\rho_c} \frac{M_0}{(l_c/2)^3} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $H_0$  es la fuerza y  $M_0$  es el momento aplicados en la cabeza del pilote y  $G_c$  es el valor de  $G^*(z = l_c)$ .

La variación de la respuesta en profundidad puede observarse en la figura 2.2.

## 2.5 Método de curvas de transferencia

El método de las curvas de transferencia de carga,  $p - y$ , se desarrolló en el ámbito de las plataformas petroleras off-shore y constituye una evolución, dentro del campo no-lineal, de los

modelos de resortes de Winkler. En este método la interacción suelo-estructura se incorpora a través de resortes discretos no-lineales que se colocan en los nudos del pilote.

Los trabajos de Matlock y Reese [28], y por otro lado los de Davinsson y Gill [15], establecen un compendio de soluciones analíticas para pilotes verticales cargados lateralmente, en función de la variación en profundidad de la rigidez del suelo, la rigidez relativa del pilote, el tipo de vinculación en la cabeza del pilote, etc.. Sin embargo, estas soluciones no contemplan la posibilidad de que el suelo llegue a estado plástico, por lo que solo son válidas en el rango elástico del problema.

Para superar este inconveniente Matlock [27] introduce el concepto de la curva  $p - y$  para arcillas blandas, la cual representa la carga lateral no-lineal del suelo,  $p$ , en función del desplazamiento lateral del pilote,  $y$ , en un punto del mismo. Esta respuesta del suelo condensa la compleja interacción suelo-estructura que se desarrolla en las inmediaciones de la sección del pilote, cuando esta se desplaza lateralmente. Esta interacción, incluye el desarrollo de un bulbo de suelo en estado pasivo de empujes que se encuentra delante del pilote, un bulbo de suelo en estado activo en la parte posterior del pilote y dos zonas de corte en los laterales.

La forma de la curva de transferencia de carga depende de un gran número de factores, como pueden ser la profundidad de la sección en estudio, el estado tensional del suelo en la zona afectada por la carga lateral, el tipo de suelo (granular o cohesivo), el tipo de carga aplicada al pilote (puede ser cíclica o estática), el método de colocación del pilote (hincado o excavado), etc. Matlock *et al.* [29] calibra las curvas  $p - y$  en base a un gran número de ensayos a escala real de pilotes instrumentados cargados lateralmente, ensayos de laboratorio y ensayos a escala reducida, realizados principalmente en suelos finos cohesivos del Lago Austin en Texas, USA .

El trabajo de Matlock se centra en el diseño de las estructuras para plataformas petroleras off-shore que van a estar sometidas a grandes cargas laterales, generalmente cíclicas, durante su

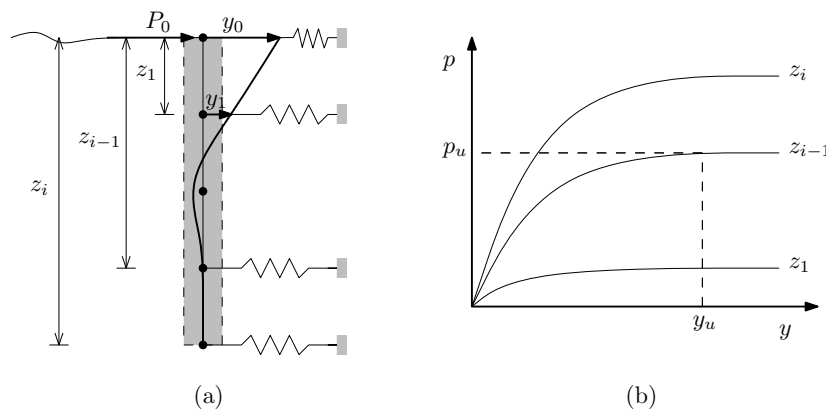


Figura 2.3: (a) Esquema de resolución mediante el método de las curvas  $p - y$  (b) Forma de las curvas  $p - y$  para distintas profundidades  $z$ , donde se muestra la reacción última  $p_u$  y el desplazamiento lateral último  $y_u$  para la profundidad  $z_{i-1}$ .

vida en servicio. Por este motivo, las curvas  $p-y$  representan el límite inferior para la capacidad resistente del suelo. No representan el comportamiento constitutivo del suelo en un punto, sino que incorporan la compleja fenomenología en las inmediaciones del pilote de una manera general, no especificando, por ejemplo, como es la descarga de algún punto sobre esta curva. Para el caso cíclico, las curvas  $p-y$  dan una respuesta cuasi-estática, luego de infinitos ciclos de carga.

Posteriormente Reese [49], propone una serie de curvas  $p-y$  para pilotes dispuestos en arenas, calibradas en función de ensayos realizados en arenas de las Islas Munstag en USA.

En la Figura 2.3 se muestra el esquema utilizado cuando se estima la respuesta lateral de un pilote mediante el método de las curvas  $p-y$ . Generalmente, la carga última  $p_u$  se obtiene de un modelo de equilibrio límite del suelo ajustado mediante observaciones, donde intervienen principalmente la profundidad de la sección en estudio, los parámetros resistentes, el peso unitario del suelo movilizado ante la carga lateral y los parámetros geométricos del pilote. Los desplazamientos laterales últimos  $y_u$  se adoptan en función del diámetro del pilote y de forma tal que, los resultados ajusten a los datos obtenidos en ensayos a escala real.

Generalmente el valor de la reacción lateral última  $p_u$ , se incrementa a medida que crece la profundidad de la sección del pilote en estudio, como se muestra en la Figura 2.3. Por ende las curvas correspondientes a las secciones más superficiales presentan una carga límite baja, y como en esta zona se concentran los desplazamientos horizontales, la capacidad de generar cargas reactivas horizontales se agota rápidamente en la porción superior del pilote.

La forma de la curva  $p-y$ , que depende principalmente del tipo de suelo (granular, cohesivo o rocoso) y el tipo de carga (cíclica o estática), ha sido propuesta por diferentes autores en función de sus experiencia con los suelos que trabajaban, por ejemplo O'Neill propone para arcillas [38] y para arenas las [39], Reese propone para roca débil [48].

Otra característica importante de las curvas  $p-y$  es la rigidez inicial, la que controla principalmente la respuesta elástica del sistema para bajas deformaciones. Por ejemplo, en algunas curvas  $p-y$  propuestas por Matlock [27], la rigidez inicial es infinita, lo que puede generar inconvenientes numéricos a la hora de resolver el sistema no-lineal.

El método de las curvas  $p-y$  está ampliamente aceptado en la práctica ingenieril y en la actualidad existen softwares comerciales, como el LPILE de la empresa ENSOFT S.A. [53], o FB-Pier [23] de la Universidad de Florida, que implementan este método para estimar la respuesta de pilotes sometidos a carga lateral.

## 2.6 Método de la cuña de deformación

En las últimas dos décadas, Norris [37] ha incorporado y desarrollado el método de la cuña de deformación, o Strain Wedge Model (SWM), para la estimación de la respuesta mecánica de pilotes cargados lateralmente. Luego, Ashour *et al.* [3], [4], [5], [2], han desarrollado diferentes



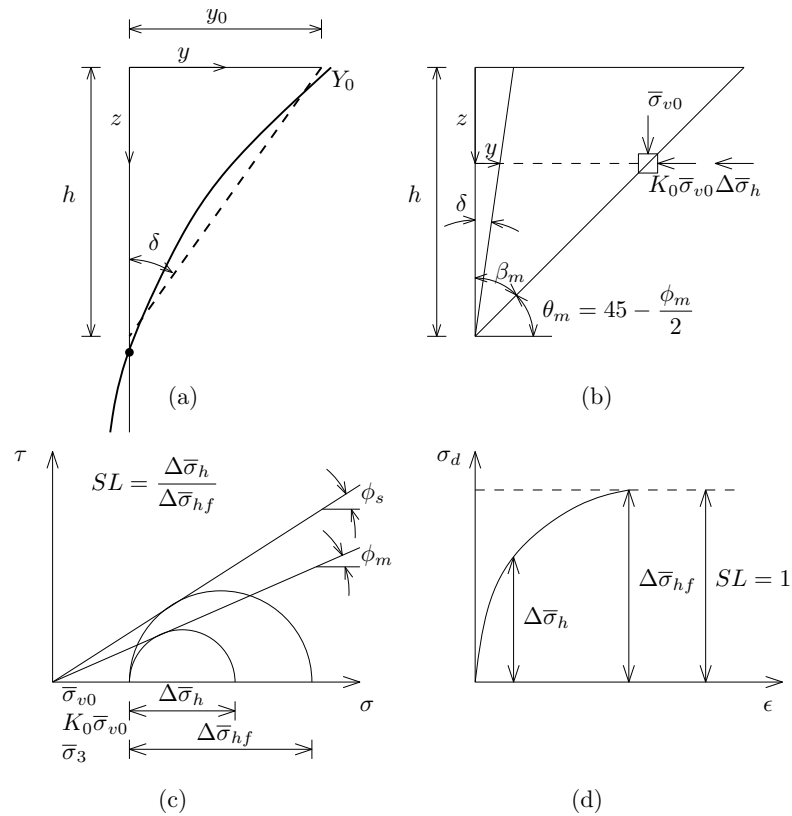


Figura 2.4: Método de SWM. (a) Desplazamientos laterales en el modelo VLE y en el modelo SWM (b) Cuña de deformación (c) Tensiones horizontales y ángulo de fricción movilizado  $\phi_m$  (d) Ensayo triaxial, curva tensión desviadora vs. deformación

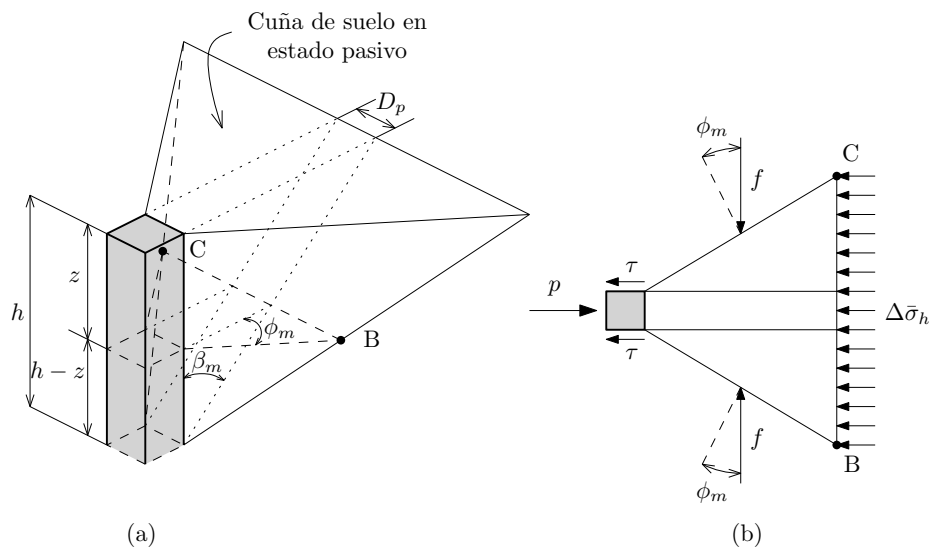


Figura 2.5: Método de SWM. (a) Geometría de la cuña en estado pasivo de empujes y (b) Sección a la profundidad  $z$  y las fuerzas intervinientes.

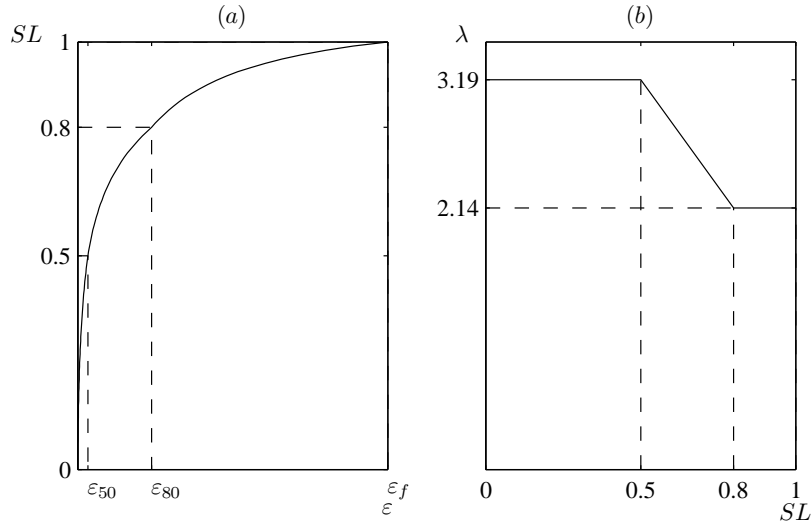


Figura 2.6: Modelo empírico adoptado para el nivel de tensión (SL) (a) Curva  $SL$  vs. Deformación  $\varepsilon$  en el ensayo Triaxial y (b) Variación del parámetro  $\lambda$ .

técnicas para aplicar el método a diferentes situaciones, como pueden ser: pilotes cargados lateralmente en suelos estratificados, grupos de pilotes en suelos estratificados, discusión del empleo de multiplicadores- $p$  elásticos para tener en cuenta efecto de grupo, etc.

En este método se resuelve el problema mecánico de un pilote sometido a carga lateral utilizando las hipótesis de un modelo unidimensional (1D) de vigas sobre lecho elástico (VLE), pero a diferencia del método de Winkler, los resortes que caracterizan la respuesta del suelo se definen en función de los resultados de ensayos triaxiales. Para ello se asume que adelante del pilote se desarrolla una cuña tridimensional de suelo en estado pasivo de empujes (ver Figura 2.5 (a)). La idea básica del método es estimar, en cada paso de carga, el módulo de reacción a utilizar en el modelo de VLE, en función de un campo de desplazamientos asumido para la cuña pasiva y los resultados de ensayos triaxiales. Este campo de desplazamientos asumido se representa como una aproximación lineal al campo de desplazamiento real (Figura 2.4 (a)), y se parametriza con un desplazamiento lateral  $y_0$  en la superficie y un desplazamiento nulo a una profundidad  $h$ , con lo que se puede expresar a la distorsión  $\delta$  como:

$$\delta = \frac{y_0}{h} \quad (2.17)$$

Luego, la relación entre la deformación longitudinal  $\varepsilon$  (equivalente a la deformación axial en el ensayo triaxial), la distorsión en la cuña,  $\delta$ , y las deformaciones de corte en la cuña,  $\gamma$ , se

escribe como (Ver Figura 2.4 (b)):

$$\delta = \frac{\gamma}{2} = \frac{(1 + \nu_s)}{2} \sin(2\theta_m) \varepsilon \quad (2.18)$$

donde,  $\theta_m = 45 - \frac{\phi_m}{2}$  es el ángulo de la cuña pasiva en función del ángulo de fricción movilizado,  $\phi_m$  (Figura 2.4 (c)).

El incremento en la tensión efectiva horizontal,  $\Delta\bar{\sigma}_h$ , se estima en función de un modelo empírico adoptado para caracterizar la curva de nivel de tensión (strees level, SL Figura 2.6),  $SL - \varepsilon$ , del ensayo triaxial (Figura 2.4 (d)). Donde SL se define como:

$$SL = \begin{cases} \frac{\lambda \varepsilon}{\varepsilon_{50}} \exp(-3.707 SL) & \text{para } \varepsilon \leq \varepsilon_{80} \\ \exp(\ln 0.2 + \frac{100 \varepsilon}{m \varepsilon + q}) & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_{80} \end{cases} \quad (2.19)$$

donde  $\lambda$  es un parámetro que se adopta en función del nivel de tensión  $SL$  (ver Figura 2.6 (b)),  $m$  y  $q$  son parámetros de ajuste para que  $SL$  represente los valores medidos en el ensayo triaxial y que según [3] toman los valores  $m = 59.0$  y  $q = 95.4 \varepsilon_{50}$ .

Luego el incremento en la tensión efectiva horizontal,  $\Delta\bar{\sigma}_h$ , se estima como:

$$SL = \frac{\Delta\bar{\sigma}_h}{\Delta\bar{\sigma}_{hf}} = \frac{\tan^2(45 - \phi_m/2) - 1}{\tan^2(45 - \phi_s/2) - 1} \quad (2.20)$$

donde,  $\Delta\bar{\sigma}_{hf}$ , es el esfuerzo desviador de falla en el ensayo triaxial (ver Figura 2.4 (c)).

El modelo define una tensión de corte,  $\tau$ , que se desarrolla en los laterales del pilote y que junto con el incremento de tensión,  $\Delta\bar{\sigma}_h$ , en el frente de la cuña generan la carga reactiva  $p$  (ver Figura 2.5(b)), como:

$$p = \Delta\bar{\sigma}_h \overline{BC} S_1 + 2\tau D_p S_2 \quad (2.21)$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son parámetros que dependen de la geometría del pilote,  $D_p$  es el diámetro o lado del mismo y la distancia  $\overline{BC}$  se puede calcular en función del esquema de la Figura 2.5(b) con la siguiente expresión:

$$\overline{BC} = 2(h - z) \tan \beta_m \tan \phi_m + D_p \quad (2.22)$$

Por último, el módulo de reacción equivalente que se debe usar en el modelo de viga sobre lecho elástico se calcula como:

$$k_h = \frac{p}{y} = \frac{A D_p \varepsilon E_s}{\delta(h - z)} \quad (2.23)$$

donde  $A$  es un parámetro que depende del tipo de suelo (granular o cohesivo), de la geometría del pilote, de la cuña pasiva, las cargas aplicadas y las propiedades del suelo.  $E_s$  es el módulo de elasticidad tangente del suelo, que se estima en función del ensayo triaxial como  $E_s = \Delta\bar{\sigma}_h/\varepsilon$ .

Como conclusión del método SWM, el mismo establece la siguiente relación con el modelo de VLE:

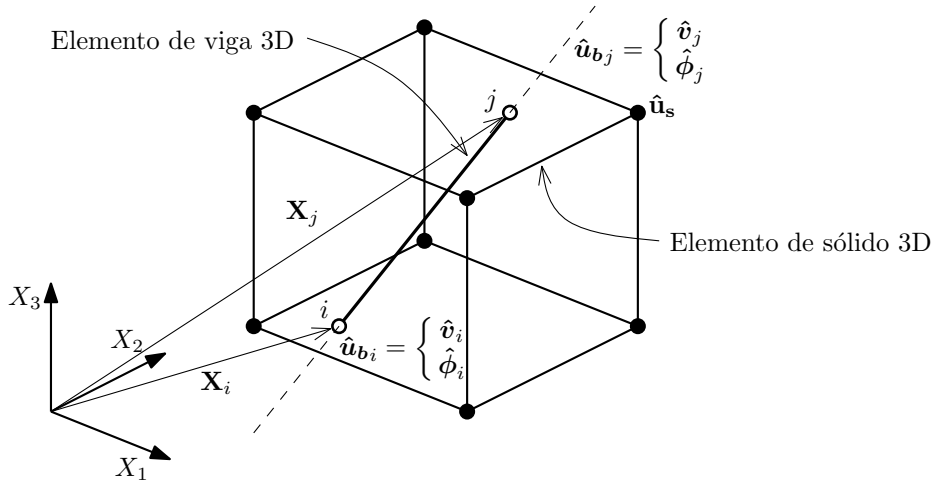


Figura 2.7: Esquema del elemento de viga embebido (EVE) propuesto por Randolph [57].

- i Se relaciona la deformación horizontal,  $\varepsilon$ , en la cuña con el desplazamiento lateral en el pilote,  $y$ .
- ii Se relaciona el incremento de tensión horizontal,  $\Delta\bar{\sigma}_h$ , en la cuña pasiva con la presión,  $P$ , en el modelo de VLE.
- iii Se relaciona la variación no-lineal del módulo de elasticidad en el suelo,  $E_s$ , y el módulo de reacción no-lineal,  $k_h$ , en el modelo de VLE.

Este método tiene la ventaja que para la definición del modelo de suelo se utilizan parámetros habituales en la ingeniería geotécnica, a diferencia del método de las curvas  $p - y$ , donde los parámetros del modelo no representan propiedades materiales de los suelos.

## 2.7 Método de elementos de vigas embebidos en sólidos

Con el fin de disminuir el número de GDL en los modelos de MEF completos en 3D, en los últimos años Sadek y Shahrour [57] han propuesto y desarrollado Elementos de Vigas Embebidos (EVE) en sólidos, donde los pilotes se representan a través de elementos de vigas 3D que interactúan con elementos de sólidos 3D a través de restricciones cinemáticas entre los nodos de los diferentes elementos finitos.

En la Figura 2.7 se muestra el esquema del elemento de viga embebido propuesto por Sadek y Shahrour. Por simplicidad el modelo se plantea para un elemento de viga de 2 nodos y un elemento de sólido hexaédrico de 8 nodos, no obstante la metodología es completamente general. El EVE está compuesto por un elemento de viga 3D que se vincula a un elemento de sólido 3D, vinculando los GDL de desplazamientos en los nodos de la viga (nodo  $i$  y  $j$ ) con los GDL de desplazamientos en los nodos de sólido. La definición de este modelo se realiza teniendo en

cuenta las definiciones de nomenclatura de la Sección 1.4.

El campo de desplazamientos en el dominio de la viga,  $\mathbf{u}_b$ , puede ser descrito en términos de desplazamientos y rotaciones nodales (6 GDL por nodo), a través de las clásicas funciones de interpolación hermíticas. Los desplazamientos nodales en la viga se expresan en función de los desplazamientos nodales de sólido a través de las funciones de interpolación en el sólido y la posición espacial de los nodos de la vigas ( $\mathbf{X}_i$  y  $\mathbf{X}_j$ ), ver Figura 2.7. La compatibilidad de desplazamientos se asegura en los nodos de la viga, mientras que en el interior de los dominios los campos de desplazamientos son no-compatibles.

La ecuación de compatibilidad cinemática se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{n}_s(\mathbf{X}_i) \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hat{\mathbf{v}}_j &= \mathbf{n}_s(\mathbf{X}_j) \hat{\mathbf{u}}_s\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde  $\hat{\mathbf{v}}_i$  y  $\hat{\mathbf{v}}_j$  son los desplazamientos nodales en los nodos  $i$  y  $j$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_s$  son los desplazamientos nodales del elemento de sólido, y  $\mathbf{n}_s$  son las clásicas funciones de interpolación en el dominio de sólido (Figura 2.7).

En los EVE propuestos por Sadek y Shahrour, los GDL rotacionales de vigas no se vinculan a los desplazamientos de sólidos, por lo que permanecen como incógnitas del problema.

Los desplazamientos nodales de la viga,  $\hat{\mathbf{u}}_b$ , se pueden escribir en función de los desplazamientos nodales del sólido,  $\hat{\mathbf{u}}_s$ , como sigue:

$$\hat{\mathbf{u}}_b = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_i \\ \hat{\phi}_i \\ \hat{\mathbf{v}}_j \\ \hat{\phi}_j \end{pmatrix} = \mathbf{n}_{bs} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hat{\phi}_i \\ \hat{\phi}_j \end{pmatrix}\tag{2.25}$$

donde  $\mathbf{n}_{bs}$  es:

$$\mathbf{n}_{bs} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_s(\mathbf{X}_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_s(\mathbf{X}_j) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\tag{2.26}$$

siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad de  $3 \times 3$  y  $\mathbf{0}$  es la matriz nula con las dimensiones apropiadas para que la Ecuación 2.26 quede bien definida. La matriz de transformación elemental  $\mathbf{n}_{bs}$ , se puede ensamblar de forma tal de obtener la matriz de transformación global  $\mathbf{N}_{bs}$ , la cual tiene en cuenta todos los GDL del problema (tanto vigas como sólidos).

La matriz de rigidez global estándar de los elementos de viga,  $\mathbf{K}_b$ , se puede expresar como una matriz global equivalente,  $\mathbf{K}_{bs}$ , en términos de los desplazamientos nodales de sólidos, haciendo uso de la matriz de transformación  $\mathbf{N}_{bs}$  [57]:

$$\mathbf{K}_{bs} = \mathbf{N}_{bs}^T \mathbf{K}_b \mathbf{N}_{bs} \quad (2.27)$$

La matriz de rigidez completa para el modelo EVE se obtiene sumando las contribuciones de la clásica matriz de rigidez global de sólidos,  $\mathbf{K}_s$ , y la matriz global equivalente de vigas,  $\mathbf{K}_{bs}$ , obtenida mediante la Ecuación 2.27 <sup>1</sup>.

El vector de fuerzas nodales en la viga también se debe transformar en una forma equivalente expresado en términos de los GDL de desplazamientos nodales de sólidos. Como este modelo no considera una superficie de interacción entre el elemento de viga y el medio sólido, las fuerzas de interacción en la viga tienden a estar distribuidas en una línea (el eje de la misma) lo que genera tensiones infinitas en las inmediaciones del pilote para tamaños de malla decrecientes.

El vector de fuerzas nodales equivalente,  $\hat{\mathbf{P}}_{bs}$ , se puede expresar en función del vector de fuerzas nodales convencional de vigas,  $\hat{\mathbf{P}}_b$ , a través de la matriz de transformación,  $\mathbf{N}_{bs}$ , como:

$$\hat{\mathbf{P}}_{bs} = \mathbf{N}_{bs}^T \hat{\mathbf{P}}_b \quad (2.28)$$

En este modelo las componentes de momentos del vector de fuerzas nodales en las vigas permanecen como cargas externas del problema (Ecuación 2.28) y no se ensamblan con las cargas en el problema de sólidos. Esta es una consecuencia directa del hecho de no vincular los GDL rotacionales en vigas a los GDL de desplazamientos en sólidos. Solo los GDL traslacionales y las fuerzas nodales en las vigas son transformadas a una forma equivalente en términos de GDL de sólidos y ensambladas junto con estos.

Esta formulación presenta una incompatibilidad cinemática, la cual produce una solución que no converge a los resultados esperados cuando los nodos de las vigas coinciden o están cerca de los nudos del sólido (ver [61]). Esta es una consecuencia de no equipar al EVE con una superficie de interacción explícita entre la viga y el medio sólido, lo que produce una singularidad en las tensiones cuando se refina la malla. En el límite, con tamaños de malla tendiendo a cero, el problema tiende a representar una carga de línea en el medio sólido. Engin *et al.* [17] demuestran que los resultados obtenidos mediante los EVE en problemas no-lineales dependen del tamaño de malla debido a alguna clase de *inestabilidad numérica*. Para solucionar ese inconveniente, Engin *et al.* [17] definen, de una forma un tanto “ad-hoc”, una *zona elástica* alrededor del pilote donde los puntos de Gauss son forzados a mantenerse en régimen elástico para evitar dicha inestabilidad.

<sup>1</sup> Observe que en este caso solo se suman las contribuciones correspondientes a los GDL de desplazamientos, ya que los GDL rotacionales quedan como incógnitas del problema

## 2.8 Discusión

A partir de lo expuesto en este capítulo, es evidente que la modelación de la interacción suelo-pilote ha recibido gran atención por parte de la comunidad ingenieril, lográndose aportes relevantes en las últimas décadas. Gracias a estas contribuciones se pudo entender más acabadamente la fenomenología subyacente del problema. Sin embargo la temática aún permanece abierta a nuevos desarrollos, dado que las limitaciones inherentes a las técnicas propuestas son también importantes.

Algunos de los procedimientos descritos deben asumir condiciones de cargas específicas y/o modos de desplazamientos pre-definidos (ver Sección 2.6) restando generalidad, otros poseen una capacidad limitada para modelar la compleja interacción suelo-pilote (ver Sección 2.2 y 2.4), o bien son computacionalmente costosos y poco prácticos para modificar la cantidad/inclinación de pilotes durante la etapa de diseño estructural (véase Sección 2.3).

Los métodos basados en las curvas de reacción  $p - y$ , véase Sección 2.5, han cobrado popularidad masiva. No obstante este procedimiento no está ajeno de falencias. La caracterización de las curvas  $p - y$  no se establece en términos de propiedades del material, sino a través de parámetros que consideran la interacción suelo-pilote. Por lo tanto se requieren mediciones a escala real para cada situación particular y los resultados de las mismas están intrínsecamente condicionadas al tipo de ensayo realizado (condiciones de cargas). Sin bien existe información experimental abundante en este tema, muchas veces la misma no es totalmente consistente con el problema que se requiere resolver.

La metodología de Elementos de Viga Embebidos en sólidos (o simplemente EVE, ver Sección 2.7) parece ser una de las técnicas más interesantes y con mayor potencialidad a futuro. Esta característica se debe principalmente a la generalidad que aporta el MEF, sobre el cual se basa este esquema, para modelar diversos factores, como por ejemplo: condiciones de cargas arbitrarias, modelado constitutivo del pilote y/o suelo complejos, suelos estratificados, análisis de tipo drenado o no drenado, diferentes condiciones de borde del sistema suelo-pilote, análisis estáticos o dinámicos, posibilidad de modelar pilotes inclinados, grupo de pilotes, acoplamiento del problema mecánico con otros problemas comunes en ingeniería de fundaciones como consolidación, flujo en medios porosos, etc. Sin embargo, los modelos EVE propuestos hasta el presente se han fundamentado en cuestiones puramente numéricas y no en aspectos mecánicos conceptuales de fondo. Esta deficiencia finalmente se traduce en metodologías inconsistentes y no convergentes.

El aporte de este trabajo de investigación, a diferencia de las soluciones “ad-hoc” (mecánicamente inconsistentes) como las sugeridas en [17], se propone un EVE basado en reformular el modelo mecánico de base intentando compatibilizar la descripción cinemática entre elementos estructurales disímiles (viga-sólido). Sólo una vez que el problema a nivel del continuo está bien colocado variacionalmente, se propone una metodología numérica para resolverlo.





## Capítulo 3

# Elemento de Viga Embebido (EVE) propuesto: formulación elástica-lineal

En este capítulo se exponen los aspectos básicos del Elemento de Viga Embebido (EVE) propuesto como desarrollo original del presente trabajo de tesis. Para ello se presenta una versión simplificada de la estrategia de modelación del problema de interacción. La finalidad es describir el marco teórico con los ingredientes mínimos necesarios para abordar el problema de acoplamiento entre elementos estructurales disímiles sólido-viga (suelo-pilote), sin desviar la atención en aspectos más específicos de la formulación. En este sentido, la aproximación aquí introducida considera comportamiento elástico-lineal material y adherencia perfecta en la superficie de interacción suelo-pilote. Una vez incorporadas estas ideas fundamentales, la formulación del modelo puede enriquecerse agregando aspectos mecánicos importantes del problema en estudio, como por ejemplo mecanismos no-lineales en la interacción suelo-pilote. Estos desarrollos adicionales se discuten en el capítulo 4, completando de esta forma la descripción del modelo.

### 3.1 Formulación variacional del problema

En esta sección, se expone el contexto variacional sobre el cual se basa el elemento embebido propuesto. No se pretende un formalismo matemático estricto, sino más bien presentar los principios mecánicos básicos que fundamentan el desarrollo de esta tesis.

Blanco y colaboradores [10], elaboraron una metodología general para analizar modelos estructurales que consideran sub-dominios con diferentes descripciones cinemáticas. En el trabajo de referencia, la incompatibilidad cinemática fue tratada sólo a través de las fronteras naturales de los diferentes modelos mecánicos involucrados. A modo de ejemplo, el procedimiento propuesto en [10] es útil para vincular vigas y sólidos sólo a través de los extremos de la viga. Para el caso de interacción suelo-pilote, las ideas presentadas en [10] deben generalizarse aun más, ya que el acoplamiento más importante se da a lo largo del fuste del pilote, es decir a través de la

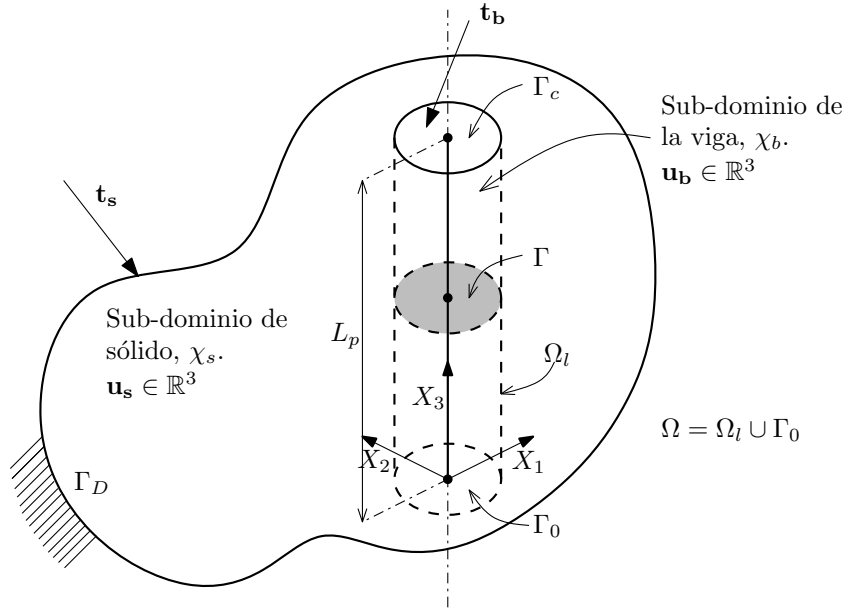


Figura 3.1: Esquema del modelo propuesto. Separación del dominio en el sub-dominio del sólido  $\chi_s$ , de la viga  $\chi_b$  y superficie de interacción  $\Omega$ .

superficie de interacción con el suelo circundante.

Consideremos el sub-dominio del sólido,  $\chi_s$ , el de la viga embebida,  $\chi_b$ , y el correspondiente a la frontera interna que los separa,  $\Omega$ , el cual puede sub-dividirse en  $\Omega_l$  (superficie lateral de interacción) y  $\Gamma_0$  (superficie de interacción de la base o pie del pilote). La frontera externa del dominio del sólido está compuesta por  $\Gamma_D \cup \Gamma_s$ ; sobre  $\Gamma_D$  se aplican condiciones tipo Dirichlet, mientras que sobre  $\Gamma_s$  pueden prescribirse tracciones externas  $\mathbf{t}_s$ . Consideremos además la frontera externa de la viga  $\Gamma_c$  (el subíndice “c” hace referencia a la cabeza del pilote) donde es posible aplicar el sistema de fuerzas  $\mathbf{t}_b$  que la superestructura transmite al sistema de fundación. Toda la terminología y nomenclatura introducida en este párrafo se encuentra definida en la Figura 3.1.

En un principio, el problema se plantea íntegramente en términos de una cinemática convencional de sólido. Bajo esta suposición inicial, la continuidad de desplazamientos a través de  $\Omega_l$  y  $\Gamma_0$  está garantizada. Posteriormente, se realizarán hipótesis cinemáticas sobre el dominio correspondiente a la viga  $\chi_b$ , de tal forma que éste pueda modelarse mediante la teoría técnica de vigas, que incluye desplazamientos y rotaciones. Por esta razón resulta útil postular desde un comienzo la posibilidad de una incompatibilidad cinemática a través de las fronteras internas de interacción  $\Omega_l$  y  $\Gamma_0$ , para que el modelo mecánico quede bien formulado.

Siguiendo las ideas expuestas en [10], la formulación variacional para el problema de interacción suelo-pilote se basa en postular un principio de energía potencial total con restricciones cinemáticas. En este caso la restricción se introduce a través de multiplicadores de Lagrange, lo que asegura compatibilidad del campo de desplazamientos de forma débil sobre la frontera inter-

na  $\Omega$ . De esta manera, el funcional de energía potencial total del sistema,  $\Pi$ , se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_s, \boldsymbol{\lambda}) = & + \frac{1}{2} \int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b \, d\chi_b - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{u}_b \, d\Gamma_c - \int_{\chi_b} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{u}_b \, d\chi_b \\ & + \frac{1}{2} \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \mathbf{u}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{u}_s \, d\chi_s \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}_s$  y  $\mathbf{u}_b$  y los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  son campos vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ .

El equilibrio del sistema está asociado a la condición estacionaria del funcional  $\Pi$ , con respecto a las variables  $\mathbf{u}_b$ ,  $\mathbf{u}_s$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ , la cual se expresa como:

$$\begin{aligned} 0 = & \delta\Pi(\mathbf{u}_b, \mathbf{u}_s, \boldsymbol{\lambda}) \\ 0 = & + \int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, d\Gamma_c - \int_{\chi_b} \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b \\ & + \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\bar{\mathbf{u}}_b - \bar{\mathbf{u}}_s) \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \quad \forall \quad \bar{\mathbf{u}}_b, \bar{\mathbf{u}}_s, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \text{ admisibles} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\nabla^s$  indica el gradiente simétrico del vector al que se aplica.

