Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo especial de la Licenciatura en Ciencias de la Computación

Representaciones globales para cuasivariedades de congruencias relativas distributivas

Autor:
Mauro Schilman
mas0109@famaf.unc.edu.ar

Director:
Dr. Diego José Vaggione
vaggione@famaf.unc.edu.ar

Marzo de 2015

A mi mamá, Sandra,
que me enseñó con tanto amor y dedicación a perseguir mis sueños
y que siempre apoyó incondicionalmente todas mis pasiones.

Abstract

Global subdirect products possess the property of preserving sentences of the form $\forall\exists! \bigwedge p = q$. This class of sentences is wide enough to allow interesting results to be expressed (such as Nachbin theorem, among others). This motivates the search for a class of factors as simple as possible to represent every algebra of a certain class as a global subdirect product of some of them, so that checking sentences on them is very simple. A potential candidate for building such product is the class of globally indecomposable algebras. Up until now only global representations with indecomposable factors of certain varieties were known, but global representations of quasivarieties remained unstudied. A key tool for finding such representations is Priestley duality. This work begins with a preliminary study of the basic concepts of universal algebra involved and of some particular varieties and quasivarieties. Then it continues with an exposition of Priestley duality. Afterwards a compilation of some central theorems and an analysis of global representations for varieties are done. Finally it concludes with a generalization of such theorems for quasivarieties and the presentation of global representations found for a pair of particular cases of them.

Clasification: F.4.1 - Mathematical Logic.

Keywords: universal algebra, lattice theory, global representations, varieties and cuasivarieties.

Resumen

Los productos subdirectos globales poseen la propiedad de preservar sentencias de la forma $\forall\exists! \bigwedge p = q$. Esta clase de sentencias es lo suficientemente amplia como para permitir expresar resultados interesantes (como el teorema de Nachbin, entre otros). Esto motiva la búsqueda de una clase de factores lo más sencilla posible para representar toda álgebra de cierta clase como producto subdirecto global de algunos de ellos, de manera que comprobar sentencias en ellos sea muy simple. Una candidata potencial para formar dicho producto es la clase de álgebras globalmente indescomponibles. Hasta el momento sólo se conocían representaciones globales mediante factores indescomponibles de ciertas variedades, pero aún no se habían estudiado las representaciones globales de cuasivariedades. Una herramienta clave para encontrar dichas representaciones es la dualidad de Priestley. Este trabajo comienza con un estudio preliminar de los conceptos básicos del álgebra universal involucrados y de algunas variedades y cuasivariedades particulares. Luego continúa con una exposición de la dualidad de Priestley. Más adelante, se realiza el compilado de algunos teoremas centrales y el análisis de representaciones globales de variedades. Finalmente concluye con la generalización de dichos teoremas para cuasivariedades y la presentación de representaciones globales halladas para un par de casos particulares de las mismas.

Clasificación: F.4.1 - Mathematical Logic.

Palabras clave: álgebra universal, teoría de reticulados, representaciones globales, variedades y cuasivariedades.

Índice General

1 Introducción **5**

2 Preliminares **7**
2.1 Álgebras, variedades y cuasivariedades 7
2.2 Reticulados 7
2.3 p-álgebras distributivas 9
2.4 Álgebras de Stone 11
2.5 p-álgebras distributivas punteadas 12
2.6 Álgebras de Stone punteadas 12
2.7 Operadores de clases 13
2.8 Congruencias 14
2.9 Congruencias relativas 19
2.10 Productos subdirectos globales 20

3 Dualidad de Priestley **22**
3.1 Una topología sobre los filtros primos 22
3.2 Espacios de Priestley 23
3.3 Dualidad 24

4 Representaciones globales de variedades **25**
4.1 Teoremas de representaciones globales para variedades 25
4.2 Reticulados acotados distributivos 26
4.3 p-álgebras distributivas 34
4.4 Álgebras de Stone 39

5 Representaciones globales de cuasivariedades **41**
5.1 Teoremas de representaciones globales para cuasivariedades . . . 41
5.2 p-álgebras distributivas punteadas 42
5.3 Álgebras de Stone punteadas 48

6 Conclusión **50**

1 Introducción

El *álgebra universal* es una rama de las matemáticas que estudia las estructuras algebraicas en su conjunto, en oposición al álgebra clásica cuyo objeto de estudio son las estructuras algebraicas en particular, tales como anillos, grupos, cuerpos, módulos, etc. Este enfoque global, además de ser unificador de las teorías algebraicas existentes, también provee un mayor entendimiento de la matemática subyacente a dichas teorías mediante profundos teoremas, ejemplos y contraejemplos, tales como los teoremas de isomorfismo o el teorema HSP de Birkhoff, por lo cual en este sentido el álgebra universal resulta paradigmática del conocido principio de Aristóteles enunciado en el tratado *Metaphysica*: "El todo es más que la suma de sus partes".

Uno de los aspectos fundamentales del álgebra universal es el estudio de la satisfactibilidad de sentencias de primer orden en ciertas estructuras algebraicas. Para ello busca representar a las mismas como combinación (mediante ciertas operaciones) de estructuras pertenecientes a un subconjunto más simple de manera que la representación preserve la satisfactibilidad y así sea más sencillo comprobar las sentencias en dicho subconjunto.

En el caso de sentencias universales ecuacionales o *identidades*, tenemos como herramienta fundamental para su estudio el teorema de representación subdirecta de Birkhoff. El teorema dice básicamente que toda álgebra se puede representar como *producto subdirecto* de álgebras *irreducibles* (veremos más adelante una definición precisa de esta operación y del concepto de irreducibles). Esta herramienta es muy útil, ya que las identidades son preservadas por los productos subdirectos, es decir, un producto subdirecto satisface una identidad si y solamente si la satisfacen cada uno de los factores.

Ahora bien, cuando consideramos propiedades que involucran cuantificadores existenciales la situación se complica ya que, por ejemplo, si un álgebra es representada como producto subdirecto de otras, aunque dichas propiedades se cumplan en los factores, en general éstas no necesariamente se cumplirán en el álgebra original. Esto condujo a Krauss y Clark [5] a introducir un nuevo concepto en álgebra universal, a saber, el de *producto subdirecto global* (también diferimos su definición formal, pero es la misma operación que el producto subdirecto con algunas propiedades adicionales). Dichos productos poseen la propiedad de preservar sentencias de la forma $\forall\exists! \bigwedge p = q$. Esta clase de sentencias ya es lo suficientemente amplia como para permitirnos expresar resultados interesantes (como el teorema de Nachbin [7], entre otros).

Dicha preservación motiva la búsqueda de una representación global para toda álgebra de cierta clase, es decir expresarla como producto subdirecto global de una clase de factores lo más sencilla posible. De esta manera, comprobar sentencias en las álgebras representadas se vuelve una tarea mucho más simple. Allí es donde radica el poder de las representaciones globales.

Una clase de factores que es candidata potencial para dicho producto es la clase de álgebras *globalmente indescomponibles*, las cuales no pueden ser representadas como producto subdirecto global de factores aún más simples que ellas mismas, y son en ese sentido *minimales*.

Hasta el momento sólo se conocían representaciones globales mediante factores indescomponibles de ciertas *variedades* (clases de álgebras axiomatizables por identidades) [3], pero aún no se habían estudiado las representaciones globales de *cuasivariedades* (clases de álgebras axiomatizables por *cuasiidentidades*, es decir sentencias de la forma $\forall x_1 ... x_n \ (\bigwedge_{i=1}^{m} p_i = q_i \to p = q)$).

Veremos que un concepto clave a la hora de encarar dicha búsqueda es el de *dualidad*, que es a su vez otro gran aporte del álgebra universal. La idea básica es transformar (dualizar) ciertas estructuras en otras que resultan matemáticamente equivalentes, pero que aportan una claridad conceptual que no solamente permite resolver los problemas planteados, sino que en muchos casos además convierte una solución existencial en constructiva. En palabras de J.D.H. Smith: "Lo que se ve desordenado y complicado en un marco particular puede resultar ser simple y obvio en el marco general apropiado". En nuestro caso la *dualidad de Priestley*, que vincula reticulados distributivos acotados con espacios topológicos ordenados, será herramienta ubicua y productora de soluciones elegantes (según criterio personal).

Más concretamente, el problema que abordamos en este trabajo (y que logramos resolver para dos cuasivariedades en particular) es:

Problema 1. *Sea $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad. Encontrar una clase $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}$ tal que:*

1. *Todo miembro de $\mathcal{Q}$ es isomorfo a un producto subdirecto global con factores en $\mathcal{F}$.*

2. *Todo miembro de $\mathcal{F}$ es globalmente indescomponible en $\mathcal{Q}$.*

Para ello, primero realizamos en el Capítulo 2 un estudio preliminar de los conceptos básicos del álgebra universal involucrados y de las variedades y cuasivariedades particulares que serán investigadas. A continuación presentamos la dualidad de Priestley en el Capítulo 3. Luego compilamos algunos teoremas centrales y analizamos representaciones globales de variedades en el Capítulo 4. Finalmente en el Capítulo 5 presentamos generalizaciones de dichos teoremas para cuasivariedades y analizamos las representaciones globales halladas.

2 Preliminares

2.1 Álgebras, variedades y cuasivariedades

Definición 2.1. Un *tipo* τ es un conjunto de símbolos de función cada uno con un entero no negativo asociado, llamado aridad. El subconjunto de símbolos de aridad n de τ se denota τ_n.

Definición 2.2. Un *álgebra de tipo* τ es un par $\mathbf{A} = (A, F)$ donde A es un conjunto no vacío, llamado *universo*, y F una familia de operaciones tal que para cada símbolo de función f de aridad n en τ hay una operación $f^{\mathbf{A}}$ de aridad n en F.

De ahora en más vamos a denotar un álgebra con una tupla donde el primer elemento es el universo y el resto las operaciones. En ocasiones, cuando se sobreentienda por el contexto, hablaremos de un subconjunto de un álgebra, refiriéndonos a un subconjunto del universo del álgebra.