En el dominio de la viga  $\chi_b$ , se incorporan restricciones sobre el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}_b$ , en este caso se adopta un campo de desplazamientos compatible con la teoría técnica de vigas en  $\mathbb{R}^3$  definida sobre un dominio 1D representado por el eje de la viga. En este modelo se asume que las secciones transversales originalmente planas permanecerán planas y perpendiculares al eje baricéntrico luego de la deformación. Además en este caso se desprecian las deformaciones de corte. Los esfuerzos internos conjugados a las deformaciones admisibles en la cinemática de vigas adoptada son: el momento flector según el eje  $X_1$  y el eje  $X_2$ , el esfuerzo axial según el eje  $X_3$ , y el momento torsor según el eje  $X_3$ . Con estas hipótesis cinemáticas, el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}_b \in \mathbb{R}^3$  se expresa como (ver Figura 3.1):

$$\mathbf{u}_b = (v_1 - \phi_3 X_2) \mathbf{e}_1 + (v_2 - \phi_3 X_1) \mathbf{e}_2 + \left( v_3 - \frac{\partial v_1}{\partial X_3} X_1 - \frac{\partial v_2}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (3.3)$$

donde  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  son los desplazamientos según los ejes  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  respectivamente y  $\phi_3$  es la rotación de torsión asociada al eje  $X_3$  (ver Figura 3.1). Las variaciones admisibles de este campo se pueden escribir como:

$$\bar{\mathbf{u}}_b = (\bar{v}_1 - \bar{\phi}_3 X_2) \mathbf{e}_1 + (\bar{v}_2 - \bar{\phi}_3 X_1) \mathbf{e}_2 + \left( \bar{v}_3 - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial X_3} X_1 - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (3.4)$$

Reemplazando la cinemática de vigas definidas en la Ecuación 3.3 y la Ecuación 3.4 en la expresión general de la Ecuación 3.2 y operando, se obtiene el principio variacional que se muestra en

la Ecuación 3.5, cuya deducción se encuentra en el Anexo A.

$$\begin{aligned}
0 = & + \int_L \mathbf{m}_b \cdot \mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}_b \, dL - \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b|_L - \int_L \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, dL \\
& + \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s \\
& - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{m}_u \bar{\mathbf{u}}_b - \bar{\mathbf{u}}_s) \, d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{m}_u \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \quad \forall \quad \bar{\mathbf{u}}_b, \bar{\mathbf{u}}_s, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \text{ admisibles}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $\mathbf{m}_b$  es el vector de esfuerzos internos generalizados en el dominio de viga (fuerzas y momentos distribuidos), el operador  $\mathcal{B}$  mapea el vector de desplazamientos en el vector de deformaciones conjugado al vector de esfuerzos internos generalizados y  $\mathbf{m}_u$  es un operador que mapea el vector de desplazamientos en cinemática de vigas ( $\in \mathbb{R}^6$ ) sobre el eje de la misma a un vector de desplazamiento en la superficie de interacción ( $\in \mathbb{R}^3$ ). Además se reconoce la contribución a la energía interna de deformación en el dominio de la viga y del sólido, como también la energía potencial de las cargas externas y los términos correspondientes a la restricción cinemática en la superficie de interacción. Cabe mencionar que los multiplicadores de Lagrange tienen el sentido físico de cargas generalizadas. Tal como se presentan en la Ecuación 3.5 son fuerzas que generalizadas en cinemática sólido, en decir tracciones convencionales y en lo que sigue se los presentará como fuerzas de interacción en la superficie de interacción,  $\mathbf{f}_b$ , o bien como cargas distribuidas en el eje de la viga,  $\mathbf{f}_b$ .

Para resolver las ecuaciones derivadas del principio variacional 3.5 mediante MEF se debe, primeramente, discretizar el dominio de análisis y posteriormente interpolar el campo de desplazamientos de la viga  $\mathbf{u}_b$ , el campo de desplazamientos del sólido  $\mathbf{u}_s$  y los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ . El sistema de ecuaciones resultante presenta ceros en la diagonal principal, propio de la inclusión de las restricciones cinemáticas vía multiplicadores de Lagrange. Por ello resulta atractiva la idea de condensar el problema en la variable de desplazamientos del sólido  $\mathbf{u}_s$  utilizando la técnica de elementos de vigas embebidos en sólidos, para luego hallar las variables restantes en pasos posteriores de pos-proceso. De esta manera el tamaño del sistema a resolver se reduce (ya que solo se resuelve para los GDL del sólido) y el mismo no presenta ceros en la diagonal principal de la matriz de rigidez. A continuación, se describen los pasos necesarios para formular un elemento de viga embebido en sólidos, de forma de condensar el problema en la variable  $\mathbf{u}_s$  y satisfacer a su vez el principio variacional de base dado por la Ecuación 3.5.

## 3.2 Elemento de viga embebido propuesto

En esta sección se presenta la formulación propuesta para el elemento 3D de viga embebido en sólido, que incorpora la superficie de interacción,  $\omega$ , entre el pilote y el suelo (Figura 3.2). Con

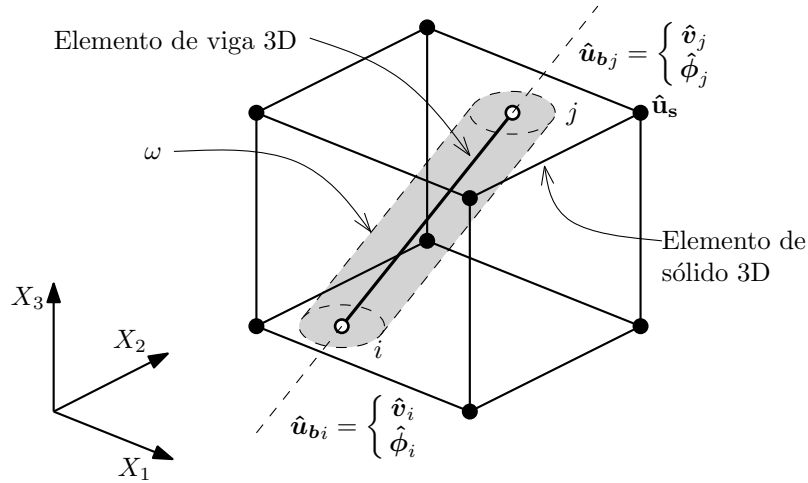


Figura 3.2: Esquema del elemento de viga embebido (EVE) con superficie de interacción,  $\omega$ .

la terminología  $\omega$  se hace referencia a la superficie una interacción a nivel de un elemento finito embebido. El ensamble de todos los elementos embebidos da como resultado la interacción en toda la superficie de contacto entre el suelo y el pilote  $\Omega$ . Para el elemento de viga extremo que contiene al pie del pilote es necesario considerar que  $\omega$  está compuesto por la superficie de interacción lateral  $\omega_l$  y la superficie transversal a nivel del pie del pilote  $\Gamma_0$ .

Sobre esta superficie de interacción, se plantea la compatibilidad cinemática entre los campos de desplazamientos del sólido y de la viga,  $\mathbf{u}_s$  y  $\mathbf{u}_b$ , respectivamente. Esta superficie de interacción, se incorpora en el modelo para representar adecuadamente la mecánica del problema y evitar la falta de convergencia que exhibe el modelo EVE estándar cuando la malla es refinada.

Como primer paso en la definición del EVE con superficie de interacción, debemos definir funciones de mapeo que expresen los campos de desplazamiento 3D de vigas en la superficie de interacción,  $\mathbf{u}_b$ , en función del campo de desplazamientos en el eje de la viga,  $\mathbf{u}_b$ . Además es necesario definir el mapeo que vincule las fuerzas de interacción en la superficie de interacción,  $\mathbf{f}_b$ , con las cargas distribuidas en el eje de la viga,  $\mathbf{f}_b$ .

### 3.2.1 Discretización y funciones de mapeo

El campo 3D de desplazamientos del sólido,  $\mathbf{u}_s$ , se expresa a través de las funciones de interpolación convencionales,  $\mathbf{n}_s$ , en términos de las coordenadas espaciales del punto,  $\mathbf{X}$ , y desplazamientos nodales,  $\hat{\mathbf{u}}_s$ , como:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{X}) = \mathbf{n}_s(\mathbf{X}) \hat{\mathbf{u}}_s \quad (3.6)$$

El campo 3D de desplazamientos de la viga sobre la superficie de interacción,  $\mathbf{u}_b$ , (Figura 3.3) se expresa en función de los desplazamientos nodales de la viga en el eje de la misma,  $\hat{\mathbf{u}}_b$  (desplazamientos y rotaciones), a través de la función de mapeo  $\mathbf{h}_u$ , la cual está compuesta por: i) una función  $\mathbf{n}_u$  que interpola, a lo largo del eje de la viga, los valores de los desplazamientos

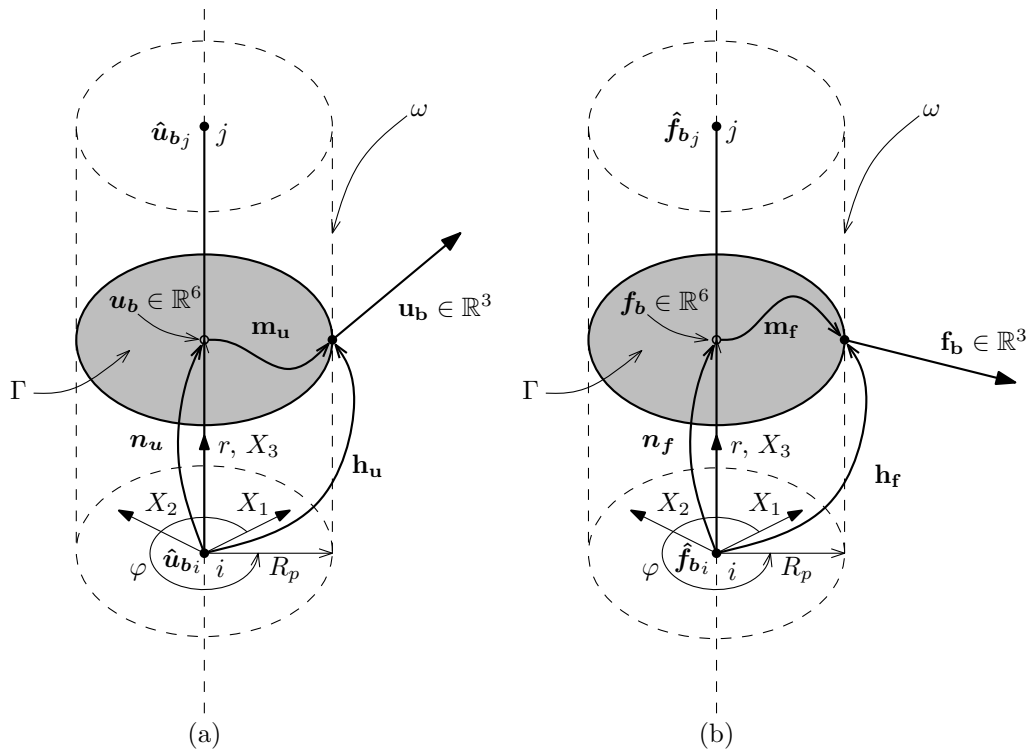


Figura 3.3: Funciones de mapeo que transforman variables evaluadas en el eje de la viga a variables evaluadas en la superficie de interacción del EVE propuesto: (a)  $\mathbf{h}_u$ , (b)  $\mathbf{h}_f$ .

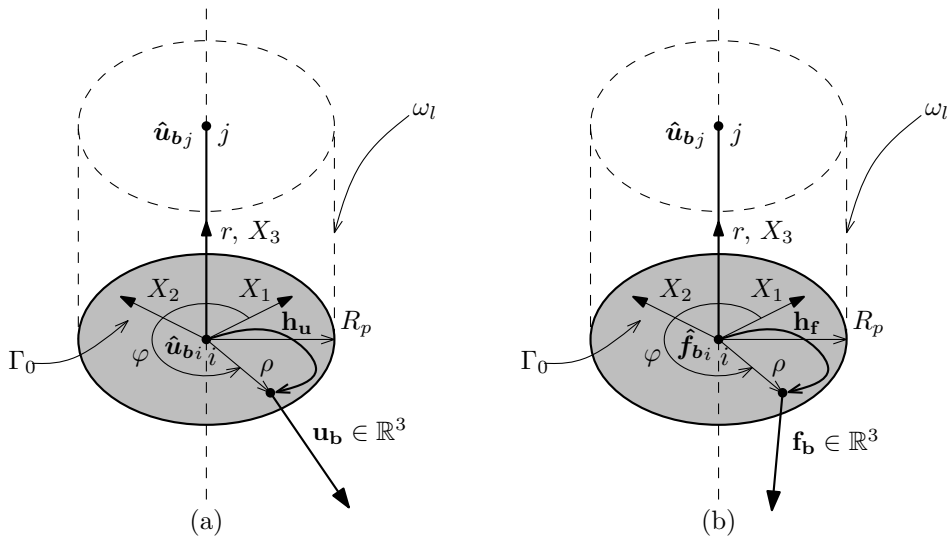


Figura 3.4: Funciones de mapeo en la base del EVE propuesto: (a)  $\mathbf{h}_u$ , (b)  $\mathbf{h}_f$ .

nodales en la misma,  $\hat{\mathbf{u}}_b$ , y ii) una función de mapeo,  $\mathbf{m}_u$ , que transforma los valores interpolados de desplazamientos y rotaciones en el eje de la viga a un vector de desplazamientos en la superficie de interacción.

En la Figura 3.3 se muestra un esquema de estas funciones de interpolación y mapeo para la superficie lateral del pilote, junto con el sistema de coordenadas globales  $(X_1, X_2, X_3)$  y locales  $(r, \varphi)$  para el caso de un pilote vertical de sección transversal circular, mientras que en la Figura 3.4 se muestra el esquema para la superficie del pie del pilote. Este procedimiento se puede generalizar para otras geometrías.

Las funciones de interpolación en el eje de la viga,  $\mathbf{n}_u$ , se definen en función de la coordenada local,  $r$  (Figura 3.3), según el eje de la misma.

La función de mapeo  $\mathbf{m}_u$  se define en función de las coordenadas cilíndricas locales  $(\varphi, \rho)$  siendo esta última la coordenada local según el radio del pilote<sup>1</sup>. Esta función de mapeo tiene en cuenta la restricción cinemática de viga adoptada para el modelo. En este caso se considera la teoría clásica de vigas de Navier-Bernoulli, donde la sección transversal de la viga,  $\Gamma$ , permanece plana, no deformada y perpendicular al eje de la viga luego de la deformación.

A partir de las definiciones introducidas, el vector 3D de desplazamientos de vigas en la superficie de interacción,  $\mathbf{u}_b$ , se puede expresar en función de los desplazamientos nodales de vigas,  $\hat{\mathbf{u}}_b$  (desplazamientos y rotaciones), como:

$$\mathbf{u}_b(r, \varphi, \rho) = \mathbf{h}_u(r, \varphi, \rho) \hat{\mathbf{u}}_b = \mathbf{m}_u(\varphi, \rho) \mathbf{n}_u(r) \hat{\mathbf{u}}_b \quad (3.7)$$

La forma explícita de la función de mapeo,  $\mathbf{h}_u$ , para un elemento de viga de 2 nodos (nodo  $i$  y  $j$ ), sección transversal circular expresada en coordenadas locales es:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_u(r, \varphi, \rho) &= \mathbf{m}_u(\varphi, \rho) \mathbf{n}_u(r) \\ \mathbf{m}_u(\varphi, \rho) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \rho \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & 1 & \rho \sin(\varphi) & -\rho \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{n}_u(r) &= (\mathbf{n}_{u_i}(r) \mathbf{n}_{u_j}(r)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup> En la superficie de interacción lateral elemental  $\omega_l$  se verifica que  $\rho|_{\omega_l} = R_p$

donde

$$\mathbf{n}_{\mathbf{u}_i}(r) = \begin{pmatrix} n_{1i}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 \\ 0 & n_{1i}^H(r) & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_{1i,r}^H(r) & 0 & -n_{2i,r}^H(r) & 0 & 0 \\ n_{1i,r}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i,r}^H(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

siendo  $n_1^H, n_2^H$  las funciones polinómicas cúbicas de Hermite para la interpolación de desplazamientos en función de desplazamientos y giros nodales, mientras que  $n^L$  son funciones de interpolación lineales. La matriz para el nudo  $j$ ,  $\mathbf{n}_{\mathbf{u}_j}(r)$ , tiene una expresión idéntica a  $\mathbf{n}_{\mathbf{u}_i}(r)$  pero cambiando el sub-índice  $i$  por  $j$ . En la Ecuación 3.9  $(\cdot)_{,r}$  representa la derivada parcial de la función respecto a la coordenada local,  $r$ .

De forma similar, las fuerzas de interacción  $\mathbf{f}_b$ , se pueden expresar en función de las fuerzas nodales de interacción en el eje de la viga,  $\hat{\mathbf{f}}_b$ , a través de la función de mapeo  $\mathbf{h}_f$ . Esta función consta de dos partes: i) una función de interpolación  $\mathbf{n}_f$  que interpola, en el eje de la viga, los valores nodales de las fuerzas de interacción,  $\hat{\mathbf{f}}_b$ , y ii) una función de mapeo  $\mathbf{m}_f$  que transforma el vector de fuerzas de interacción interpolado en el eje de la viga,  $\mathbf{f}_b$ , a un vector de fuerzas de interacción sobre la superficie de interacción,  $\mathbf{f}_b$ .

Las funciones de interpolación,  $\mathbf{n}_f$ , se definen en función de la coordenada local  $r$ , mientras que la función de mapeo  $\mathbf{m}_f$ , que transfiere cargas en el eje de la viga a la superficie de interacción, se define en función de la coordenada cilíndrica,  $\varphi$ , cuando se mapea a la superficie lateral elemental y en función de  $\varphi$  y  $\rho$  cuando se mapea en la superficie del pie del pilote.

En vista de los conceptos previos, el campo de fuerzas distribuidas en la superficie de interacción,  $\mathbf{f}_b$ , se puede expresar como:

$$\mathbf{f}_b(r, \varphi, \rho) = \mathbf{h}_f(r, \varphi, \rho) \hat{\mathbf{f}}_b = \mathbf{m}_f(\varphi, \rho) \mathbf{n}_f(r) \hat{\mathbf{f}}_b \quad (3.10)$$

La forma explícita de la función de mapeo  $\mathbf{h}_f$  en la superficie lateral elemental para un pilote



cilíndrico es:

$$\mathbf{h}_f(r, \varphi) = \mathbf{m}_f(\varphi) \mathbf{n}_f(r)$$

$$\mathbf{m}_f(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi R_p} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin(\varphi)}{2\pi R_p^2} \\ 0 & \frac{1}{2\pi R_p} & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(\varphi)}{2\pi R_p^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\pi R_p} & \frac{\sin(\varphi)}{\pi R_p^2} & -\frac{\cos(\varphi)}{\pi R_p^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{n}_f(r) = (\mathbf{n}_{f_i}(r) \mathbf{n}_{f_j}(r))$$

donde

$$\mathbf{n}_{f_i}(r) = \begin{pmatrix} n_{1i}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 \\ 0 & n_{1i}^H(r) & 0 & n_{2i}^H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_i^L(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n_{1i,r}^H(r) & 0 & -n_{2i,r}^H(r) & 0 & 0 \\ n_{1i,r}^H(r) & 0 & 0 & 0 & n_{2i,r}^H(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i^L(r) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

En la Figura 3.5 se muestra un esquema de los patrones de las fuerzas de interacción en los diferentes modos de carga: carga axial y transversal, cargas de momentos y de torsión.

Para el caso de la superficie de interacción en el pie del pilote, la matriz de mapeo  $\mathbf{h}_f$  toma la forma:

$$\mathbf{h}_f(r, \varphi, \rho) = \mathbf{m}_f(\varphi, \rho) \mathbf{n}_f(r)$$

$$\mathbf{m}_f(\varphi, \rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi R_p^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\rho \sin(\varphi)}{\pi R_p^4} \\ 0 & \frac{1}{\pi R_p^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho \cos(\varphi)}{\pi R_p^4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\pi R_p^2} & \frac{4\rho \sin(\varphi)}{\pi R_p^4} & -\frac{4\rho \cos(\varphi)}{\pi R_p^4} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{n}_f(r) = (\mathbf{n}_{f_i}(r) \mathbf{n}_{f_j}(r))$$

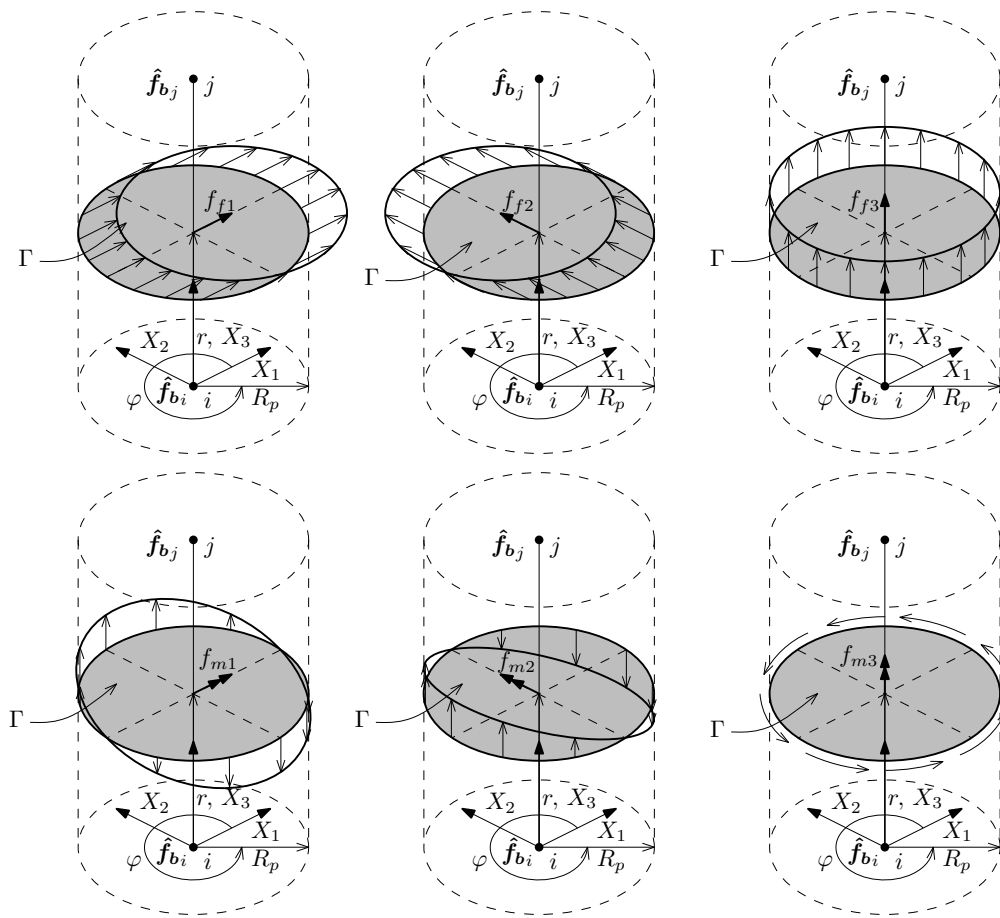


Figura 3.5: Patrones de fuerzas de interacción en los diferentes modos de carga en la superficie de interacción lateral  $\omega$ .

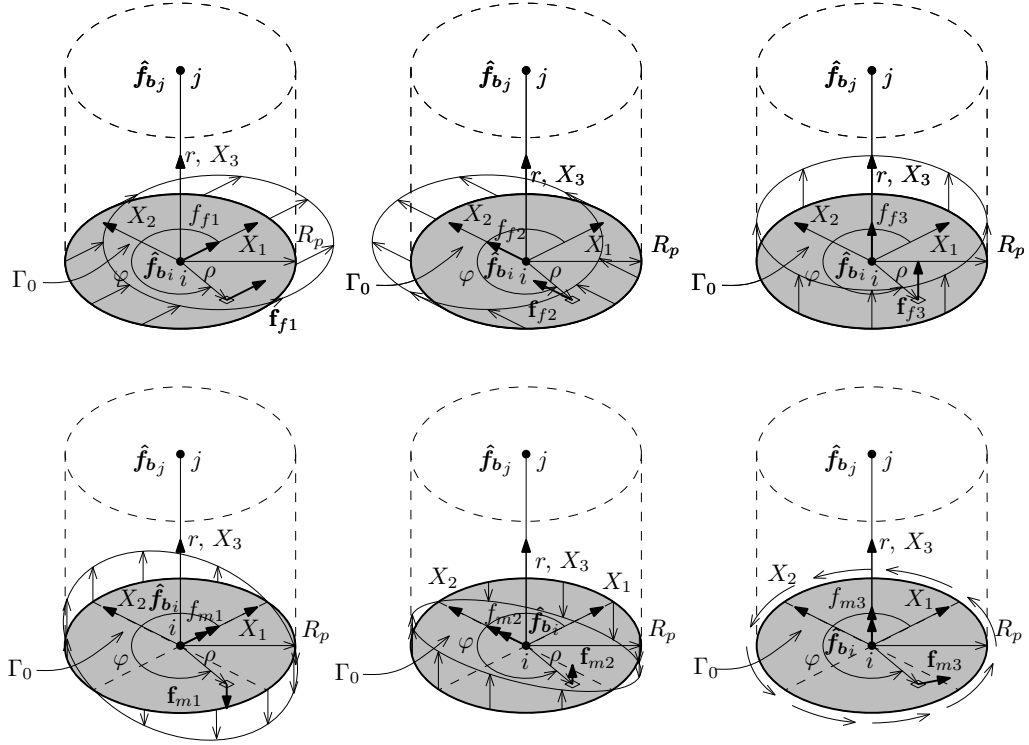


Figura 3.6: Patrones de fuerzas de interacción en los diferentes modos de carga en la superficie de interacción transversal  $\Gamma_0$ .

donde, como esta matriz es válida solamente en el nodo  $i$ , tenemos que  $r = r_i$  y  $\mathbf{n}_{f_j}(r) = \mathbf{0}$ .

En este caso, el patrón de fuerzas de interacción en la base del pilote se muestra en la Figura 3.6.

### 3.2.2 Formulación propuesta del elemento de viga embebido

La idea principal en la formulación del elemento de viga embebido, es vincular los dos tipos de elementos (de la viga y del sólido), y lograr expresar el problema de la viga en función de los GDL del sólido, de forma tal de condensar los GDL de la viga en los GDL del sólido y resolver el problema de interacción en términos de estos últimos. De esta forma, el tamaño del sistema final a resolver se mantiene igual al tamaño del problema del sólido y no aparecen ceros en la diagonal de la matriz de rigidez del sistema (propios de incorporar restricciones cinemáticas a través de multiplicadores de Lagrange).

El vínculo entre los dos tipos de elementos finitos se establece a través de restricciones cinemáticas definidas en la superficie de interacción, de forma tal que aseguren la compatibilidad de desplazamientos del sólido y de la viga. Esta compatibilidad de desplazamientos se establece en forma débil utilizando el principio de trabajos virtuales, donde se establece la igualdad del trabajo virtual realizado por un sistema de fuerzas virtuales,  $\delta \hat{\mathbf{f}}_b$  (este vector a nivel global se escribe

como,  $\delta \hat{\mathbf{F}}_b$ ), y los desplazamientos reales de la viga y del sólido en la superficie de interacción:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \delta \mathbf{f}_b^T (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_b) d\omega \quad \forall \quad \delta \mathbf{f}_b^T \text{ admisible} \\
0 &= \delta \hat{\mathbf{F}}_b^T \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_f^T \mathbf{n}_s d\omega}_{\mathbf{A}^T} \hat{\mathbf{U}}_s - \delta \hat{\mathbf{F}}_b^T \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_f^T \mathbf{h}_u d\omega}_{\mathbf{B}^T} \hat{\mathbf{U}}_b \quad \forall \quad \delta \hat{\mathbf{F}}_b^T \\
0 &= \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{U}}_s - \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{U}}_b
\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde  $\hat{\mathbf{U}}_s$  es el vector ensamblado de todos los GDL nodales de sólidos,  $\hat{\mathbf{U}}_b$  es el vector ensamblado de todos los GDL nodales de vigas,  $\mathbf{A}$  es el operador de ensamble,  $N_b$  es el número de elementos de vigas y las matrices globales  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se definen como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{n}_s^T \mathbf{h}_f d\omega \\
\mathbf{B} &= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \mathbf{h}_f d\omega
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Si se utiliza la misma interpolación tanto para  $\mathbf{u}_b$  como para  $\mathbf{f}_b$  (lo que significa que  $\mathbf{n}_u = \mathbf{n}_f$ ), la matriz  $\mathbf{B}$  resulta invertible. Se pueden utilizar distintos órdenes de interpolación para desplazamientos y para fuerzas de interacción (por ejemplo, utilizar una interpolación lineal de las fuerzas de interacción), pero en este caso se debe estudiar la capacidad de contar con la inversa de la matriz  $\mathbf{B}$  en cada caso. En el caso de usar una interpolación cúbica de los desplazamientos (mediante los polinomios de Hermite) e interpolación lineal de las fuerzas de interacción (6 componentes), se consigue una matriz  $\mathbf{B}$  invertible. En el caso de contar con una matriz  $\mathbf{B}$  invertible, los desplazamientos nodales de vigas se pueden expresar en función de los desplazamientos nodales de sólidos, como:

$$\hat{\mathbf{U}}_b = \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{U}}_s \tag{3.16}$$

El vector de cargas nodales equivalente para todo el pilote,  $\hat{\mathbf{P}}_b$ , se puede expresar en función de las fuerzas nodales de interacción,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , estableciendo el equilibrio en el trabajo virtual, producto de un desplazamiento virtual de toda la superficie de interacción (en la cinemática de viga),  $\delta \hat{\mathbf{U}}_b$ , y utilizando las Ecuación 3.7 y 3.10, como:

$$\begin{aligned}
\delta \hat{\mathbf{U}}_b^T \hat{\mathbf{P}}_b &= \delta \hat{\mathbf{U}}_b^T \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \mathbf{h}_f d\omega \hat{\mathbf{F}}_b \quad \forall \quad \delta \hat{\mathbf{U}}_b^T \\
\hat{\mathbf{P}}_b &= \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \mathbf{h}_f d\omega}_{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{F}}_b
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_b = \mathbf{B} \hat{\mathbf{F}}_b \tag{3.18}$$

El vector de cargas nodales en función de los GDL de sólidos,  $\hat{\mathbf{P}}_s$ , se pueden expresar en función de las fuerzas de interacción,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , estableciendo el equilibrio en el trabajo virtual, producto

de un desplazamiento virtual de toda la superficie de interacción (en la cinemática de sólidos),  $\delta \hat{\mathbf{U}}_s$ , como:

$$\delta \hat{\mathbf{U}}_s^T \hat{\mathbf{P}}_s = \delta \hat{\mathbf{U}}_s^T \underbrace{\mathbf{A}}_{e=1}^{e=N_b} \int_{\omega} \mathbf{n}_s^T \mathbf{h}_f d\omega \hat{\mathbf{F}}_b \quad \forall \quad \delta \hat{\mathbf{U}}_s^T$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \underbrace{\mathbf{A}}_{e=1}^{e=N_b} \int_{\omega} \mathbf{n}_s^T \mathbf{h}_f d\omega \hat{\mathbf{F}}_b \quad (3.19)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{A} \hat{\mathbf{F}}_b \quad (3.20)$$

Usando la Ecuación 3.18, el equilibrio de la viga se puede expresar en términos de las fuerzas nodales de interacción,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , como:

$$\mathbf{K}_b \hat{\mathbf{U}}_b = \hat{\mathbf{P}}_b$$

$$\mathbf{K}_b \hat{\mathbf{U}}_b = \mathbf{B} \hat{\mathbf{F}}_b \quad (3.21)$$

donde,  $\mathbf{K}_b$ , es la matriz global de rigidez estándar del pilote.

Si la matriz  $\mathbf{B}$  es invertible, las fuerzas nodales de interacción,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , se pueden expresar como:

$$\hat{\mathbf{F}}_b = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{U}}_b \quad (3.22)$$

Reemplazando la Ecuación 3.22 y la Ecuación 3.16 en la Ecuación 3.20, la matriz de rigidez global del pilote se puede escribir en términos de los GDL del sólido, como:

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{A} \hat{\mathbf{F}}_b$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{U}}_b$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_b \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{K}_{bs}} \hat{\mathbf{U}}_s \quad (3.23)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{K}_{bs} \hat{\mathbf{U}}_s$$

La matriz de rigidez de la viga en términos de los GDL de sólidos,  $\mathbf{K}_{bs}$ , permanece simétrica debido a que hereda la simetría de la matriz de rigidez estándar. Esta matriz se puede ensamblar directamente con la matriz de rigidez de sólidos para obtener la matriz de rigidez completa del elemento de viga embebido con superficie de interacción. Cabe aclarar que de esta forma, tanto los GDL traslacionales como los rotacionales en la viga se transforman en GDL equivalentes de sólidos.

El vector de cargas nodales externas en la viga (v.g. fuerzas y momentos aplicados),  $\hat{\mathbf{P}}_{eb}$ , se transforma en una forma equivalente en términos de GDL de sólidos,  $\hat{\mathbf{P}}_{bs}$ , como:

$$\hat{\mathbf{P}}_{bs} = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{eb} \quad (3.24)$$

Esto es de particular relevancia en los problemas de pilotes cargados externamente, donde cargas y momentos externos aplicados sobre el pilote son convertidos en cargas equivalentes en sólidos. De esta forma, el vector de carga completo, en términos de los GDL de sólidos, se

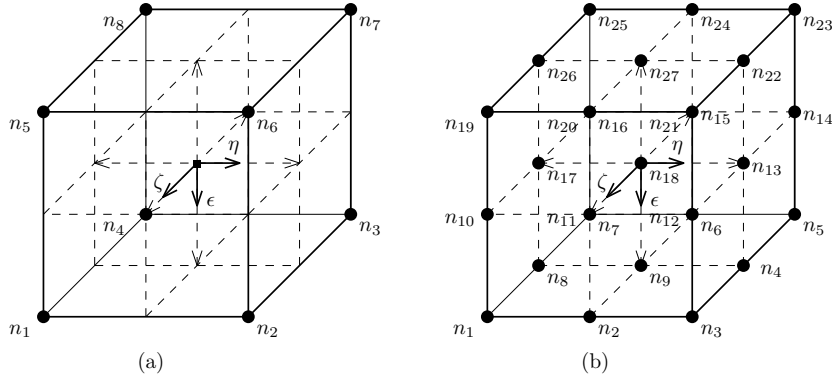


Figura 3.7: Esquema de los elementos de sólidos utilizados en coordenadas locales (a) Elemento H8 y (b) Elemento H27.

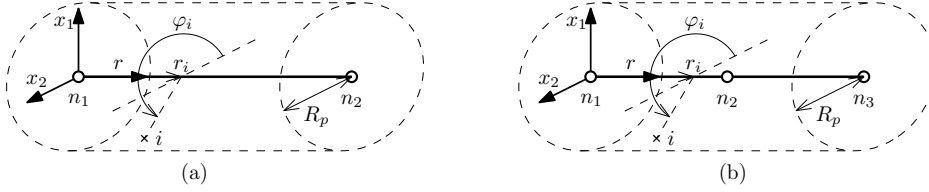


Figura 3.8: Esquema de los elementos de vigas utilizados en coordenadas locales (a) Elemento B2 y (b) Elemento B3.

obtiene sumando las contribuciones de  $\hat{\mathbf{P}}_s$ ,  $\hat{\mathbf{P}}_{bs}$ , y el clásico vector de cargas nodales debido a cargas externas en el dominio de sólidos  $\hat{\mathbf{P}}_{es}$  (v.g. cargas en superficie, cargas máscas). Luego el problema se resuelve en términos de los GDL de sólidos, mientras que los GDL de vigas se obtienen por medio de la Ecuación 3.16 en una etapa posterior de pos-proceso. El sistema final a resolver se escribe como:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_{bs}) \hat{\mathbf{U}}_s - \hat{\mathbf{P}}_{bs} - \hat{\mathbf{P}}_{es} \quad (3.25)$$

### 3.3 Implementación numérica

#### 3.3.1 Elementos embebidos

La formulación propuesta para el EVE es completamente general, y se puede implementar para distintos elementos finitos de sólidos y de vigas.

En esta tesis, la formulación se implementa para dos tipos de elementos finitos de sólidos: un hexaedro bi-lineal de 8 nodos con integración reducida (referido como H8) y un hexaedro cuadrático de 27 nodos (referido como H27). En la Figura 3.7 se muestra un esquema en coordenadas locales de los elementos de sólidos. Las funciones de interpolación para ambos elementos pertenecen al espacio  $\mathcal{C}^0$  [7].

Los elementos finitos de vigas considerados son: un elemento de viga de 2 nodos (B2), con

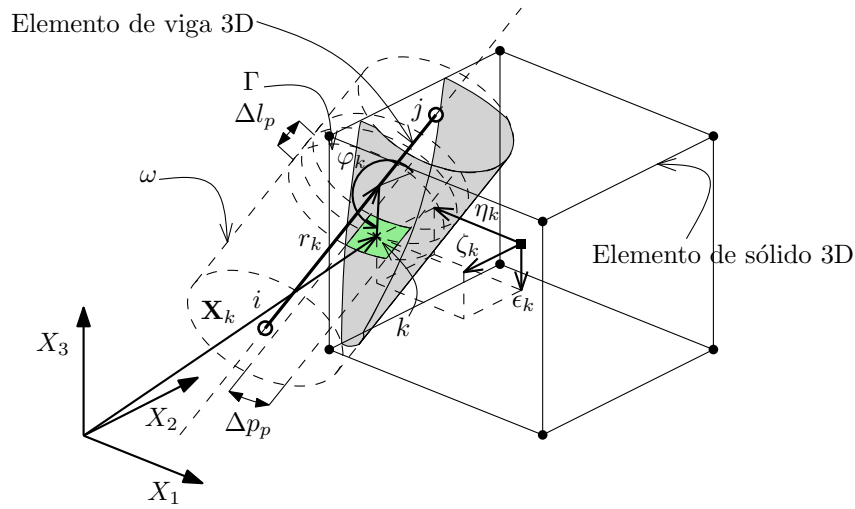


Figura 3.9: Esquema de variables locales y globales en el dominio de vigas y de sólidos en el punto de integración  $k$ .

funciones de interpolación cúbicas de Hermite en flexión (funciones con continuidad  $\mathcal{C}^1$ ) y funciones de interpolación lineal para el comportamiento axial y torsional (funciones con continuidad  $\mathcal{C}^0$ ), y un elemento de viga de 3 nodos (B3) con funciones de interpolación de quinto orden de Hermite en flexión (funciones con continuidad  $\mathcal{C}^1$ ) y funciones de interpolación cuadráticas para el comportamiento axial y torsional (funciones con continuidad  $\mathcal{C}^0$ ). En la Figura 3.8 se muestra un esquema en coordenadas locales de los elementos de vigas.

Se pueden hacer diferentes combinaciones entre estos elementos a la hora de generar un elemento de viga embebido, por ejemplo, H8B2, H27B2, H8B3 y H27B3. Sin embargo, por simplicidad solo se mostrarán resultados sobre los elementos H8B2 y H27B2.

### 3.3.2 Integración numérica de las matrices **A** y **B**

Las integrales sobre toda la superficie de interacción  $\Omega$ , presentes en la Ecuación 3.15, se evalúan como el ensamble de las contribuciones elementales de las superficies de interacción laterales parciales  $\omega$  y la superficie de interacción del pie del pilote  $\Gamma_0$ , las que se calculan mediante integración numérica.

En el caso de la matriz **A** hay que prestar especial cuidado en el operador de ensamble, ya que cada porción de área que constituye al área elemental  $\omega$ , contribuye en los GDL de sólidos que definen el elemento de sólido que contiene a la porción de área. La definición exacta de este problema es muy compleja, ya que se deben resolver las intersecciones entre la superficie de interacción elemental  $\omega$  y las distintas superficies que definen a los elementos de sólidos, lo que definiría superficies irregulares donde se deberían realizar las cuentas presentes en la Ecuación 3.15. Una forma práctica de sobrellevar este inconveniente, es definir una discretización estructurada de la superficie de interacción elemental y aplicar una regla de integración numérica

en cada porción de área definida. En la Figura 3.9 se muestra un esquema de la intersección de estas superficies junto con los dos sistemas coordenados que definen la posición del punto de integración  $k$ . En este trabajo se adopta una estrategia de integración con cuadratura de Gauss-Legendre de un punto en cada sub-área definida, ensamblándose su contribución en los GDL de sólidos y de vigas correspondientes. Por ejemplo, para vigas de sección transversal  $\Gamma$  cilíndrica con radio  $R_p$  y longitud  $l_p$ , las diferentes sub-áreas se definen adoptando la cantidad de particiones en el perímetro,  $n_p$ , y la cantidad de particiones en la longitud de la barra,  $n_l$ , quedando las sub-áreas,  $\Delta\omega$ , expresadas como:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \Delta p_p \Delta l_p \\ \Delta p_p &= \frac{2\pi R_p}{n_p} \\ \Delta l_p &= \frac{l_p}{n_l}\end{aligned}\tag{3.26}$$

Además, se debe prestar atención al realizar las cuentas en el integrando de la Ecuación 3.15, ya que las matrices  $\mathbf{n}_s$  y  $\mathbf{h}_f$  están definidas en dos sistemas coordenados locales distintos, por lo que la expresión que se utiliza en la evaluación numérica es:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{A}_{e=1}^{e=N_b} \int_{\omega} \mathbf{n}_s^T(\epsilon, \eta, \zeta) \mathbf{h}_f(r, \varphi) d\omega \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{e=1}^{e=N_b} \sum_{k=1}^{k=npnl} \mathbf{n}_s^T(\epsilon_k, \eta_k, \zeta_k) \mathbf{h}_f(r_k, \varphi_k) \Delta p_p \Delta l_p\end{aligned}\tag{3.27}$$

Una vez adoptada la estrategia de integración a utilizar y la discretización de la superficie de interacción elemental (o sea adoptar  $np$  y  $nl$ ), las coordenadas locales  $(r_k, \varphi_k)$  en el punto de integración  $k$  sobre la superficie de interacción quedan determinadas por la misma estrategia, pero para hallar las coordenadas locales en el dominio de sólidos,  $\epsilon_k, \eta_k, \zeta_k$ , en función de las coordenadas espaciales del punto de integración  $k$  (que en coordenadas globales se expresa como,  $\mathbf{X}_k$ ) es necesario resolver un problema no-estándar en los modelos de FEM (ver Figura 3.9). Usualmente, en la formulación de elementos isoparamétricos en MEF se conoce el Mapeo Directo (MD) del elemento maestro al elemento físico:  $(\epsilon, \eta, \zeta) \rightarrow (X_1, X_2, X_3)$ , pero no se conoce el Mapeo Inverso (MI) del elemento físico al elemento maestro:  $(X_1, X_2, X_3) \rightarrow (\epsilon, \eta, \zeta)$ , el cual es necesario en este caso para encontrar las coordenadas locales en el dominio de sólidos del punto de integración sobre la superficie de interacción. En la Figura 3.9 se muestra un esquema de la definición del punto de integración  $k$  en coordenadas locales de vigas y de sólidos. Para el caso general de geometrías 3D y elementos con funciones de formas no-lineales y con elementos isoparamétricos de forma irregular, este Mapeo Inverso no se puede hallar en forma analítica como  $MI = MD^{-1}$ , debiéndose resolver un sistema de ecuaciones no-lineales [35].

En el caso de utilizarse elementos de sólidos isoparamétricos regulares en mallas estructuradas, el problema no-lineal de hallar el Mapeo Inverso se reduce a un problema de ecuaciones



lineales algebraicas en las coordenadas locales (los coeficientes del sistema son no-lineales en las coordenadas físicas de los nudos del elemento). En este trabajo se ha implementado esta forma de resolución, quedando la implementación del caso general pendiente, a resolver como futuras contribuciones en este tema.

Si bien este paso es costoso numéricamente, estas cuentas se realizan solo una vez para cada geometría (se las puede considerar como un pre-proceso geométrico) por lo que su influencia sobre el tiempo total de cálculo es baja.

En el caso de la integración en la base del pilote se tiene que:

$$\Delta\Gamma_0 = \frac{\pi R_p^2}{n_p} \quad (3.28)$$

con lo que la contribución de la superficie de interacción en la base del pilote a la matriz  $\mathbf{A}$  se evalúa numéricamente como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{e=1}^{e=N_b} \int_{\Gamma_0} \mathbf{n}_s^T(\epsilon, \eta, \zeta) \mathbf{h}_f(r, \varphi) d\Gamma_0 \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{e=1}^{e=N_b} \sum_{k=1}^{k=np} \mathbf{n}_s^T(\epsilon_k, \eta_k, \zeta_k) \mathbf{h}_f(r_k, \varphi_k, \rho_k) \Delta\Gamma_0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde en este caso el punto  $k$  se elige en el baricentro de la sección circular.

El cómputo de la matriz  $\mathbf{B}$ , mediante integración numérica se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{e=1}^{e=N_b} \int_{\omega} \mathbf{h}_u^T \mathbf{h}_f d\omega \\ \mathbf{B} &= \mathbf{A}_{e=1}^{e=N_b} \sum_{l=1}^{l=N_{pg}} \sum_{m=1}^{m=N_{pg}} \mathbf{h}_u^T(r_l, \varphi_m) \mathbf{h}_f(r_l, \varphi_m) |J| W_l W_m \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde  $N_{pg}$  es el número de puntos de integración para la cuadratura de Gauss-Legendre utilizada (distinta a la regla utilizada en el caso anterior);  $W_l$ ,  $W_m$  son los pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre asociado al punto de coordenadas locales  $(r_l, \varphi_m)$ , y  $|J|$  es el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación de mapeo al elemento maestro.

En este caso todas las cuentas se realizan en el dominio elemental de vigas, lo que no genera mayores complicaciones en la implementación numérica, mapeandose la superficie de interacción elemental  $\omega$  a un elemento rectangular maestro. Para un elemento de viga de longitud  $l_p$ , de sección transversal  $\Gamma$  cilíndrica con radio  $R_p$ , el determinante de la matriz Jacobiana se evalúa como:

$$|J| = \frac{l_p \pi R_p}{2} \quad (3.31)$$

La contribución de la superficie de interacción en la base del pilote a la matriz  $\mathbf{B}$  se evalúa numéricamente en función del número de puntos en que se discretiza el perímetro,  $n_p$ , y se evalúa como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathbf{A} \int_{\Gamma_0}^{\substack{e=N_b \\ e=1}} \mathbf{h}_u^T \mathbf{h}_f \, d\Gamma_0 \\
\mathbf{B} &= \mathbf{A} \sum_{\substack{e=N_b \\ e=1}}^{\substack{k=n_p \\ k=1}} \mathbf{h}_u^T(r_k, \varphi_k) \mathbf{h}_f(r_k, \varphi_k, \rho_k) \Delta\Gamma_0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

## Capítulo 4

# Elemento de Viga Embebido (EVE) propuesto: interfaz de plasticidad concentrada

En este capítulo se describe la incorporación de una interfaz entre los modelos de vigas y de sólidos descritos anteriormente con la intención de incorporar un mecanismo que capture el comportamiento no-lineal material incipiente, que se desarrolla en las inmediaciones del pilote cuando este es cargado lateralmente, particularmente en el régimen de deformaciones bajas a moderadas, que representa el rango de interés de este trabajo.

Al incluir deformaciones plásticas en el suelo en problemas 3D, y en procesos donde la carga sobre el pilote se aplica en dos direcciones no paralelas, el desarrollo de estas deformaciones plásticas acopla fuertemente la fenomenología en los dos planos de flexión [62].

Al pensar en un modelo de interfaz entre elementos que vinculan diferentes cinemáticas, se presentan al menos dos alternativas: caracterizar el modelo de interfaz en términos de la cinemática 3D del modelo de sólidos o caracterizarlo en función de la cinemática 3D de vigas. En este trabajo se exploran las dos alternativas.

### 4.1 Formato variacional extendido del problema

La idea subyacente en esta sección es incluir en la expresión variacional de la Ecuación 3.5 un término que considere la disipación plástica producto de fuerzas de interacción no-conservativas,  $\mathbf{t}_d$ , actuantes en la piel del pilote. Estas fuerzas de interacción se modelan constitutivamente en función del salto de desplazamiento entre el pilote y el suelo,  $[[\mathbf{u}_b]] \in \mathbb{R}^3$ , entendido como el desplazamiento relativo entre ambos debido exclusivamente a deformaciones plásticas en el suelo situado en el entorno del pilote. El principio variacional que incorpora estas fuerzas de interacción

no-lineales y no-conservativas se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_L \mathbf{m}_b \cdot \mathcal{B} \bar{\mathbf{u}}_b \, dL - \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b|_L - \int_L \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, dL \\
&+ \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s \\
&- \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{m}_u \bar{\mathbf{u}}_b - \bar{\mathbf{u}}_s) \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{m}_u \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{t}_d \cdot \llbracket \bar{\mathbf{u}}_b \rrbracket \, d\Omega \quad \forall \quad \bar{\mathbf{u}}_b, \bar{\mathbf{u}}_s, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \llbracket \bar{\mathbf{u}}_b \rrbracket \text{ admisibles}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

En este punto existen al menos dos alternativas para caracterizar el término asociado a las fuerzas de interacción plásticas, ya que se lo puede plantear: (i) en función de una cinemática de vigas (6 GDL), en cuyo caso el último término de la integral 4.1 se extiende sobre la longitud del pilote  $L_p$ , o bien (ii) se lo puede plantear en función de la cinemática de sólidos (3 GDL) sobre toda la superficie de interacción  $\Omega$ . La principal diferencia entre las dos alternativas radica en la definición del modelo constitutivo para modelar las fuerzas de interacción no-lineales en función del salto de desplazamientos, ya que en un caso estas cargas toman la estructura de cargas generalizadas sobre un modelo de vigas (cargas distribuidas y momentos distribuidos en el eje) y en el otro caso representan un vector de tracciones 3D sobre la superficie de interacción. A continuación se describe una formulación que abarca en un mismo formato ambas alternativas. Luego se presentan los detalles referentes a las dos técnicas propuestas para modelar las fuerzas de interacción no-lineales.

## 4.2 Formulación propuesta para la interfaz no-lineal

En este caso la compatibilidad de desplazamientos se establece teniendo en cuenta la existencia de un salto de desplazamientos finito que tiene como objetivo modelar los desplazamientos producto de las deformaciones plásticas ocurridas en el suelo. Esta compatibilidad de desplazamientos se establece en forma débil utilizando el principio de trabajos virtuales, donde se establece la igualdad del trabajo virtual realizado por un sistema de fuerzas virtuales,  $\delta \hat{\mathbf{f}}_b$  (este vector a nivel global se escribe como,  $\delta \mathbf{F}_b$ ), respecto a los desplazamientos reales de vigas y de sólidos en la superficie de interacción:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \delta \mathbf{f}_b^T (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_b + \llbracket \mathbf{u}_b \rrbracket) \, d\omega \quad \forall \quad \delta \mathbf{f}_b^T \text{ admisible} \\
0 &= \delta \hat{\mathbf{F}}_b^T \left( \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_f^T \mathbf{n}_s \, d\omega}_{\mathbf{A}^T} \hat{\mathbf{U}}_s - \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_f^T \mathbf{h}_u \, d\omega}_{\mathbf{B}^T} (\hat{\mathbf{U}}_b - \llbracket \hat{\mathbf{U}}_b \rrbracket) \right) \forall \delta \hat{\mathbf{F}}_b^T \\
0 &= \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{U}}_s - \mathbf{B}^T (\hat{\mathbf{U}}_b - \llbracket \hat{\mathbf{U}}_b \rrbracket)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  se definen según la Ecuación 3.15.

En el caso de contar con una matriz  $\mathbf{B}$  invertible, los desplazamientos nodales de vigas se pueden expresar en función de los desplazamientos nodales de sólidos y los saltos nodales de desplazamientos, como:

$$\hat{\mathbf{U}}_b = \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{U}}_s + [\hat{\mathbf{U}}_b] \quad (4.3)$$

Esta ecuación expresa la compatibilidad de desplazamientos en el problema completo.

Se define el vector de fuerzas nodales de interacción,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , en función de las fuerzas no-lineales de interacción en el eje de la viga,  $\mathbf{t}_d$ , planteando la igualdad de trabajo virtual producido por un  $\delta\hat{\mathbf{U}}_b$  arbitrario, y se escribe como:

$$\delta\hat{\mathbf{U}}_b^T \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega} \mathbf{h}_f^T \mathbf{h}_u \, d\omega}_{\mathbf{B}^T} \hat{\mathbf{F}}_b = \delta\hat{\mathbf{U}}_b^T \underbrace{\mathbf{A} \int_{l_p} \mathbf{n}_u^T \mathbf{t}_d \, dl_p}_{\mathbf{T}_d} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{F}}_b = \mathbf{T}_d$$

donde las variables tienen el mismo significado que en el caso elástico y  $l_p$  es el dominio elemental de la viga (a nivel global esta variable se denomina  $L_p$ ). En esta ecuación se introdujo el vector de fuerzas disipativas de interacción,  $\mathbf{T}_d$ , cuya definición es:

$$\mathbf{T}_d = \mathbf{A} \int_{l_p} \mathbf{n}_u^T \mathbf{t}_d \, dl_p \quad (4.5)$$

Alternativamente, este vector de fuerzas disipativas  $\mathbf{T}_d$  se puede evaluar en cinemática de sólidos, en función de las fuerzas no-lineales de interacción en la superficie  $\Omega$ ,  $\mathbf{t}_d$ , escribiéndolo como:

$$\mathbf{T}_d = \mathbf{A} \int_{\omega} \mathbf{h}_u^T \mathbf{t}_d \, d\omega \quad (4.6)$$

Si existe la matriz  $\mathbf{B}^{-1}$ , según 4.4 se puede escribir al vector de fuerzas nodales de interacción en cinemática de vigas,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , como:

$$\hat{\mathbf{F}}_b = \mathbf{B}^{-T} \mathbf{T}_d \quad (4.7)$$

En este caso el vector de cargas nodales equivalente para todo el pilote,  $\hat{\mathbf{P}}_b$ , se puede expresar en función de las fuerzas no-lineales de interacción reemplazando en la Ecuación 3.18 las fuerzas nodales de interacción  $\hat{\mathbf{F}}_b$  calculadas anteriormente, con lo que su expresión queda:

$$\hat{\mathbf{P}}_b = \mathbf{B} \hat{\mathbf{F}}_b = \mathbf{B} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{T}_d$$

$$\hat{\mathbf{P}}_b = \mathbf{T}_d \quad (4.8)$$

donde se utilizó la simetría de  $\mathbf{B}$ .

Reemplazando la definición de las fuerzas nodales de interacción,  $\hat{\mathbf{F}}_b$ , en la Ecuación 3.20 se llega a expresar el vector de cargas nodales en sólidos,  $\hat{\mathbf{P}}_s$ , como:

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{A} \hat{\mathbf{F}}_b$$

$$\hat{\mathbf{P}}_s = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{T}_d \quad (4.9)$$

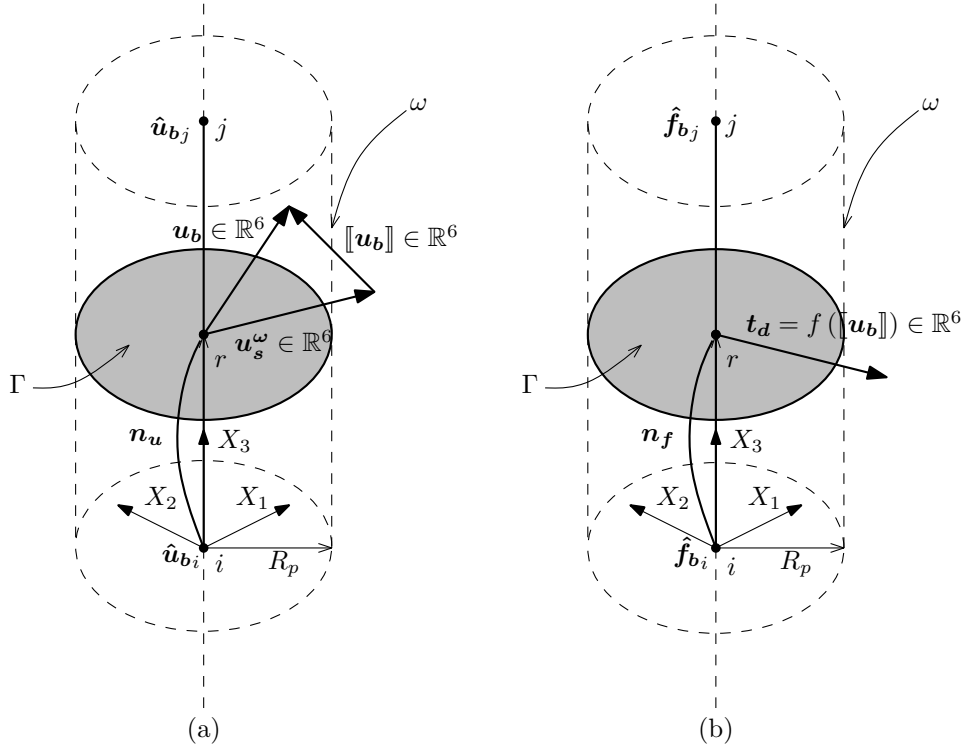


Figura 4.1: (a) Definición del salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b]]$  en cinemática de vigas y (b) Fuerzas de interacción modeladas en función del salto de desplazamientos.

En este caso el sistema final a resolver es el equilibrio de los dominios de sólidos y de vigas, que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{K}_s \hat{\mathbf{U}}_s - \hat{\mathbf{P}}_{es} - \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{T}_d \\ \mathbf{0} &= \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{U}}_b - \hat{\mathbf{P}}_{eb} + \mathbf{T}_d \end{aligned} \quad (4.10)$$

sujetos a la restricción impuesta por la ecuación de compatibilidad de desplazamientos 4.3, que se puede reescribir como:

$$[[\hat{\mathbf{U}}_b]] = -\mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{U}}_s + \hat{\mathbf{U}}_b \quad (4.11)$$

## 4.3 Fuerzas de interacción en cinemática de vigas

### 4.3.1 Cinemática del elemento embebido con interfaz no-lineal

En este punto se propone una interfaz 3D que tiene como fin capturar la no-linealidad material incipiente que se desarrolla en el suelo en la zona cercana al pilote. Además, esta interfaz debe capturar el aspecto tridimensional de las cargas que se presentan, por ejemplo, en problemas como el de *lateral spreading* donde no se establece *a priori* la dirección de la carga sino que éstas son el resultado de un movimiento relativo del suelo al pilote, por lo que el modelo debe ser capaz de evaluar correctamente la rigidez a flexión en el plano de carga y adaptarse para seguir

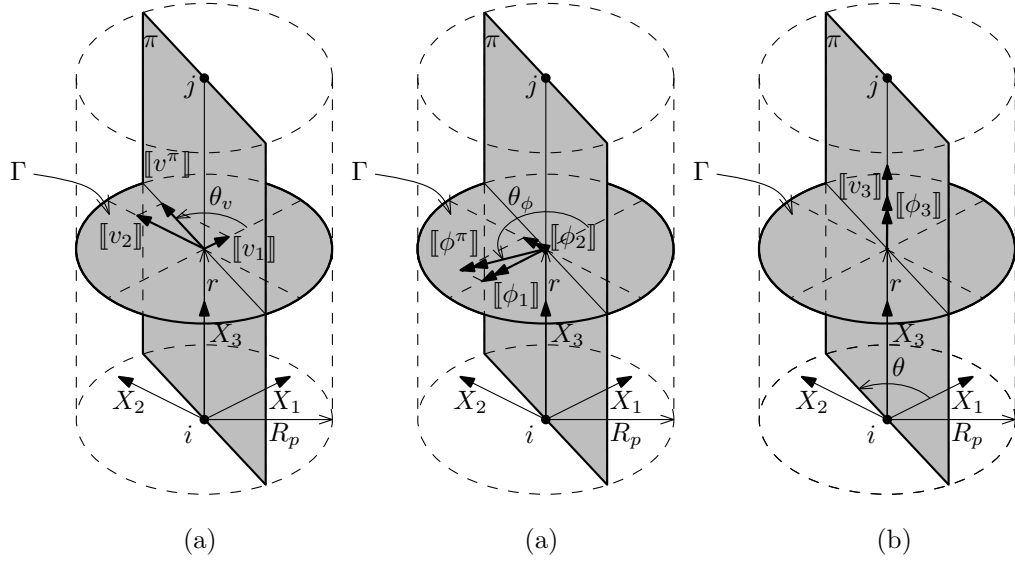


Figura 4.2: Detalle de las componentes del vector  $[[\mathbf{u}_b^*]]$  (a) componentes de desplazamientos en el plano  $\pi$  (b) componentes de giros en el plano  $\pi$  y (c) componentes según el eje del pilote.

los cambios en la dirección de ésta. En este sentido, en el caso elástico no hay inconvenientes en considerar que el campo de desplazamientos en el eje de la viga,  $\mathbf{u}_b$ , se proyecta en las direcciones globales  $X_1$  y  $X_2$  de la terna principal de referencia generando las componentes  $v_1$  y  $v_2$ , para luego aplicarse una ley constitutiva elástica a cada componente. Sin embargo en el caso de considerar un comportamiento elasto-plástico en el suelo, se debe plantear un modelo donde la relación entre cargas reactivas de suelo y desplazamientos relativos se verifique en el plano  $\pi$ , que contiene a la resultante aplicada en cada punto del pilote, tal como se evidencia en el modelo de elementos finitos desarrollado mediante Abaqus [62].

Es por ello que se propone el siguiente modelo para la interfaz no-lineal, donde las fuerzas de contacto se modelan constitutivamente en función del vector de desplazamientos relativos o salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b]]$ , entre el campo de desplazamientos en el eje de la viga y el campo de desplazamientos del sólido expresado en cinemática de viga.

La definición del salto en el campo de desplazamientos en un punto de coordenada local  $r$  según el eje de la viga,  $[[\mathbf{u}_b]]$ , ver Figura 4.1, se escribe como:

$$[[\mathbf{u}_b]] = \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s^\omega \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{u}_b$  es el campo de desplazamientos en la viga y  $\mathbf{u}_s^\omega$  es el campo de desplazamientos del sólido evaluado en la superficie de interacción  $\omega$  y expresado (mapeado) en cinemática de la viga.

El salto en el campo de desplazamientos en el eje de la viga  $[[\mathbf{u}_b]]$  está caracterizado por 6 componentes ( 3 saltos de desplazamientos y 3 saltos de giros), sin embargo la definición del modelo constitutivo se realiza en función de solo 4 componentes como se detalla en la Figura 4.2, que se agrupan en el vector  $[[\mathbf{u}_b^*]]$ . Estas componentes son: el salto en desplazamientos asociados

a flexión en el plano  $\pi$   $[[v^\pi]]$ , el salto en desplazamientos en el sentido axial de la viga  $[[v_3]]$ , el salto en giros asociados a flexión en el plano  $\pi$   $[[\phi^\pi]]$ , y el salto en giros asociados a torsión según el eje de la viga  $[[\phi_3]]$ .

Los saltos de desplazamientos y giros en el plano  $\pi$  que contiene a la resultante en cada punto, se pueden escribir en función de las componentes del vector  $[[\mathbf{u}_b]]$  como:

$$\begin{aligned} [[v_\pi]] &= +[[v_1]] \cos \theta_v + [[v_2]] \sin \theta_v \\ [[\phi_\pi]] &= +[[\phi_1]] \cos \theta_\phi + [[\phi_2]] \sin \theta_\phi \end{aligned} \quad (4.13)$$

con lo que el vector de saltos de desplazamientos,  $[[\mathbf{u}_b^*]]$ , que gobernará la ley constitutiva se escribe como:

$$[[\mathbf{u}_b^*]] = \mathcal{P} [[\mathbf{u}_b]]$$

$$\begin{pmatrix} [[v_\pi]] \\ [[v_3]] \\ [[\phi_\pi]] \\ [[\phi_3]] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_v & \sin \theta_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_\phi & \sin \theta_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [[v_1]] \\ [[v_2]] \\ [[v_3]] \\ [[\phi_1]] \\ [[\phi_2]] \\ [[\phi_3]] \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

donde  $\mathcal{P}$  es un operador de proyección que mapea el vector de 6 componentes  $[[\mathbf{u}_b]]$  en el vector de 4 componentes  $[[\mathbf{u}_b^*]]$ .

En este modelo de interfaz se plantea modelar, a través de una ley constitutiva no-lineal, las fuerzas de interacción entre el elemento de viga y el elemento de sólido que conforman el elemento de viga embebido.

En este caso las fuerzas de interacción no-lineales,  $\mathbf{t}_d^* \in \mathbb{R}^4$ , se definen en la cinemática de vigas y en función del salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b^*]] \in \mathbb{R}^4$ , como:

$$\mathbf{t}_d^* = f ([[ \mathbf{u}_b^* ]]) \quad (4.15)$$

Las componentes del vector  $\mathbf{t}_d \in \mathbb{R}^6$  (según la terna global dela Figura 4.1) se hallan proyectando las componentes del vector  $\mathbf{t}_d^*$ , correspondientes al plano  $\pi$ , sobre esta terna global (según



la Figura 4.2), como:

$$\mathbf{t}_d = \mathcal{P}^T \mathbf{t}_d^* \quad (4.16)$$

$$\begin{pmatrix} t_{f1} \\ t_{f2} \\ t_{f3} \\ t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{f\pi} \\ t_{fa} \\ t_{m\pi} \\ t_{mt} \end{pmatrix}$$

### 4.3.2 Ley constitutiva para las fuerzas de interacción

La Ecuación 4.15 presenta la ley constitutiva  $\mathbf{t}_d^* = f(\llbracket \mathbf{u}_b^* \rrbracket)$  que vincula saltos de desplazamientos expresados en cinemática de vigas (que se verifican en el eje de la viga) con cargas distribuidas de interacción que son conjugadas energéticas de los saltos de desplazamientos. Quedan definidos así los siguientes pares conjugados: el salto de desplazamiento normal al eje - la carga distribuida normal al eje, el salto en desplazamiento axial-la carga distribuida axial, el salto en giro asociado a flexión - el momento distribuido de flexión, el salto en giro de torsión - el momento distribuido de torsión. La ley constitutiva que vincula los pares conjugados se adopta de la siguiente manera: una relación elástica lineal para las cargas axiales y torsionales; y un comportamiento elasto-plástico para la carga normal distribuido y el momento distribuido asociados a la flexión (ver Figura 4.2). Además, estos pares conjugados no están acoplados entre si, lo que permite escribir la derivada de las fuerzas de interacción  $\mathbf{t}_d^*$  respecto a la variable  $\llbracket \mathbf{u}_b^* \rrbracket$  como se muestra en la Ecuación 4.18.

Debido a que el método de las curvas  $p-y$  es ampliamente aceptado en la practica ingenieril, se propone utilizar los elementos más relevantes de la definición de dichas curvas para definir un modelo de plasticidad unidimensional que ajuste a las mismas. Estos modelos de plasticidad unidimensional se adoptan con endurecimiento isotrópico lineal o exponencial en función del tipo de suelo que se esté representando (granular o cohesivo), con una carga última que se verifica para un salto de desplazamiento último, como se detalla para cada para conjugado.

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_d^* &= f(\llbracket \mathbf{u}_b^* \rrbracket) \\
\begin{pmatrix} t_{f\pi} \\ t_{fa} \\ t_{m\pi} \\ t_{mt} \end{pmatrix} &= f \begin{pmatrix} \llbracket v_\pi \rrbracket \\ \llbracket v_3 \rrbracket \\ \llbracket \phi_\pi \rrbracket \\ \llbracket \phi_3 \rrbracket \end{pmatrix} \tag{4.17} \\
\mathbf{C}_d &= \frac{\partial \mathbf{t}_d^*}{\partial \llbracket \mathbf{u}_b^* \rrbracket} = \begin{pmatrix} C_{f\pi}(\llbracket v_\pi \rrbracket) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{fa}(\llbracket v_3 \rrbracket) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{m\pi}(\llbracket \phi_\pi \rrbracket) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{mt}(\llbracket \phi_3 \rrbracket) \end{pmatrix} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

En lo que sigue se describen las curvas adoptadas para caracterizar las leyes constitutivas 1D para cada par conjugado.

Se adopta una rigidez inicial alta en los modelos de plasticidad 1D que caracterizan a la interfaz para minimizar la deformación elástica ficticia, ya que la interfaz tiene por objeto modelar sólo las fuerzas de interacción no-lineales y los desplazamientos plásticos asociados en el campo cercano. Las componentes elásticas de fuerzas de interacción y desplazamientos se modelan mediante los elementos de vigas embebidos en elementos de sólidos 3D. Por ello se adopta un módulo elástico de corte en la interfaz en función del tipo de suelo,  $G_i = 2 \text{ a } 5 G_s$ , donde  $G_s$  es el módulo elástico de corte del suelo.

### Fuerza normal

Para la curva  $t_{f\pi} - \llbracket v_\pi \rrbracket$  se adopta un modelo elasto-plástico 1D con endurecimiento lineal y carga límite,  $t_{f\pi}^u$ , o un endurecimiento exponencial (como los descritos en [58]) como se muestra en la Figura 4.4. Los elementos que definen las curvas se adoptan de las correspondientes curvas  $p - y$ , siendo estos elementos: la carga última, la carga de fluencia, el salto de desplazamiento último y el salto de desplazamiento de fluencia.

Debido a que se deben minimizar las deformaciones elásticas en el espesor ficticio, se debe adoptar un valor relativamente alto de la rigidez inicial elástica,  $C_{f\pi}$ , pero no tan alta como para generar inestabilidades numéricas. Por ello se adoptó un Módulo elástico de Corte relativamente

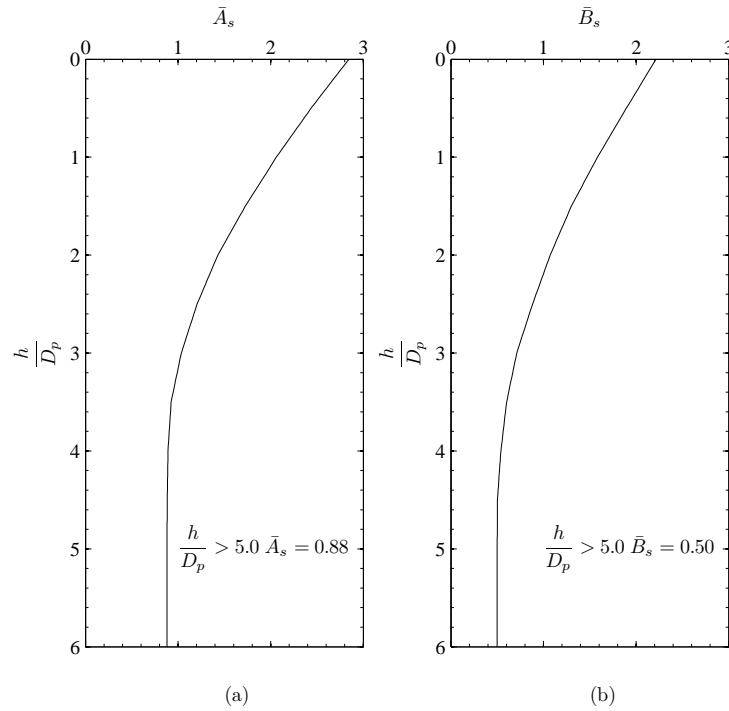


Figura 4.3: Parámetros para la definición de la curva  $p - y$  propuesta por Resse et al. (a) Curva  $\bar{A}_s$  para determinación de carga última en el caso estático y (b) Curva  $\bar{B}_s$  para determinación de carga intermedia en el caso estático.

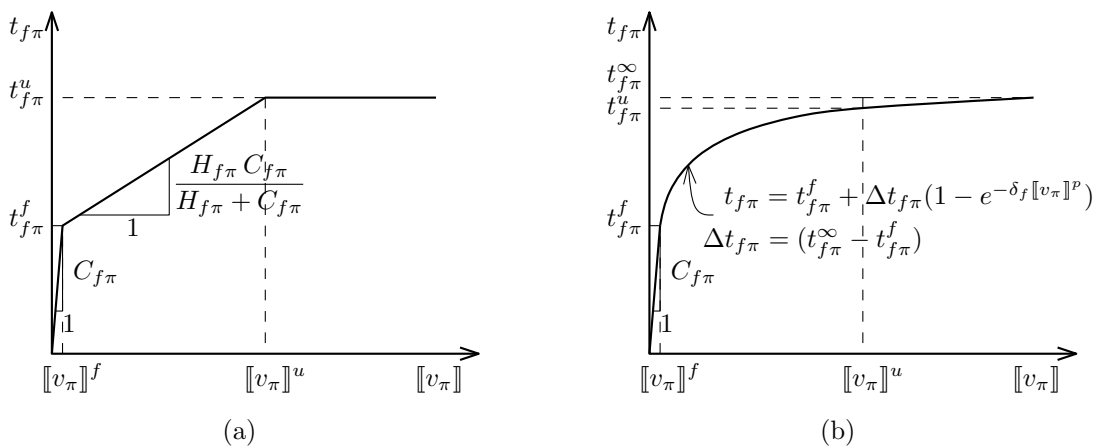


Figura 4.4: Curvas elasto-plásticas para caracterizar la carga normal distribuida para (a) Endurecimiento lineal y (b) Endurecimiento exponencial.