Definición 2.3. Sea $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ un conjunto de variables. El conjunto T de *términos de tipo* τ se define como el menor conjunto tal que

(i) $X \cup \tau_0 \subseteq T$

(ii) Si $p_1, ..., p_n \in T$ *y* $f \in \tau_n$ *entonces* $f(p_1, ..., p_n) \in T$

Definición 2.4. Una *identidad de tipo* τ es una sentencia de la forma $\forall x_1...x_n\ p = q$, donde $p = p(\vec{x})$ y $q = q(\vec{x})$ son términos de tipo τ. Una *cuasiidentidad de tipo* τ es una sentencia de la forma $\forall x_1...x_n\ \ (\bigwedge_{i=1}^{m} p_i = q_i \to p = q)$, donde $p_i = p_i(\vec{x})$, $q_i = q_i(\vec{x})$, $p = p(\vec{x})$ y $q = q(\vec{x})$ son términos de tipo τ.

Definición 2.5. Una *variedad* es una clase de álgebras axiomatizable por identidades. Una *cuasivariedad* es una clase de álgebras axiomatizable por cuasiidentidades.

2.2 Reticulados

Los reticulados conforman la primera clase de álgebras en nuestro estudio.

Definición 2.6. Un *reticulado* es un álgebra con dos operaciones binarias $(L, \vee, \wedge)$ que satisface las siguientes identidades:

1. $\forall a, b, c \in L \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (Asociatividad de join)
2. $\forall a, b, c \in L \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (Asociatividad de meet)
3. $\forall a, b \in L \quad a \vee b = b \vee a$ (Conmutatividad de join)

4. $\forall a, b \in L \quad a \wedge b = b \wedge a$ (Conmutatividad de meet)

5. $\forall a \in L \quad a \vee a = a$ (Idempotencia de join)

6. $\forall a \in L \quad a \wedge a = a$ (Idempotencia de meet)

7. $\forall a, b \in L \quad a \vee (a \wedge b) = a$ (Absorción de join respecto de meet)

8. $\forall a, b \in L \quad a \wedge (a \vee b) = a$ (Absorción de meet respecto de join)

En la misma definición esta clase está axiomatizada mediante identidades por lo cuál resulta una variedad.

Es fácil ver que los axiomas de reticulado inducen un orden en la estructura dado por

$$a \leq b \iff a \vee b = b$$

y que $\vee, \wedge$ coinciden con el supremo y el ínfimo, respectivamente.

Esto motiva la siguiente definición

Definición 2.7. Un reticulado $(L, \vee, \wedge)$ se dice *completo* si $\forall S \subseteq L$ existen $Sup(S)$ e $Inf(s)$ respecto del orden inducido, y en dicho caso se denotan $\bigvee S$ y $\bigwedge S$, respectivamente.

Definición 2.8. Un *reticulado acotado* es un álgebra $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, donde $(L, \vee, \wedge)$ es un reticulado y $0, 1$ son constantes (operaciones 0-arias) que satisfacen

$$\forall a \in L \quad a = a \vee 0$$
$$\forall a \in L \quad a = a \wedge 1$$

Los reticulados acotados también forman una variedad.

Definición 2.9. Un reticulado $(L, \vee, \wedge)$ es *distributivo* si satisface la identidad

$$\forall a, b, c \in L \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Los reticulados distributivos también forman una variedad.

Definición 2.10. Un *reticulado distributivo acotado* es un reticulado acotado $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge)$ es distributivo.

Denotaremos con $\mathcal{D}_{01}$ a la clase de los reticulados distributivos acotados.

$\mathcal{D}_{01}$ también es una variedad.

Definición 2.11. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$. Un subconjunto no vacío P de L es llamado *filtro* si:

- $a, b \in P$ implica $a \wedge b \in P$
- $a \in L, b \in P$ y $a \geq b$ implica $a \in P$

Un filtro es llamado *primo* si además satisface:

- $a \vee b \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$
- P es subconjunto propio de L.

Al conjunto de filtros primos de $\mathbf{L}$ lo denotaremos $X(\mathbf{L})$.

Los elementos de $X(\mathbf{L})$ están ordenados naturalmente por la inclusión de conjuntos.

Definición 2.12. Un *álgebra de Boole* es un álgebra $(B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ con $(B, \vee, \wedge, 0, 1) \in \mathcal{D}_{01}$ y una operación unaria que satisface las identidades

$$\begin{aligned} \forall x \in B \quad & x \wedge x^c = 0 \\ \forall x \in B \quad & x \vee x^c = 1 \end{aligned}$$

Podemos ver que la clase de las álgebras de Boole también es una variedad.

2.3 p-álgebras distributivas

Definición 2.13. Una *p-álgebra distributiva* es un álgebra $(L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1)$ con $(L, \vee, \wedge, 0, 1) \in \mathcal{D}_{01}$ y una operación unaria que satisface

$$z \wedge x = 0 \textit{ sii } z \leq x^* \quad \forall x, z \in L$$

Denotaremos con $\mathcal{P}$ a la clase de las p-álgebras.

Lema 2.14. *Sea $(L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1) \in \mathcal{P}$. Se cumplen las siguientes propiedades $\forall x, y, z \in L$*

1. $x \wedge x^* = x^* \wedge x^{**} = 0$
2. $x \leq x^{**}$
3. $x^* = x^{***}$
4. $z \wedge x = 0$ *sii* $z \wedge x^{**} = 0$

5. $x \leq y$ *implica* $y^* \leq x^*$

6. $(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*$

7. $(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**}$

8. $(x^{**} \vee y^{**})^{**} = (x \vee y)^{**}$

9. $(x \vee x^*)^* = 0$

10. $x = x^{**}$ *sii* $x = y^*$ *para algún* y.

Prueba. Daremos la prueba del inciso 7 a continuación. Los demás incisos son rutina.

$x \wedge y \leq x \overset{(5)}{\Longrightarrow} x^* \leq (x \wedge y)^* \overset{(5)}{\Longrightarrow} (x \wedge y)^{**} \leq x^{**}$

Análogamente $(x \wedge y)^{**} \leq y^{**}$, luego $(x \wedge y)^{**} \leq x^{**} \wedge y^{**}$.

Por otro lado

$$x^{**} \wedge y^{**} \leq (x \wedge y)^{**} \iff x^{**} \wedge y^{**} \wedge (x \wedge y)^* = 0 \iff x^{**} \wedge (x \wedge y)^* \leq y^{***} \overset{(3)}{=} y^*$$

$$\iff x^{**} \wedge y \wedge (x \wedge y)^* = 0 \iff y \wedge (x \wedge y)^* \leq x^{***} \overset{(3)}{=} x^* \iff x \wedge y \wedge (x \wedge y)^* = 0$$

y esto último es cierto, luego $x^{**} \wedge y^{**} \leq (x \wedge y)^{**}$ y por lo tanto $x^{**} \wedge y^{**} = (x \wedge y)^{**}$.

∎

Proposición 2.15. *$\mathcal{P}$ es una variedad.*

Prueba. Ya vimos que $\mathcal{D}_{01}$ es una variedad, luego debemos axiomatizar mediante identidades a la propiedad

$$z \wedge x = 0 \text{ sii } z \leq x^* \quad \forall x, z \in L$$

Para ello veremos que basta con $(1), (2), (3), (7), (9)$ de la proposición 2.14 y la identidad $0^* = 1$.

Por un lado

$$z \leq x^* \implies x \wedge z \leq x \wedge x^* \overset{(1)}{=} 0 \implies x \wedge z = 0$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} x \wedge z = 0 \implies z &\overset{(2)}{\leq} z^{**} = 1 \wedge z^{**} = 0^* \wedge z^{**} \overset{(9)}{=} (x \vee x^*)^{**} \wedge z^{**} \\ &\overset{(7)}{=} ((x \vee x^*) \wedge z)^{**} = ((x \wedge z) \vee (x^* \wedge z))^{**} = (0 \vee (x^* \wedge z))^{**} \\ &= (x^* \wedge z)^{**} \overset{(7)}{=} x^{***} \wedge z^{**} \overset{(3)}{=} x^* \wedge z^{**} \leq x^* \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$z \wedge x = 0 \text{ sii } z \leq x^* \quad \forall x, z \in L$$

y luego $\mathcal{P}$ es una variedad.

∎

Definición 2.16. Para $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$ definimos el conjunto de *elementos densos* como $D(\mathbf{L}) = \{x \in L : x^* = 0\}$.

Definición 2.17. Sea X un conjunto parcialmente ordenado. Definimos

$$\mathrm{Min}(X) = \{m \in X : m \text{ es minimal}\}$$
$$\mathrm{Max}(X) = \{m \in X : m \text{ es maximal}\}$$

Veamos algunas propiedades

Lema 2.18. *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$, entonces*

1. $D(\mathbf{L})$ *es un filtro.*
2. $D(\mathbf{L}) = \{x \vee x^* : x \in L\}$.
3. $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) = \{p \in X(\mathbf{L}) : D(\mathbf{L}) \subseteq p\}$. *Más aún,* $D(\mathbf{L}) = \bigcap_{p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))} p$.

Prueba. Los incisos 1 y 2 son rutina.

Veamos la demostración del inciso 3.

Supongamos $D(\mathbf{L}) \subseteq p \subsetneq q$ con q un filtro, luego $\exists x \in q \setminus p$ y como por el inciso 2, $x \vee x^* \in D(\mathbf{L})$, tenemos $x \vee x^* \in p$. Como $p \in X(\mathbf{L})$ y $x \notin p$, debe ser $x^* \in p$, pero entonces $x^* \in q$ y luego $x \wedge x^* = 0 \in q$, por lo cual $q = L$ y p resulta maximal.

Por otro lado, dado p un filtro, si $\exists x \notin p$ tal que $x^* \notin p$, entonces p no es maximal, pues es fácil ver que $p_x = \{z \in L : z \geq x \wedge u \text{ con } u \in p\}$ es un filtro que cumple $p \subsetneq p' \subsetneq L$.

Entonces, si p es maximal, $\forall x \notin p, x^* \in p$. Supongamos $\exists d \in D(\mathbf{L})$ con $d \notin p$, luego $d^* = 0 \in p$. Absurdo pues $p \in X(\mathbf{L})$.

Esto significa que $D(\mathbf{L}) \subseteq p$.