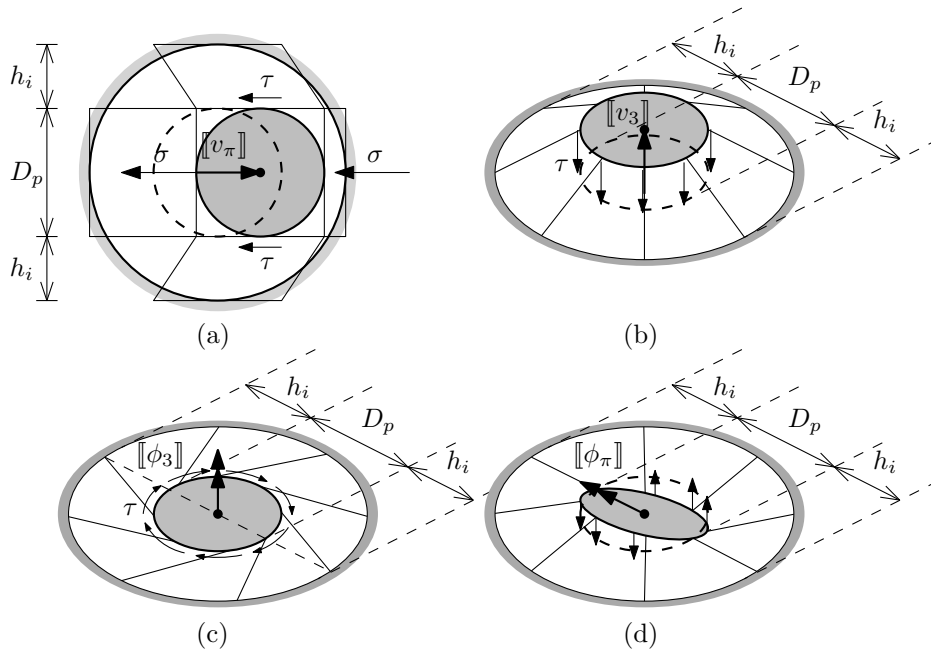


Figura 4.5: Esquema de los modelos utilizados para estimar la rigidez inicial de las diferentes curvas elasto-plásticas (a) Fuerza normal (b) Fuerza axial (c) Momento torsor y (d) Momento flector.

elevado al del suelo. Luego, el valor de la rigidez inicial elástica de la curva se adopta en función de un modelo simple, en el cual se considera que el pilote se desplaza dentro de un anillo de material elástico fijo en el exterior como se ve en la Figura 4.5 (a). De esta forma el valor de la rigidez inicial elástica de la curva se obtiene sumando la contribución del suelo delante, detrás y en los dos laterales del pilote, con lo que resulta:

$$\begin{aligned}
 C_{f\pi} &= \frac{t_{f\pi}^u}{[[v_\pi]]} = \frac{2 \varepsilon_i E_i D_p + 2 \gamma_i G_i D_p}{[[v_\pi]]} \\
 C_{f\pi} &= \frac{2 \left( \frac{[[v_\pi]]}{h_i D_p} \right) E_i D_p + 2 \left( \frac{[[v_\pi]]}{h_i D_p} \right) G_i D_p}{[[v_\pi]]} \\
 C_{f\pi} &= \frac{2 E_i + 2 G_i}{h_i} \\
 C_{f\pi} &= \frac{G_i}{h_i} 2 (3 + 2\nu_i)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde  $G_i$  es el Módulo de Corte de la interfaz,  $\nu_i$  es el Coeficiente de Poisson de la interfaz,  $h_i$  es el espesor ficticio de la interfaz relativo al diámetro del pilote  $D_p$ ,  $\varepsilon_i$  es la deformación específica longitudinal en la interfaz y  $\gamma_i$  es la distorsión de corte en la interfaz.

La carga normal última  $t_{f\pi}^u$  se adopta en función del tipo de suelo (granular o cohesivo) y la curva  $p - y$  adoptada. Para suelo cohesivo se adopta la expresión propuesta por Reese [50] para falla no-drenada ( $\phi_s = 0$ ;  $s_u \neq 0$ ) y para suelos granulares la correspondiente a falla drenada

Tipo de suelo	$a_f = t_{f\pi}^f / t_{f\pi}^u$
Arena - E. bi-lineal	0.20
Arcilla - E. exponencial	0.40

Tabla 4.1: Valores de carga de fluencia,  $t_{f\pi}^f$  en función de  $t_{f\pi}^u$ , según la Figura 4.4.

( $\phi_s \neq 0; s_u = 0$ ).

Para suelos cohesivos la carga normal última se expresa como:

$$t_{f\pi}^u = \min \begin{cases} s_u D_p \left( 3 + \frac{\gamma_s}{s_u z} + \frac{J h}{D_p} \right) & \text{Falla Superficial} \\ 9 s_u D_p & \text{Falla Profunda} \end{cases} \quad (4.20)$$

donde  $z$  es la profundidad del punto analizado,  $\gamma_s$  es el peso unitario del suelo,  $s_u$  es la resistencia al corte no-drenada y  $J$  es un parámetro empírico que suele adoptarse como  $J = 0.50$  en la mayoría de los casos [27].

Para suelos granulares la carga normal última se expresa como:

$$t_{f\pi}^u = \bar{A}_s t_s$$

$$t_s = \min \begin{cases} \gamma_s z \left( \frac{K_0 z \tan \phi \sin \beta}{\tan(\beta - \phi) \cos \alpha} + \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \phi)} (D_p + z \tan \beta \tan \alpha) + K_0 z \tan \beta (\tan \phi \sin \alpha - \tan \alpha) - K_a D_p \right) & \text{Falla Superficial} \\ \gamma_s z \left( K_a D_p (\tan^8 \beta - 1) + K_0 D_p \tan \phi \tan^4 \beta \right) & \text{Falla Profunda} \end{cases} \quad (4.21)$$

donde  $K_0$  es el coeficiente de empuje en reposo,  $K_a$  es el coeficiente de empuje activo,  $\alpha$  se adopta como  $\alpha = \phi_s/2$ ,  $\beta = 45 + \phi_s/2$ , y  $\bar{A}_s$  es un coeficiente en función de la relación  $z/D_p$  que se determina en función de la figura 4.3.

La carga de fluencia,  $t_{f\pi}^f$ , se adopta como una fracción de la carga última,  $t_{f\pi}^u$  en función del parámetro  $a_f$ , el que se adopta de forma que las curvas elasto-plásticas ajusten a las curvas  $p-y$ . Cabe aclarar que este parámetro  $a_f$  solo modifica la forma de la curva propuesta  $t_{f\pi} - \llbracket v_\pi \rrbracket$  en el rango de bajas deformaciones, no alterando los valores últimos  $t_{f\pi}^u$ . Ésta carga de fluencia se expresa como:

$$t_{f\pi}^f = a_f t_{f\pi}^u \quad (4.22)$$

donde los valores del parámetro  $a_f$  se muestran en la Tabla 4.1.

El salto de desplazamiento último se estima para el caso de suelo cohesivo como:

$$\llbracket v_\pi \rrbracket^u = 16 (2.50 D_p \varepsilon_{50}) - \frac{t_{f\pi}^u}{k_s} \quad (4.23)$$

$s_u$ (MPa)	$\varepsilon_{50}$
< 0.10	0.004
0.10 – 0.20	0.005
> 0.20	0.007

Tabla 4.2: Valores de  $\varepsilon_{50}$  en función de  $s_u$  en MPa.

donde  $k_s$  es el módulo de reacción lateral del suelo estimado en función de la Ecuación 2.4, y  $\varepsilon_{50}$  es la deformación axial al 50% de la resistencia en el ensayo triaxial, que se estima en función de la resistencia al corte no-drenada  $s_u$  como se muestra en la Tabla 4.2.

Para suelo granular se tiene que:

$$\llbracket v_\pi \rrbracket^u = \frac{3D_p}{80} - \frac{t_{f\pi}^u}{k_s} \quad (4.24)$$

El salto de desplazamiento para la carga de fluencia se calcula como:

$$\llbracket v_\pi \rrbracket^f = \frac{t_{f\pi}^f}{C_{f\pi}} \quad (4.25)$$

En el modelo de endurecimiento lineal se define el Módulo Plástico,  $H_{f\pi}$  (ver Figura 4.4), como:

$$H_{f\pi} = \frac{C_{f\pi} (t_{f\pi}^u - t_{f\pi}^f)}{C_{f\pi} \llbracket v_\pi \rrbracket^u - t_{f\pi}^u} \quad (4.26)$$

En el modelo de endurecimiento exponencial se define el coeficiente,  $\delta_{f\pi}$  (ver Figura 4.4), como:

$$\delta_{f\pi} = -\ln \left( \frac{t_{f\pi}^\infty - t_{f\pi}^f}{t_{f\pi}^\infty - t_{f\pi}^u} \right) \frac{C_{f\pi}}{C_{f\pi} \llbracket v_\pi \rrbracket^u - t_{f\pi}^u} \quad (4.27)$$

En la Figura 4.6 se muestra una comparación de las curvas constitutivas propuestas y las curvas  $p - y$  propuestas por Reese y O'Neill para arenas y arcillas para una sección ubicada a una profundidad  $z = 15.00$  m, donde se consideraron los siguientes parámetros:  $\gamma_s = 16$  kN/m<sup>3</sup>,  $\phi_s = 32^\circ$ ,  $m_h = 40$  MPa/m,  $D_p = 0.50$  m y en las arcillas  $s_u = 0.01$  MPa.

### Fuerza axial

Al igual que el caso de la fuerza normal distribuida, para la fuerza axial distribuida se adopta una ley constitutiva elasto-plástica con endurecimiento lineal y carga límite o endurecimiento exponencial. Los elementos a definir para caracterizar las curvas elasto-plásticas son: la carga última, la carga de fluencia, el salto de giros último y el salto de giros de fluencia.

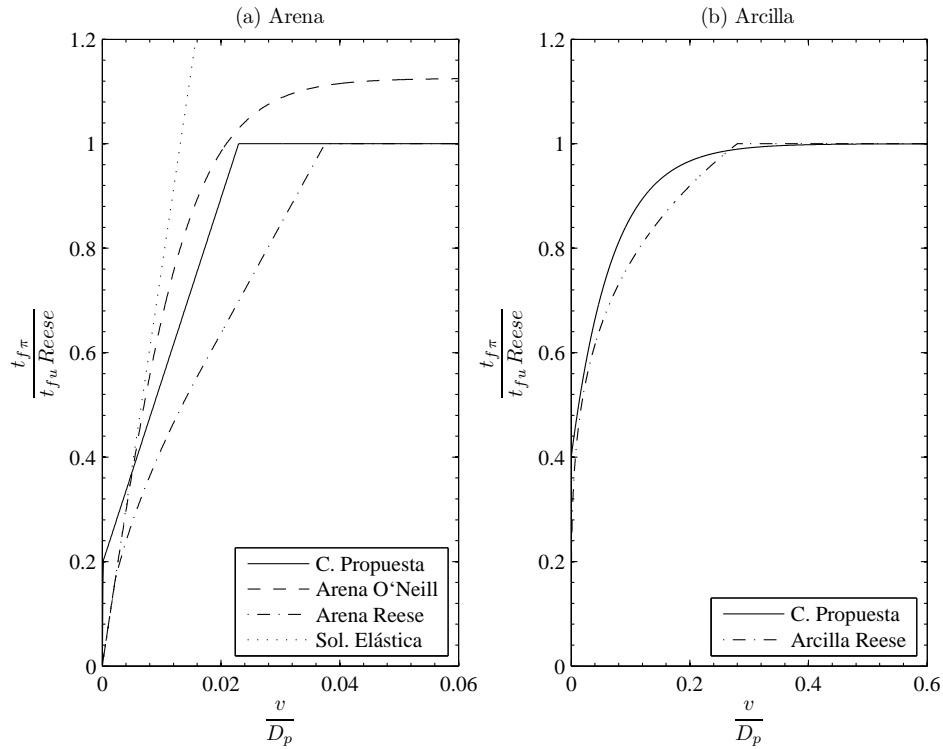


Figura 4.6: Curva elasto-plástica que caracteriza la fuerza normal al eje de la viga (a) para un suelo granular y (b) para suelo cohesivo.

La rigidez inicial elástica de la curva se adopta en función del modelo descrito en el punto anterior ( ver Figura 4.5 (b)), y su expresión se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 C_{fa} &= \frac{t_{fa}}{[[v_3]]} = \frac{\gamma_i G_i \pi D_p}{[[v_3]]} \\
 C_{fa} &= \frac{\left( \frac{[[v_3]]}{h_i D_p} \right) G_i \pi D_p}{[[v_3]]} \\
 C_{fa} &= \frac{G_i \pi}{h_i}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

donde  $G_i$  es el Módulo de Corte de la interfaz y  $h_i$  es el espesor ficticio de la interfaz relativo al diámetro del pilote  $D_p$ .

La carga axial última,  $t_{fa}^u$ , se estima en función de las curvas  $t - z$  para pilotes excavados, como:

$$t_{fa}^u = \pi D_p f_{su} \tag{4.29}$$

donde  $f_{su}$  es la fricción última en la superficie del pilote, la que, para pilotes excavados, se estima

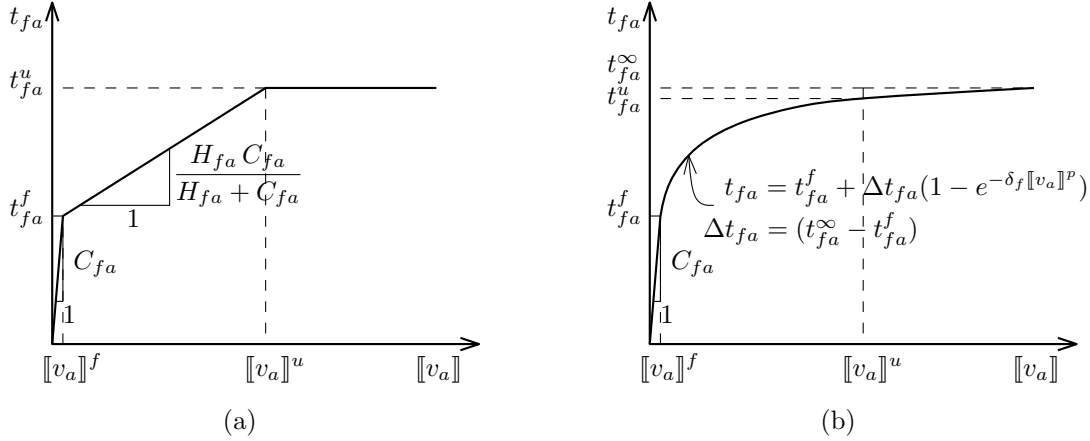


Figura 4.7: Curvas elasto-plásticas para caracterizar la fuerza axial distribuida para (a) Endurecimiento lineal y (b) Endurecimiento exponencial.

en función del tipo de suelo como:

$$f_{su} = \begin{cases} \beta_f \sigma'_z & \text{Granular} \\ 0.55 s_u & \text{Cohesivo} \end{cases} \quad (4.30)$$

donde  $\beta_f$  se calcula como:

$$\beta_f = 1.50 - 0.135 \sqrt{\frac{z}{0.305}} \quad \text{con } z \text{ en m} \quad (4.31)$$

sujeto a la restricción  $0.25 < \beta_f < 1.20$ .

La carga de fluencia,  $t_{fa}^f$ , se adopta como una fracción de la carga última,  $t_{fa}^u$ , en función del parámetro  $a_f$  que se describió anteriormente. Esta relación se escribe como:

$$t_{fa}^f = a_f t_{fa}^u \quad (4.32)$$

El salto de desplazamiento axial último se estima a partir de las curvas  $t - z$  para pilotes excavados como:

$$[[v_a]]^u = \begin{cases} 0.00091 D_p & \text{Granular} \\ 0.020 D_p & \text{Cohesivo} \end{cases} \quad (4.33)$$

El salto de desplazamiento para la carga de fluencia se calcula como:

$$[[v_a]]^f = \frac{t_{fa}^f}{C_{fa}} \quad (4.34)$$

En el modelo de endurecimiento lineal se define el Módulo Plástico,  $H_{fa}$  (ver Figura 4.7), como:

$$H_{fa} = \frac{C_{fa} (t_{fa}^u - t_{fa}^f)}{C_{fa} [[v_a]]^u - t_{fa}^u} \quad (4.35)$$



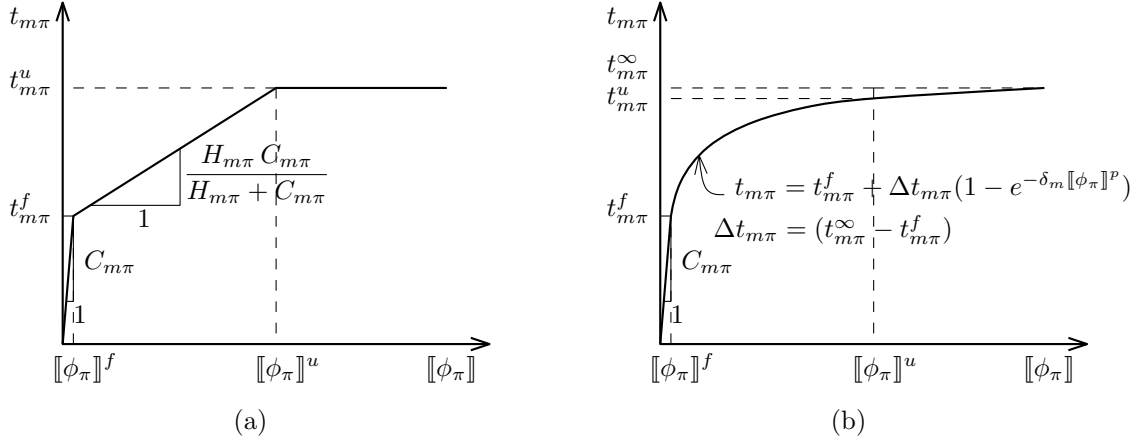


Figura 4.8: Curvas elasto-plásticas para caracterizar el momento flector distribuido para (a) Endurecimiento lineal y (b) Endurecimiento exponencial.

En el modelo de endurecimiento exponencial se define el coeficiente,  $\delta_{fa}$  (ver Figura 4.7), como:

$$\delta_{fa} = -\ln \left( \frac{t_{fa}^\infty - t_{fa}^f}{t_{fa}^\infty - t_{fa}^u} \right) \frac{C_{fa}}{C_{fa} [\phi_a]^u - t_{fa}^u} \quad (4.36)$$

### Momento flector

Para el momento flector distribuido se adopta una ley elasto-plástico con endurecimiento lineal y carga límite,  $t_{m\pi}^u$ , o endurecimiento exponencial, como el descrito en el caso de la carga normal distribuida. Los elementos a definir en este modelo son: la carga última, la carga de fluencia, el salto de giros último y el salto de giros de fluencia.

La rigidez inicial elástica de la curva se adopta en función del modelo que se esquematiza en la Figura 4.5 (d), ya la que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} C_{m\pi} &= \frac{t_{m\pi}}{[\phi_\pi]} \\ C_{m\pi} &= \frac{G_i \pi D_p^2}{8 h_i} \end{aligned} \quad (4.37)$$

La carga distribuida de momento flector último,  $t_{m\pi}^u$ , se adopta en función de la fricción última capaz de desarrollarse en la piel del pilote,  $f_{su}$ , como sigue:

$$t_{m\pi}^u = \frac{D_p^2 \pi f_{su}}{4} \quad (4.38)$$

donde  $f_{su}$  se definió en el caso axial.

Al igual que en los casos anteriores, la carga de fluencia,  $t_{m\pi}^f$ , se adopta como una fracción de la carga última,  $t_{m\pi}^u$ , en función del parámetro  $a_f$ . Esta relación se escribe como:

$$t_{m\pi}^f = a_f t_{m\pi}^u \quad (4.39)$$

El giro último,  $[[\phi_\pi]]^u$ , se calcula en función del desplazamiento relativo en la piel del pilote cuando se alcanza la resistencia a fricción última, la que se estima en función de las curvas  $t - z$  para pilotes excavados como un 0.5 % del  $D_p$ . De esta forma, el giro en cinemática de viga para verificar un desplazamiento en la piel del pilote de 0.5 % del  $D_p$  se calcula como:

$$[[\phi_\pi]]^u = \frac{0.005 D_p}{D_p/2} = 0.01 \quad (4.40)$$

El salto de giros para la carga de fluencia se calcula como:

$$[[\phi_\pi]]^f = \frac{t_{m\pi}^f}{C_{\phi\pi}} \quad (4.41)$$

En el modelo de endurecimiento lineal se define el Módulo Plástico,  $H_{m\pi}$  (ver Figura 4.8), como:

$$H_{m\pi} = \frac{C_{m\pi} (t_{m\pi}^u - t_{m\pi}^f)}{C_{m\pi} [[\phi_\pi]]^u - t_{m\pi}^u} \quad (4.42)$$

En el modelo de endurecimiento exponencial se define el coeficiente,  $\delta_{m\pi}$  (ver Figura 4.4), como:

$$\delta_{m\pi} = -\ln \left( \frac{t_{m\pi}^\infty - t_{m\pi}^f}{t_{m\pi}^\infty - t_{m\pi}^u} \right) \frac{C_{m\pi}}{C_{m\pi} [[\phi_\pi]]^u - t_{m\pi}^u} \quad (4.43)$$

## Momento torsor

Para el momento torsor distribuido se adopta una ley constitutiva elástica lineal con una rigidez constante  $C_{mt}$ , la que se adopta en función del esquema de la Figura 4.5 (c) y se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{mt} &= \frac{\gamma_i G_i R_p \pi D_p}{[[\phi_3]]} \\ C_{mt} &= \frac{\left( \frac{[[\phi_3]] R_p}{h_i D_p} \right) G_i R_p \pi D_p}{[[\phi_3]]} \\ C_{mt} &= \frac{G_i \pi D_p^2}{4 h_i} \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde  $G_i$  es el Módulo de Corte de la interfaz y  $h_i$  es el espesor ficticio de la interfaz relativo al diámetro del pilote  $D_p$ .

Luego los esfuerzos de torsión se expresan como:

$$t_{mt} = C_{mt} [[\phi_3]] \quad (4.45)$$

## 4.4 Fuerzas de interacción en cinemática de sólidos

### 4.4.1 Cinemática del elemento embebido con interfaz no-lineal

En la Figura 4.9 se muestra un esquema de las variables cinemáticas utilizadas cuando se considera que las fuerzas de interacción no-lineales se aplican sobre la superficie de interacción entre el

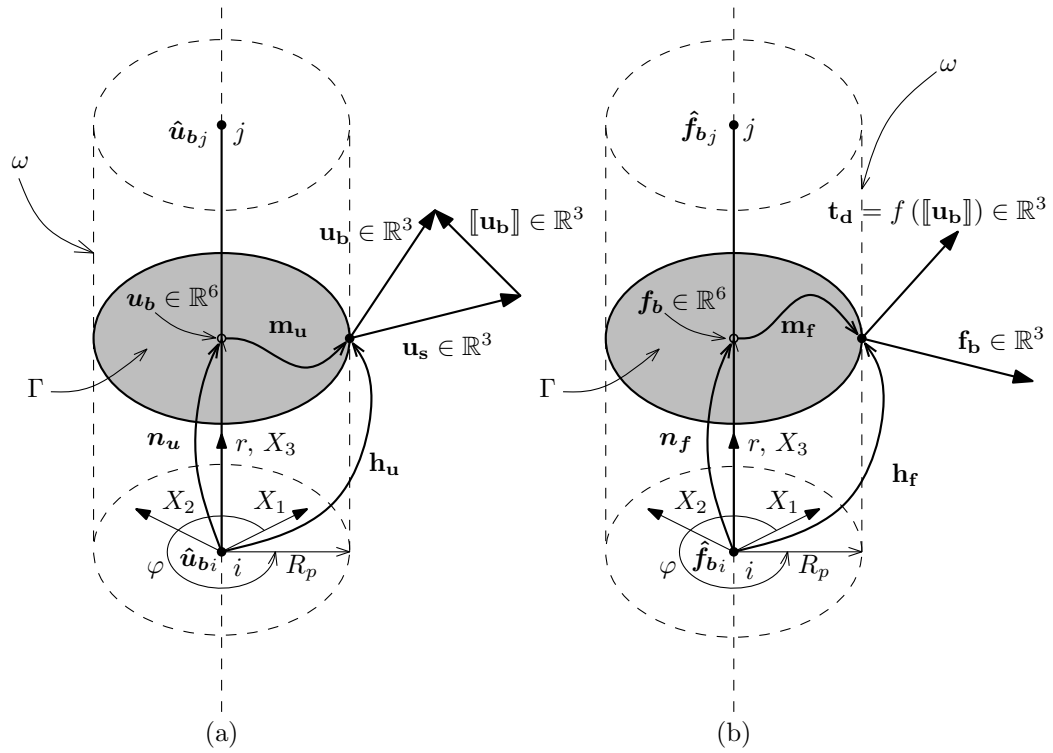


Figura 4.9: (a) Definición del salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b]]$  en cinemática de sólidos y (b) Fuerzas de interacción modeladas en función del salto de desplazamientos.

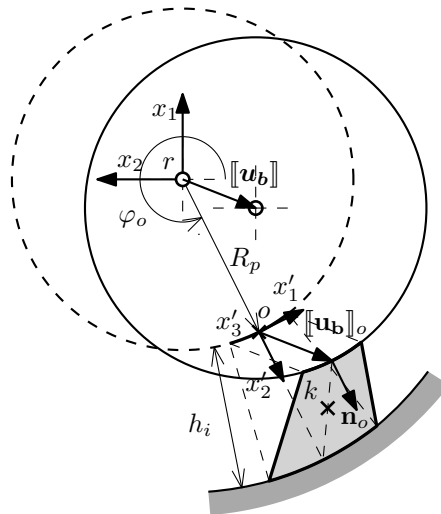


Figura 4.10: Definición del salto de desplazamientos en el punto  $o$  asociado al punto para evaluación de tensiones  $k$  en el sólido para un pilote circular. Vista de la sección transversal del pilote.

pilote y el suelo. A diferencia del caso anterior, en este caso no es necesario hacer un tratamiento especial de la cinemática del modelo de interfaz, ya que son las propias funciones de mapeo  $\mathbf{h}_u$  y  $\mathbf{h}_f$  las encargadas de mapear cinemáticas y fuerzas de interacción entre la superficie del pilote y el eje del mismo, respectivamente.

En este caso es necesario definir las fuerzas disipativas no-lineales de interacción,  $\mathbf{t}_d \in \mathbb{R}^3$ , que se muestran en la Figura 4.9, en función del salto de desplazamiento,  $[[\mathbf{u}_b]]$ , a través de la adopción de un modelo constitutivo de sólido que capture la plasticidad que se desarrolla en el entorno del pilote.

Para ello se considera que el salto de desplazamientos se verifica entre el campo de desplazamientos en la superficie de interacción y una superficie ficticia ubicada a una distancia ficticia  $h_i$  (Figura 4.10), sobre la que se asume que los desplazamientos son nulos. De esta manera se define un anillo de suelo que rodea al pilote, modelado constitutivamente con un material elasto-plástico, y que tiene por fin capturar principalmente las deformaciones plásticas del suelo.

Luego, se infiere el tensor de deformaciones en el suelo y con ello se calcula el tensor de tensiones a través del modelo constitutivo. Con este tensor de tensiones se calcula luego el vector de tensiones aplicado a la superficie de interacción, utilizando la normal en cada punto. De esta manera se definen las fuerzas disipativas no-lineales de interacción  $\mathbf{t}_d \in \mathbb{R}^3$ .

En la Figura 4.10 se muestra la sección transversal de un pilote de sección circular, junto con el sistema de ejes locales de referencia  $x_1, x_2, r$ , donde en el punto  $o$ , de coordenadas cilíndricas  $\phi_o, R_p$ , sobre la superficie de interacción se define una terna superficial  $x'_1, x'_2, x'_3$ , la que se usa para definir las componentes normales y tangenciales del salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b]]_o$ . La transformación entre las dos ternas de referencia se realiza a través de la matriz de rotación  $\mathbf{Q}$ , la que para el punto  $o$  se define como:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_o \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_o & \sin \phi_o & 0 \\ \sin \phi_o & -\cos \phi_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ r \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

El vector de salto de desplazamiento en la superficie de interacción  $[[\mathbf{u}_b]]$  se expresa a través de la Ecuación 3.7, y el mismo es transformado a coordenadas superficiales de la siguiente forma:

$$[[\mathbf{u}'_b]]_o = \mathbf{Q}_o [[\mathbf{u}_b]]_o \quad (4.47)$$

En este caso el vector normal a la superficie de interacción  $\mathbf{n}_o$  coincide con  $x'_2$ .

En este trabajo se asume que el gradiente de desplazamientos en el volumen de suelo comprendido entre las dos superficies mencionadas anteriormente es constante. Utilizando esta hipótesis, se puede definir el tensor de deformaciones en el punto  $k$ ,  $\varepsilon_{ik}$ , como la suma de una componente inicial o de reposo más una componente producto del salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}'_b]]$ . Esto queda expresado como:

$$\varepsilon_{ik} = -\frac{\gamma_s z}{E_i(1-2\nu_i)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{[[\mathbf{u}'_b]]_o \otimes \mathbf{n}_o}{h_i} \quad (4.48)$$

#### 4.4.2 Ley constitutiva para las fuerzas de interacción

En este punto se debe introducir el modelo constitutivo para el material elasto-plástico del suelo en la interfaz, el que vincula el tensor de deformaciones  $\varepsilon_i$  con el tensor de tensiones  $\sigma_i$ , para el que se pueden elegir diversos modelos en función de los aspectos que se intenten capturar con dicho modelo constitutivo. En este trabajo, y a modo de ejemplo, se implementa un modelo constitutivo tipo Cam Clay Modificado (CCM) como el descrito en [36], el que se asocia a materiales friccionales en análisis drenados, con el objeto de capturar la plastificación de los puntos con trayectorias hidrostáticas de deformaciones, además de los puntos que plastifican con trayectorias de deformaciones desviadoras. Además se implementa el modelo de plasticidad J2 para modelar la condición no-drenada, típicamente el caso de arcillas saturadas a corto plazo. En el Anexo C se describen de forma breve estos modelos constitutivos.

En estos modelos constitutivos se adopta un módulo de endurecimiento lineal y plasticidad asociada.

Se calcula el vector de tensiones disipativas en el punto  $o$ ,  $\mathbf{t}'_{do}$ , en coordenadas locales  $x'_1, x'_2, r'$ , utilizando el tensor de tensiones en el punto  $k$ ,  $\sigma_{ik}$  (ver Figura 4.10) para lo que se procede como:

$$\mathbf{t}'_{do} = \sigma_{ik} \cdot \mathbf{n}_o = \mathbf{C}^{ep} : \varepsilon_{ik} \cdot \mathbf{n}_o \quad (4.49)$$

Luego, el vector de fuerzas disipativas de interacción  $\mathbf{t}_d$  en el punto  $o$  de la superficie de interacción  $\omega$ , que se necesita para evaluar la expresión Ecuación 4.6, se calcula a través de la matriz de rotación  $\mathbf{Q}$  como:

$$\mathbf{t}_d = \mathbf{Q}_o^T \mathbf{t}'_{do} \quad (4.50)$$

De esta forma se ha calculado el vector de fuerzas disipativas en la superficie de interacción.

## 4.5 Implementación numérica

### 4.5.1 Rigidez tangente de la interfaz no-lineal

La rigidez tangente del sistema de ecuaciones,  $\mathbf{K}_t$ , necesaria para la resolución iterativa del problema en un esquema clásico de Newton-Raphson, se halla derivando el sistema de ecuaciones 4.10 respecto a las variables  $\hat{\mathbf{U}}_s, \hat{\mathbf{U}}_b$ , respectivamente, con lo que se consigue una matriz de

rigidez con la forma siguiente:

$$\mathbf{K}_t = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_s - \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} & -\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} \\ \hline \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} & \mathbf{K}_b + \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} \end{array} \right) \quad (4.51)$$

Como se demostrará en la sección siguiente, esta matriz de rigidez resulta simétrica.

Debido a que el vector de fuerzas disipativas  $\mathbf{T}_d$  se pueden expresar en, i) cinemática de vigas o ii) cinemática de sólidos, las derivadas de este respecto a las variables  $\hat{\mathbf{U}}_s$  y  $\hat{\mathbf{U}}_b$  se deben considerar en la cinemática correspondiente, por lo que a continuación se presentan los detalles de cada una de esas posibilidades.

i) Fuerzas de interacción en cinemática de vigas

Recordando la definición del vector de fuerzas disipativas  $\mathbf{T}_d$  de la Ecuación 4.5 y aplicando la regla de la cadena, la derivada respecto a  $\hat{\mathbf{U}}_s$  se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} &= \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \frac{\partial [[\mathbf{u}_b]]}{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]} \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \frac{\partial [[\mathbf{u}_b]]}{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]} dl_p \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \frac{\partial (\mathcal{P}^T \mathbf{t}_d^*)}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{n}_u dl_p \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \left( \frac{\partial \mathcal{P}^T}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{t}_d^* + \mathcal{P}^T \frac{\partial \mathbf{t}_d^*}{\partial [\mathbf{u}_b]} \right) \mathbf{n}_u dl_p \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \left( \frac{\partial \mathcal{P}^T}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{t}_d^* + \mathcal{P}^T \frac{\partial \mathbf{t}_d^*}{\partial [\mathbf{u}_b^*]} \frac{\partial [[\mathbf{u}_d^*]]}{\partial [\mathbf{u}_b]} \right) \mathbf{n}_u dl_p \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \left( \frac{\partial \mathcal{P}^T}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{t}_d^* + \mathcal{P}^T \mathbf{C}_d \frac{\partial (\mathcal{P} [[\mathbf{u}_d]])}{\partial [\mathbf{u}_b]} \right) \mathbf{n}_u dl_p \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{P}^T}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{t}_d^* + \mathcal{P}^T \mathbf{C}_d \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial [\mathbf{u}_b]} [[\mathbf{u}_d]] + \mathcal{P} \mathbf{I} \right) \right)}_{\mathbf{k}_d} \mathbf{n}_u dl_p \frac{\partial [[\hat{\mathbf{U}}_b]]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\ &= - \underbrace{\mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \mathbf{k}_d \mathbf{n}_u dl_p}_{\mathbf{K}_d} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \\ \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} &= -\mathbf{K}_d \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (4.52)$$

donde,  $\mathbf{K}_d$ , es la rigidez introducida por las fuerzas disipativas  $\mathbf{t}_d$  y  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de tamaño  $\text{GDLV} \times \text{GDLV}$ , donde GDLV son el número de grados de libertad de vigas. En el Anexo B se desarrolla la derivada del operador de proyección  $\mathcal{P}$  respecto  $[[\mathbf{u}_b]]$ .

De forma similar, la derivada respecto a  $\hat{\mathbf{U}}_b$  queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} &= \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \frac{\partial [\mathbf{u}_b]}{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]} \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} \\
&= \mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \frac{\partial (\mathcal{P}^T \mathbf{t}_d^*)}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{n}_u \, dl_p \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} \\
&= \underbrace{\mathbf{A} \int_{l_p}^{e=N_b} \mathbf{n}_u^T \mathbf{k}_d \mathbf{n}_u \, dl_p}_{\mathbf{K}_d} \mathbf{I} \\
\frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} &= \mathbf{K}_d
\end{aligned} \tag{4.53}$$

ii) Fuerzas de interacción en cinemática de sólidos

Recordando la definición del vector de fuerzas disipativas  $\mathbf{T}_d$  de la Ecuación 4.6 y aplicando la regla de la cadena, la derivada respecto a  $\hat{\mathbf{U}}_s$  se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} &= \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \frac{\partial [\mathbf{u}_b]}{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]} \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\
&= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{h}_u \, d\omega \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\
&= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial [\mathbf{u}_b]} \cdot \mathbf{n} \mathbf{h}_u \, d\omega \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\
&= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial [\mathbf{u}_b]} \cdot \mathbf{n} \mathbf{h}_u \, d\omega \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\
&= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \underbrace{(\mathbf{C}^{ep} : \nabla \otimes \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{k}_d} \mathbf{h}_u \, d\omega \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} \\
&= - \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \mathbf{k}_d \mathbf{h}_u \, d\omega}_{\mathbf{K}_d} \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \\
\frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_s} &= -\mathbf{K}_d \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T
\end{aligned} \tag{4.54}$$

De forma similar, la derivada respecto a  $\hat{\mathbf{U}}_b$  queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} &= \frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \frac{\partial [\mathbf{u}_b]}{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]} \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} \\
&= \mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}_d}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{h}_u \, d\omega \frac{\partial [\hat{\mathbf{U}}_b]}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} \\
&= \underbrace{\mathbf{A} \int_{\omega}^{e=N_b} \mathbf{h}_u^T \mathbf{k}_d \mathbf{h}_u \, d\omega}_{\mathbf{K}_d} \mathbf{I} \\
\frac{\partial \mathbf{T}_d}{\partial \hat{\mathbf{U}}_b} &= \mathbf{K}_d
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Si bien los detalles de la implementación numérica son distintos, las dos formas descritas en este trabajo conducen a expresiones a nivel global del problema de forma similares, para el caso en el cual las fuerzas de interacción disipativas no-lineales se consideren en cinemática de viga o cinemática de sólido, respectivamente.

Finalmente reemplazando la expresión 4.52 y 4.53 (o alternativamente 4.54 y 4.55) en la expresión 4.51 se llega a expresar la matriz de rigidez tangente del sistema,  $\mathbf{K}_t$ , como:

$$\mathbf{K}_t = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{K}_s + \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_d \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}_d \\ \hline -\mathbf{K}_d \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T & \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_d \end{array} \right) \quad (4.56)$$

El sistema que resulta de esta forma es simétrico y acopla fuertemente las variables  $\hat{\mathbf{U}}_b$  y  $\hat{\mathbf{U}}_s$ .



# Capítulo 5

## Validación y ejemplos

En este capítulo se presentan diferentes ejemplos y resultados obtenidos mediante la formulación de los elementos de viga embebidos propuesta. A modo de validación se contrastan los resultados obtenidos con soluciones semi-analíticas, modelos completos 3D, resultados de ensayos a escala real de pilotes o resultados presentados en publicaciones científicas. En estos ejemplos se comentan y discuten las principales ventajas y desventajas del método propuesto.

### 5.1 Ejemplo 1: Pilote vertical en semi-espacio homogéneo

#### 5.1.1 Validación para el caso elástico

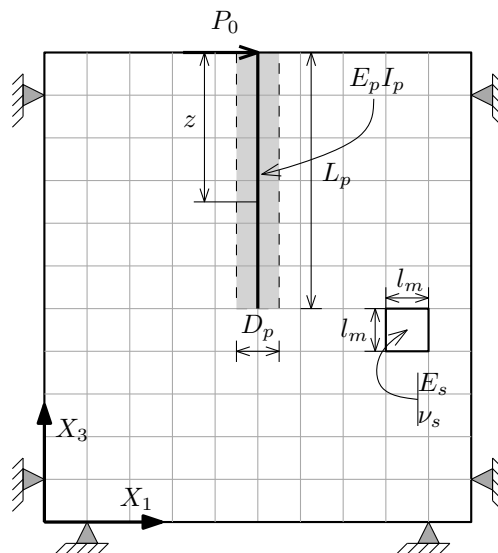


Figura 5.1: Ejemplo 1. Vista lateral del esquema utilizado.