Podemos concluir entonces que $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) = \{p \in X(\mathbf{L}) : D(\mathbf{L}) \subseteq p\}$.

Finalmente, sea $x \notin D(\mathbf{L})$, entonces $x^* \neq 0$ y por lo tanto $\exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ tal que $x^* \in m$, pero entonces $x \notin m$ o de lo contrario $0 = x \wedge x^* \in m$ que es absurdo. Con lo cual $x \notin \bigcap_{p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))} p$ y por lo tanto $D(\mathbf{L}) = \bigcap_{p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))} p$ como queríamos ver.

∎

2.4 Álgebras de Stone

Definición 2.19. Una *álgebra de Stone* es un álgebra $(S, \vee, \wedge, ^*, 0, 1) \in \mathcal{P}$ que satisface la identidad

$$\forall x \in L \quad x^* \vee x^{**} = 1$$

Denotaremos con $\mathcal{S}$ a la clase de las álgebras de Stone.

Como sólo agregamos una identidad a la clase $\mathcal{P}$, también $\mathcal{S}$ resulta una variedad.

2.5 p-álgebras distributivas punteadas

Definición 2.20. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$, entonces $x \in L$ se dice *dual denso* si

$$\forall z \in L \quad x \vee z = 1 \implies z = 1$$

Definición 2.21. Una *p-álgebra distributiva punteada* es un álgebra $(L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1, c)$ con $(L, \vee, \wedge, ^*, 0, 1) \in \mathcal{P}$ y c una constante que satisface

$$D(\mathbf{L}) = [c, 1] \text{ y } c \text{ es dual denso}$$

Denotaremos con $\mathcal{P}_c$ a la clase de p-álgebras distributivas punteadas.

Proposición 2.22. *$\mathcal{P}_c$ es una cuasivariedad.*

Prueba. La propiedad

$$D(\mathbf{L}) = [c, 1] \text{ y } c \text{ es dual denso}$$

se puede expresar mediante las siguientes propiedades

$$\begin{gathered} c^* = 0 \\ \forall x \in L \quad c \wedge (x \vee x^*) = c \\ \forall x \in L \quad c \vee x = 1 \to x = 1 \end{gathered}$$

de las cuales las primeras dos son identidades y la última una cuasiidentidad.

Luego $\mathcal{P}_c$ se puede axiomatizar mediante las identidades de $\mathcal{P}$ más estas dos identidades y la cuasiidentidad, por lo que resulta un cuasivariedad.

∎

2.6 Álgebras de Stone punteadas

Definición 2.23. Una *álgebra de Stone punteada* es un álgebra $(S, \vee, \wedge, ^*, 0, 1, c) \in \mathcal{P}_c$ tal que $(S, \vee, \wedge, ^*, 0, 1) \in \mathcal{S}$

Denotaremos con $\mathcal{S}_c$ a la clase de las álgebras de Stone punteadas.

Sólo agregamos una identidad a la clase $\mathcal{P}_c$, por lo cuál $\mathcal{S}_c$ también resulta una cuasivariedad.

2.7 Operadores de clases

Los resultados sin prueba de esta sección se encuentran en [1].

Definición 2.24. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras de tipo τ. Un mapeo $\alpha : A \to B$ se llama *homomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si

$\forall f \in \tau_n$ y $\forall a_1, ..., a_n \in A$ se tiene

$$\alpha f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) = f^{\mathbf{B}}(\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$$

Si α es inyectiva se llama un *embedding* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Si además es suryectiva, i.e. es una biyección, se llama un *isomorfismo* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. En ese caso $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se dicen *isomorfos*.

Definición 2.25. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras de tipo τ. Entonces decimos que $\mathbf{B}$ es *subálgebra* de $\mathbf{A}$, y escribimos $\mathbf{B} \leqslant \mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función f , $f^{\mathbf{B}}$ es $f^{\mathbf{A}}$ restringida a B.

Definición 2.26. Sea $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ una familia de álgebras de tipo τ.

El *producto (directo)* $\mathbf{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i$ es un álgebra con universo $\prod\limits_{i \in I} A_i$ y tal que para $f \in \tau_n$ y $a_1, ..., a_n \in \prod\limits_{i \in I} A_i$,

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), ..., a_n(i)) \qquad \forall i \in I$$

Definición 2.27. Un álgebra $\mathbf{A}$ es un *producto subdirecto* de la familia $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ de álgebras si

$$\mathbf{A} \leqslant \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

y

$$\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i \quad \forall i \in I$$

Un embedding $\alpha : \mathbf{A} \to \prod\limits_{i \in I} \mathbf{A}_i$ es *subdirecto* si $\alpha(\mathbf{A})$ es un producto subdirecto de $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$.

Definición 2.28. Un álgebra $\mathbf{A}$ se dice *subdirectamente irreducible* si para cada embedding subdirecto

$$\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

hay un $i \in I$ tal que

$$\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$$

es un isomorfismo.

Con las últimas definiciones ya estamos en condiciones de definir los siguientes operadores de clases.

Definición 2.29. Dada una clase $\mathcal{K}$ de álgebras de tipo τ, sean

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(\mathcal{K}) &= \{\mathbf{A} : \exists \mathbf{B} \in \mathcal{K} \text{ } y \text{ } \mathbf{A} \text{ es isomorfa a } \mathbf{B}\} \\
\mathbb{S}(\mathcal{K}) &= \{\mathbf{A} : \exists \mathbf{B} \in \mathcal{K} \text{ } y \text{ } \mathbf{A} \text{ es subálgebra de } \mathbf{B}\} \\
\mathbb{P}(\mathcal{K}) &= \{\textstyle\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i : \mathbf{A}_i \in \mathcal{K} \quad \forall i \in I\}
\end{aligned}$$

Proposición 2.30. *Los operadores $\mathbb{I}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$ preservan identidades y cuasiidentidades, es decir si φ es una identidad o cuasiidentidad que vale en cada álgebra de $\mathcal{K}$, entonces φ vale en cada álgebra de $\mathbb{I}(\mathcal{K}) \cup \mathbb{S}(\mathcal{K}) \cup \mathbb{P}(\mathcal{K})$.*

Corolario 2.31. *Una (cuasi)variedad es cerrada por los operadores $\mathbb{I}$, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{P}$.*

Prueba. Se deduce directamente de la proposición anterior y de las definiciones de variedad y cuasivariedad.
∎

El Teorema HSP de Birkhoff dice además que una variedad es cerrada por homomorfismos, lo cuál no es cierto en general en el caso de las cuasivariedades.

2.8 Congruencias

Definición 2.32. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo τ y sea θ una relación de equivalencia sobre A. Entonces θ es una *congruencia* sobre $\mathbf{A}$ si θ satisface la siguiente propiedad de compatibilidad:
$\forall f \in \tau_n$, si vale $a_i \theta b_i$ $\forall a_i, b_i \in A$ con $1 \leq i \leq n$ entonces

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)\; \theta f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n)$$

Definición 2.33. El conjunto de todas las congruencias de un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo τ se denota $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Sea $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, entonces el álgebra cociente de $\mathbf{A}$ por θ, denotada $\mathbf{A}/\theta$, es el álgebra del mismo tipo que $\mathbf{A}$ cuyo universo es A/θ y sus operaciones satisfacen
$\forall f \in \tau_n$ y $\forall a_1, ..., a_n \in A$

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n)/\theta$$

Definición 2.34. Sean A un conjunto y $B \subseteq A \times A$. Definimos la *clausura transitiva* de B como

$$\{(x, y) : \exists k, \exists z_1 = x, ..., z_k = y \in A, (x_i, x_{i+1}) \in B \quad \forall 1 \leq i \leq k-1\}$$

Proposición 2.35. *Sea* $\boldsymbol{A}$ *un álgebra. Entonces* $(\mathrm{Con}(\mathbf{A}), \vee, \wedge, \triangle^{\boldsymbol{A}}, \bigtriangledown^{\boldsymbol{A}})$ *es un reticulado acotado (no necesariamente distributivo) completo donde* $\bigvee$ *es la clausura transitiva de la unión,* $\bigwedge$ *es la intersección,* $\triangle^{\boldsymbol{A}}$ *es la diagonal y* $\bigtriangledown^{\boldsymbol{A}}$ *es* $A \times A$*.*

El siguiente lema nos permite generar representaciones subdirectas de álgebras estudiando sus congruencias

Lema 2.36. *Sean* $\boldsymbol{A}$ *un álgebra y* $\theta_i \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \quad \forall i \in I$ *tales que* $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \triangle^{\boldsymbol{A}}$*, entonces el homomorfismo natural*

$$v : \boldsymbol{A} \to \prod_{i\in I} \boldsymbol{A}/\theta_i$$

definido por

$$v(a)(i) = a/\theta_i$$

es un embedding subdirecto.

Definición 2.37. Sea $\mathbf{L}$ un reticulado acotado completo. Diremos que $x \in \mathbf{L}$

- es *completamente meet irreducible* si $x \neq 1$ y $\forall S \subseteq L$, tenemos que $x = \bigwedge S \implies x \in S$. Denotaremos con $\mathrm{CMI}(\mathbf{L})$ al conjunto de elementos completamente meet irreducibles de $\mathbf{L}$.
- es *meet irreducible* (resp. *meet primo*) si $x \neq 1$ y $\forall u, v \in L$, tenemos que $x = u \wedge v$ (resp. $x \geq u \wedge v$) $\implies x = u$ o $x = v$ (resp. $x \geq u$ o $x \geq v$). Denotaremos con $\mathrm{MI}(\mathbf{L})$ (resp $\mathrm{MP}(\mathbf{L})$) al conjunto de elementos meet irreducibles (resp. meet primos) de $\mathbf{L}$.

La siguiente proposición caracteriza las imágenes homomórficas subdirectamente irreducibles

Proposición 2.38. *Sean* $\mathbf{A}$ *un álgebra y* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \backslash \{\nabla^{\mathbf{A}}\}$*, entonces* $\mathbf{A}/\theta$ *es subdirectamente irreducible* $\iff \theta \in \mathrm{CMI}(\mathbf{L})$*.*

Definición 2.39. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra.