En este ejemplo se presenta el caso de un pilote vertical de sección transversal circular, dispuesto en suelo homogéneo y sometido a carga lateral en la cabeza del mismo, considerando

tanto la formulación clásica de elementos de vigas embebidos como la formulación propuesta dotada de una superficie de interacción entre el suelo y el pilote. Tanto el dominio de suelo como el del pilote están caracterizados por un material elástico, lineal, isótropo y homogéneo.

Se comparan los resultados de los modelos numéricos con soluciones de referencia, que en este caso son la solución semi-analítica de Randolph y los resultados obtenidos con un modelo completo 3D del problema donde ambos dominios se discretizan mediante elementos finitos de sólidos 3D. En este modelo completo 3D en Abaqus se han usado dos tipos de elementos finitos de sólidos: un elemento bi-lineal de 8 nodos denominado C3D8R y un elemento bi-cuadrático de 20 nodos denominado C3D20, ambos con integración reducida.

Para estudiar la convergencia entre los modelos de elementos finitos que se proponen en esta tesis y los modelos completos 3D en Abaqus se varía el tamaño de malla, de gruesa a fina, con el objeto de contar una solución de referencia en función del tamaño de malla utilizado en el modelo.

En el modelo completo 3D en Abaqus, las tensiones en el dominio del pilote ( $S_{22}$  o  $S_{YY}$ ,

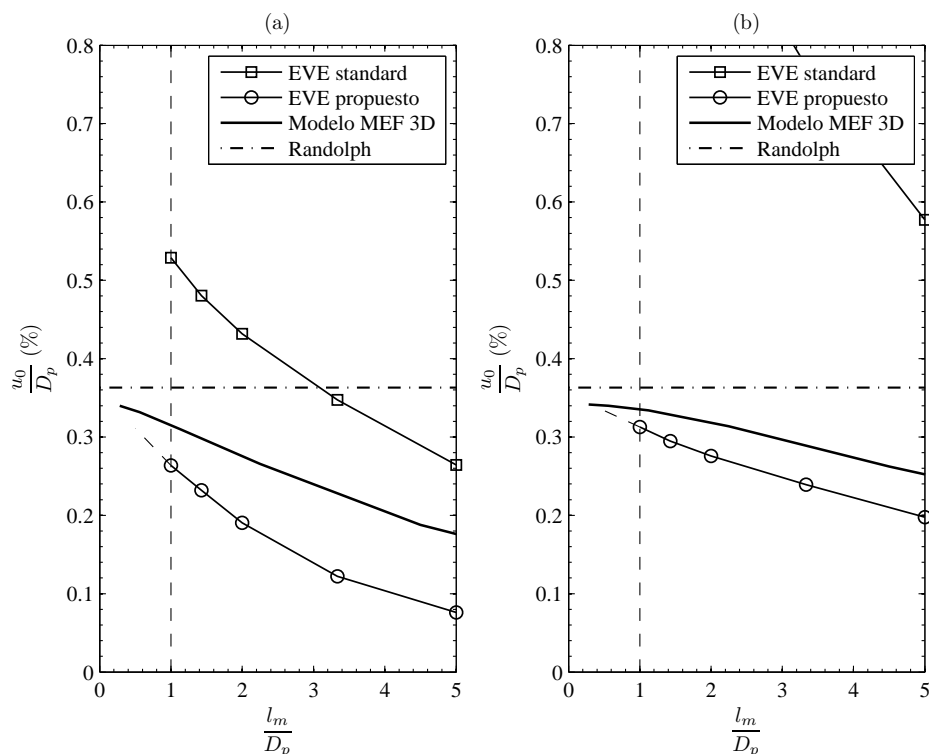


Figura 5.2: Ejemplo 1. Caso elástico. Desplazamiento lateral en la cabeza del pilote,  $u_0$ , para (a) H8B2 y (b) H27B2 EVEs.

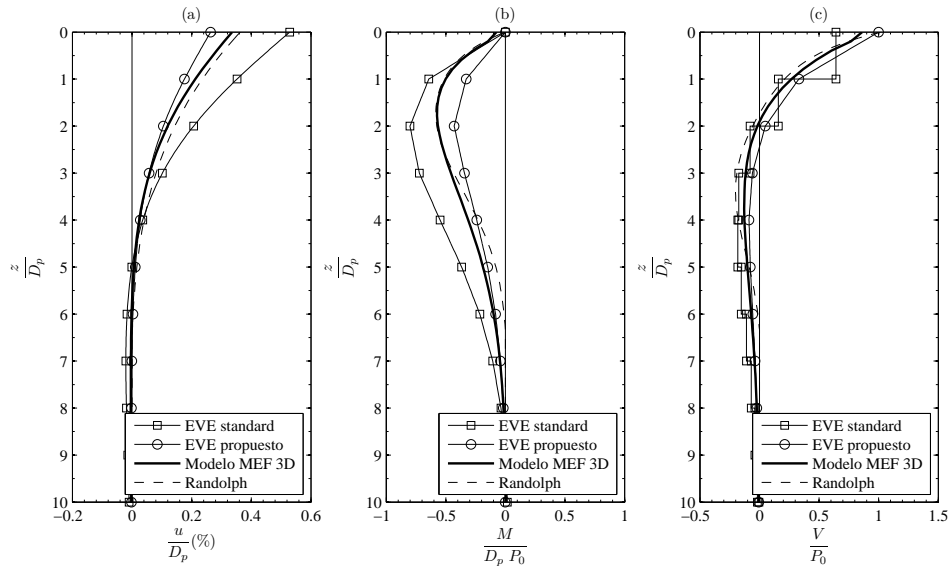


Figura 5.3: Ejemplo 1. Caso elástico. Resultados normalizados para el H8B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u$ , (b) momento flector  $M$  y (c) esfuerzo de corte  $V$ .

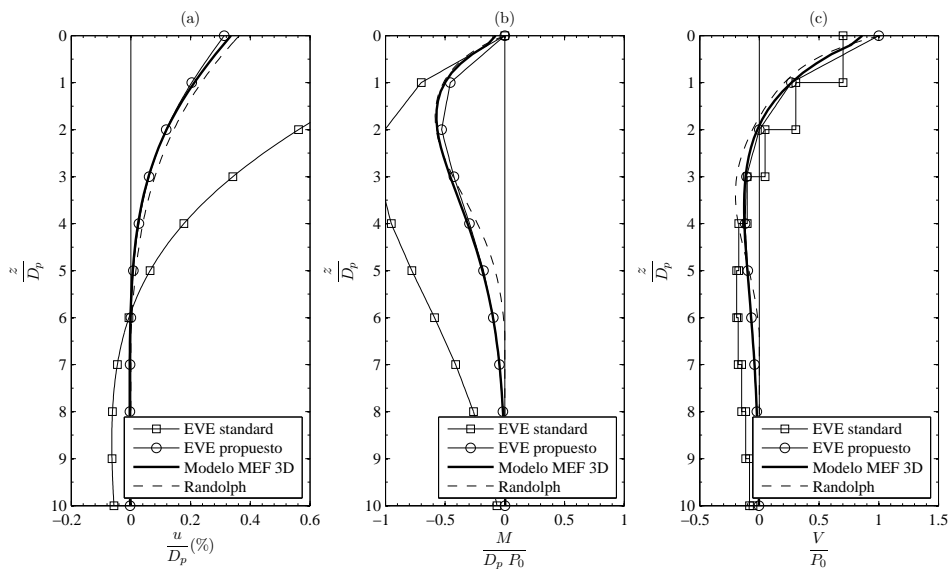


Figura 5.4: Ejemplo 1. Caso elástico. Resultados normalizados para el H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u$ , (b) momento flector  $M$  y (c) esfuerzo de corte  $V$ .

según los ejes globales en el modelo de Abaqus como se muestra en la Figura 5.6) se integran sobre la sección transversal del mismo para obtener los esfuerzos internos correspondientes a los modelos de vigas: momentos flectores, esfuerzos axiales, esfuerzos de corte y momentos torsores.

En el modelo EVE propuesto el suelo se discretiza mediante elementos de sólidos 3D H8 y H27, mientras que el pilote es discretizado mediante elementos de vigas de 2 nodos B2. Por lo tanto, se consideran los elementos embebidos H8B2 y H27B2 en el análisis de la interacción suelo estructura.

Se varía el tamaño de malla desde  $l_m = 5.0 \times D_p$  (gruesa) hasta  $l_m = 1.0 \times D_p$  (fina).

La carga externa,  $P_0$ , se aplica en la superficie del estrato de suelo en la dirección  $+X_1$  (Figura 5.1). Los bordes externos del problema se colocan a una distancia de  $10 \times D_p$  desde el eje del pilote, y en esas superficies se restringen todos los desplazamientos.

En este ejemplo los nodos de sólidos y de vigas son coincidentes como se muestra en la Figura 5.1.

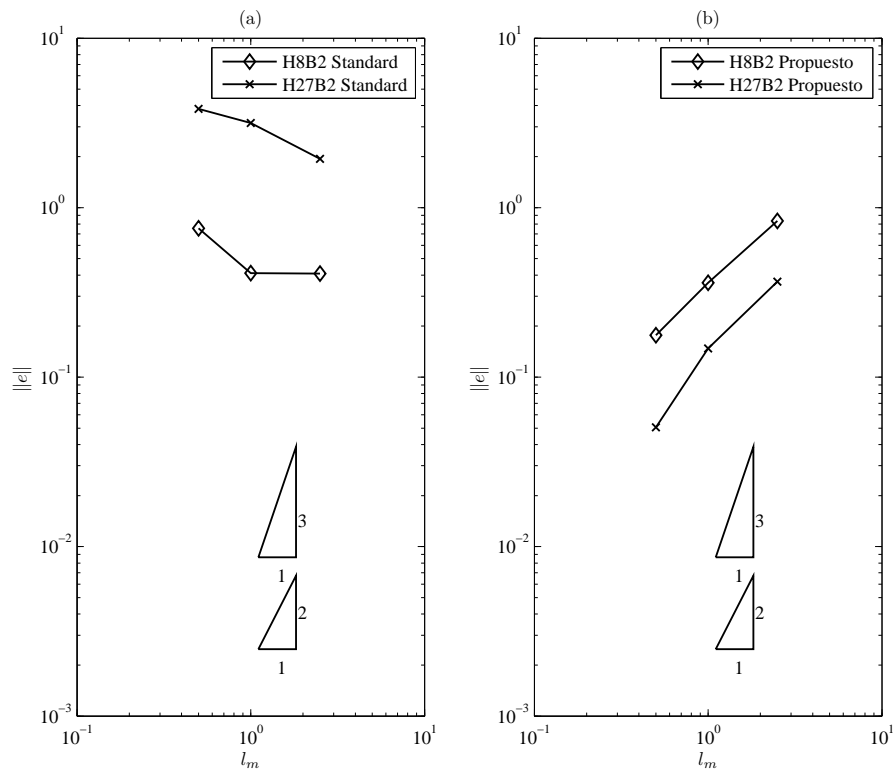


Figura 5.5: Ejemplo 1. Caso elástico. Norma del error relativo  $\|e\|$  vs  $l_m$ . (a) EVE clásico (b) EVE propuesto.

Los parámetros elásticos del suelo considerados para el análisis son: módulo de Young  $E_s = 100$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.33$ . Por otro lado, los parámetros elásticos del pilote son: módulo de Young  $E_p = 30000$  MPa,  $\nu_p = 0.30$  (en el modelo completo 3D),  $D_p = 0.50$  m,  $L_p = 10.00$  m. El significado de estos parámetros se muestra en la Figura 5.1.

En la Figura 5.2 se muestra la convergencia en los modelos de vigas embebidos. Se puede ver que la formulación estándar no converge a las soluciones de referencia para tamaños de malla decrecientes, tanto para el H8B2 ni el H27B2. La falta de convergencia en la formulación estándar se debe a que la misma no representa adecuadamente la física del problema, ya que en límite de tamaños de malla tendiendo a cero, ésta representa una carga de línea aplicada en un medio sólido semi-infinito, la que genera tensiones y deformaciones infinitas en el entorno de la carga de línea. Por lo tanto es esperable que los desplazamientos en la cabeza del pilote no converjan a las soluciones de referencia cuando decrece el tamaño de malla  $l_m$ .

En la misma figura se muestra el comportamiento de la formulación propuesta con superficie de interacción, donde se puede ver que la misma converge a las soluciones de referencia cuando decrece el tamaño de malla  $l_m$ .

Cabe aclarar en este punto que la formulación propuesta se comporta un poco más rígidamente que el modelo 3D. Probablemente esto se deba a que esta última tiene en cuenta las deformaciones de corte.

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestran los resultados normalizados: desplazamientos laterales  $u$ , momentos flectores  $M$  y esfuerzos de corte  $V$ , en función de la profundidad normalizada,  $z/D_p$ , para las formulaciones propuesta y estándar junto con las soluciones de referencia y para la malla más fina utilizada.

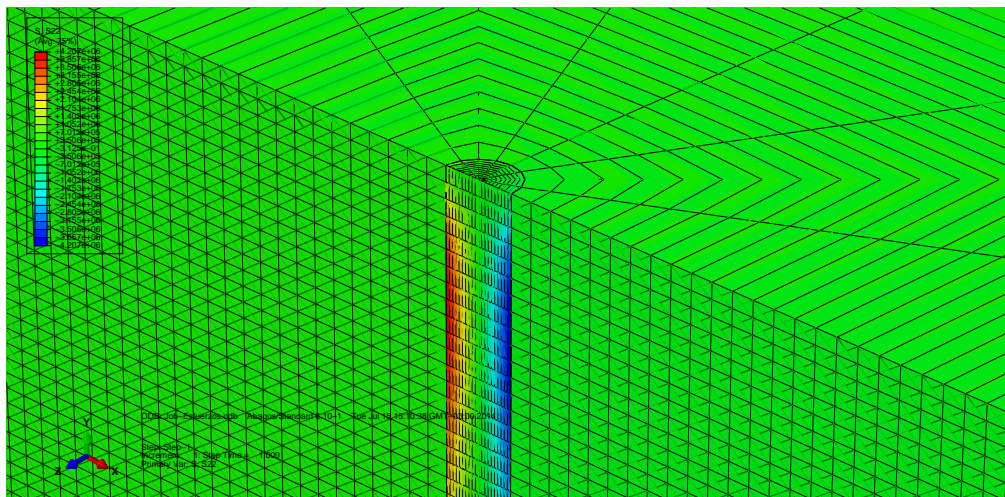
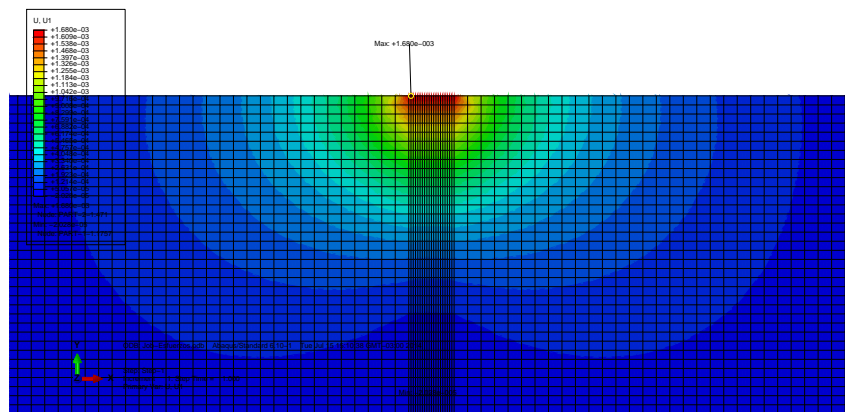


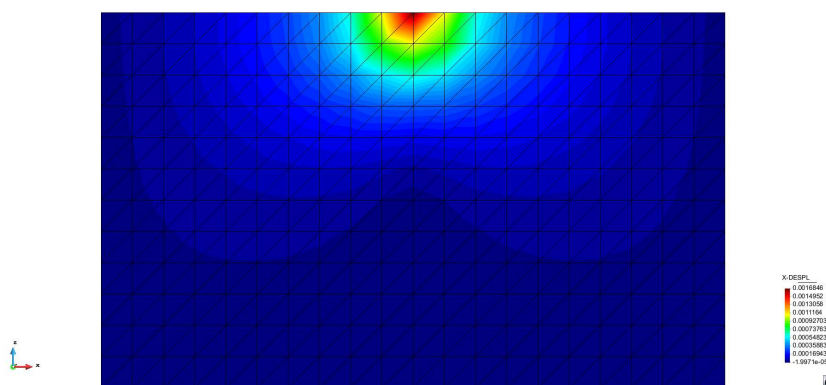
Figura 5.6: Ejemplo 1. Caso elástico. Tensión normal  $S_{22}$  en el modelo de Abaqus ( $S_{YY}$  según los ejes globales) para el elemento C3D8R que se integra en la sección transversal para hallar los esfuerzos en el modelo de vigas.

Se puede ver que la formulación estándar arroja una deflexión lateral que no converge a las soluciones de referencia. El momento flector y el esfuerzo de corte obtenidos con la formulación estándar son mayores a los obtenidos con la solución de Randolph y el modelo completo 3D. Esto es particularmente notorio en el caso del elemento embebido H27B2, el que considera funciones de interpolación bi-cuadráticas en el sólido y un elemento de viga de 2 nodos, como puede observarse en la Figura 5.4.

En contraposición, los momentos flectores y los esfuerzos de corte obtenidos con la formulación propuesta con superficie de interacción convergen a las soluciones de referencia para tamaños de malla tendiendo al diámetro del pilote. Esto se observa para los dos elementos analizados, el H8B2 y el H27B2. Los resultados obtenidos con el elemento H27B2 muestran un ajuste muy bueno con las soluciones de referencia.



(a)



(b)

Figura 5.7: Ejemplo 1. Caso elástico. Desplazamiento lateral  $U_1$  (a) Modelo completo en Abaqus ( $U_X$  según los ejes globales) para el elemento C3D8R y (b) Modelo EVE propuesto en GID.

Para estudiar la tasa de convergencia se define la norma del error relativo  $\|e\|$  como:

$$\|e\| = \frac{\int_0^{L_p} \sqrt{(u_{ref} - u)^2} dz}{\int_0^{L_p} \sqrt{(u_{ref})^2} dz} \quad (5.1)$$

donde  $u_{ref}$  es el desplazamiento lateral en el modelo 3D de Abaqus para la malla más fina utilizada,  $u$  es el desplazamiento lateral obtenido con la formulación propuesta, y  $L_p$  es el largo del pilote (Figura 5.1).

La Figura 5.5 muestra la norma del error relativo para los elementos embebidos H8B2 y H27B2, considerando la formulación estándar y la propuesta. Se puede ver que la norma del error relativo  $\|e\|$  en la formulación estándar no disminuye cuando el tamaño de malla tiende al diámetro del pilote para ambos elementos embebidos. Por otro lado, la norma del error relativo en la formulación propuesta tiende a cero cuando el tamaño de malla tiende al diámetro del pilote. Además, la tasa de convergencia es mayor y el error relativo es menor para los elementos H27B2 que para los H8B2.

En la Figura 5.7 se muestran los desplazamientos laterales  $U_1$  obtenidos en (a) el modelo completo 3D en Abaqus y (b) el modelo EVE propuesto para el elemento H27B2, donde se vé que tanto el patrón de desplazamientos en el suelo como el valor y ubicación de los máximos desplazamientos laterales concuerdan en buena forma. Esta es una consecuencia de haber incorporado la superficie de interacción finita entre ambos dominios, lo que permite no sólo evaluar correctamente las cargas distribuidas sobre los elementos de vigas, sino también evaluar las cargas de interacción y el lugar donde se aplican en el problema de sólidos. Es por ello que el patrón de desplazamientos entre ambos modelos concuerda de esa forma.

### 5.1.2 Validación para el caso elasto-plástico

Se presentan a continuación los resultados obtenidos al modelar un pilote vertical de sección circular dispuesto en un suelo friccional con incremento de rigidez lineal (ver Figura 5.1). En este caso, se utiliza la formulación propuesta de los elementos de viga embebidos con la interfaz de plasticidad concentrada.

Se comparan estos resultados con los obtenidos con una rutina que implementa el método de las curvas  $p - y$ , en la cual se utilizan las curvas para arenas propuestas por Reese [50].

Los parámetros que caracterizan el modelo constitutivo del suelo son: módulo de Young con incremento lineal en profundidad  $E_s = 14.42 \text{ MN/m}^3 \times z$ , coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.25$ ,  $\gamma_s = 16 \text{ kN/m}^3$ ,  $\phi_s = 32^\circ$ , incremento en profundidad del módulo de reacción en el modelo  $p - y$   $m_h = 60 \text{ MPa/m}$ , parámetros del modelo Cam Clay Modificado (CCM)  $\beta = 0.70$ ,  $p_t \approx 0$ ,  $p_c = -\gamma_s z$ ,  $M_c = \frac{6 \sin(\phi_s)}{3 - \sin(\phi_s)} = 1.287$ ,  $H = 0.20$ ,  $h_i = 0.10$ . Las propiedades mecánicas y geométricas del pilote son:  $E_p = 30000 \text{ MPa}$ ,  $L_p = 15.00 \text{ m}$ ,  $D_p = 0.50 \text{ m}$ .

En la Figura 5.8 (a) se muestra la deformación lateral sobre el eje del pilote, la que evidencia un buen acuerdo entre la respuesta del modelo numérico propuesto y la respuesta hallada mediante las curvas  $p - y$ , tanto para la formulación de la interfaz en cinemática de vigas como en cinemática de sólidos (en la Figura 5.8 PY y CC, respectivamente). Se puede ver que los elementos EVE H8B2-PY y H27B2-PY (en línea llena) producen una respuesta ligeramente más flexible que los elementos EVE H8B2-CC y H27B2-CC (en línea de trazos).

En las Figura 5.8 (b) y (c) se muestran los esfuerzos internos (momentos flectores y esfuerzo de corte) los que muestran un buen acuerdo entre la solución numérica propuesta y la hallada mediante las curvas  $p - y$ . En este caso los elementos EVE H8B2-CC y H27B2-CC producen esfuerzos máximos mayores a los obtenidos con los elementos EVE H8B2-PY y H27B2-PY.

En la Tabla 5.1 se muestran los valores máximos y su posición relativa para los diferentes elementos y formulaciones de la interfaz plástica.

En la Figura 5.9 se muestran los desplazamientos en la cabeza del pilote para los distintos escalones de carga. Se puede ver que la respuesta numérica del modelo propuesto, tanto para los elementos H8B2 como para los H27B2, en el rango inicial de deformaciones es tangente a la respuesta elástica (línea de trazos). A medida que la carga externa crece se desarrollan deformaciones plásticas en la interfaz. La respuesta global del problema es ligeramente más rígida que la obtenida con el modelo de las curvas  $p - y$  propuestas por Reese, en la zona de

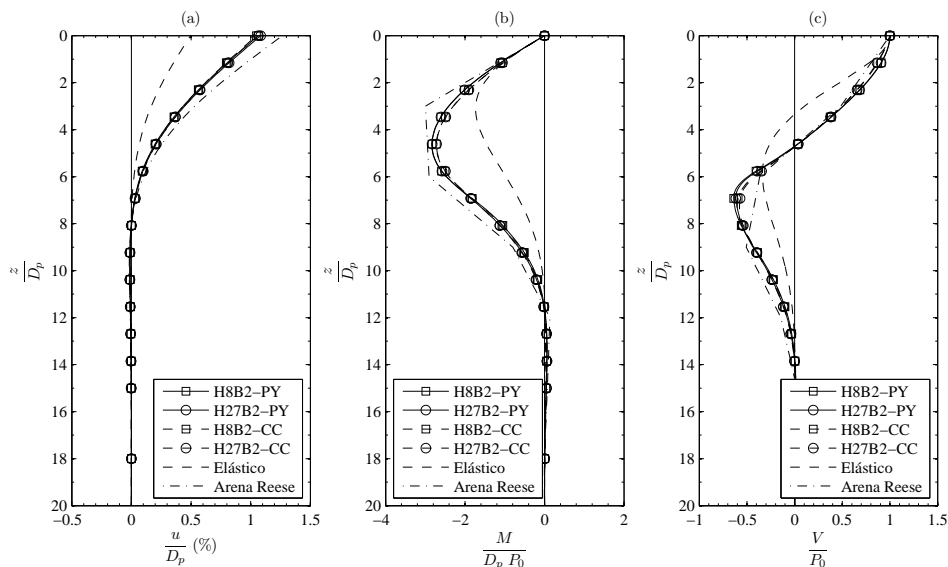


Figura 5.8: Ejemplo 1. Caso elasto-plástico. Resultados normalizados para los elementos H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u$ , (b) momento flector  $M$  y (c) esfuerzo de corte  $V$ .



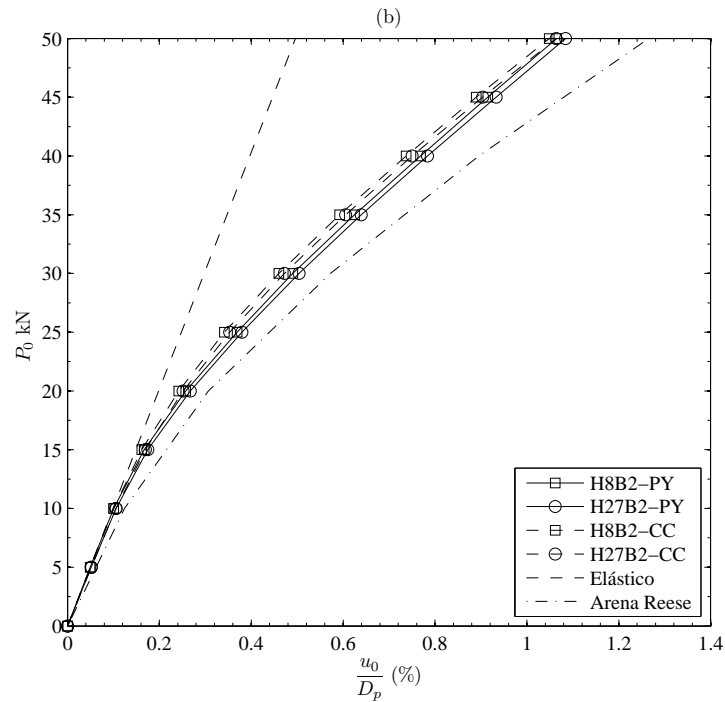


Figura 5.9: Exemplo 1. Caso elasto-plástico. Deslocamento na cabeça do pilote vs. carga externa aplicada.

deformações posteriores a las iniciales, pero en general el acuerdo entre las dos es muy bueno. La respuesta obtenida con los elementos EVE H8B2-CC y H27B2-CC se acerca más a la respuesta obtenida con el modelo de las curvas  $p - y$ , para el rango final de cargas modeladas en este problema.

Elemento	$\frac{u_0}{D_p}$	$\frac{M_{max}}{D_p P_0}$	$\frac{z_{Mmax}}{D_p}$	$\frac{V_{max}}{P_0}$	$\frac{z_{Vmax}}{D_p}$
H8B2-PY	1.065	-2.835	4.615	-0.639	6.923
H27B2-PY	1.084	-2.829	4.615	-0.616	6.923
H8B2-CC	1.049	-2.722	4.712	-0.602	7.212
H27B2-CC	1.064	-2.715	4.712	-0.578	7.212

Tabla 5.1: Exemplo 1. Caso elasto-plástico. Desplazamientos máximos en superficie y esfuerzos internos.

## 5.2 Ejemplo 2: Pilote inclinado en semi-espacio elástico

### 5.2.1 Validación para el caso elástico

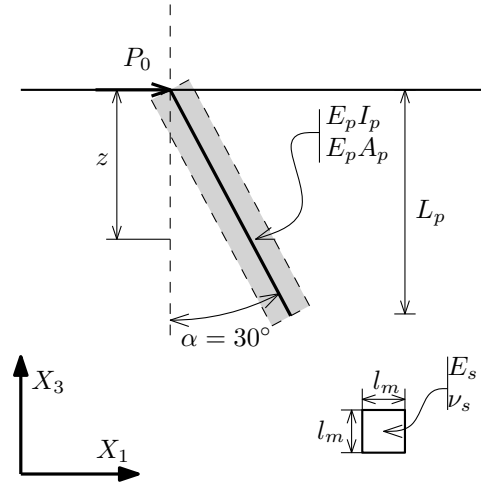


Figura 5.10: Ejemplo 2. Vista lateral del esquema.

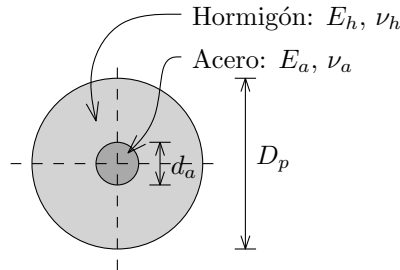


Figura 5.11: Ejemplo 2. Esquema de la sección transversal utilizada en el modelo 3D del pilote inclinado.

Se modela en este caso el ejemplo presentado por Sadek y Shahrour en [57] de un micro-pilote inclinado en un estrato homogéneo de suelo, sometido a carga lateral en la cabeza del mismo. Los parámetros adoptados en ese ejemplo para el suelo son:  $E_s = 100$  MPa,  $\nu_s = 0.33$ , mientras que para el micro-pilote se informan los siguientes parámetros para el modelo de vigas:  $E_p I_p = 0.8925$  MNm<sup>2</sup>,  $E_p A_p = 1155.2$  MN,  $D_p = 0.25$  m,  $L_p = 5.00$  m.

Con el fin de contar con una solución de referencia para el problema, se genera un modelo en Abaqus del problema completo 3D, discretizado mediante elementos de sólidos. En este caso se utilizan elementos tipo brick C3D8R (8 nodos lineales, integración reducida, control de hourglass) para el micro-pilote y C3D4 (tetrahedro de 4 nodos lineales) para el sólido. Se utilizan los elementos tetrahédricos porque con ellos es más simple generar la malla no estructurada en el entorno del pilote.

En la Figura 5.12 se muestra un corte vertical de la malla utilizada en este modelo, junto con

los diferentes materiales asociados al suelo y al micro-pilote, el cual se modela como un núcleo o barra de acero rodeado por hormigón.

Debido a que en el trabajo de Sadek y Shahrour solo se informan los valores de rigideces axiales y flexionales para los micro-pilotes ( $E_p A_p$  y  $E_p I_p$ , respectivamente), y con el fin de modelar la estructura 3D, se genera una sección transversal que respeta las rigideces informadas para el modelo de vigas. Para ello se adoptan los siguientes parámetros de acuerdo a la Figura 5.11; Acero:  $E_a = 2.1 \times 10^5$  MPa,  $\nu_a = 0.3$ ,  $d_a = 0.08$  m; Hormigón:  $E_h = 2256$  MPa,  $\nu_h = 0.3$ ,  $D_p = 0.25$  m.

En el modelo completo 3D las tensiones en el dominio del pilote se integran sobre la sección transversal para obtener los esfuerzos internos correspondientes a los modelos de vigas: momentos flectores, esfuerzos axiales, esfuerzos de corte y momentos torsores.

Se aplica una carga externa  $P_0 = 50$  kN, como una fuerza distribuida en la sección transversal del núcleo de acero a nivel del suelo en sentido horizontal  $+X$ .

En la Figura 5.13 se muestran los resultados normalizados en el pilote para el EVE propuesto con los elementos H8B2 y H27B2, la solución informada por Sadek y Shahrour y la respuesta calculada en el modelo completo 3D.

En la Figura 5.13(a) se puede ver que los desplazamientos laterales adimensionales  $\frac{u}{D_p}$ , tanto en la formulación EVE propuesta como en el modelo completo 3D, son significativamente menores<sup>1</sup> a los informados en [57], existiendo un buen acuerdo entre el modelo 3D y el modelo EVE propuesto.

Otro aspecto a remarcar es que el modelo propuesto por Sadek y Shahrour predice un desplazamiento lateral casi uniforme de la porción inferior del pilote, hecho que no se observa en los

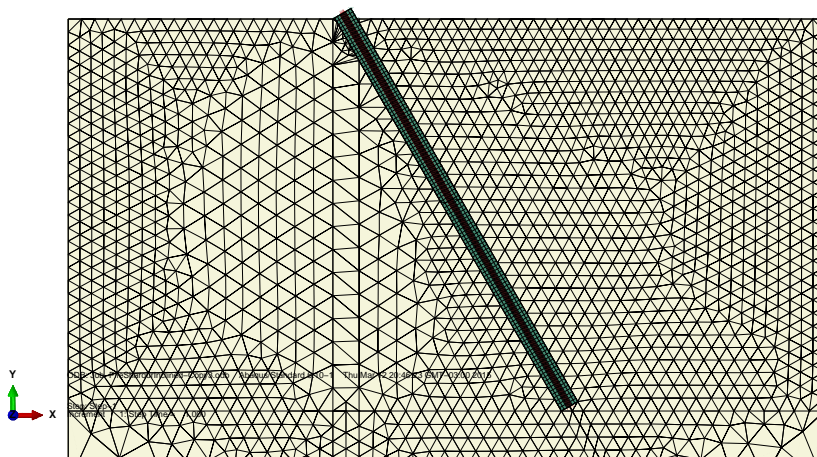


Figura 5.12: Ejemplo 2. Vista lateral del corte de la malla por el centro del micro-pilote inclinado. En diferentes colores se muestran los diferentes materiales.

<sup>1</sup> del orden de 25 % del desplazamiento informado en la cabeza del pilote para el modelo completo 3D

modelos EVE propuestos y el modelo completo 3D.

En la Figura 5.13(b) y Figura 5.13(c) se muestran los esfuerzos axiales normalizados  $\frac{N}{P_0}$  y el esfuerzo de corte normalizado  $\frac{V}{P_0}$ , respectivamente, donde se ve que los esfuerzos estimados con la formulación EVE propuesta acuerdan con los estimados en el modelo 3D de Abaqus y en el modelo propuesto por Sadek y Shahrour.

Si bien en la cabeza del pilote el acuerdo en el esfuerzo de corte y el esfuerzo axial se debe a que se verifica una condición de equilibrio con la carga externa, la variación en profundidad es diferente entre ambos modelos, donde se ve que los resultados obtenidos con la formulación EVE propuesta captura de mejor manera los resultados del modelo completo 3D, lo que se ve reflejado en los valores máximos que se predicen y la ubicación de éstos. En este sentido, es significativo

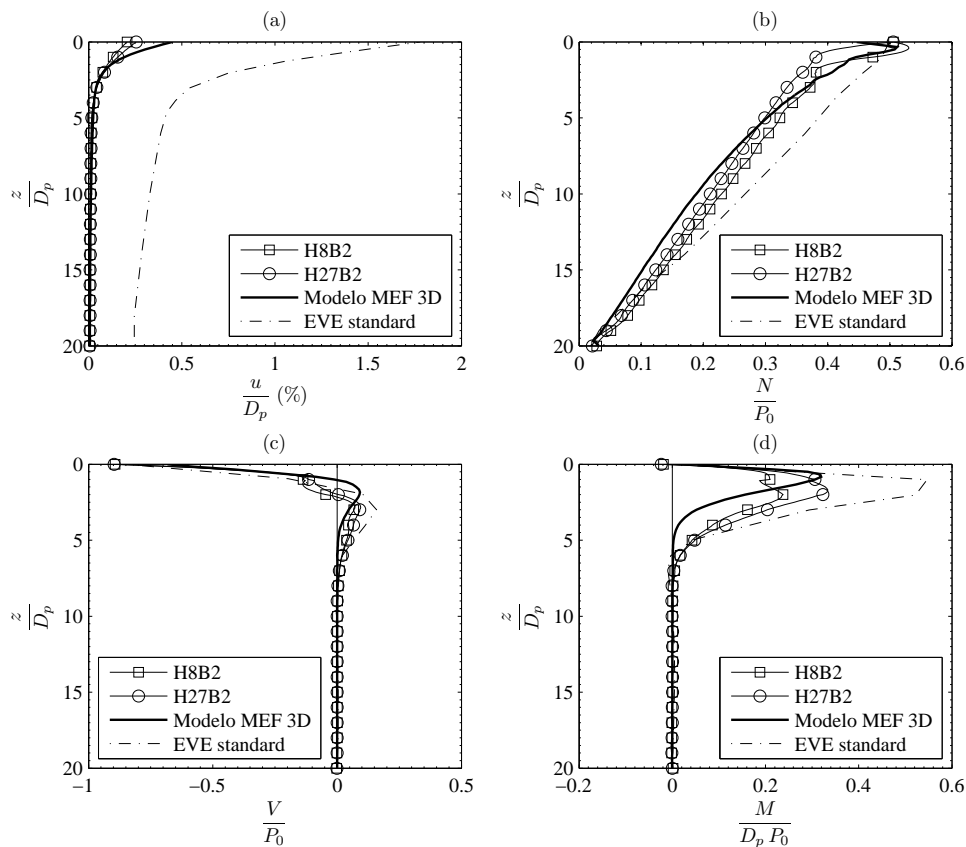
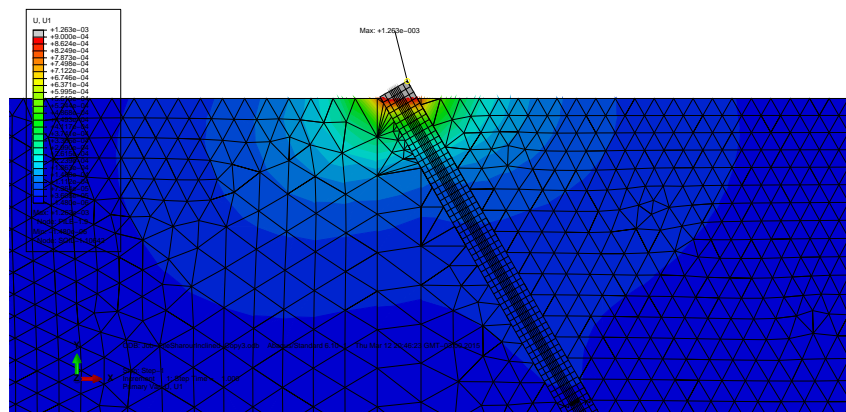


Figura 5.13: Ejemplo 2. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u$ , (b) esfuerzo normal  $N$ , (c) esfuerzo de corte  $V$  y (d) momento flector  $M$ .