- Un *sistema sobre* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ es una $2n$-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, $x_1, ..., x_n \in A$ y $(x_i, x_j) \in \theta_i \vee \theta_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$.
- Una *solución* del sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un elemento $x \in A$ tal que $(x, x_i) \in \theta_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$.

Nótese que si $\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n = \Delta^A$, entonces el sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ tiene a lo sumo una solución.

Definición 2.40. Sea **A** un álgebra.

- **A** es de *congruencias permutables* cuando $\theta \circ \delta = \delta \circ \theta \quad \forall \theta, \delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$.
- **A** es de *congruencias distributivas* si $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ es distributivo.
- **A** es *aritmética* si es de congruencias distributivas y permutables.

Lema 2.41. *Sean* **A** *un álgebra y* $\theta, \delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, *entonces*

$$\theta \circ \delta = \delta \circ \theta \iff \theta \vee \delta = \theta \circ \delta \iff \text{todo sistema } (\theta, \delta, x, y) \text{ tiene solución}$$

Prueba. Todo sistema (θ, δ, x, y) tiene solución

$$\begin{aligned} &\iff \forall (x, y) \in \theta \vee \delta, \exists z \in A : (x, z) \in \theta \text{ y } (y, z) \in \delta \\ &\iff \theta \vee \delta \subseteq \theta \circ \delta \end{aligned}$$

Además, siempre se tiene que

$$\theta \circ \delta \subseteq \theta \vee \delta$$

luego todo sistema (θ, δ, x, y) tiene solución $\iff \theta \vee \delta = \theta \circ \delta$.

Por otra parte, como $\delta \circ \theta = (\theta \circ \delta)^{\partial} = \{(x, y) : (y, x) \in \theta \circ \delta\}$, tenemos que

$$\theta \circ \delta = \delta \circ \theta \iff \theta \circ \delta \text{ es simétrica}$$

Si $\theta \circ \delta = \theta \vee \delta$ entonces $\theta \circ \delta$ es simétrica.

Por otro lado, es fácil ver que $\theta \circ \delta$ es reflexiva y cumple las ecuaciones de compatibilidad de congruencia y si además $\theta \circ \delta$ es simétrica se tiene que también es transitiva pues

si $(x, y), (y, z) \in \theta \circ \delta$, entonces

$$\begin{aligned} &\exists w_1 : (x, w_1) \in \theta \text{ y } (w_1, y) \in \delta \\ &\exists w_2 : (y, w_2) \in \theta \text{ y } (w_2, z) \in \delta \end{aligned}$$

luego $(w_2, w_1) \in \theta \circ \delta$ y por la simetría de $\theta \circ \delta$, también $(w_1, w_2) \in \theta \circ \delta$, entonces

$$\begin{aligned} &\exists w_3 : (w_1, w_3) \in \theta \text{ y } (w_3, w_2) \in \delta \\ &\implies (x, w_3) \in \theta \text{ y } (w_3, z) \in \delta \\ &\implies (x, z) \in \theta \circ \delta \end{aligned}$$

Entonces $\theta \circ \delta$ es una congruencia con $\theta, \delta \subseteq \theta \circ \delta$, por lo tanto $\theta \vee \delta \subseteq \theta \circ \delta \subseteq \theta \vee \delta$ y luego $\theta \vee \delta = \theta \circ \delta$.

Concluimos que

$$\theta \vee \delta = \theta \circ \delta \iff \theta \circ \delta = \delta \circ \theta$$

∎

Proposición 2.42. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra aritmética, entonces todo sistema sobre* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *tiene solución.*

Prueba. Debemos probar que si $\mathbf{A}$ es aritmética entonces todo sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ tiene solución. Lo probaremos por inducción en n.

$\underline{n = 1}$: $x = x_1$ es solución.

$\underline{n = 2}$: como $\mathbf{A}$ es aritmética, todo par de congruencias conmuta y por lo tanto podemos aplicar el lema 2.41.

$\underline{n = k \implies n = k + 1}$: por hipótesis inductiva el sistema $(\theta_1, \ldots, \theta_k, x_1, \ldots, x_k)$ tiene solución. Sea x una solución de dicho sistema, luego

$$(x, x_i) \in \theta_i \quad \forall 1 \leq i \leq k$$
$$\therefore (x, x_i) \in \theta_i \vee \theta_{k+1} \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

Además sabemos que

$$(x_i, x_{k+1}) \in \theta_i \vee \theta_{k+1} \quad \forall 1 \leq i \leq k$$

por ser $(\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}, x_1, \ldots, x_{k+1})$ un sistema. Entonces

$$(x, x_{k+1}) \in \theta_i \vee \theta_{k+1} \quad \forall 1 \leq i \leq k$$
$$\therefore (x, x_{k+1}) \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} (\theta_i \vee \theta_{k+1}) = \Big(\bigcap_{1 \leq i \leq k} \theta_i\Big) \vee \theta_{k+1}$$

donde la última igualdad vale pues $\mathbf{A}$ es de congruencias distributivas.

Entonces aplicando nuevamente el lema 2.41, como $\mathbf{A}$ es de congruencias permutables $\big(\bigcap_{1 \leq i \leq k} \theta_i\big) \vee \theta_{k+1} = \big(\bigcap_{1 \leq i \leq k} \theta_i\big) \circ \theta_{k+1}$ y luego

$$\exists z : (x, z) \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} \theta_i \text{ y } (z, x_{k+1}) \in \theta_{k+1}$$
$$\therefore (x, z) \in \theta_i \quad \forall 1 \leq i \leq k \text{ y } (z, x_{k+1}) \in \theta_{k+1}$$
$$\therefore (z, x_i) \in \theta_i \quad \forall 1 \leq i \leq k + 1$$
$$\therefore z \text{ es solución del sistema } (\theta_1, \ldots, \theta_{k+1}, x_1, \ldots, x_{k+1})$$

Con esto completamos la inducción y probamos que todo sistema sobre $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ tiene solución.

∎

Es un ejercicio sencillo ver que las únicas congruencias del álgebra $(\mathbf{Z}, +, ., 0, 1)$ con la interpretación usual son las congruencias módulo m y por lo tanto $(\mathbf{Z}, +, ., 0, 1)$ es aritmética, con lo cuál tenemos entonces que el Teorema Chino del Resto clásico es un corolario directo de la proposición 2.42.

Definición 2.43. Sea $\mathbf{L}$ un reticulado. Un elemento $x \in L$ será llamado *compacto* si para cada $S \subseteq L$ se tiene que si $x \leq \mathrm{Sup}(S)$ entonces hay un subconjunto finito $S_0 \subseteq S$ tal que $x \leq \mathrm{Sup}(S_0)$.

Lema 2.44. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra. Entonces*

1. $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *es compacta* $\iff$ $\exists x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$ *tales que* $\theta = \theta(x_1, y_1) \vee ... \vee \theta(x_n, y_n)$*, donde* $\theta(x, y)$ *es la menor congruencia que pega* x *e* y*.*

2. *Si* $\theta, \delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *y* $(x, y) \in \theta \vee \delta$ *entonces* $\exists \bar{\theta}, \bar{\delta} \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *compactas con* $\bar{\theta} \subseteq \theta$ *y* $\bar{\delta} \subseteq \delta$ *tales que* $(x, y) \in \bar{\theta} \vee \bar{\delta}$*.*

3. *Si* $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ *es un sistema sobre* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$*, entonces* $\forall 1 \leq i \leq n$ $\exists \bar{\theta}_i \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *compactas tales que* $\forall 1 \leq i \leq n$ $\bar{\theta}_i \subseteq \theta_i$ *y tales que* $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n, x_1, \ldots, x_n)$ *es un sistema sobre* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$*. Además una solución de* $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n, x_1, \ldots, x_n)$ *es también una solución de* $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$*.*

Prueba. Los incisos 1 y 2 son rutina.

Probaremos el inciso 3. La condición de sistema es

$$(x_i, x_j) \in \theta_i \vee \theta_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Luego por el inciso 2, $\forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ $\exists \overline{\theta_{i,j}}, \overline{\theta_{j,i}} \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ compactas tales que $\overline{\theta_{i,j}} \subseteq \theta_i$ y $\overline{\theta_{j,i}} \subseteq \theta_j$ y $(x_i, x_j) \in \overline{\theta_{i,j}} \vee \overline{\theta_{j,i}}$.

Tomemos las congruencias

$$\overline{\theta_i} = \bigvee_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \overline{\theta_{i,j}} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Notemos que resultan compactas por el inciso 1.

Además

$$\overline{\theta_i} \subseteq \theta_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

y

$$\overline{\theta_{i,j}} \vee \overline{\theta_{j,i}} \subseteq \overline{\theta_i} \vee \overline{\theta_j} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$$

por lo que $(x_i, x_j) \in \overline{\theta_i} \vee \overline{\theta_j} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$.

Es decir que $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema como el que buscábamos.

Finalmente, $\overline{\theta_i} \subseteq \theta_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$ nos asegura que toda solución del nuevo sistema es también una solución del anterior.

∎

2.9 Congruencias relativas

Con las variedades las congruencias se portan bien, ya que los homomorfismos preservan identidades y por lo tanto las variedades son cerradas por cocientes respecto de congruencias. Sin embargo, los homomorfismos no necesariamente preservan cuasiidentidades, con lo cuál en el caso de las cuasivariedades necesitamos definir los siguientes conceptos:

Definición 2.45. Sea $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad y $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$.
Definimos las *congruencias relativas de* $\mathbf{A}$ *respecto de* $\mathcal{Q}$ como

$$\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A}) = \{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) : \mathbf{A}/\theta \in \mathcal{Q}\}$$

Proposición 2.46. *Sea* $\mathcal{Q}$ *una cuasivariedad y* $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$*, entonces si* $\theta \sqcup \delta$ *es la menor congruencia relativa que contiene a* $\theta, \delta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$*,*
$(\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A}), \sqcup, \wedge, \triangle^{\mathbf{A}}, \nabla^{\mathbf{A}})$ *es un reticulado acotado (no necesariamente distributivo) completo, donde* $\wedge$ *es la intersección de congruencias pero* $\sqcup$ *en general no coincide con el supremo en* $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$*.*

Podemos encontrar una prueba de la última proposición en [8].

Definición 2.47. Sean $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad y $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$, luego un *sistema de congruencias sobre* $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ es una $2n$-upla $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ y $\forall 1 \leq i, j \leq n \quad (x_i, x_j) \in \theta_i \sqcup \theta_j$. Una *solución* de $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un elemento $x \in A$ tal que $\forall 1 \leq i \leq n \quad (x, x_i) \in \theta_i$.

Definición 2.48. Dada una cuasivariedad $\mathcal{Q}$, un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ se dice *relativamente subdirectamente irreducible* si para cada embedding subdirecto

$$\alpha : \mathbf{A} \to \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

tal que $\forall i \in I \quad \mathbf{A}_i \in \mathcal{Q}$, hay un $i \in I$ tal que

$$\pi_i \circ \alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$$

es un isomorfismo.

Notemos que si $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ es subdirectamente irreducible entonces es relativamente subdirectamente irreducible, pero no necesariamente vale la afirmación recíproca.

Proposición 2.49. *Sean $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad, $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ un álgebra y $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})\backslash\{\nabla^{\mathbf{A}}\}$, entonces $\mathbf{A}/\theta$ es relativamente subdirectamente irreducible $\iff \theta \in \mathrm{CMI}(Con_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A}))$.*

La última proposición se encuentra afirmada en [8].

Lema 2.50. *Sean $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad y $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$. Entonces*

1. *$\theta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ es compacta $\iff \exists x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$ tales que $\theta = \theta_{\mathcal{Q}}(x_1, y_1) \sqcup ... \sqcup \theta_{\mathcal{Q}}(x_n, y_n)$, donde $\theta_{\mathcal{Q}}(x, y)$ es la menor congruencia de $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ que pega x e y.*

2. *Si $\theta, \delta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ y $(x, y) \in \theta \sqcup \delta$ entonces $\exists \bar{\theta}, \bar{\delta} \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ compactas con $\bar{\theta} \subseteq \theta$ y $\bar{\delta} \subseteq \delta$ tales que $(x, y) \in \bar{\theta} \sqcup \bar{\delta}$.*

3. *Si $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema sobre $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$, entonces $\forall 1 \leq i \leq n \ \exists \bar{\theta}_i \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ compactas tales que $\forall 1 \leq i \leq n \quad \bar{\theta}_i \subseteq \theta_i$ y tales que $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n, x_1, \ldots, x_n)$ es un sistema sobre $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$. Además una solución de $(\bar{\theta}_1, \ldots, \bar{\theta}_n, x_1, \ldots, x_n)$ es también una solución de $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$.*

Prueba. Los incisos 1 y 2 se encuentran afirmados en [9] donde se da una prueba de 1. La prueba de 3 es muy similar a la correspondiente en el lema para congruencias no relativas.
∎

2.10 Productos subdirectos globales

Definición 2.51. Sean $\mathbf{A}$ y $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ álgebras con $A \subseteq \prod_{i\in I} A_i$ y sea $E(x, y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\} \quad \forall x, y \in A$. Decimos que $\mathbf{A}$ es *producto subdirecto global* de $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ si se cumple

1. $\mathbf{A}$ es producto subdirecto de $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$.
2. $\exists \tau$ una topología sobre I tal que
   (a) $E(x, y) \in \tau \quad \forall x, y \in A$.
   (b) (Patchwork Property) Si las familias $\{U_r\}_{r\in R} \subseteq \tau$ y $\{x_r\}_{r\in R} \subseteq A$ son tales que $\bigcup_{r\in R} U_r = I$ y $\forall r, s \in R$, $U_r \cap U_s \subseteq E(x_r, x_s)$ entonces $\exists x \in A$ tal que $\forall r \in R \quad U_r \subseteq E(x, x_r)$.

Un embedding $\mathbf{A} \to \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ cuya imagen es producto subdirecto global de $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ será denotado $\mathbf{A} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$.

Definición 2.52. Sean $\mathcal{C}$ una clase y $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ un álgebra. Diremos que $\mathbf{A}$ es *globalmente indescomponible en* $\mathcal{C}$ si para cada $\mathbf{A}_1$ producto subdirecto global de $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ con $\mathbf{A}_1$ isomorfo a $\mathbf{A}$ y $\{\mathbf{A}_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{C}$, existe $i \in I$ tal que $\pi_i : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_i$ es un isomorfismo.

Proposición 2.53. *Una representación global preserva las propiedades de la forma* $\forall\vec{x}\exists!\vec{y} \bigwedge_{1\leq i\leq n} p_i(\vec{x},\vec{y}) = q_i(\vec{x},\vec{y})$*, i.e. si valen en cada uno de los factores, entonces valen en el producto.*

Se puede encontrar una prueba de la proposición anterior en [10].

3 Dualidad de Priestley

3.1 Una topología sobre los filtros primos

Definición 3.1. Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$. Para $x \in L$ definamos

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \{p \in X(\mathbf{L}) : x \in p\} \\ \bar{\sigma}(x) &= \{p \in X(\mathbf{L}) : x \notin p\} \end{aligned}$$

- Un conjunto $U \subseteq X(\mathbf{L})$ será llamado *abierto* si es unión de conjuntos de la forma $\sigma(x) \cap \bar{\sigma}(y)$, con $x, y \in L$.
- Un conjunto $F \subseteq X(\mathbf{L})$ será llamado *cerrado* si $X(\mathbf{L}) - F$ es abierto.
- Un conjunto $U \subseteq X(\mathbf{L})$ será llamado *clopen* si es abierto y cerrado.
- Un conjunto $K \subseteq X(\mathbf{L})$ será llamado *compacto* si para toda familia $\{U_i : i \in I\}$ de conjuntos abiertos se tiene que si $K \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I\}$, entonces hay un subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ tal que $K \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I_0\}$.
- Un conjunto $U \subseteq X(\mathbf{L})$ será llamado *creciente* si cada vez que $p \in U$ y $q \geq p$, tenemos que $q \in U$.

Ahora veamos algunas propiedades de la topología sobre los filtros primos.

Proposición 3.2. *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$. Entonces vale*

1. *Unión arbitraria de abiertos es abierta e intersección finita de abiertos es abierta. $\emptyset$ y $X(\mathbf{L})$ son abiertos. Luego los abiertos forman una topología. Unión finita de cerrados es cerrada e intersección arbitraria de cerrados es cerrada.*
2. *$\sigma(x)$, $\bar{\sigma}(x)$, $\emptyset$ y $X(\mathbf{L})$ son clopens. Unión e intersección finita de clopens es clopen. Todo abierto es unión de clopens y todo cerrado es intersección de clopens.*
3. *Si F es cerrado, entonces F es compacto. En particular, $X(\mathbf{L})$ es compacto.*
4. *U es clopen sii es de la forma $(\sigma(x_1) \cap \bar{\sigma}(y_1)) \cup ... \cup (\sigma(x_n) \cap \bar{\sigma}(y_n))$.*
5. *Si L es finito, entonces todo $U \subseteq X(\mathbf{L})$ es abierto.*
6. *U es clopen creciente sii $U = \sigma(x)$ para algún $x \in L$.*

Omitiremos la prueba de la proposición anterior por ser más o menos rutinaria y mayormente topológica.

El inciso 1 implica el siguiente corolario.

Corolario 3.3. *Dado* $L \in \mathcal{D}_{01}$*,* $(X(\mathbf{L}), \{abiertos\ de\ X(\mathbf{L})\})$ *es un espacio topológico.*

Como primer resultado de representación, tenemos el siguiente

Proposición 3.4. $x \to \sigma(x)$ *es un isomorfismo de* $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *en* $(\{clopen\ crecientes\ de\ X(\mathbf{L})\}, \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L}))$*.*

La prueba es rutinaria.

Esto nos dice que todo reticulado distributivo acotado "es" un reticulado de subconjuntos.

3.2 Espacios de Priestley

Definición 3.5. Un *espacio de Priestley* es una terna $(X, \tau, \leq)$, donde τ es una topología sobre X y $\leq$ es un orden parcial sobre X tal que

1. X es compacto respecto de τ.
2. Si $x \nleq y$, entonces existe un clopen creciente $\mathcal{C} \subseteq X$ tal que $x \in \mathcal{C}$ e $y \notin \mathcal{C}$.

Definición 3.6. Dos espacios de Priestley $(X, \tau, \leq)$ y $(X', \tau', \leq')$ serán llamados *isomorfos* si existe una biyección $F : X \to X'$ la cual cumple

1. $\forall x, y \in X \quad x \leq y \iff F(x) \leq F(y)$.
2. $\forall U \subseteq X \quad U \in \tau \iff F(U) \in \tau'$.

i.e. en términos topológicos, F es un homeomorfismo que preserva el orden.

Definición 3.7. Sea $(X, \tau, \leq)$ un espacio de Priestley. Para $x \in X$ definamos

$$\delta(x) \quad = \quad \{\mathcal{C} \in \{\text{clopen crecientes de } X\} : x \in \mathcal{C}\}$$

Proposición 3.8. $x \to \delta(x)$ *es un isomorfismo de* $(X, \tau, \leq)$ *en* $(X(\{clopen\ crecientes\ de\ X(\mathbf{L})\}),$ $\{abiertos\ de\ X(\{clopen\ crecientes\ de\ X(\mathbf{L})\}\}, \subseteq)$*.*

Omitiremos la prueba de la proposición anterior por ser mayormente topológica y no ser esencial para el desarrollo de este trabajo.

3.3 Dualidad

Proposición 3.9 (Dualidad de Priestley)**.**

- *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$*, entonces* $(X(\mathbf{L}), \{$*abiertos de* $X(\mathbf{L})\}, \subseteq)$ *es un espacio de Priestley el cual será llamado dual de* $\mathbf{L}$ *y denotado* $\mathbf{X}(\mathbf{L})$*.*
- *Sea* $\mathbf{X} = (X, \tau, \leq)$ *un espacio de Priestley, entonces* $(\{$*clopen crecientes de* $X\}, \cup, \cap, \emptyset, X) \in \mathcal{D}_{01}$ *y será denotado* $\mathbf{L}(\mathbf{X})$*.*
- $\mathbf{L}(\mathbf{X}(\mathbf{L})) \cong \mathbf{L}$.
- $\mathbf{X}(\mathbf{L}(\mathbf{X})) \cong \mathbf{X}$.