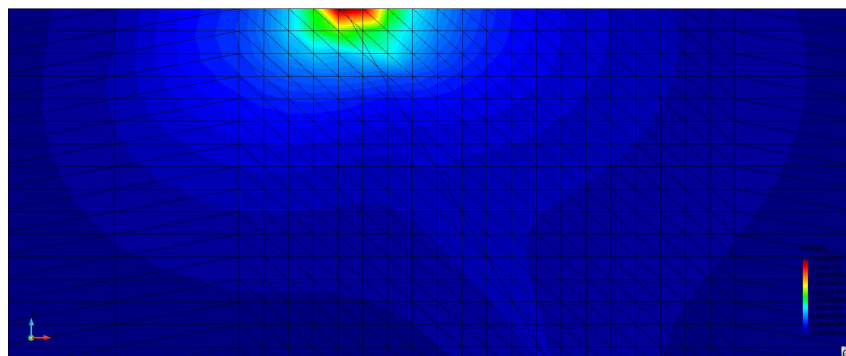
el acuerdo entre el máximo momento flector en la formulación EVE propuesta con el elemento H27B2 y el modelo completo 3D, los que son del orden del 56 % del valor máximo informado por Sadek y Shahrour.

En la Figura 5.14 y en la Figura 5.15 se muestra una comparación de los mapas de colores de los desplazamientos en el sólido  $U_1$  y  $U_2$ , horizontal y vertical respectivamente, que se obtienen en el modelo completo 3D de Abaqus y con el modelo EVE H8B2 propuesto, donde se puede ver que los patrones de desplazamientos en el suelo en ambos modelos son razonablemente similares. Los máximos desplazamientos en la superficie del estrato se muestran en la Tabla 5.2, donde se puede ver que el acuerdo en los desplazamientos obtenidos con los elementos H27B2 y los obtenidos con el modelo completo 3D de Abaqus es muy bueno.

En la Figura 5.16 se muestra una comparación de los mapas de vectores de desplazamientos que se obtienen en ambos tipos de modelos, donde se ve que los patrones de desplazamientos acuerdan bien. En este punto se hace notar que en el modelo de Abaqus se genera una distorsión

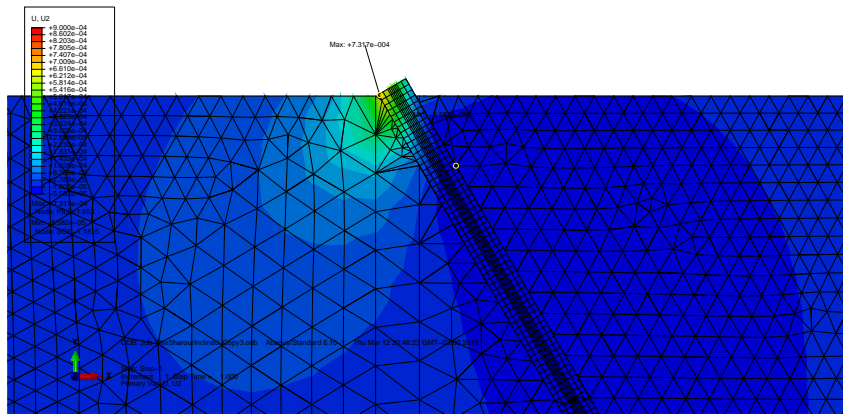


(a)

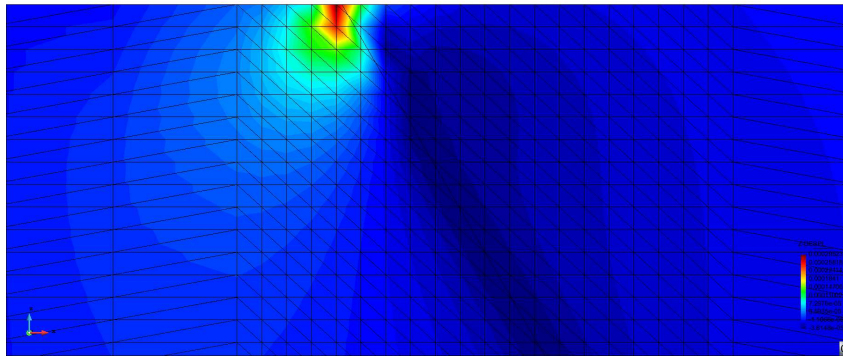


(b)

Figura 5.14: Ejemplo 2. Desplazamientos en el sólido  $U_1$ : (a) en el modelo de Abaqus para el pilote inclinado y (b) en el modelo EVE H8B2 propuesto en GID.



(a)



(b)

Figura 5.15: Ejemplo 2. Desplazamientos en el sólido  $U_2$ : (a) en el modelo de Abaqus para el pilote inclinado y (b) en el modelo EVE H8B2 propuesto en GID.

	$U_{1s}$	$U_{2s}$	$U_{1v}$	$U_{2v}$
Abaqus C3D8R	$9.00 \times 10^{-4}$	$5.42 \times 10^{-4}$	$1.12 \times 10^{-3}$ (*)	$5.26 \times 10^{-4}$
EVE H8B2	$6.99 \times 10^{-4}$	$2.71 \times 10^{-4}$	$5.17 \times 10^{-4}$	$2.35 \times 10^{-4}$
EVE H27B2	$9.05 \times 10^{-4}$	$4.00 \times 10^{-4}$	$6.40 \times 10^{-4}$	$3.06 \times 10^{-4}$

Tabla 5.2: Ejemplo 2. Desplazamientos máximos en superficie y en la cabeza del pilote.

significativa de la sección transversal en la cabeza del pilote lo que distorsiona el valor indicado con (\*) de la Tabla 5.2.

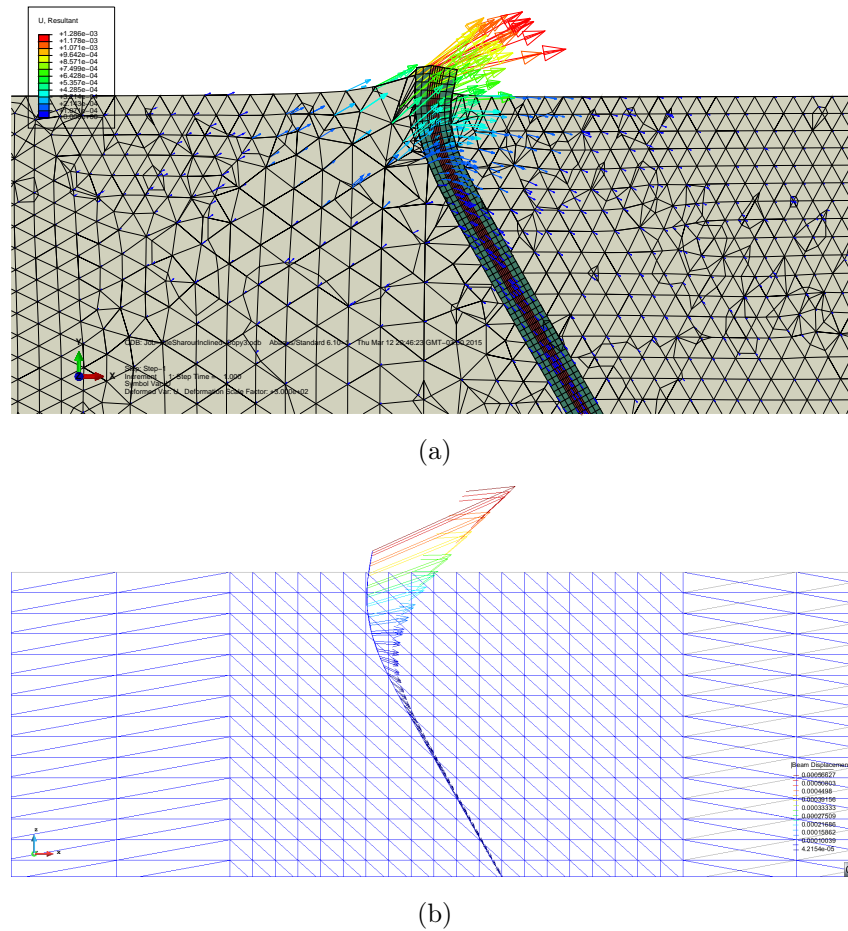


Figura 5.16: Ejemplo 2. Vectores de desplazamiento en el pilote en el Ejemplo 2: (a) en el modelo de Abaqus para el pilote inclinado y (b) en el modelo EVE H8B2 propuesto en GID.

### 5.3 Ejemplo 3: Pilote con columna vertical

#### 5.3.1 Validación para el caso elasto-plástico. Pilote en Arena

Se presentan a continuación los resultados obtenidos al modelar con la formulación EVE propuesta el caso presentado por Ashour *et al.* [4], para un pilote con columna vertical metálico como se ve en la Figura 5.17, dispuesto en una arena media a densa sumergida, típica de la isla Mustang [49].

Para este problema se utiliza la formulación propuesta de los elementos H8B2 y H27B2 a los que se les incorporan las interfaces plásticas descritas en el Capítulo 4 definidas en términos de la cinemática de vigas (elementos H8B2-PY y H27B2-PY) y las definidas en términos de la cinemática de sólidos sobre la superficie de interacción (elementos H8B2-CC y H27B2-CC) con el modelo material tipo Cam Clay Modificado (CCM).

Los parámetros para el pilote, de acuerdo al esquema de la Figura 5.17, son: la rigidez flexional

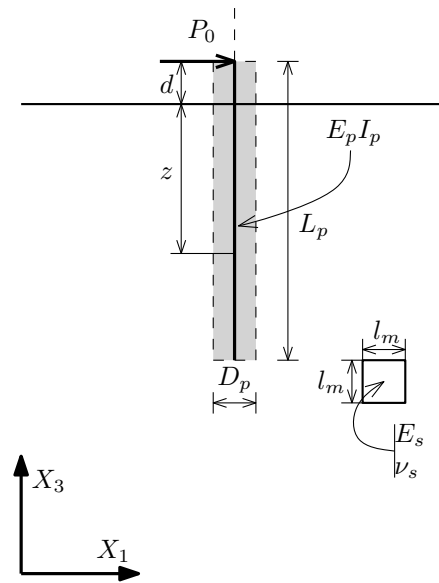
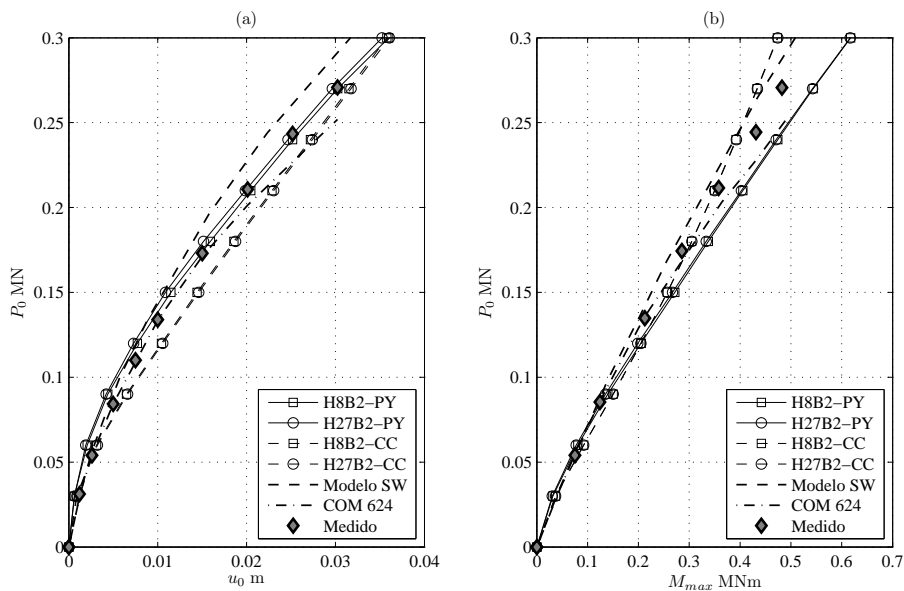


Figura 5.17: Ejemplo 3. Vista lateral del esquema utilizado.

del pilote  $E_p I_p = 1.67 \times 10^5 \text{ kNm}^2$ ,  $L_p = 21.30 \text{ m}$ ,  $D_p = 0.61 \text{ m}$ ,  $d = 0.30 \text{ m}$ .

Los parámetros adoptados para el modelo CCM del suelo son:  $\gamma_s = 18 \text{ kN/m}^3$ ,  $\phi_s = 32^\circ$ ,  $\beta = 0.20$ ,  $p_t \approx 0$ ,  $p_c = -\gamma_s z$ ,  $M_c = \frac{6 \sin(\phi_s)}{3 - \sin(\phi_s)} = 1.287$ ,  $H = 0.20$ ,  $h_i = 0.10$ .

Figura 5.18: Ejemplo 3. Pilote en arena. Resultados: (a)  $P_0$  vs.  $u_0$  y en (b)  $P_0$  vs.  $M_{max}$ .



En la Figura 5.18 (a) se muestra el desplazamiento en la cabeza del pilote en función de la carga externa aplicada, donde se ve un muy buen acuerdo entre la respuesta observada con la formulación propuesta (elementos H8B2-PY y H27B2-PY) y los datos medidos del ensayo a escala real. Además se muestran las estimaciones realizadas mediante el método Strain Wedge propuesto por Ashour *et al.* [4] y las realizadas mediante el software COM624 [52].

En la Figura 5.18 (b) se muestra el momento flector máximo en función de la carga externa aplicada, donde se ve un buen acuerdo entre la formulación propuesta y las soluciones de referencia. En este caso los resultados obtenidos con los elementos H8B2-CC y H27B2-CC acuerdan mejor con los datos medidos que los resultados obtenidos con los elementos H8B2-PY y H27B2-PY. Estos últimos arrojan resultados más cercanos a los obtenidos mediante el software COM624 debido a que ambos emplean el método de las curvas  $p - y$  para definir el comportamiento elasto-plástico de la interacción suelo-pilote.

### 5.3.2 Validación para el caso elasto-plástico. Pilote en Arcilla

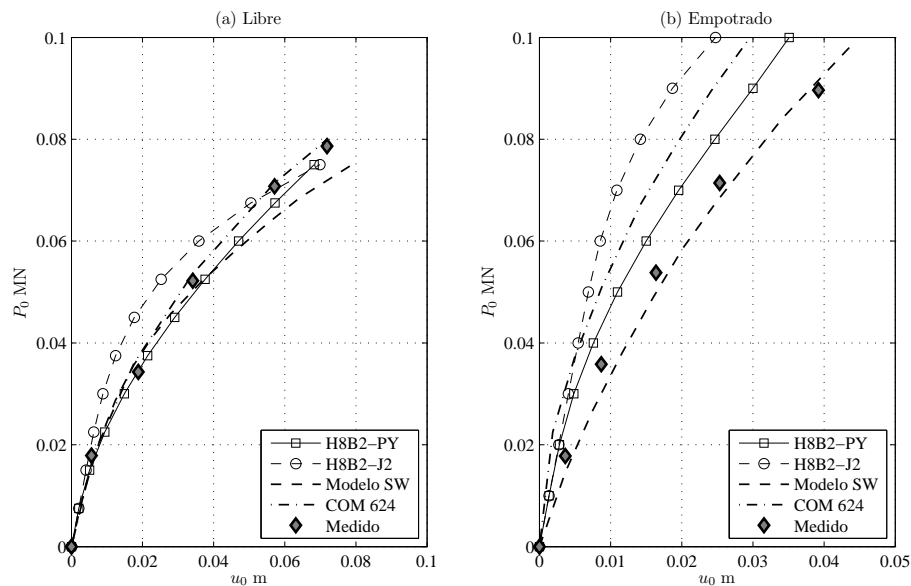


Figura 5.19: Ejemplo 3. Pilote en arcilla. Resultados:  $P_0$  vs.  $u_0$  para pilotes con cabeza (a) Libre y (b) Empotrada.

Se presentan los resultados al modelar con la formulación EVE propuesta el caso presentado por Ashour *et al.* [4], para un pilote metálico de sección circular hueca (steel pipe) dispuesto en una arcilla blanda sumergida, típica del río Sabine ([27]). En este caso se realiza un análisis en

tensiones totales del problema, es decir, considerando la resistencia al corte no-drenado del suelo,  $s_u$ .

Se presentan los resultados obtenidos mediante los elementos EVE H8B2-PY y H8B2-J2. El modelo de plasticidad J2 modificado que se implementa en este trabajo se describe en el Anexo C. En este modelo se ha adoptado además de la superficie de fluencia clásica de Von Mises ([36]) una presión límite en compresión y una presión límite en tracción, con la intención de limitar las deformaciones elásticas volumétricas en compresión y las tensiones de tracción triaxial. Con esto se busca dotar a la interfaz, la cual se caracteriza mediante este material, de la habilidad de modelar la plasticidad y la fenomenología que se desarrolla en la interacción suelo-pilote.

Los parámetros para el pilote, de acuerdo al esquema de la Figura 5.17, son: la rigidez flexional del pilote  $E_p I_p = 3.13 \times 10^4 \text{ kNm}^2$ ,  $L_p = 12.80 \text{ m}$ ,  $D_p = 0.33 \text{ m}$ ,  $d = 0.30 \text{ m}$ .

Cabe aclarar que este tipo de arcilla es muy deformable, por lo que los parámetros de la interfaz no-lineal se definen en función de las curvas  $p - y$  propuestas por Matlock [27], adoptándose los siguientes parámetros para el suelo:  $E_s = 2.25 \text{ MPa}$ ,  $\nu_s = 0.33$ ,  $\varepsilon_{50} = 0.11$ ,  $\gamma_s = 16.00 \text{ kN/m}^3$ ,

Los parámetros adoptados para el modelo de plasticidad J2 del suelo son:  $\phi_s = 0^\circ$ ,  $s_u = 0.015 \text{ MPa}$ ,  $p_c = -2 s_u$ ,  $p_t = 0$ ,  $H = 0.00$ ,  $h_i = 0.1$ .

Se puede ver que la respuesta obtenida mediante los elementos EVE H8B2-J2, formulados en cinemática de sólidos, captura bien la rigidez inicial elástica del sistema pero que se muestra más rígida que las soluciones de referencia para un rango de deformaciones mayores. Esto se debe a que el modelo material de sólido J2 modificado que se adopta para la interfaz tiende a no fallar con trayectorias de tensiones que se desarrollen en el sentido del eje hidrostático, sobrestimando las cargas reactivas de suelo en la porción de suelo delante del pilote.

En este caso, el ajuste entre la respuesta obtenida con los elementos formulados en cinemática de vigas H8B2-PY y los datos medidos es buena para el caso de pilotes con cabeza libre. En el caso de pilotes con cabeza empotrada la respuesta numérica es más rígida que los datos medidos. Esto puede deberse a que se trata de una arcilla muy deformable y tanto las curvas  $p - y$  propuestas por Matlock como los modelos 3D de sólidos implementados no están calibrados para representar un material de suelo tan deformable.

## 5.4 Ejemplo 4: Interacción en grupos de pilotes solicitados horizontalmente

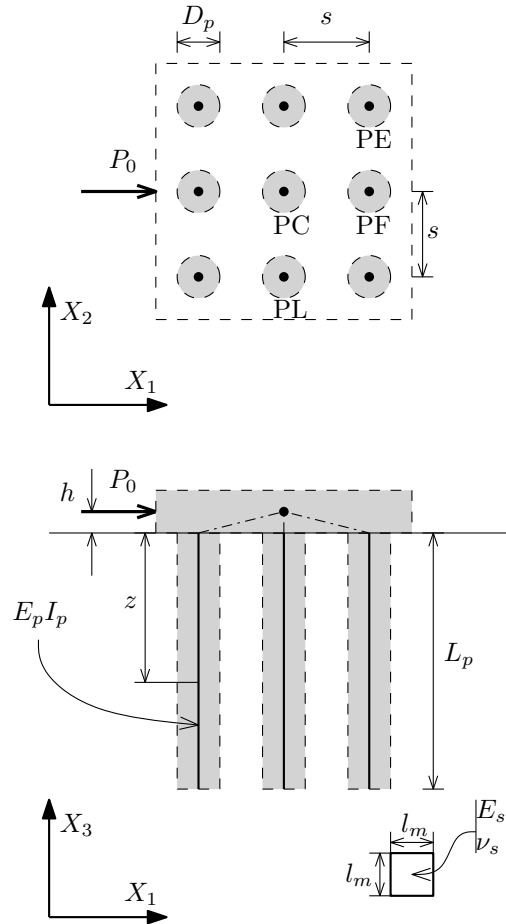


Figura 5.20: Ejemplo 4. Vista en planta y lateral del esquema utilizado.

Se modela en este ejemplo el efecto de grupo en un cabezal de 9 pilotes cilíndricos verticales, dispuestos en un estrato de suelo homogéneo como se muestra en el esquema de la Figura 5.20.

El cabezal rígido se modela introduciendo restricciones cinemáticas en la cabeza de cada pilote, las que vinculan los GDL del nodo extremo del pilote con los GDL del cabezal  $\hat{\mathbf{U}}_c$ .

La restricción cinemática, según el esquema de la Figura 5.21, se puede escribir a nivel global como:

$$\mathbf{0} = \hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{A} \mathbf{Re}(\mathbf{X}_j) \hat{\mathbf{U}}_c \quad (5.2)$$

donde  $N_p$  es el número de pilotes restringidos en el cabezal,  $\mathbf{A}$  es un operador de ensamble apropiado y  $\mathbf{Re}(\mathbf{X}_j)$  es la matriz de restricción que vincula los GDL del nodo  $j$  con los GDL del

cabezal y que se define para pilotes empotrados en el cabezal como:

$$\mathbf{Re}(\mathbf{X}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +X_3 & -X_2 \\ 0 & 1 & 0 & +X_3 & 0 & +X_1 \\ 0 & 0 & 1 & +X_2 & -X_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

donde  $(\mathbf{X}_j)$  es el vector posición del nudo  $j$  respecto al nudo del cabezal.

Para pilotes articulados en el cabezal, la matriz de restricción para el nudo  $j$  se escribe como:

$$\mathbf{Re}(\mathbf{X}_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +X_3 & -X_2 \\ 0 & 1 & 0 & +X_3 & 0 & +X_1 \\ 0 & 0 & 1 & +X_2 & -X_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Debido a que en este caso sólo se vinculan los 3 GDL traslacionales en las cabezas de los pilotes con los 6 GDL del cabezal, la matriz de restricción resulta rectangular.

#### 5.4.1 Validación para el caso elástico

Los parámetros elásticos en el suelo considerados para el análisis son: módulo de Young  $E_s = 100$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.33$ . Los parámetros elásticos y geométricos en el pilote son: módulo de Young  $E_p = 30000$  MPa,  $D_p = 0.50$  m,  $L_p = 10.00$  m. La carga externa aplicada es  $P_0 = 100$  kN.

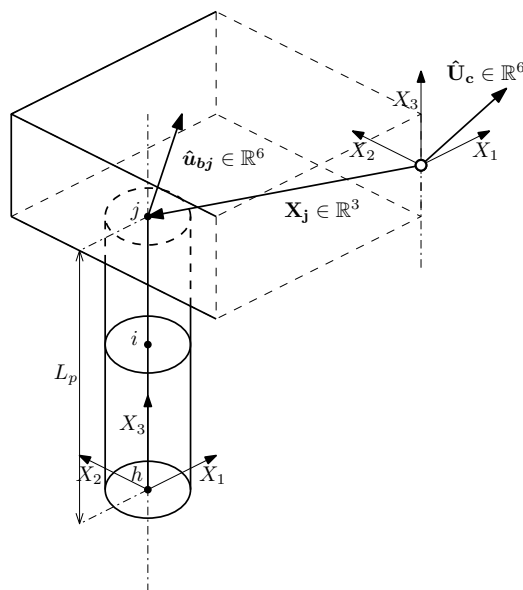


Figura 5.21: Ejemplo 4. Esquema de la restricción cinemática impuesta por el cabezal rígido.

En la Figura 5.22 se muestran los resultados para el pilote individual con restricción al giro en la cabeza sometido a carga lateral, para los elementos EVE propuestos H8B2 y H27B2. Estos resultados se utilizan para evaluar el efecto de grupo en el cabezal de 9 pilotes propuesto.

En la Figura 5.23 se muestra el esfuerzo de corte en la cabeza de los pilotes normalizado respecto al esfuerzo de corte en la cabeza del pilote individual (valor de la carga externa aplicada  $P_0$ ) y el número de pilotes en el cabezal  $n_p$ , para las diferentes posiciones de los pilotes en el grupo: pilote central (PC), frontal (PF), de lado (PL) y de esquina (PE). Además se muestra la solución de Randolph [46] para el efecto de grupo en grupos de pilotes, la que se estima utilizando los coeficientes de interacción calculados según la Ecuación 5.5 para pilotes con restricción al giro en la cabeza. Estos coeficientes representan el incremento de desplazamiento en la dirección de la carga externa en el punto B debido a una carga unitaria en el punto A (Figura 5.24).

$$\alpha_{\rho H} = 0.50 \rho_c \left( \frac{E_p}{G_c} \right)^{1/7} \frac{D_p}{2 s_R} (1 + \cos^2 \psi_R)$$

si  $\alpha_{\rho H} > 0.5$  se corrige el valor como:

$$\alpha_{\rho H} = 1 - \frac{1}{4 \alpha_{\rho H}}$$
(5.5)

donde  $G_c$  es el valor promedio de  $G^*$  en la longitud activa del pilote, y el resto de los parámetros están definidos en la Figura 5.24.

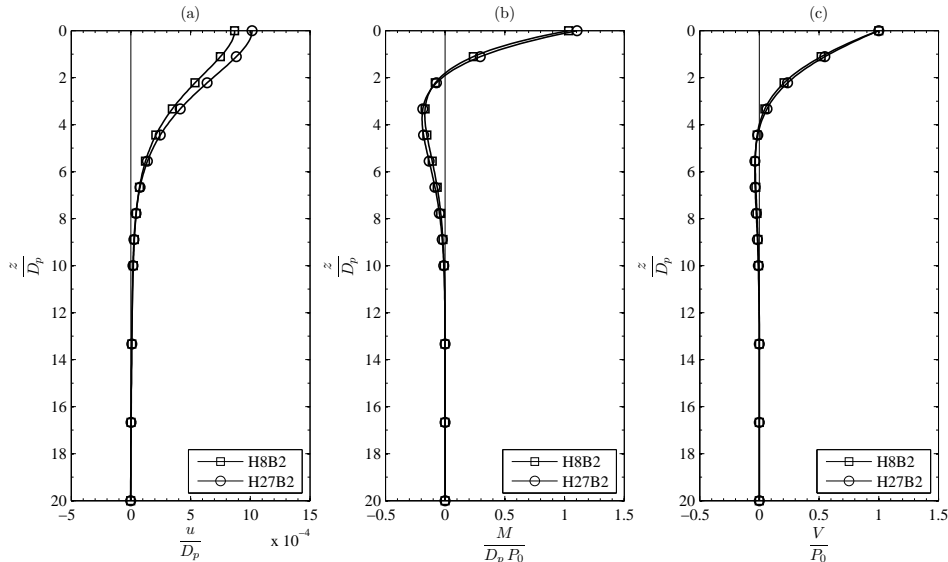


Figura 5.22: Ejemplo 4. Resultados normalizados en un pilote individual con restricción al giro en la cabeza para el H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u$ , (b) momento flector  $M$  y (c) esfuerzo de corte  $V$ .

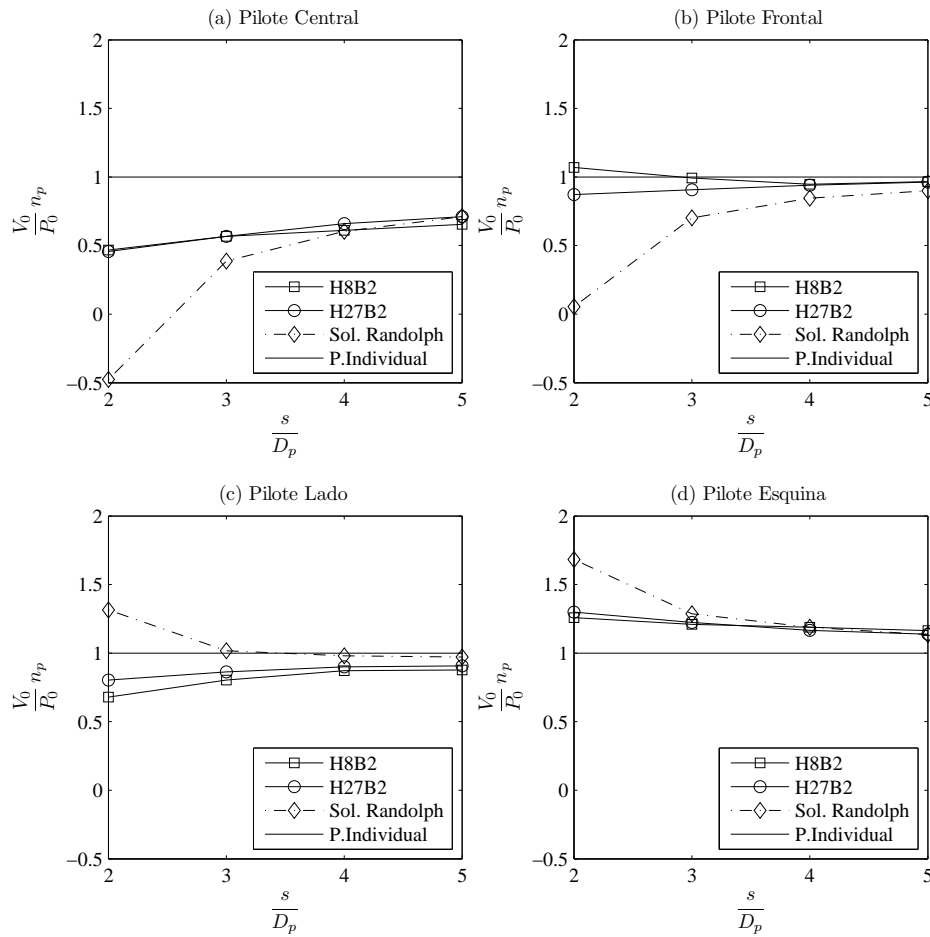


Figura 5.23: Ejemplo 4. Resultados normalizados: corte en la cabeza de los pilotes vs. la separación adimensional  $\frac{s}{D_p}$  para: (a) Pilote central (b) Pilote frontal (c) Pilote lado (d) Pilote esquina según el esquema de la Figura 5.20.

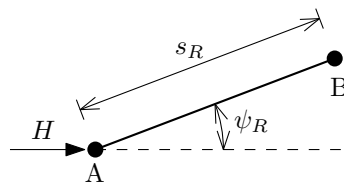


Figura 5.24: Ejemplo 4. Definición de las variables para estimar los coeficientes de interacción entre pilotes según [46].

En la Figura 5.23 se puede ver que la formulación EVE propuesta, con los elementos H8B2 y H27B2, arroja resultados similares a la solución de Randolph para separaciones adimensionales  $\frac{s}{D_p} = 5$ . Para separaciones adimensionales menores a 5, la formulación EVE propuesta arroja resultados más cercanos a la solución del pilote individual que la solución de Randolph, siendo este hecho muy significativo para una separación adimensionales  $\frac{s}{D_p} = 2$ .

Este fenómeno se debe a que los coeficientes calculados con la Ecuación 5.5 propuesta por Randolph para ajustar los datos publicados por Poulos [42], sobrestiman los coeficientes de interacción para grupos de pilotes poco espaciados. Según el propio Randolph esto se debe en parte a que Poulos idealizó al pilote como una línea y no consideró ni su volumen ni la rigidez que proveen los otros pilotes, lo que tiene como consecuencia que para separaciones pequeñas el modelo idealizado de Poulos considere mayor cantidad de suelo entre los pilotes. Este efecto se desvanece para separaciones mayores.

En la Figura 5.25 se muestra la eficiencia elástica,  $E$ , en el grupo de pilotes en función de la

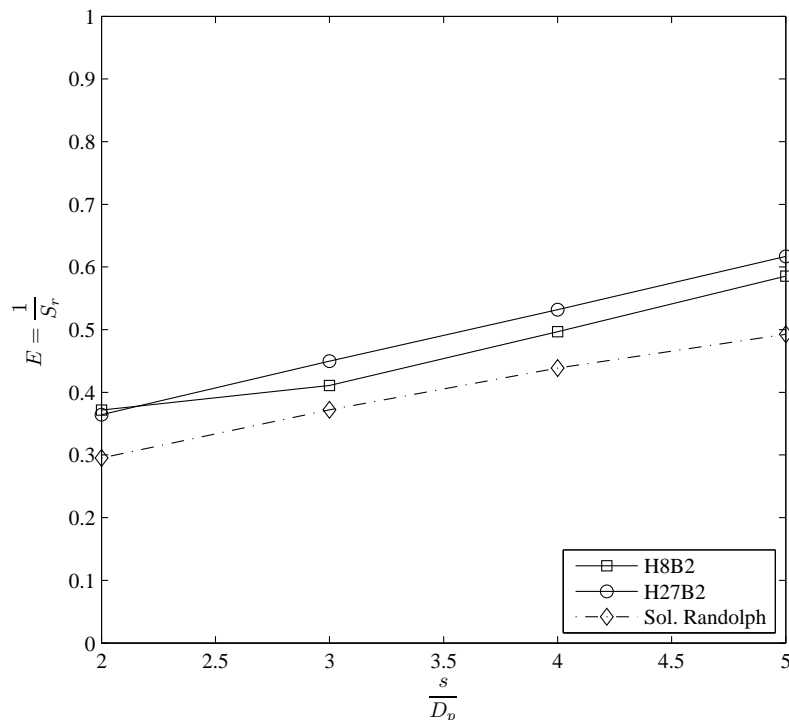


Figura 5.25: Ejemplo 4. Eficiencia en el rango elástico en el grupo de pilotes para el modelo EVE propuesto H8B2 y H27B2 y la solución de Randolph.

separación adimensional  $\frac{s}{D_p}$ . La eficiencia elástica  $E$  se calcula como la inversa de la relación de desplazamientos  $S_r$ , la cual se calcula como:

$$S_r = \frac{u_{grupo}}{u_{PI}} n_p \quad (5.6)$$

donde  $u_{grupo}$  es el desplazamiento lateral del grupo,  $u_{PI}$  el desplazamiento lateral en la cabeza del pilote individual y  $n_p$  es el número de pilotes.