Prueba. Sale directo de las proposiciones 3.4 y 3.8.
∎

Veamos como se ve la dualidad de Priestley en diagramas de funciones, donde Ab y Cc denotan el conjunto de abiertos y clopen crecientes, respectivamente

$$\begin{tikzcd}
(L, \vee, \wedge, 0, 1) \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\sigma"] & (X(\mathbf{L}), Ab(X(\mathbf{L})), \subseteq) \arrow[dl, "L"] \\
(Cc(X(\mathbf{L})), \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L})) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(Cc(\mathbf{X}), \cup, \cap, \emptyset, X) \arrow[dr, "X"] & (X, \tau, \leq) \arrow[l, "L"'] \arrow[d, "\delta"] \\
& (X(\mathbf{L}(\mathbf{X})), Ab(X(\mathbf{L}(\mathbf{X})), \subseteq)
\end{tikzcd}$$

4 Representaciones globales de variedades

4.1 Teoremas de representaciones globales para variedades

Definición 4.1. Sean $\mathbf{A}$ un álgebra y $\Sigma, \Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, diremos que Σ *minoriza* Γ cuando para cada $\theta \in \Gamma$ hay un $\delta \in \Sigma$ tal que $\delta \subseteq \theta$.

Definición 4.2. Sean $\mathbf{A}$ un álgebra y $\mathcal{M}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Definimos

$$\Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{M}) = \{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) : \mathbf{A}/\theta \cong \mathbf{M} \text{ con } \mathbf{M} \in \mathcal{M}\}$$

Definición 4.3. Una fórmula se dice *universal* si está en forma prenexa y todos los cuantificadores son universales. Una clase de álgebras se dice *universal* si puede ser axiomatizada mediante fórmulas universales.

A continuación el teorema central de los productos subdirectos globales

Teorema 4.4. *Sean $\mathbf{A}$ un álgebra de congruencias distributivas y $\mathcal{M}$ una clase universal que contiene a toda imagen homomórfica (no trivial) subdirectamente irreducible de $\mathbf{A}$, entonces los siguientes son equivalentes:*
(a) $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto global con factores en $\mathcal{M}$.
(b) El mapeo natural

$$\tau : \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{M})} \mathbf{A}/\theta$$

dado por

$$x \longrightarrow \langle x/\theta \rangle_{\theta \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{M})}$$

es un embedding y $\tau(A)$ es un producto subdirecto global de $\{\mathbf{A}/\theta\}_{\theta \in \Sigma(\mathbf{A}, \mathcal{M})}$.
(c) Todo sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ en $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ tal que $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{A},\mathcal{M})$ tiene solución.

Se puede encontrar una prueba del teorema anterior en [3].
El siguiente teorema nos permite chequear descomponibilidad de factores finitos.

Teorema 4.5. *Sean $\mathcal{C}$ una variedad y $\mathbf{A} \in \mathcal{C}$ un álgebra tal que $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ es finita. Los siguientes son equivalentes*

1. *$\mathbf{A}$ es globalmente indescomponible en $\mathcal{C}$.*
2. *Para cada $n \geq 1$, $\theta_1, ..., \theta_n \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta\}$ tal que $\bigcap\{\theta_i : 1 \leq i \leq n\} = \Delta$, existen $x_1, ..., x_n \in A$ tales que $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ es un sistema en $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ que no tiene solución.*

Se puede encontrar una prueba del teorema anterior en [4].

4.2 Reticulados acotados distributivos

Definición 4.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. Dado $Y \subseteq X$ definamos $^{-} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por

$$\bar{Y} = \bigcap_{Y \subseteq F \text{ y } F \text{ es cerrado}} F$$

$\bar{Y}$ es llamado la *clausura* de Y.

Veamos que efectivamente $^{-}$ es un operador de clausura.

Definición 4.7. Dado un conjunto X, un *operador de clausura topológica* es un mapeo $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ que satisface las siguientes propiedades

1. $c(\emptyset) = \emptyset$
2. $A \subseteq c(A) \quad \forall A \subseteq X$
3. $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B) \quad \forall A, B \subseteq X$
4. $c(c(A)) = c(A) \quad \forall A \subseteq X$

Proposición 4.8. $^{-}$ *es un operador de clausura topológica.*

La prueba es rutina.

Proposición 4.9. $(\{$*cerrados de* $X(\mathbf{L})\}, \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L}))$ *es un reticulado acotado distributivo completo en el cual dado* $S \subseteq \{$*cerrados de* $X(\mathbf{L})\}$, $Sup(S) = \overline{\bigcup S}$ *y* $Inf(S) = \bigcap S$.

También es rutinaria la prueba de la proposición anterior.
Ahora vamos a establecer una conexión entre Con($\mathbf{L}$) y los cerrados de $X(\mathbf{L})$.

Definición 4.10. Dada una relación de equivalencia r sobre un conjunto A, diremos que $S \subseteq A$ es *saturado respecto de* r si cada vez que $a \in S$ tenemos que $a/r \subseteq S$, i.e. S es unión de clases de equivalencia.

$r \cap (S \times S)$ es una relación de equivalencia (la restricción de r a S). Escribiremos S/r en lugar de $S/r \cap (S \times S)$.
Notar que los saturados están naturalmente identificados con los subconjuntos de A/r, via la asignación $S \to S/r$.

Definición 4.11. Sean $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ y $p \in X(\mathbf{L})$. Definamos $\theta_p = \{(x, y) : x, y \in p$ o $x, y \in L - p\}$.

Lema 4.12. *Sean $\boldsymbol{L} \in \mathcal{D}_{01}$, $p \in X(\mathbf{L})$ y $\theta \in \mathrm{Con}(\boldsymbol{L})$.*

1. $\theta_p \in \mathrm{Con}(\boldsymbol{L})$.
2. $\theta \subseteq \theta_p \iff$ *p es saturado respecto de θ.*
3. $\{p \in X(\mathbf{L}) : p$ *es saturado respecto de* $\theta\}$ *está naturalmente identificado con $X(\mathbf{L}/\theta)$ via la asignación $p \to p/\theta$.*
4. $\theta = \bigcap\{\theta_p : p \in X(\mathbf{L})$ *y* $\theta \subseteq \theta_p\}$.

Prueba. Los incisos 1 a 3 son rutina. Veamos la prueba del inciso 4.

Es claro que $\theta \subseteq \bigcap\{\theta_p : p \in X(\mathbf{L})$ *y* $\theta \subseteq \theta_p\}$.

Ahora sea $(x, y) \notin \theta$, luego $x/\theta \neq y/\theta$ y por lo tanto hay un $p/\theta \in X(\mathbf{L}/\theta)$ que los separa. Entonces, por la identificación del inciso 3, tenemos $p \in X(\mathbf{L})$, saturado respecto de θ que los separa, con lo que $(x, y) \notin \theta_p$ y por lo tanto $(x, y) \notin \bigcap\{\theta_p : p \in X(\mathbf{L})$ *y* $\theta \subseteq \theta_p\}$. Esto nos permite concluir que $\theta = \bigcap\{\theta_p : p \in X(\mathbf{L})$ *y* $\theta \subseteq \theta_p\}$ como queríamos ver.
∎

Definición 4.13. Dados $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ e $Y \subseteq X(\mathbf{L})$ sea

$$\theta_Y = \bigcap_{p \in Y} \theta_p$$

Notar que $\theta_Y \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$ pues vimos que $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ es un reticulado completo.

Definición 4.14. Dados $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ y $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$, definamos

$$Y_\theta = \{p \in X(\mathbf{L}) : \theta \subseteq \theta_p\}$$

Podemos ver fácilmente que Y_θ es cerrado de $X(\mathbf{L})$ pues

$$X(\mathbf{L}) \setminus Y_\theta = \bigcup_{(x,y) \in \theta} \sigma(x) \cap \bar{\sigma}(y)$$

que es abierto.

Vemos ahora que el inciso 4 de la proposición 4.18 dice

$$\theta_{Y_\theta} = \theta$$

Lema 4.15. *Sean* $\boldsymbol{L} \in \mathcal{D}_{01}$, $\theta, \delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$ *e* $Y, Z \subseteq X(\mathbf{L})$, *entonces*

1. $\theta_Y = \theta_{\overline{Y}}$.
2. $Y_{\theta_Y} = \overline{Y}$. *En particular, si* Y *es cerrado tenemos* $Y_{\theta_Y} = Y$.
3. $\theta_Y \subseteq \theta_Z \iff \overline{Z} \subseteq \overline{Y}$. *En particular,* $\theta_Y = \theta_Z \iff \overline{Z} = \overline{Y}$.
4. $\theta_{Y \cup Z} = \theta_Y \cap \theta_Z$, $\theta_{Y \cap Z} = \theta_Y \vee \theta_Z$, $Y_{\theta \cap \delta} = Y_\theta \cup Y_\delta$ *y* $Y_{\theta \vee \delta} = Y_\theta \cap Y_\delta$.

Prueba. 1. Como $\{\sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) : x, y \in L\}$ es una base de la topología $(X(\mathbf{L}), \{\text{abiertos de } X(\mathbf{L})\})$, un resultado clásico topológico nos dice que

$$p \in \overline{Y} \iff (\forall x, y \in L \quad p \in \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) \implies Y \cap \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) \neq \emptyset)$$

Es fácil ver que como $Y \subseteq \overline{Y}$, esto implica

$$\forall x, y \in L \quad Y \cap \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) = \emptyset \iff \overline{Y} \cap \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) = \emptyset$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in \theta_Y \\
&\iff (x, y) \in \theta_p \quad \forall p \in Y \\
&\iff p \notin \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) \text{ y } p \notin \sigma(y) \cap \overline{\sigma}(x) \quad \forall p \in Y \\
&\iff Y \cap \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) = \emptyset \text{ y } Y \cap \sigma(y) \cap \overline{\sigma}(x) = \emptyset \\
&\iff \overline{Y} \cap \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) = \emptyset \text{ y } \overline{Y} \cap \sigma(y) \cap \overline{\sigma}(x) = \emptyset \\
&\iff q \notin \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) \text{ y } q \notin \sigma(y) \cap \overline{\sigma}(x) \quad \forall q \in \overline{Y} \\
&\iff (x, y) \in \theta_q \quad \forall q \in \overline{Y} \\
&\iff (x, y) \in \theta_{\overline{Y}}
\end{aligned}$$

Con lo cual $\theta_Y = \theta_{\overline{Y}}$.