En la Figura 5.25 se puede ver que la formulación EVE propuesta arroja valores de Eficiencia

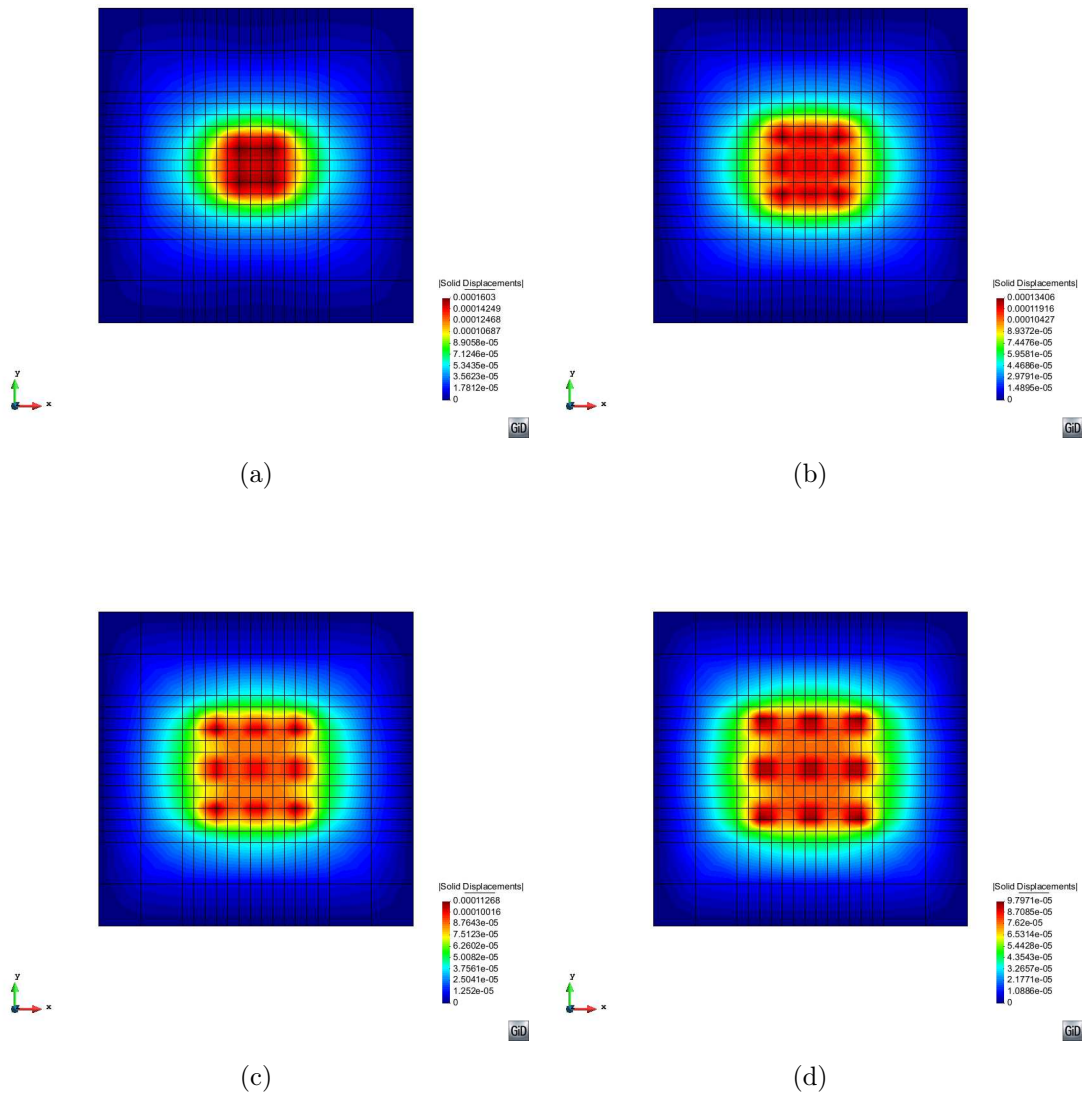


Figura 5.26: Ejemplo 4. Desplazamientos en el sólido: (a)  $\frac{s}{D_p} = 2$  (b)  $\frac{s}{D_p} = 3$  (c)  $\frac{s}{D_p} = 4$  (d)  $\frac{s}{D_p} = 5$ .



elástica superiores a los obtenidos con la solución de Randolph, tanto para los elementos H8B2 como para los H27B2, en todo el rango de separaciones adimensionales analizadas. El valor promedio de Eficiencia elástica  $E$  entre los elementos EVE propuestos H8B2 y H27B2 para  $\frac{s}{D_p} = 5$  es de 60 %, mientras que en la solución de Randolph es de 49 %.

En la Figura 5.26 se muestra una vista en planta del mapa de colores de los desplazamientos en el sólido para diferentes separaciones adimensionales  $\frac{s}{D_p}$ , donde se puede ver la influencia de la separación entre pilotes. Para separaciones  $\frac{s}{D_p} = 2$  no se aprecia el gradiente de desplazamientos en el sólido entre los pilotes, siendo el patrón de desplazamientos el de un bloque que se desplaza en conjunto, es decir que el sólido entre pilotes acompaña a los mismos en su desplazamiento lateral. A medida que la separación entre pilotes crece se pueden apreciar que los desplazamientos laterales se concentran en los alrededores de los pilotes y que el sólido entre pilotes se desplaza relativamente menos que los pilotes.

En este punto se hace notar que, gracias a la utilización de la formulación EVE propuesta, la malla de sólido en los diferentes modelos no cambia y sólo varía la posición de los pilotes sobre la malla de sólido.

### 5.5 Ejemplo 5: Deformaciones inducidas en el sólido. Cargas en suelos.

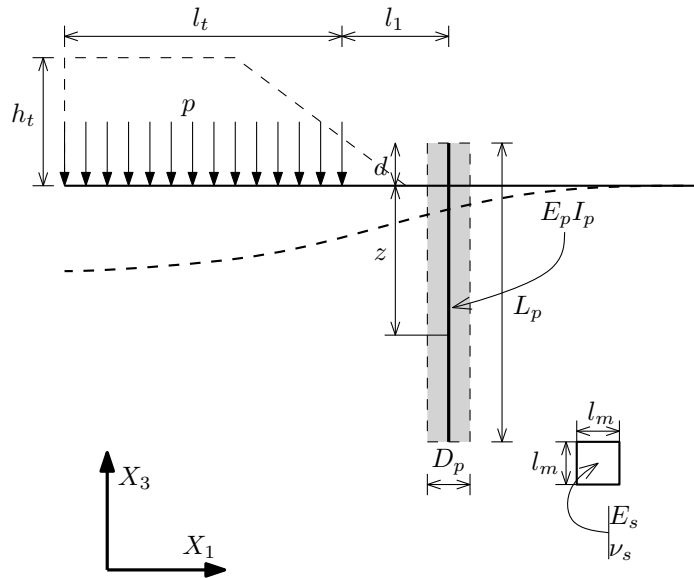


Figura 5.27: Ejemplo 5. Vista lateral del esquema utilizado.

Se analiza la respuesta de un pilote cilíndrico vertical ante una deformación inducida sobre la masa de suelo circundante debido a la aplicación de cargas sobre el suelo en la cercanía del pilote. Este es el caso, por ejemplo, de pilotes de estribos de puentes, donde luego de construido el pilote se ejecuta el terraplén. La aplicación de la carga del terraplén genera un patrón de desplazamientos en la zona de emplazamiento del pilote que hace necesario el estudio de la interacción cinemática suelo-estructura. Este problema no ha sido debidamente estudiado en la literatura, por lo que no se cuenta con soluciones de referencia, siendo en estos casos donde la formulación propuesta tiene potencial para dar respuestas simples y eficientes.

Se modela un pilote vertical según el esquema de la Figura 5.27, el cual es solicitado por la masa de suelo que se deforma alrededor del mismo. En este caso se simula la carga que transmite un terraplén de altura  $h_t = 4$  m y una densidad  $\gamma_s = 20$  kN/m<sup>3</sup>, con lo que la carga aplicada según el eje  $X_3$  resulta  $p = -h_t \gamma_s = -80$  kN/m<sup>2</sup>.

Se adoptan los siguientes parámetros geométricos para el problema:  $l_t = 7.50$  m,  $l_1 = 1.50$  m. Para el sólido se adoptan los siguientes valores, correspondientes a una arena medianamente densa: módulo de Young en el suelo  $E_s = 100$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.25$ ,  $\gamma_s = 16$  kN/m<sup>3</sup>,  $\phi_s = 32^\circ$ ,  $m_h = 40$  MPa. Los parámetros adoptados para el modelo CCM del suelo son:  $\beta = 0.70$ ,  $p_t \approx 0$ ,  $p_c = -\gamma_s z$ ,  $M_c = \frac{6 \sin(\phi_s)}{3 - \sin(\phi_s)} = 1.287$ ,  $H = 0.20$ ,  $h_i = 0.10$ . Los parámetros elásticos en el pilote son: módulo de Young  $E_p = 30000$  MPa,  $D_p = 0.50$  m,  $L_p = 10.00$  m,  $d = 0$ .

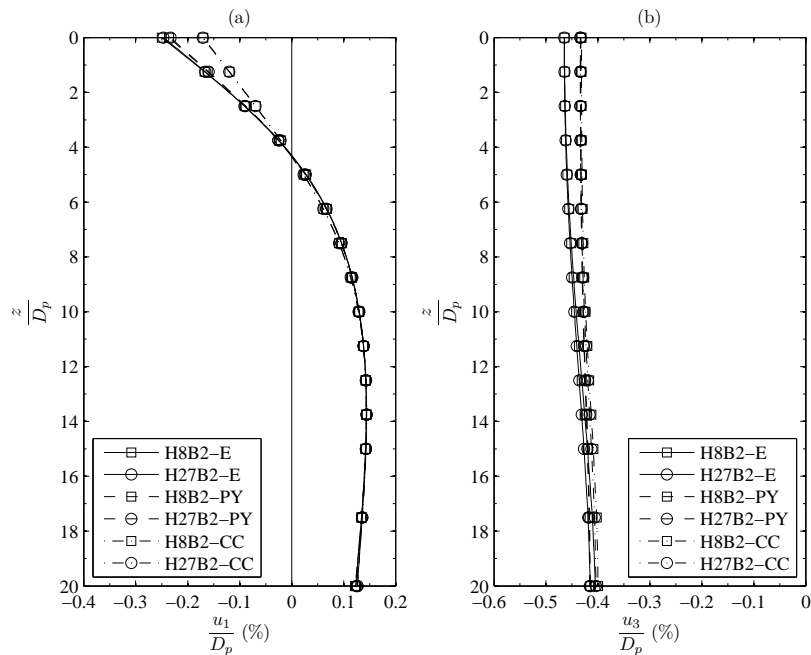


Figura 5.28: Ejemplo 5. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u_1$  y (b) desplazamiento axial  $u_3$ .

En la Figura 5.28 y en la Figura 5.29 se muestran los resultados obtenidos con la formulación EVE propuesta con los elementos H8B2 y H27B2 para el caso elástico y el caso elasto-plástico con la interfaz no-lineal modelada en cinemática de vigas (PY) y en cinemática de sólidos (CC).

Se puede ver en la Figura 5.28 (a) que el patrón de desplazamientos laterales entre el caso elástico y el elasto-plástico es muy similar, verificándose la diferencia más significativa cerca de la superficie.

En la Figura 5.28 (b) se muestran los desplazamientos axiales en el pilote, donde aquí también se puede ver que las mayores diferencias se dan a nivel de la superficie.

En este ejemplo no hay una diferencia significativa entre la respuesta en desplazamientos obtenida con los elementos lineales y los cuadráticos (H8B2 y H27B2 respectivamente).

En la Figura 5.29 (a) se muestra el diagrama de momentos flectores en el pilote donde se puede ver que la inclusión de la interfaz plástica genera valores máximos menores que en el caso elástico.

En la Figura 5.29 (b) se muestra el diagrama de esfuerzos corte en el pilote donde se puede ver que la inclusión de la interfaz plástica genera valores similares a los del caso elástico, habiendo diferencias entre los elementos lineales y cuadráticos, siendo menores los esfuerzos de corte en estos últimos.

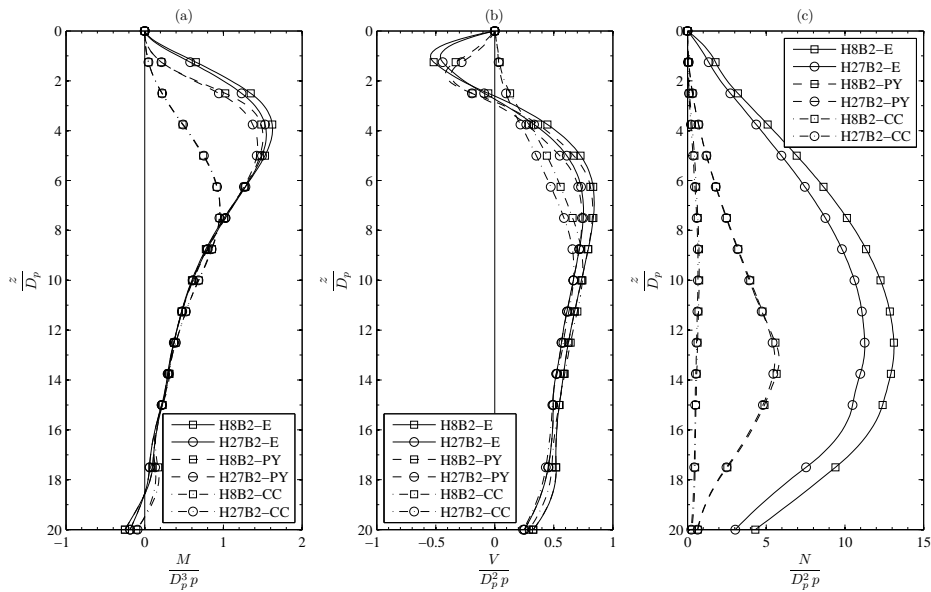


Figura 5.29: Ejemplo 5. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) momento flector  $M$ , (b) esfuerzo de corte  $V$  y (c) esfuerzo normal  $N$ .

En la Figura 5.29 (c) se muestra el diagrama de esfuerzos normales, siendo los máximos esfuerzos obtenidos con los elementos cuadráticos H27B2 menores que los obtenidos con los elementos lineales H8B2.

Los esfuerzos internos en la punta del pilote (momento flector, esfuerzo de corte y esfuerzo normal) se deben a la integral de las componentes de fuerzas distribuidas en la superficie de interacción transversal  $\Gamma_0$ .

En la Tabla 5.3 se muestra un resumen de los valores máximos de desplazamientos laterales en la superficie y máximos esfuerzos internos en el pilote.

En la Figura 5.30 se muestra una vista lateral de la deformada del sólido y el pilote junto con la configuración original, para el elemento H8B2-E, donde se ve como el pilote acompaña al sólido en su deformación.

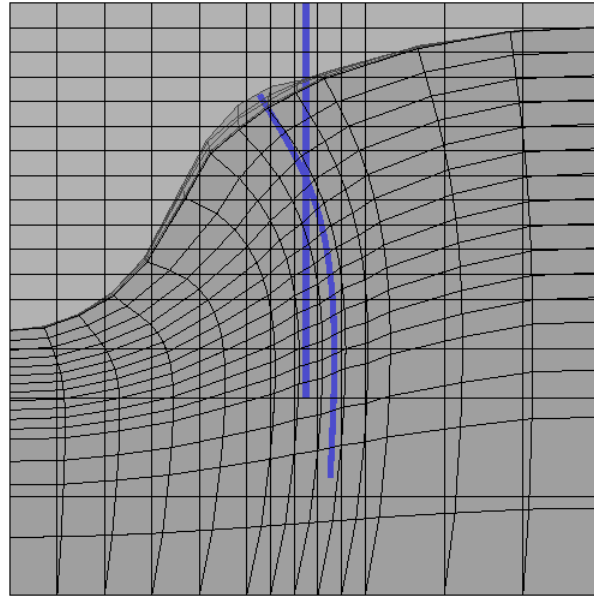


Figura 5.30: Ejemplo 5. Vista lateral de la posición deformada y original en el sólido y el pilote para el caso elástico. Elementos H8B2.

Elemento	$\frac{u_1}{D_p}$	$\frac{u_3}{D_p}$	$\frac{M_{max}}{p D_p^3}$	$\frac{z M_{max}}{D_p}$	$\frac{V_{max}}{p D_p^2}$	$\frac{z V_{max}}{D_p}$	$\frac{N_{max}}{p D_p^2}$	$\frac{z N_{max}}{D_p}$
H8B2-E	-0.250	-0.465	1.625	3.958	0.842	6.875	13.120	12.710
H27B2-E	-0.247	-0.465	1.546	4.167	0.829	7.083	11.270	12.600
H8B2-PY	-0.236	-0.433	1.502	4.271	0.751	7.188	5.824	13.230
H27B2-PY	-0.233	-0.434	1.435	4.583	0.738	7.500	5.550	13.230
H8B2-CC	-0.170	-0.432	0.956	7.188	0.746	9.583	0.746	9.479
H27B2-CC	-0.171	-0.434	0.957	7.083	0.671	9.583	0.670	9.479

Tabla 5.3: Ejemplo 5. Desplazamientos máximos en superficie y esfuerzos internos.

## 5.6 Ejemplo 6: Deformaciones inducidas en el sólido. Deslizamiento lateral debido a licuación de suelos.

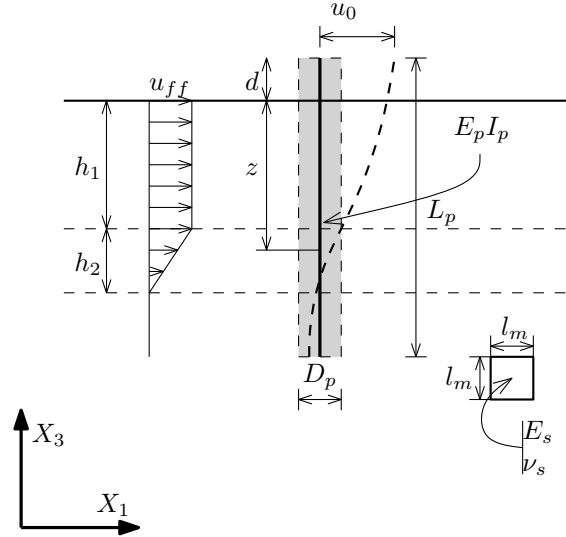


Figura 5.31: Ejemplo 6. Vista lateral del esquema utilizado.

Se presenta a continuación el problema de deslizamiento lateral (o lateral spreading en inglés), el que generalmente se asocia a fenómenos de licuación de suelos. Este fenómeno se genera cuando un estrato de suelo acumula presiones neutras durante la fase cíclica de una excitación sísmica, haciendo que las mismas lleguen a valores relativos muy elevados lo que genera un estado de presiones efectivas muy bajas en el suelo, con la consiguiente disminución de la resistencia y el aumento de la deformabilidad.

Luego de que se desarrolla el fenómeno de licuación, el estrato de suelo puede desplazarse lateralmente de forma cuasi-estática, en lo que se conoce como deslizamiento lateral, donde el fenómeno destacado en la interacción con las estructuras es la interacción cinemática, frente a la interacción dinámica que caracteriza la fase cíclica de la excitación [14].

Este fenómeno está caracterizado por un patrón de desplazamientos laterales en profundidad que se denomina desplazamientos de campo libre o free field  $u_{ff}$ , que se adopta según el esquema de la Figura 5.31.

Se adoptan los siguientes parámetros para este problema:  $h_1 = 4.00$  m,  $h_2 = 2.00$  m. Para el sólido que no licua se adoptan los siguientes valores, correspondientes a una arena medianamente densa: módulo de Young en el suelo  $E_s = 100$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.25$ ,  $\gamma_s = 16$  kN/m<sup>3</sup>,  $\phi_s = 32^\circ$ ,  $\beta = 0.70$ ,  $p_t \approx 0$ ,  $p_c = -\gamma_s z$ ,  $M_c = \frac{6 \sin(\phi_s)}{3 - \sin(\phi_s)} = 1.287$ ,  $H = 0.20$ ,  $h_i = 0.10$ . Para el estrato de sólido que licúa se adoptan los siguientes valores: módulo de Young en el suelo  $E_s = 10$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0.25$ ,  $\gamma_s = 16$  kN/m<sup>3</sup>,  $\phi_s = 20^\circ$ .

Los parámetros elásticos en el pilote son: módulo de Young  $E_p = 30000$  MPa,  $D_p = 0.50$  m,

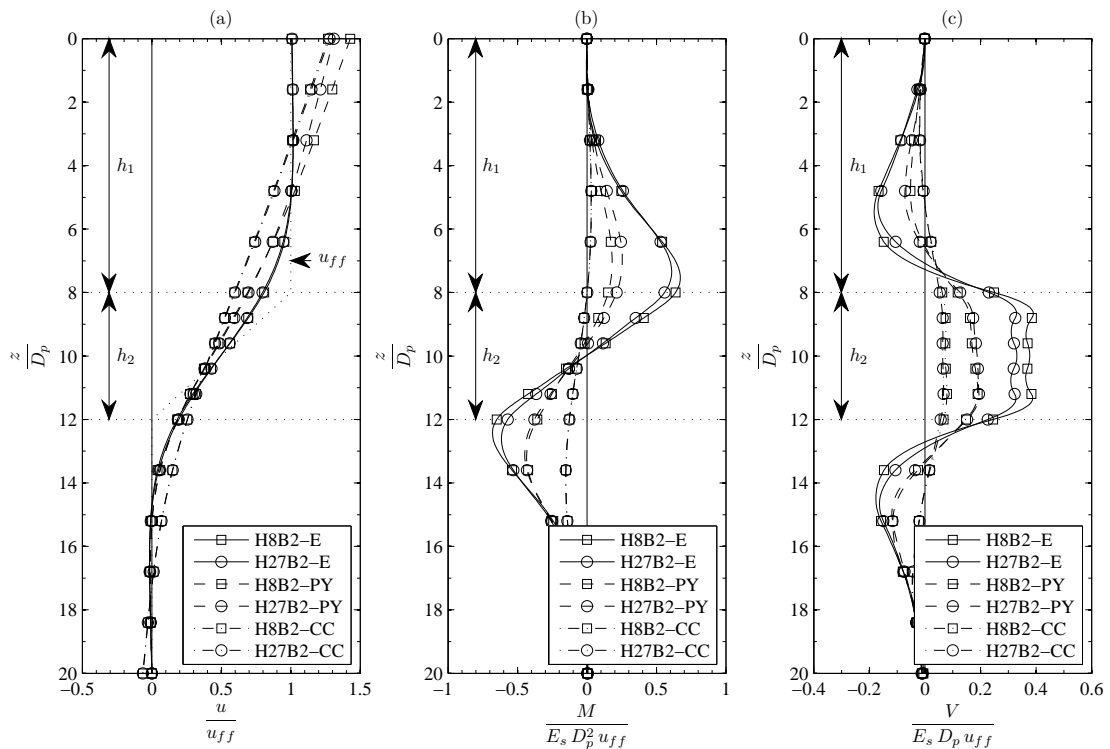


Figura 5.32: Ejemplo 6. Resultados normalizados para el EVE propuesto H8B2 y H27B2 vs. profundidad normalizada: (a) desplazamiento lateral  $u$ , (b) momento flector  $M$  y (c) esfuerzo de corte  $V$ .

$$L_p = 10.00 \text{ m}, d = 0.$$

En la Figura 5.32 (a) se muestra la deformada del pilote sometido a los desplazamientos de campo libre para los casos elástico y con plasticidad concentrada en la interfaz, para los elementos EVE propuestos H8B2 y H27B2. Además se muestra en línea de puntos los cambios de estratos según el esquema de la Figura 5.31 y los desplazamientos de campo libre  $u_{ff}$  impuestos.

En la Figura 5.32 (b) se muestra el diagrama de momentos flectores y en la Figura 5.32 (c) se muestra el diagrama de esfuerzos de corte en el pilote. En estas figuras se puede ver que la inclusión de la interfaz plástica genera una distribución de esfuerzos similares al caso elástico, pero con valores máximos menores. Los momentos flectores máximos con la inclusión de la interfaz plástica son del orden del 18% de los elásticos, mientras que el esfuerzo de corte máximo es un 32% de los valores del caso elástico.

En la Figura 5.32 (b) y (c) se puede observar que la inclusión de la interfaz de plasticidad concentrada, genera que los diagramas de esfuerzos internos, momento flector y esfuerzo de corte,

dejen de ser anti-simétricos y simétricos respectivamente respecto al plano horizontal en  $\frac{z}{D_p} = 10$  como lo son en el caso elástico. Esto se debe a que los esfuerzos de interacción en la superficie del pilote son menores debido a que el confinamiento en el sólido es menor en las secciones transversales más superficiales del pilote.

Elemento	$\frac{u_0}{u_{ff}}$	$\frac{M_{max}}{E_s D_p^2 u_{ff}}$	$\frac{z_{Mmax}}{D_p}$	$\frac{V_{max}}{E_s D_p u_{ff}}$	$\frac{z_{Vmax}}{D_p}$
H8B2-E	1.008	-0.679	12.530	0.390	8.733
H27B2-E	1.010	-0.616	12.530	0.325	8.800
H8B2-PY	1.429	-0.434	13.200	0.190	11.200
H27B2-PY	1.311	-0.448	13.070	0.195	11.270
H8B2-CC	1.269	-0.152	13.870	0.079	11.200
H27B2-CC	1.279	-0.153	13.870	0.068	11.200

Tabla 5.4: Ejemplo 6. Desplazamientos máximos en superficie y esfuerzos internos.



## Capítulo 6

# Conclusiones y recomendaciones

### 6.1 Síntesis

En esta sección se presenta una síntesis del presente trabajo de investigación, en el cual se ha abordado el problema de interacción suelo-estructura aplicado a pilotes sometidos a cargas laterales.

En primer lugar se revisaron y analizaron los métodos existentes para realizar estimaciones sobre la respuesta mecánica en este tipo de problemas, que se resumen a continuación:

- Los modelos de VLE desacoplan el problema de interacción suelo-estructura y sólo analizan la respuesta estructural incorporando un único parámetro (módulo de reacción horizontal  $k_h$ ) que representa la respuesta del suelo. Este parámetro es difícil de estimar en la práctica debido a que no representa un parámetro material del suelo sino que representa todo el fenómeno de interacción. Además, no se puede tener en cuenta la plasticidad en el suelo y la degradación de resistencia con la deformación, ya que la respuesta es lineal y el módulo de reacción constante. Otra desventaja de estos métodos es que la interacción pilote-suelo-pilote que se da en grupos de pilotes, no es capturada de forma natural por la formulación.
- Los modelos que hacen uso de las curvas  $p-y$  tienen la ventaja, frente a los anteriores, de que incorporan la respuesta no-lineal del suelo y que pueden realizar estimaciones en régimen de carga estática o cíclica. En la actualidad existen numerosas curvas  $p-y$ , calibradas para los diferentes suelos y condiciones de carga. Sin embargo, este método sigue desacoplando las respuestas del sub-dominio de sólido y del sub-dominio de viga lo que, al igual que en el caso anterior, se manifiesta en la necesidad de utilizar coeficientes empíricos de interacción cuando se analizan grupos de pilotes. Además, la caracterización de las curvas  $p-y$  se realiza en base a numerosos ensayos de pilotes a escala real, con lo que siempre existe incertidumbre acerca de la representatividad que estas curvas tienen frente a los suelos locales.

- El método de SWM, si bien sigue desacoplando el problema de interacción, tiene la ventaja de que la caracterización del módulo de reacción se realiza en función de los resultados de ensayos triaxiales del suelo y de un modelo de comportamiento adoptado (cuña en estado pasivo), lo que permite incorporar algunas características del sitio en estudio.
- El método de los elementos finitos suple las deficiencias de los métodos anteriores permitiendo la realización de análisis muy complejos de interacción suelo-estructura.
- Randolph [46] ha realizado un estudio paramétrico sobre pilotes sometidos a carga lateral utilizando un modelo de MEF, expresando luego las soluciones en función de parámetros adimensionales. Cabe aclarar que estas soluciones solo es válida en régimen elástico.
- Con el afán de disminuir el número de GDL en los modelos de MEF y facilitar el análisis, en los últimos años se han propuestos Elementos de Vigas Embebidos (EVE) en sólidos (Sadek y Shahrour [57]).

De este compendio de técnicas para resolver la interacción suelo-estructura, se debe destacar la importancia práctica que tiene la formulación EVE, ya que permite modelar con pocos recursos la interacción entre dos tipos de estructuras (sólidos y vigas), que generalmente se representan mediante diferentes teorías técnicas. Además, la malla en el problema de sólidos se puede elegir en forma casi independiente de la malla estructural del problema de vigas, lo que representa una clara ventaja frente a la opción de modelar los dos sub-dominios con elementos de sólido tridimensionales.

La formulación EVE original propuesta por Sadek y Shahrour fue desarrollada en base a consideraciones puramente numéricas, sin representar apropiadamente la física del problema, por ejemplo, al no tener en cuenta la superficie de interacción entre la viga y el sólido. Esta formulación presenta una incompatibilidad cinemática, la cual produce una solución que no converge cuando los nodos de las vigas coinciden o están cerca de los nodos del sólido (ver [61]). En el límite, con tamaños de malla tendiendo a cero, el problema tiende a representar una carga de línea en el medio sólido lo que produce una singularidad en las tensiones cuando se refina la malla.

En este trabajo se avanzó sobre esta línea proponiendo una mejora a la formulación propuesta por Sadek y Shahrour, incorporando de forma explícita la superficie de interacción entre el suelo y el pilote, de manera que las cargas se transmitan de uno a otro a través de una superficie finita.

Se desarrollaron modelos de interfaz que tienen por objeto dotar a los EVE propuestos de la capacidad de modelar las deformaciones plásticas que se desarrollan en el campo cercano del pilote, para deformaciones laterales bajas a moderadas. Estas interfaces se desarrollaron de dos maneras: la primera, formulando la interfaz en cinemática de vigas y adoptando en su definición mecánica los elementos más significativos de las curvas  $p-y$ ; y la segunda, formulando la interfaz

en cinemática de sólidos y utilizando para caracterizar la respuesta mecánica modelos materiales de sólidos tridimensionales, como Cam Clay Modificado (CCM) o Plasticidad J2 (modelo de Von Mises). El propósito de estos modelos de interfaz es capturar la plasticidad incipiente en el entorno del pilote.

Además, se avanzó en el desarrollo de la forma variacional del problema que sirve de sustento teórico para plantear elementos de vigas embebidos en sólidos, introduciendo restricciones cinemáticas sobre la superficie de interacción para compatibilizar los campos de desplazamientos en el dominio de sólidos y de la viga, con el fin de obtener una formulación bien definida para el problema.

Luego se desarrolló la forma variacional extendida del problema completo, en donde se incorpora la disipación plástica que se desarrolla en la interfaz entre el suelo y el pilote.

Por último, se validaron las formulaciones EVE propuestas y se presentaron diferentes problemas gobernados por la interacción suelo-estructura, en los cuales se evidencian las bondades de las formulaciones propuestas. Los grupos de problemas que se estudiaron como aplicación de la formulación propuesta en esta tesis son:

- Pilotes y grupos de pilotes cargados lateralmente.
- Pilotes solicitados lateralmente debido a deformaciones inducidas por el sólido, por ejemplo cuando se construye un terraplén al costado de un pilote o grupo de pilotes construidos.
- Pilotes solicitados lateralmente debido a deformaciones inducidas por el sólido en problemas de lateral spreading, donde la masa de suelo se desplaza lateralmente en forma cuasi-estática debido a que un estrato de suelo en profundidad ha licuado, como consecuencia del crecimiento y acumulación de presiones neutras en la fase de excitación sísmica.

## 6.2 Conclusiones

El aporte de este trabajo es la propuesta de una formulación EVE novedosa basada en la reformulación del modelo mecánico de base intentando compatibilizar la descripción cinemática entre elementos estructurales disímiles (viga-sólido). Sólo una vez que el problema a nivel del continuo está apropiadamente formulado variacionalmente, se propone una metodología numérica para resolverlo. Estos avances han sido publicados en revistas científicas internacionales [63].

La definición de la interfaz de plasticidad concentrada propuesta, en términos de las curvas  $p - y$ , implica la adopción de un modelo de comportamiento cuando se considera la tridimensionalidad del problema, ya que estas curvas fueron desarrolladas para un estado donde las cargas se dan en un único plano de flexión. El modelo de interfaz definido en términos de la cinemática de sólidos no requiere esta adopción, ya que incorporan naturalmente este fenómeno al considerar el estado tensional en varios puntos sobre la superficie de interacción. Además, la interfaz planteada

en cinemática de sólidos mostró ser más robusta numéricamente que la planteada en cinemática de vigas, observándose una mejor convergencia en el esquema iterativo de Newton-Raphson.

Las interfaces propuestas tienen la capacidad de modelar la respuesta no-lineal concentrada que se genera en el suelo.

La formulación propuesta tiene la capacidad de modelar la interacción suelo-estructura en forma acoplada y eficiente, incorporando a las ventajas del modelado en FEM las propias relativas al uso de diferentes aproximaciones para los diferentes sub-dominios. En ese sentido, esta formulación es particularmente versátil para modelar los problemas donde las solicitaciones sobre la estructura se generan como consecuencia de que el suelo se desplace relativamente a la estructura.

### 6.3 Aspectos originales

Dentro de los trabajos llevados a cabo en esta tesis, se ha generado un código de elementos finitos que es capaz de incluir elementos con diferentes aproximaciones cinemáticas, como son los elementos 3D de sólidos y los elementos 3D de vigas. Dentro de este código, se ha propuesto e implementado numéricamente una formulación novedosa de un elemento de viga embebido en sólidos, el cual incorpora explícitamente la superficie de interacción entre el suelo y el pilote.

La formulación presentada en esta tesis se ha desarrollado a través del principio de trabajos virtuales, pero la misma puede ser entendida en un contexto más amplio como el descrito en el Anexo A.

Este tipo de elementos de vigas embebidos permite vincular una malla de elementos 3D de vigas con una malla de elementos 3D de sólidos de forma arbitraria, siendo la formulación propuesta la encargada de compatibilizar los campos de desplazamientos entre ambos sub-dominios y realizar el acople de los distintos elementos. De esta manera, se aprovechan las ventajas que cada tipo de elemento finito tiene para modelar la respuesta mecánica del sub-dominio al que se asocia.

Además, se han propuesto e implementado numéricamente dos tipos de interfaces de plasticidad concentrada: una definida en cinemática de vigas y otra definida en cinemática de sólidos. Estas interfaces modelan constitutivamente las deformaciones no-lineales que se desarrollan en la porción de suelo cercana al pilote. Además estas interfaces podrían considerar los efectos de instalación del pilote, teniendo en cuenta parámetros apropiados a tal fin.

Se ha trabajado sobre la formulación variacional del problema donde se destaca la formulación propuesta para el caso donde los dos sub-dominios están separados por una superficie interna que representa toda la superficie lateral del sub-dominio de vigas.

## 6.4 Trabajos futuros

Siguiendo en la línea de investigación, se considera interesante analizar la contribución de las deformaciones elástica y plástica en grupos de pilotes cargados lateralmente, ya que existe cierta incertidumbre sobre este tema.

Además, se considera valioso poder incorporar en los elementos de sólidos modelos materiales de suelos que tengan en cuenta plasticidad de forma general.

Otro punto en el que se pueden hacer contribuciones es incorporar modelos materiales de suelos que tengan en cuenta la generación de presiones neutras, para poder realizar análisis no-drenados en tensiones efectivas.

Cabe destacar que la formulación propuesta para vincular modelos de diferente aproximación cinemática es completamente general, por lo que se puede aplicar a una gran cantidad de problemas, además de los estudiados en esta tesis. Algunos ejemplos de problemas donde se pueden aplicar este tipo de técnicas son:

- Para estudiar el comportamiento mecánico de nudos en estructuras de hormigón armado, modelando el hormigón con elementos de sólidos tridimensionales y las barras de refuerzo con elementos de línea tridimensionales.
- En el ámbito de la geo-mecánica, para estudiar el empleo de geo-refuerzos en estructuras como taludes, terraplenes, etc., donde los geo-materiales de refuerzo se embeben el medio sólido.
- En problemas de refuerzo de túneles mediante soil nailing, o para el estudio de anclajes.



## Apéndice A

# Principio variacional

La energía potencial total del sistema,  $\Pi$ , para un problema donde se consideran dos sub-dominios, el sub-dominio de sólidos  $\chi_s$  y el sub-dominio de vigas  $\chi_b$ , como el mostrado en la Figura 3.1, y teniendo en cuenta la frontera interna  $\Omega$  que separa los dos sub-dominios, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_s, \boldsymbol{\lambda}) = & + \frac{1}{2} \int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_b \, d\chi_b - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{u}_b \, d\Gamma_c - \int_{\chi_b} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{u}_b \, d\chi_b \\ & + \frac{1}{2} \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \mathbf{u}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{u}_s \, d\chi_s \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u}_v - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

donde los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}_s$  y  $\mathbf{u}_b$  y los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  son vectores en  $\mathbb{R}^3$ . En esta expresión se puede ver la contribución a la potencia interna aportada por cada sub-dominio además de la aportada por la restricción interna para compatibilizar o establecer alguna medida de la continuidad de los campos de desplazamientos a ambos lados de la superficie de interacción  $\Omega$ .

Tomando las variaciones del funcional  $\Pi$ , con respecto a las variables  $\mathbf{u}_v$ ,  $\mathbf{u}_s$ ,  $\boldsymbol{\lambda}$ , e igualando estas variaciones a cero, queda:

$$\begin{aligned} 0 = & \delta\Pi(\mathbf{u}_b, \mathbf{u}_s, \boldsymbol{\lambda}) \\ 0 = & + \int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_v \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b - \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, d\Gamma_c - \int_{\chi_b} \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b \\ & + \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s \\ & - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\bar{\mathbf{u}}_b - \bar{\mathbf{u}}_s) \, d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \quad \forall \quad \bar{\mathbf{u}}_b, \bar{\mathbf{u}}_s, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \text{ admisibles} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

donde las barras sobre las variables indican que son variaciones admisibles de estas variables y  $\nabla^s$  indica el gradiente simétrico del campo correspondiente.

Luego, se introducen hipótesis cinemáticas sobre el dominio de vigas  $\chi_b$ , adoptando para el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}_b \in \mathbb{R}^3$  una cinemática de vigas, es decir que el vector  $\mathbf{u}_b(\mathbf{X})$  se expresa en función del campo de desplazamientos y rotaciones sobre el eje de la viga y el vector posición del punto  $\mathbf{X}$ . En este modelo se acepta que las secciones transversales originalmente planas permanecerán planas y perpendiculares al eje baricéntrico luego de la deformación y que se desprecian las deformaciones en el plano de la sección transversal. Además en este caso se desprecian las deformaciones de corte en el modelo de vigas. De esta forma el campo de desplazamientos se puede expresar como (ver Figura 3.1):

$$\mathbf{u}_b = (v_1 - \phi_3 X_2) \mathbf{e}_1 + (v_2 - \phi_3 X_1) \mathbf{e}_2 + \left( v_3 - \frac{\partial v_1}{\partial X_3} X_1 - \frac{\partial v_2}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.3})$$

Las variaciones admisibles de este campo se escriben como:

$$\bar{\mathbf{u}}_b = (\bar{v}_1 - \bar{\phi}_3 X_2) \mathbf{e}_1 + (\bar{v}_2 - \bar{\phi}_3 X_1) \mathbf{e}_2 + \left( \bar{v}_3 - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial X_3} X_1 - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \quad (\text{A.4})$$

Reemplazando la cinemática de vigas adoptada (Ecuación A.3) en el principio variacional de la Ecuación A.2 y operando sobre los términos que involucran a la cinemática de vigas, se obtiene que el término de la energía de deformación en el dominio de viga se expresa como:

$$\begin{aligned} & \int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b = \\ & = \int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \left( \left( -\frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial X_3} X_1 \right) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial X_3} - \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial X_3^2} X_1 - \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial X_3^2} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right) d\chi_b \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

La integral sobre el dominio de viga  $\chi_b$  se puede expresar como una integral sobre la longitud de la viga  $L$ , del resultado de una integral en la sección transversal  $\Gamma$  de la misma, como se muestra en la Ecuación A.6.

$$\int_{\chi_b} (\cdot) \, d\chi_b = \int_L \int_{\Gamma} (\cdot) \, d\Gamma dL \quad (\text{A.6})$$

Introduciendo la Ecuación A.6 en la Ecuación A.5 y operando se pueden reconocer los esfuerzos internos generalizados,  $\mathbf{m}_b$ , que se muestran en la Ecuación A.7.



$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_b &= \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \\
m_1 &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot (-X_2) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \, d\Gamma \\
m_2 &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot (-X_1) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \, d\Gamma \\
n_3 &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \, d\Gamma \\
t_3 &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot (X_1 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - X_2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Luego se puede expresar el término asociado al energía interna de deformación en el dominio  $\chi_b$  como se expresa en la Ecuación A.8.

$$\begin{aligned}
&\int_{\chi_b} \boldsymbol{\sigma}_b \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b = \\
&= \int_L \left( m_1 \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial X_3^2} + m_2 \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial X_3^2} + n_3 \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial X_3} + t_3 \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial X_3} \right) dL \\
&= \int_L \mathbf{m}_b \cdot \mathcal{B} \bar{\mathbf{u}}_b \, dL
\end{aligned} \tag{A.8}$$

donde  $\mathcal{B}$  es el operador de deformaciones conjugadas generalizadas al vector  $\bar{\mathbf{u}}_b$ , el cual es el vector que contiene las variaciones admisibles del campo de desplazamientos en cinemática de vigas  $\mathbf{u}_b$ , el que se puede escribir como:

$$\mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \frac{\partial v_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial X_3} \\ \phi_3 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

Los términos asociados a las potencia interna desarrollada por las cargas de superficie y las variaciones admisibles del campo de desplazamientos de vigas en cinemática de sólidos  $\bar{\mathbf{u}}_b$ , se pueden transformar como se muestra en la Ecuación A.10 y la Ecuación A.12 luego de introducirse

en ellos las variaciones admisibles expresadas en la forma de la cinemática de vigas adoptada (Ecuación 3.4).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, d\Gamma_c = \\
& = \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \left( (\bar{v}_1 - \bar{\phi}_3 X_2) \mathbf{e}_1 + (\bar{v}_2 - \bar{\phi}_3 X_1) \mathbf{e}_2 + \left( \bar{v}_3 - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial X_3} X_1 - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \right) d\Gamma_c \quad (\text{A.10}) \\
& = \left( q_1^{t_v} \bar{v}_1|_L + q_2^{t_v} \bar{v}_2|_L + q_3^{t_v} \bar{v}_3|_L + m_1^{t_v} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x_3} \Big|_L + m_2^{t_v} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x_3} \Big|_L + m_3^{t_v} \bar{\phi}_3|_L \right) \\
& = \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b|_L
\end{aligned}$$

donde se han introducido las cargas de superficie generalizadas en cinemática de vigas  $\mathbf{t}_b$ , las que se escriben como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_b &= \begin{pmatrix} q_1^{t_v} \\ q_2^{t_v} \\ q_3^{t_v} \\ m_1^{t_v} \\ m_2^{t_v} \\ m_3^{t_v} \end{pmatrix} \\
q_1^{t_v} &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}_1 \, d\Gamma_c \\
q_2^{t_v} &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}_2 \, d\Gamma_c \\
q_3^{t_v} &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}_3 \, d\Gamma_c \\
m_1^{t_v} &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}_3 (-X_2) \, d\Gamma_c \\
m_2^{t_v} &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot \mathbf{e}_3 (-X_1) \, d\Gamma_c \\
m_3^{t_v} &= \int_{\Gamma_c} \mathbf{t}_b \cdot (-X_2 \mathbf{e}_1 + X_1 \mathbf{e}_2) \, d\Gamma_c
\end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Operando de la misma forma, los términos asociados a fuerzas másicas en el dominio de vigas se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\chi_b} \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, d\chi_b = \\
& = \int_{\chi_b} \mathbf{b}_b \cdot \left( (\bar{v}_1 - \bar{\phi}_3 X_2) \mathbf{e}_1 + (\bar{v}_2 - \bar{\phi}_3 X_1) \mathbf{e}_2 + \left( \bar{v}_3 - \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial X_3} X_1 - \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial X_3} X_2 \right) \mathbf{e}_3 \right) d\chi_b \quad (\text{A.12}) \\
& = \int_L \left( q_1^{b_v} \bar{v}_1 + q_2^{b_v} \bar{v}_2 + q_3^{b_v} \bar{v}_3 + m_1^{b_v} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial X_3} + m_2^{b_v} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial X_3} + m_3^{b_v} \bar{\phi}_3 \right) dL \\
& = \int_L \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, dL
\end{aligned}$$

donde el vector de fuerzas másicas generalizadas en cinemática de vigas se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_b &= \begin{pmatrix} q_1^{b_b} \\ q_2^{b_b} \\ q_3^{b_b} \\ m_1^{b_b} \\ m_2^{b_b} \\ m_3^{b_b} \end{pmatrix} \\
 q_1^{b_b} &= \int_{\Gamma} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{e}_1 \, d\Gamma \\
 q_2^{b_b} &= \int_{\Gamma} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{e}_2 \, d\Gamma \\
 q_3^{b_b} &= \int_{\Gamma} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{e}_3 \, d\Gamma \\
 m_1^{b_b} &= \int_{\Gamma} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{e}_3 (-X_2) \, d\Gamma \\
 m_2^{b_b} &= \int_{\Gamma} \mathbf{b}_b \cdot \mathbf{e}_3 (-X_1) \, d\Gamma \\
 m_3^{b_b} &= \int_{\Gamma} \mathbf{b}_b \cdot (-X_2 \mathbf{e}_1 + X_1 \mathbf{e}_2) \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Finalmente, reemplazando la Ecuación A.8, la Ecuación A.10 y la Ecuación A.12 en el principio variacional de la Ecuación 3.2 obtenemos el principio variacional que representa el problema de un pilote embebido en un medio sólido, el que se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 0 &= + \int_L \mathbf{m}_b \cdot \mathcal{B} \bar{\mathbf{u}}_b \, dL - \mathbf{t}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b|_L - \int_L \mathbf{b}_b \cdot \bar{\mathbf{u}}_b \, dL \\
 &+ \int_{\chi_s} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s - \int_{\Gamma_s} \mathbf{t}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\Gamma_s - \int_{\chi_s} \mathbf{b}_s \cdot \bar{\mathbf{u}}_s \, d\chi_s \\
 &- \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{m}_u \bar{\mathbf{u}}_b - \bar{\mathbf{u}}_s) \, d\Omega \\
 &- \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{m}_u \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_s) \, d\Omega \quad \forall \quad \bar{\mathbf{u}}_b, \bar{\mathbf{u}}_s, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \text{ admisibles}
 \end{aligned} \tag{A.14}$$



## Apéndice B

# Derivada del operador de proyección $\mathcal{P}$

La definición del operador de proyección  $\mathcal{P}$  es:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \cos \theta_v & \sin \theta_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_\phi & \sin \theta_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

donde las funciones trigonométricas se pueden definir en función de las componentes del vector de salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b]]$  como:

$$\begin{aligned} \cos \theta_v &= \frac{[[v_1]]}{[[v_\pi]]} = \frac{[[v_1]]}{\sqrt{[[v_1]]^2 + [[v_2]]^2}} \\ \sin \theta_v &= \frac{[[v_2]]}{[[v_\pi]]} = \frac{[[v_2]]}{\sqrt{[[v_1]]^2 + [[v_2]]^2}} \\ \cos \theta_\phi &= \frac{[[\phi_1]]}{[[\phi_\pi]]} = \frac{[[\phi_1]]}{\sqrt{[[\phi_1]]^2 + [[\phi_2]]^2}} \\ \sin \theta_\phi &= \frac{[[\phi_2]]}{[[\phi_\pi]]} = \frac{[[\phi_2]]}{\sqrt{[[\phi_1]]^2 + [[\phi_2]]^2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde se utilizó la definición alternativa para las componentes en el plano  $\pi$ :

$$\begin{aligned} [[v_\pi]] &= \sqrt{[[v_1]]^2 + [[v_2]]^2} \\ [[\theta_\pi]] &= \sqrt{[[\theta_1]]^2 + [[\theta_2]]^2} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

A la hora de evaluar las expresiones 4.52 y 4.53 es necesario hallar la derivada del operador de proyección  $\mathcal{P}$  respecto al vector de salto de desplazamientos  $[[\mathbf{u}_b]]$  aplicada a un vector, lo que requiere cierto detalle para que quede expresada en forma consistente. En este caso, y por

simplicidad frente a la notación invariante, se procede a analizar las componentes del producto en notación indicial, con lo que se las puede expresar como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{P}^T}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{t}_d^* \right)_{jk} &= \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial [\mathbf{u}_b]_k} (\mathbf{t}_d^*)_i \\ \left( \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial [\mathbf{u}_b]} \mathbf{u}_b \right)_{ik} &= \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial [\mathbf{u}_b]_k} (\mathbf{u}_b)_j \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Resta evaluar las derivadas de las componentes del operador de proyección  $\mathcal{P}$  respecto a las componentes del vector de salto de desplazamientos  $[\mathbf{u}_b]$ , las que se expresan como:

$$\begin{aligned} (\cos \theta_v)_{, [v_1]} &= \frac{1}{[v_\pi]} - \frac{[v_1]^2}{[v_\pi]^3} \\ (\cos \theta_v)_{, [v_2]} &= -\frac{[v_1][v_2]}{[v_\pi]^3} \\ (\sin \theta_v)_{, [v_1]} &= -\frac{[v_1][v_2]}{[v_\pi]^3} \\ (\sin \theta_v)_{, [v_2]} &= \frac{1}{[v_\pi]} - \frac{[v_2]^2}{[v_\pi]^3} \\ (\cos \theta_\phi)_{, [\phi_1]} &= \frac{1}{[\theta_\pi]} - \frac{[\phi_1]^2}{[\theta_\pi]^3} \\ (\cos \theta_\phi)_{, [\phi_2]} &= -\frac{[\phi_1][\phi_2]}{[\theta_\pi]^3} \\ (\sin \theta_\phi)_{, [\phi_1]} &= -\frac{[\phi_1][\phi_2]}{[\theta_\pi]^3} \\ (\sin \theta_\phi)_{, [\phi_2]} &= \frac{1}{[\theta_\pi]} - \frac{[\phi_2]^2}{[\theta_\pi]^3} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

## Apéndice C

# Modelos constitutivos de suelos

### C.1 Modelo Cam Clay Modificado

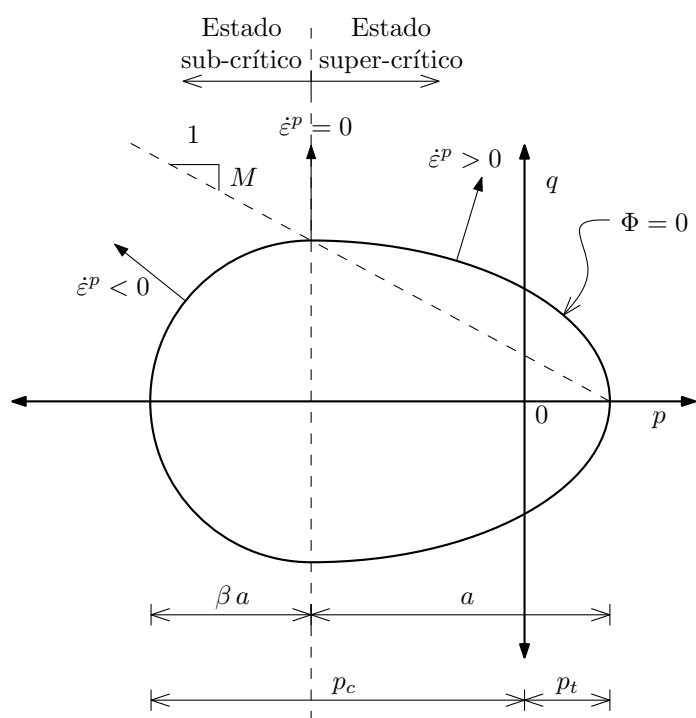


Figura C.1: Modelo Cam Clay Modificado (CCM). Superficie de fluencia en el espacio  $p - q$ .

Se resumen en esta sección los puntos principales referentes al modelo constitutivo Cam Clay Modificado [36] implementado en el código. En este modelo se adopta una ley lineal elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \quad (C.1)$$

donde  $\mathbf{C}^e$  es el tensor de módulos elásticos, el que se escribe como:

$$\mathbf{C}^e = 2G \mathbf{I}_d + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (C.2)$$

donde  $\mathbf{l}_d$  es el tensor de proyección desviador  $\mathbf{l}_d \equiv \mathbf{l}_s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{l}_s$  el tensor identidad de cuarto orden simétrico, de componentes  $l_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ .

La superficie de fluencia es una superficie elíptica en el espacio  $p - q$  de forma:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, a) = \frac{1}{b^2} (p(\boldsymbol{\sigma}) - p_t + a)^2 + \left( \frac{q(\boldsymbol{\sigma})}{M_c} \right)^2 - a^2 \quad (\text{C.3})$$

donde,  $M_c$  es la relación entre los dos radios de la elipse o la pendiente de la línea de estado crítico,  $a$  es el radio de la elipse sobre el eje de presión,  $p_t$  es la tensión hidrostática de fluencia y  $b$  toma los siguientes valores:

$$b = \begin{cases} 1 & \text{if } p \geq p_t - a \\ \beta & \text{if } p < p_t - a \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

La intersección de la línea de estado crítico y la elipse del modelo Cam Clay Modificado (CCM) define un punto que separa el estado super-crítico (a la derecha de este punto) del estado sub-crítico (a izquierda de este punto).

En este modelo CCM se adopta una regla de flujo plástico asociado, con lo que la tasa de deformaciones plásticas se puede escribir como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} (\mathbf{N}_d + N_v \mathbf{I}) \quad (\text{C.5})$$

donde se ha separado el vector normal  $\mathbf{N}$  en su parte desviadora  $\mathbf{N}_d$  y su parte volumétrica  $N_v$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_d &= \frac{3}{M^2} \mathbf{s} \\ N_v &= \frac{2}{b^2} (p(\boldsymbol{\sigma}) - p_t + a) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

La regla de flujo plástico asociado es compresible  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p < 0$  en el estado sub-crítico  $p(\boldsymbol{\sigma}) < p_t - a$ , dilatante  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p > 0$  en el estado super-crítico con  $p(\boldsymbol{\sigma}) > p_t - a$  e isócoro  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0$  para el estado crítico  $p(\boldsymbol{\sigma}) = p_t - a$ .

En este modelo CCM se adopta una regla de endurecimiento isotrópico lineal, dejando que el parámetro  $a$  sea función de una variable interna  $\alpha$ . Esta variable interna es función de la deformación plástica volumétrica:

$$\varepsilon_v^p \equiv \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{C.7})$$

Como en las aplicaciones geotécnicas los suelos están predominantemente sometidos a deformaciones de compresión, la variable interna de endurecimiento se adopta como:

$$\alpha \equiv -\varepsilon_v^p \quad (\text{C.8})$$

El parámetro  $a(\alpha)$  que define el tamaño de la superficie de fluencia, en este modelo evoluciona en forma lineal con el Módulo de endurecimiento plástico  $H$ :

$$a(\alpha) = a_0 + H \alpha \quad (\text{C.9})$$



Alternativamente, se puede definir la presión de fluencia  $p_c$  con endurecimiento como:

$$p_c(\alpha) \equiv (1 + \beta)a(\alpha) - p_t \quad (\text{C.10})$$

Se hace notar que el modelo CCM experimenta endurecimiento (expansión de la región elástica) solo en la región sub-crítica, es decir cuando  $p(\boldsymbol{\sigma}) < p_t - a$ , mientras que en la región super-crítica cuando  $p(\boldsymbol{\sigma}) > p_t - a$  se experimenta un ablandamiento de la superficie de fluencia. En el punto sobre la línea de estado crítico  $p(\boldsymbol{\sigma}) = p_t - a$ , el modelo se comporta como perfectamente plástico.

## C.2 Modelo de plasticidad J2

Se resumen en esta sección los puntos principales referentes al modelo constitutivo J2 o de Von Mises [36] implementado en el código. Una ley lineal elástica

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e = \quad (\text{C.11})$$

donde  $\mathbf{C}^e$  es el tensor de módulos elásticos, el que se escribe como:

$$\mathbf{C}^e = 2G \mathbf{l}_d + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{C.12})$$

donde  $\mathbf{l}_d$  es el tensor de proyección desviador  $\mathbf{l}_d \equiv \mathbf{l}_s - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{l}_s$  el tensor identidad de cuarto orden simétrico, de componentes  $l_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ .

La superficie de fluencia es una superficie cilíndrica en el espacio de tensiones principales con una función de fluencia que se adoptada de la siguiente forma:

$$\Phi_1(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_1) = \sqrt{3 J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} - \sqrt{3} s_u(\alpha_1) \quad (\text{C.13})$$

donde  $s_u$  es la resistencia al corte no drenado, la que se puede considerar como variable con el parámetro interno  $\alpha$ .

En este modelo se adoptan unas superficies de fluencia extras que limitan el desarrollo de presiones en el eje hidrostático. Estas funciones de fluencia se escriben como:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_2) &= p(\boldsymbol{\sigma}) - p_t(\alpha_2) = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) - p_t(\alpha_2) \\ \Phi_3(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_3) &= -p(\boldsymbol{\sigma}) + p_c(\alpha_3) = -\frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) + p_c(\alpha_3) \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

donde  $tr(\boldsymbol{\sigma})$  es la traza o primer invariante del tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ .

En este modelo se adopta una regla de flujo plástico asociado, con lo que la tasa de deformaciones plásticas, cuando hay flujo plástico en la superficie de fluencia de Von Mises, se puede escribir como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_1 \mathbf{N}_1 = \dot{\gamma}_1 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (\text{C.15})$$

(i) Estado *trial*. Dado  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  y las variables de estado en  $t_n$  se evalúa el estado de *trial*:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \alpha_{n+1}^{trial} &= \alpha_n \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ \mathbf{s}_{n+1}^{trial} &= 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} \\ p_{n+1}^{trial} &= K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} \\ q_{n+1}^{trial} &= \sqrt{3} J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})\end{aligned}$$

(ii) Criterio de fluencia

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \alpha_{n+1}^{trial}) \leq 0 = \begin{cases} \text{Verdadero} & \rightarrow \text{Paso Elástico} \rightarrow (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \\ \text{Falso} & \rightarrow \text{Paso Plástico} \rightarrow \text{(iii)} \end{cases}$$

(iii) Algoritmo de retorno para endurecimiento lineal y actualización de variables de estado. Se calcula el incremento del multiplicador plástico  $\Delta\gamma$  y  $\alpha_{n+1}$  resolviendo iterativamente el sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} (p(\alpha_{n+1}) - p_t + a(\alpha_{n+1}))^2 + \left( \frac{q(\Delta\gamma)}{M_c} \right)^2 - (a(\alpha_{n+1}))^2 = 0 \\ \alpha_{n+1} - \alpha_n + \Delta\gamma \frac{1}{b^2} (p(\alpha_{n+1}) - p_t + a(\alpha_{n+1})) = 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{n+1} &= \mathbf{s}(\Delta\gamma) = \frac{M_c^2}{M_c^2 + 6G \Delta\gamma} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} \\ q_{n+1} &= q(\Delta\gamma) = \frac{M_c^2}{M_c^2 + 6G \Delta\gamma} q_{n+1}^{trial} \\ p_{n+1} &= p(\alpha_{n+1}) = p_{n+1}^{trial} + K(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\end{aligned}$$

Se actualiza el tensor de tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}$$

Algoritmo C.1: Mapeo de retorno para el modelo CCM con endurecimiento isotrópico lineal

Tensor consistente constitutivo tangente Para el modelo CCM

$$\mathbf{C}^{\text{ep}}_{n+1} = + \frac{2G M_c^2}{M_c^2 + 6G \Delta\gamma} \left( \mathbf{I}_d - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

Algoritmo C.2: Tensor consistente constitutivo tangente Para el modelo CCM

cuando se presenta flujo plástico en las superficies que limitan la presión, la tasa de deformaciones plásticas se escribe como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}_2 \mathbf{N}_2 = \dot{\gamma}_2 \mathbf{1} \quad (\text{C.16})$$

y cuando se presenta flujo plástico desde la intersección de las dos superficies:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_i \dot{\gamma}_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_i \dot{\gamma}_i \mathbf{N}_i = \dot{\gamma}_1 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} + \dot{\gamma}_2 \mathbf{1} \quad (\text{C.17})$$

donde se ha considerado el vector normal  $\mathbf{N}_1$  propuesto por Prandtl-Reuss.

En este modelo se adopta que la tasa de la variable de estado que controla el endurecimiento,  $\dot{\gamma}$ , es igual a la tasa de la deformación plástica equivalente de Von Mises,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ . Esto se puede escribir como:

$$\dot{\gamma} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\| \quad (\text{C.18})$$

El parámetro interno que controla el endurecimiento se adopta en función de la variable de estado,  $\dot{\gamma}$ , de la siguiente forma:

$$\dot{\alpha}_i = \dot{\gamma}_i \quad (\text{C.19})$$

El parámetro  $s_u(\alpha)$  que define el tamaño de la superficie de fluencia, en este modelo evoluciona en forma lineal con el Módulo de endurecimiento plástico  $H$ :

$$s_u(\alpha) = s_u + H \alpha \quad (\text{C.20})$$

El esquema incremental para este algoritmo se resume en los cuadros siguientes.

(i) Estado *trial*. Dado  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  y las variables de estado en  $t_n$  se evalúa el estado de trial:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \alpha_{n+1}^{trial} &= \alpha_n \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} &= \mathbf{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ \mathbf{s}_{n+1}^{trial} &= 2G \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} \\ p_{n+1}^{trial} &= K \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} \\ q_{n+1}^{trial} &= \sqrt{3 J_2(\mathbf{s}_{n+1}^{trial})}\end{aligned}$$

(ii) Criterio de fluencia

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \alpha_{1\ n+1}^{trial}) \leq 0 \\ \Phi_2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \alpha_{2\ n+1}^{trial}) \leq 0 \\ \Phi_3(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}, \alpha_{3\ n+1}^{trial}) \leq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Verdadero} \rightarrow \text{Paso Elástico} \rightarrow (\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial} \\ \text{Falso} \rightarrow \text{Paso Plástico} \rightarrow \text{(iii)} \end{array}$$

(iii) Algoritmo de retorno

Retorno a la superficie de Von mises. Se calcula el incremento del multiplicador plástico  $\Delta\gamma_1$

$$\Delta\gamma_1 = \frac{\Phi_{1\ n+1}^{trial}}{3G + H_1}$$

Retorno a la superficie en compresión o tracción. Se calcula el incremento del multiplicador plástico  $\Delta\gamma_2$  o  $\Delta\gamma_3$

$$\Delta\gamma_2 = \frac{\Phi_{2\ n+1}^{trial}}{3K + H_2} \quad ; \quad \Delta\gamma_3 = \frac{\Phi_{3\ n+1}^{trial}}{3K + H_3}$$

Se actualizan las variables

$$\begin{aligned}\alpha_{i\ n+1} &= \alpha_{i\ n+1}^{trial} + \Delta\gamma_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \sum_i \Delta\gamma_i \mathbf{N}_{i\ n+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \sum_i i \Delta\gamma_i \mathbf{N}_{i\ n+1} \\ \mathbf{s}_{n+1} &= \left( 1 - \frac{\Delta\gamma_1 3G}{q_{n+1}^{trial}} \right) \mathbf{s}_{n+1}^{trial} \\ p_{n+1} &= p_{n+1}^{trial} - 3K \Delta\gamma_2 + 3K \Delta\gamma_3 \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{s}_{n+1} + p_{n+1} \mathbf{I}\end{aligned}$$

Algoritmo C.3: Mapeo de retorno para el modelo J2 con endurecimiento isotrópico lineal

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{\text{ep}}_{n+1} = & + 2G \left( 1 - \frac{\Delta\gamma 3G}{q_{n+1}^{\text{trial}}} \right) \mathbf{I}_d \\
& + 6G^2 \left( \frac{\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{trial}}} - \frac{1}{3G + H} \right) \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \otimes \bar{\mathbf{N}}_{n+1} \\
& + K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}
\end{aligned}$$

donde el vector normal  $\bar{\mathbf{N}}_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N}_{n+1}$ .

Algoritmo C.4: Tensor consistente constitutivo tangente para el modelo J2 en la superficie de fluencia de Von Mises  $\Phi_1$



# Bibliografía

- [1] LRFD Aashto. Bridge design specifications, 1998.
- [2] M. Ashour and H. Ardalan. Employment of the p-multiplier in pile-group analysis. *Journal of Bridge Engineering*, 16(5):612–623, 2011.
- [3] M. Ashour, G. Norris, and P. Pilling. Lateral loading of a pile in layered soil using the strain wedge model. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 124(4):303–315, 1998.
- [4] M. Ashour, G. Norris, and P. Pilling. Strain wedge model capability of analyzing behavior of laterally loaded isolated piles, drilled shafts, and pile groups. *Journal of Bridge Engineering*, 7(4):245–254, 2002.
- [5] M. Ashour, P. Pilling, and G. Norris. Lateral behavior of pile groups in layered soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130(6):580–592, 2004.
- [6] P.K. Banerjee and R. Butterfield. *Boundary element methods in engineering science*, volume 17. McGraw-Hill London, 1981.
- [7] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [8] O.A. Bauchau and J.I. Craig. Euler-bernoulli beam theory. In *Structural Analysis*, pages 173–221. Springer, 2009.
- [9] M.A. Biot. Bending of an infinite beam on an elastic foundation. *Journal of Applied Mechanics Transactions. ASME.*, 59:A1–A7, 1937.
- [10] P.J. Blanco, S.A. Feijóo, and Urquiza. A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1577–1602, 2008.
- [11] R.B.J. Brinkgreve and P.A. Vermeer. PLAXIS 3D foundation. *Delft University of Technology & Plaxis*, 2007.

- [12] B.B. Broms. Lateral resistance of piles in cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 90(2):27–64, 1964.
- [13] W.R. Cox, L.C. Reese, B.R. Grubbs, et al. Field testing of laterally loaded piles in sand. In *Offshore Technology Conference*. Offshore Technology Conference, 1974.
- [14] M. Cubrinovski, K. Ishihara, and H. Poulos. Pseudo-static analysis of piles subjected to lateral spreading. *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 42(1), 2009.
- [15] M.T. Davisson and H.L. Gill. Laterally loaded piles in a layered soil system. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(3):63–94, 1963.
- [16] T.W. Dunnavant and M.W. O’Neill. Experimental p-y model for submerged, stiff clay. *Journal of Geotechnical Engineering*, 115(1):95–114, 1989.
- [17] H.K. Engin, E.G. Septanika, and R.B.J. Brinkgreve. *Improved embedded beam elements for the modelling of piles*. Proceedings. Tenth International Conference on numerical models in geomechanics - NUMOG X, Rhodes, Greece, 2007.
- [18] M.M. Filonenko-Borodich. Some approximate theories of elastic foundation. *Uchenyie Zapiski Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta Mekhanica. (in Russian)*, 46:3–18, 1940.
- [19] K. Fleming, A. Weltman, M. Randolph, and K. Elson. *Piling engineering*. CRC Press, 2 & 4 Park Square, Milton Park, Abingdon Oxfordshire, OX14 4RN, UK, 2008.
- [20] M.A. Gabr, R.H. Borden, K.H. Cho, S.C. Clark, and J.B. Nixon. P-y curves for laterally loaded drilled shafts embedded in weathered rock. Technical Report FHWA NC 2002–08, North Carolina Dept. of Transportation, 2002.
- [21] M. Hetényi. *Beams on Elastic Foundation: Theory with Applications in the Fields of Civil and Mechanical Engineering*. University of Michigan Press, 1946.
- [22] Hibbitt, Karlsson, and Sorensen. *ABAQUS/Standard user’s manual*, volume 1. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 2001.
- [23] M.I. Hoit, M. McVay, C. Hays, and P.W. Andrade. Nonlinear pile foundation analysis using Florida-Pier. *Journal of Bridge Engineering*, 1(4):135–142, 1996.
- [24] A.M. Kaynia and E. Kausel. Dynamic behavior of pile groups. In *Proc. of the 2nd int. conference on numerical methods in offshore piling*, pages 509–532, 1982.
- [25] A.D. Kerr. Elastic and viscoelastic foundation models. *Journal of Applied Mechanics*, 31:491–498, 1964.



- [26] R. Liang, K. Yang, and J. Nusairat. P-y criterion for rock mass. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(1):26–36, 2009.
- [27] H. Matlock. Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay. *Offshore Technology in Civil Engineering's Hall of Fame Papers from the Early Years*, pages 77–94, 1970.
- [28] H. Matlock and L.C. Reese. Generalized solutions for laterally loaded piles. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 127(1):1220–1247, 1962.
- [29] H. Matlock and E.A. Ripperger. Procedures and instrumentation for tests on a laterally loaded pile. In *Proceedings, Eighth Texas Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1956.
- [30] B. McClelland and J.A. Focht. Soil modulus for laterally loaded piles. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 123(1):1049–1063, 1958.
- [31] M.C. McVay and L. Niraula. Development of py curves for large diameter piles/drilled shafts in limestone for FBPIER. Technical report, University of Florida, Dept. of Civil and Coastal Engineering, 365 Weil Hall/ P.O. Box 116580 Gainesville, FL 32611-6580, 2004.
- [32] R.D. Mindlin. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, 7(5):195–202, 1936.
- [33] C. Moler et al. Matlab user's guide. Technical report, The Mathworks, Inc., Natick, MA, 1998.
- [34] J.M. Murchison and M.W. O'Neill. Evaluation of py relationships in cohesionless soils. In *Analysis and design of pile foundations*, pages 174–191. ASCE, 1984.
- [35] V. Murti, Y. Wang, and S. Valliappan. Numerical inverse isoparametric mapping in 3D FEM. *Computers & Structures*, 29(4):611–622, 1988.
- [36] E.A. Neto, D. Periãe, and D.R.J. Owen. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, The Atrium, Southern Gate, Chichester West Sussex PO19 8SQ, UK, 2008.
- [37] G.M. Norris. Theoretically based BEF laterally loaded pile analysis. In *3rd International Conference on Numerical Methods in Offshore Piling, Nantes, France*, pages 361–386, 1986.
- [38] M.W. O'Neill and S.M. Gazioglu. An evaluation of p-y relationships in clay. Technical Report UHCE-84-3, A report to the American Petroleum Institute, (PRAC 82-41-2), University of Houston-University Park, Department of Civil Engineering, April 1984.

- [39] M.W. O'Neill and J.M. Murchinson. An evaluation of p-y relationships in sands. Technical Report GT-DF02-83, A report to the American Petroleum Institute, (PRAC 82-41-1), University of Houston-University Park, Department of Civil Engineering, May 1983.
- [40] P.L. Pasternak. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvui Arkhitekture, Moscow, (in Russian)*, 1954.
- [41] F. Pinto and C.A. Prato. Three dimensional indirect boundary element method formulation for dynamic analysis of frames buried in semi-infinite elastic media. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 132(3):967–978, 2006.
- [42] H.G. Poulos. The behavior of laterally loaded piles i): Single piles. *Journal of the Soil Mechanics & Foundations Division. ASCE.*, 97(sm5):711–731, 1971.
- [43] H.G. Poulos. The behavior of laterally loaded piles ii): Pile groups. *Journal of the Soil Mechanics & Foundations Division. ASCE.*, 97(sm5):733–751, 1971.
- [44] H.G. Poulos and E.H. Davis. *Elastic solutions for soil and rock mechanics*. John Wiley. New York. US, 1974.
- [45] H.G. Poulos and E.H. Davis. *Pile foundation analysis and design*. John Wiley & Sons, Ltd., Baffins Lane Chichester, Sussex England, 1980.
- [46] M.F. Randolph. The response of flexible piles to lateral loading. *Geotechnique*, 31(2):247–259, 1981.
- [47] M.F. Randolph and G.T. Houlsby. The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil. *Geotechnique*, 34(4):613–623, 1984.
- [48] L.C. Reese. Analysis of laterally loaded piles in weak rock. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(11):1010–1017, 1997.
- [49] L.C. Reese, W.R. Cox, and F.D. Koop. Analysis of laterally loaded piles in sand. In *Proceedings, 5th Annual Offshore Technology Conference, Paper No. OTC 2080, Houston, TX*, pages 473–485. ASCE, 1974.
- [50] L.C. Reese, W.R. Cox, and F.D. Koop. *Analysis of Laterally Loaded Piles in Sand*. Proceedings. Sixth Annual Offshore Technology Conference, Houston, Texas, 1974.
- [51] L.C. Reese and H. Matlock. *Non-dimensional solutions for laterally-loaded piles with soil modulus assumed proportional to depth*. Association of Drilled Shaft Contractors, 1956.

- [52] L.C. Reese and W.R. Sullivan. *Documentation of Computer Program COM 624: Parts I and II, Analysis of Stresses and Deflections for Laterally-loaded Piles, Including Generation of PY Curves*. University of Texas, Austin, 1980.
- [53] L.C. Reese, S.T. Wang, J.A. Arrellaga, and J. Hendrix. A program for the analysis of piles and drilled shafts under lateral loads. *LPILE version*, 4, 2000.
- [54] L.C. Reese and R.C. Welch. Lateral loading of deep foundations in stiff clay. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 101(7):633–649, 1975.
- [55] E. Reissner. A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 25:144–155, 1958.
- [56] R. Ribó, M. Riera, E.E. Terceno, J.S.P. Ronda, A.C. Sans, A.M. Ribera, and S.G. Horcas. GiD, the personal pre and post processor. Technical report, CIMNE, 1997.
- [57] M. Sadek and I. Shahrour. A three dimensional embedded beam element for reinforced geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28:931–946, 2004.
- [58] J.C. Simof and T.J.R. Hughes. *Computational inelasticity*. Springer, 2008.
- [59] A.W. Skempton. The bearing capacity of clays. *Reprinted from Building Research Congress, London*, (1):180–189, 1951.
- [60] K.V. Terzaghi. Evaluation of coefficient of subgrade reaction. *Geotechnique*, 5(4):297–326, 1955.
- [61] D.F. Turello and F. Pinto. Efecto del tamaño de malla en la modelación numérica del comportamiento lateral de pilotes mediante elementos de barra embebidos en sólidos. *Mecánica Computacional*, Volume XXX(Number 13. Solid Mechanics (B)):141–152, 2011.
- [62] D.F. Turello, F. Pinto, and Sánchez P.J. Modelación de la interacción suelo-pilote en pilotes cargados lateralmente mediante elementos de viga embebidos en sólidos. *Mecánica Computacional*, Volume XXXIII(Number 13. Solid Mechanics (B)):879–894, 2014.
- [63] D.F. Turello, F. Pinto, and Sánchez P.J. Embedded beam element with interaction surface for lateral loading of piles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, doi: 10.1002/nag.2416., 2015.
- [64] A.B. Vesic. Beams on elastic subgrade and the Winkler’s hypothesis. In *Proceedings, 5th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, volume 1, pages 845–850, 1961.

- [65] V.Z Vlasov and U.N. Leontiev. Beams, plates and shells on elastic foundations. Technical report, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (Translated from Russian)., 1966.
- [66] E. Winkler. Die lehre von der elastizität und festigkeit (The Theory of Elasticity and Stiffness). *H. Dominicus Prague, Czechoslovakia*, 1867.
- [67] O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung. *The finite element method in structural and continuum mechanics: numerical solution of problems in structural and continuum mechanics*, volume 1. McGraw-Hill London, New York, 1967.
- [68] H. Zimmermann. *Die Berechnung des Eisenbahn Oberbaues. (The calculation of railway super-structures)*. Ernst & Korn, Berlin, 1888.