2. Por 1 tenemos $\overline{Y} \subseteq Y_{\theta_Y}$ (otra forma fácil de verlo es que Y_{θ_Y} es un cerrado que contiene a Y). Sea $q \notin \overline{Y}$, luego $\exists x, y \in L \quad q \in \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y)$ y $Y \cap \sigma(x) \cap \overline{\sigma}(y) = \emptyset$. Pero entonces es fácil ver que $(x \wedge y, x) \in \theta_Y \setminus \theta_q$ con lo cual $\theta_Y \nsubseteq \theta_q$ y por lo tanto concluimos que $\overline{Y} = Y_{\theta_Y}$.

3 y 4. Rutina.

∎

Proposición 4.16. *Dado* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$, *los mapeos* $Y \to \theta_Y$ *y* $\theta \to Y_\theta$ *son antiisomorfismos (i.e. dan vuelta el orden) entre* $(\{\textit{cerrados de } X(\mathbf{L})\}, \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L}))$ *y* $(\mathrm{Con}(\boldsymbol{L}), \vee, \wedge, \triangle^{\boldsymbol{L}}, \triangledown^{\boldsymbol{L}})$ *y son uno inverso del otro.*

La prueba de la proposición anterior es directa del lema 4.15.

Ahora el siguiente lema de traducción entre ambas estructuras

Lema 4.17. *Dados* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$*,* $x, y \in L$ *y* $\theta \in \mathrm{Con}(\boldsymbol{L})$ *vale*

$$(x, y) \in \theta \iff \sigma(x) \cap Y_\theta = \sigma(y) \cap Y_\theta$$

Prueba. $(x, y) \in \theta \iff (p \in \sigma(x) \iff p \in \sigma(y) \quad \forall p \in Y_\theta)$
$\iff \sigma(x) \cap Y_\theta = \sigma(y) \cap Y_\theta$
∎

Lema 4.18. *Sean* $\boldsymbol{L} \in \mathcal{D}_{01}$*.*

1. $\bigcap_{p \in X(\mathbf{L})} \theta_p = \Delta^{\mathbf{L}}$*.*

2. *Dado* $p \in X(\mathbf{L})$*,* $\boldsymbol{L}/\theta_p \cong \mathbf{2}$ *donde* $\mathbf{2} = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, 0, 1)$*.*

Prueba. 1. Sale directo del inciso 4 del lema 4.12 con $\theta = \Delta^{\mathbf{L}}$.
2. Rutina.
∎

El lema 4.18 nos permite obtener el siguiente resultado de representación como aplicación directa de la proposición 2.36.

Proposición 4.19.

$$\mathcal{D}_{01} = \mathbb{ISP}(\{\mathbf{2}\})$$

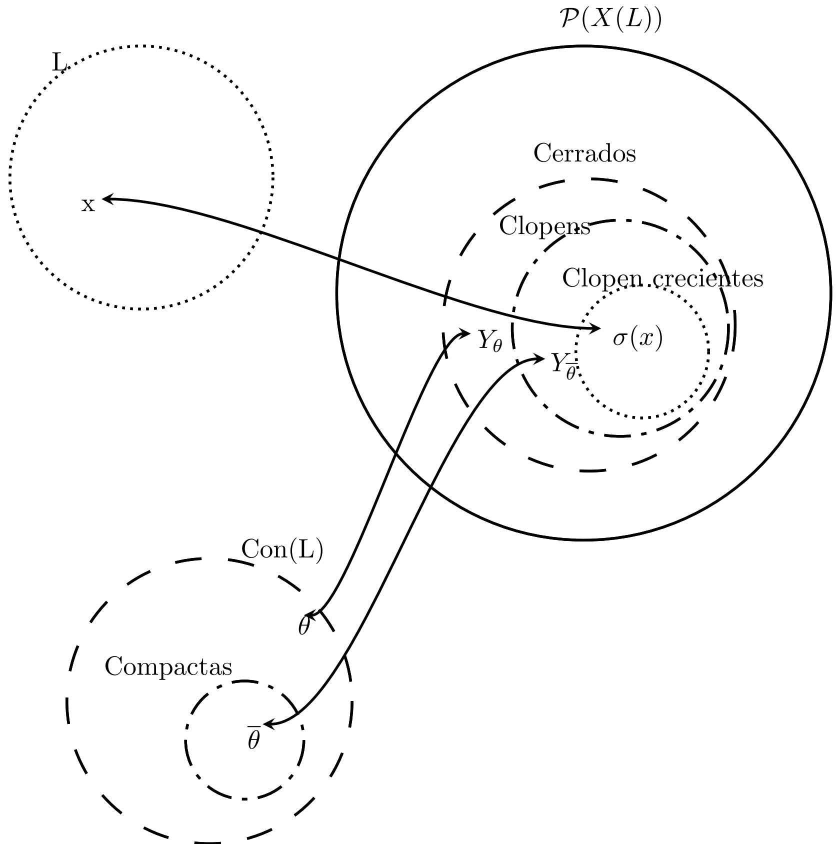
En otras palabras, todo reticulado distributivo acotado es isomorfo a un subreticulado de algún $\mathbf{2}^i$.

Notemos que esta representación es esencialmente la misma representación conjuntista que la obtenida mediante el mapeo $x \to \sigma(x)$.

Lema 4.20. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$*, luego* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$ *es compacta* $\iff$ Y_θ *es clopen de* $X(\mathbf{L})$*.*

El lema anterior se puede probar fácilmente usando el inciso 1 del lema 2.44.

El siguiente diagrama ilustra la dualidad de Priestley con las congruencias incluidas



Lema 4.21. *Sean* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ *e* Y *un cerrado de* $X(\mathbf{L})$*, entonces*

1. $\mathbf{Y} = (Y, \{Y \cap U : U$ *es abierto de* $X(\mathbf{L})\}, \subseteq)$ *es un espacio de Priestley.*
2. $\mathbf{Y} \cong \mathbf{X}(\mathbf{L}/\theta_Y)$.
3. $\mathbf{L}(\mathbf{Y}) \cong \mathbf{L}/\theta_Y$.

La prueba del lema anterior es rutina.

Lema 4.22. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$*. Entonces*

1. $\mathbf{L}$ *es de congruencias distributivas.*
2. $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})) = \mathrm{MI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))=MP(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))$
   $= \mathrm{Max}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}) \setminus \{\nabla^{\mathbf{L}}\}) = \{\theta_p\}_{p \in X(\mathbf{L})}$

Prueba. 1. En la proposición 4.16 probamos que $\mathbf{L}$ es antiisomorfo al reticulado de cerrados de $X(\mathbf{L})$ y en la proposición 4.9 probamos que este último es distributivo, luego resulta $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ distributivo.

2. Probaremos $\mathrm{MI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))\subseteq\mathrm{Max}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})\smallsetminus\{\nabla^{\mathbf{L}}\})$. El resto de las desigualdades son rutina.

Sea $\theta \in \mathrm{MI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))$. Podemos identificar naturalmente a $\{\delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L}) : \theta \subseteq \delta\}$ con $\mathrm{Con}(\mathbf{L}/\theta)$ via el mapeo $\delta \to \{(x/\theta, y/\theta) : (x,y) \in \delta\}$. Con lo cual tenemos

$$\theta \in \mathrm{Max}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}) \smallsetminus \{\nabla^{\mathbf{L}}\}) \iff \mathrm{Con}(\mathbf{L}/\theta) = \{\Delta^{\mathbf{L}/\theta}, \nabla^{\mathbf{L}/\theta}\}$$
$$\theta \in \mathrm{MI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})) \iff \forall \delta, \phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{L}/\theta) \smallsetminus \{\Delta^{\mathbf{L}/\theta}, \nabla^{\mathbf{L}/\theta}\} \quad \delta \cap \phi \neq \Delta^{\mathbf{L}/\theta}$$

Como $\theta \neq \nabla^{\mathbf{L}}$, $\mathbf{L}/\theta$ tiene al menos dos elementos.

Si tiene exactamente dos, entonces es claro que $\mathrm{Con}(\mathbf{L}/\theta) = \{\Delta^{\mathbf{L}/\theta}, \nabla^{\mathbf{L}/\theta}\}$.

Veamos que no puede tener más de dos. Supongamos que existe $x \in \mathbf{L}/\theta \smallsetminus \{0,1\}$ y sean $\theta_1 = \{(y,z) : y \wedge x = z \wedge x\}$ y $\theta_2 = \{(y,z) : y \vee x = z \vee x\}$. Es fácil ver que $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{L}/\theta) \smallsetminus \{\Delta^{\mathbf{L}/\theta}, \nabla^{\mathbf{L}/\theta}\}$.

Sea $(a,b) \in \theta_1 \cap \theta_2$, entonces

$$\begin{aligned} a \wedge x &= b \wedge x \\ a \vee x &= b \vee x \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} a = a \wedge (a \vee x) &= a \wedge (b \vee x) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge x) \\ &= (a \wedge b) \vee (b \wedge x) \\ &= b \wedge (a \vee x) = b \wedge (b \vee x) = b \end{aligned}$$

es decir que $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta^{\mathbf{L}/\theta}$ y por lo tanto $\theta \notin \mathrm{MI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))$. Absurdo.

Entonces $\mathbf{L}/\theta$ tiene exactamente dos elementos y $\theta \in \mathrm{Max}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}) \smallsetminus \{\nabla^{\mathbf{L}}\})$. ∎

Proposición 4.23. *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$. Entonces todo sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ en $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ tal que $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}) = \{\theta_{\{p,q\}} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$ tiene solución.*

Prueba. Por el inciso 4 del lema 2.44 podemos suponer que $\theta_1, ..., \theta_n$ son compactas. Usemos la dualidad para transformar el problema al siguiente:

Tenemos el sistema

$$(Y_1, ..., Y_n, \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n)$$

donde $Y_1, ..., Y_n$ son clopens de $X(\mathbf{L})$ y $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ son clopens crecientes de $X(\mathbf{L})$ (correspondientes a $Y_{\theta_1}, ..., Y_{\theta_n}$ y $\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n)$ respectivamente).

Además la condición $(x_i, x_j) \in \theta_i \vee \theta_j$ se transforma en (por el lema 4.17 y el hecho de que $Y_{\theta\vee\delta} = Y_\theta \cap Y_\delta \quad \forall\theta, \delta \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$ que es consecuencia del antiisomorfismo de la proposición 4.16)

$$\mathcal{C}_i \cap Y_i \cap Y_j = \mathcal{C}_j \cap Y_i \cap Y_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Una solución se convierte en un $\mathcal{C}$ clopen creciente tal que

$$\mathcal{C} \cap Y_i = \mathcal{C}_i \cap Y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Proponemos $\mathcal{C} = \bigcup_{1\leq i\leq n} (\mathcal{C}_i \cap Y_i)$

Comprobemos que es solución

$$\mathcal{C} \cap Y_i = \Big(\bigcup_{1\leq j\leq n} (\mathcal{C}_j \cap Y_j)\Big) \cap Y_i = \bigcup_{1\leq j\leq n} (\mathcal{C}_j \cap Y_j \cap Y_i)$$
$$= \bigcup_{1\leq j\leq n} (\mathcal{C}_i \cap Y_j \cap Y_i) = \mathcal{C}_i \cap Y_i$$

Por otro lado, unión e intersección finita de clopens es clopen, luego $\mathcal{C}$ es clopen.

Finalmente debemos probar que es creciente:

La condición de que $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}) = \{\theta_{\{p,q\}} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$ implica que $\forall p, q \in X(\mathbf{L})$ con $p \subseteq q, \exists 1 \leq i \leq n : \theta_i \subseteq \theta_{\{p,q\}}$ o dicho dualmente $\{p, q\} \subseteq Y_i$

Supongamos $p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q$ y $p \in \mathcal{C}$, luego sea i tal que $\{p, q\} \subseteq Y_i$. Como $\mathcal{C} \cap Y_i = \mathcal{C}_i \cap Y_i$ tenemos que

$$p \in \mathcal{C} \implies p \in \mathcal{C} \cap Y_i \implies p \in \mathcal{C}_i \cap Y_i \implies p \in \mathcal{C}_i$$

y como $\mathcal{C}_i$ es clopen creciente,

$$p \in \mathcal{C}_i \implies q \in \mathcal{C}_i \implies q \in \mathcal{C} \cap Y_i \implies q \in \mathcal{C}$$
$$\therefore \mathcal{C} \text{ es clopen creciente}$$
$$\therefore \mathcal{C} \text{ es solución del sistema}$$
$$\therefore \sigma^{-1}(\mathcal{C}) \text{ es solución del sistema original}$$

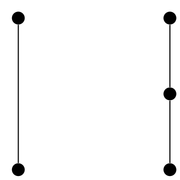
∎

Ya estamos en condiciones de usar el teorema 4.4 para obtener la siguiente representación global

Proposición 4.24. *Sean* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ *y* $\mathcal{M} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$, *entonces*

1. $\mathbf{L} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{L}, \mathcal{M})} \mathbf{L}/\theta = \prod_{p,q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q} \mathbf{L}/\theta_{\{p,q\}}$.

2. *Cada* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ *es globalmente indescomponible.*



2 **3**

Prueba. 1. El inciso 1 del lema 4.22 nos asegura que $\mathbf{L}$ es de congruencias distributivas y el inciso 2 junto con la proposición 2.38 implican que en $\mathcal{M} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ están todas las imágenes homomórficas (no triviales) subdirectamente irreducibles de $\mathbf{L}$ pues $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})) = \{\theta_p\}_{p \in X(\mathbf{L})} \subseteq \{\theta_{\{p,q\}} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$.

Finalmente $\mathcal{M}$ es universal pues se puede axiomatizar agregando a los axiomas de $\mathcal{D}_{01}$ las siguientes fórmulas universales

$\forall x, y, z, w \quad x = y \vee x = z \vee x = w \vee y = z \vee y = w \vee z = w$

$\neg(0 = 1)$

Por lo tanto podemos aplicar el teorema 4.4 para obtener la representación global.

2. El $\mathbf{2}$ es globalmente indescomponible pues es subdirectamente irreducible. Para ver que $\mathbf{3}$ es globalmente indescomponible usamos el teorema 4.5. $X(\mathbf{3}) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$, $\mathrm{Con}(\mathbf{3}) = \{\Delta^{\mathbf{3}}, \theta_{\{2\}}, \theta_{\{1,2\}}, \nabla^{\mathbf{3}}\}$, luego debemos ver que para cada conjunto de congruencias que contiene a $\{\theta_{\{2\}}, \theta_{\{2,3\}}\}$ hay un sistema sin solución, pero esto se deduce del hecho que $\theta_{\{2\}} \vee \theta_{\{2,3\}} = \nabla^{\mathbf{3}}$ pues entonces cualquier sistema con $\theta_1 = \theta_{\{2\}}, \theta_2 = \theta_{\{2,3\}}, x_1 = 2, x_2 = 0$ no tiene solución. Luego $\mathbf{3}$ es globalmente indescomponible.

∎

Esto nos dice que $\mathbf{L}$ es isomorfo a un producto subdirecto global de la forma $\mathbf{2}^i \times \mathbf{3}^j$ para ciertos i, j.

Veamos un claro ejemplo de aplicación de la representación global con el siguiente resultado clásico de Nachbin

Proposición 4.25. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$*, entonces* $\mathbf{L}$ *es complementado* $\iff$ *cada filtro primo es maximal.*

Prueba. Es fácil ver que en los reticulados distributivos acotados los complementos (de existir) son únicos. Luego, la propiedad de ser complementado se puede expresar como

$$\forall x \in L, \exists! y \in L : x \wedge y = 0 \quad \bigwedge \quad x \vee y = 1$$

y por lo tanto es preservada por productos subdirectos globales.

La proposición 4.24 nos da la representación global $\mathbf{L} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{p,q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q} \mathbf{L}/\theta_{\{p,q\}}$.

Si $\mathbf{L}$ es complementado es un ejercicio sencillo ver que cada filtro primo es maximal.

Si cada filtro primo es maximal, $\forall p, q \in X(\mathbf{L}) \quad p \subseteq q \implies p = q$ entonces el único factor posible en la representación es $\mathbf{2}$. Esto implica que todos los factores son complementados y por lo tanto $\mathbf{L}$ es complementado.

∎

La proposición anterior pone en evidencia que los productos subdirectos no preservan dichas sentencias, ya que de lo contrario todo $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$ sería complementado, pues la proposición 4.19 nos dice que $\mathbf{L}$ es isomorfo a un producto subdirecto con factores iguales a $\mathbf{2}$ que es complementado.

4.3 p-álgebras distributivas

Realicemos un análisis similar con nuestra segunda clase de álgebras de estudio.

Definición 4.26. Sea $(X, \tau, \subseteq)$ un espacio de Priestley. Dado $Y \subseteq X$ definamos $^* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por

$$Y^* = Y \cup \{m \in \text{Max}(X) : \exists p \in Y \text{ tal que } p \subseteq m\}$$

Proposición 4.27. * *es un operador de clausura topológica.*

La prueba de la proposición anterior es rutina.

Lema 4.28. *Sean* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$ *e* Y *cerrado de* $X(\mathbf{L})$*, entonces*

1. $\theta_Y \in \text{Con}(\mathbf{L}) \iff Y = Y^*$.
2. $(\{Y$ *cerrado de* $X(\mathbf{L}) : Y = Y^*\}, \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L}))$ *es subreticulado de* $(\{$*cerrados de* $X(\mathbf{L})\}, \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L}))$.

Prueba. 1. ($\Longrightarrow$) Sean $p \in Y$ y $m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ con $p \subseteq m$ y supongamos $m \notin Y$. Luego, como Y es cerrado, $\theta_Y \nsubseteq \theta_m$ y por lo tanto m no es saturado respecto de θ_Y. Sea

$$m' = \{x \in L : \exists u \in m \text{ tal que } (x, u) \in \theta_Y\}$$

Es fácil ver que m' es un filtro y como m no es saturado respecto de θ_Y, $m \subsetneq m'$. Pero como $m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$, debe ser $m' = L$. Entonces $0 \in m'$ y luego $\exists u \in m$ tal que $(0, u) \in \theta_Y$. Como $\theta_Y \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$, tenemos que $(0^*, u^*) = (1, u^*) \in \theta_Y$, pero como $1/\theta_Y \subseteq 1/\theta_p = p$, resulta $u^* \in p \subseteq m$ y luego $u \wedge u^* = 0 \in m$. Absurdo. Entonces $m \in Y$ y luego $Y = Y^*$.

($\Longleftarrow$) Supongamos $(x, y) \in \theta_Y$, luego no puede haber ningún $p \in Y$ tal que $x \in p, y \notin p$. Debemos ver que $(x^*, y^*) \in \theta_Y$ y para eso veremos que no hay $p \in Y$ tal que $x^* \in p, y^* \notin p$. Sea $p \in Y$.

Si $x, y \in p$, entonces $x^*, y^* \notin p$.

Si $x, y \notin p$ y $p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$, entonces como $x \vee x^*, y \vee y^* \in D(\mathbf{L}) \subseteq p$, debe ser $x^*, y^* \in p$.

Si $x, y \notin p$ y $p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$, entonces supongamos $x^* \in p, y^* \notin p$. Luego $x \notin m \quad \forall m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ con $p \subseteq m$. Por otro lado, si $\exists u \in p$ tal que $y \wedge u = 0$ entonces $u \leq y^*$ y luego $y^* \in p$, con lo cual $y \wedge u \neq 0 \quad \forall u \in p$. Pero entonces $\exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ con $p \subseteq m$ tal que $y \in m$ y luego como $Y = Y^*$, $m \in Y$ y $x \notin m, y \in m$. Absurdo. Luego $(x^*, y^*) \in \theta_Y$ y por lo tanto $\theta_Y \in \mathrm{Con}(\mathbf{L})$.

2. Rutina.

∎

Proposición 4.29. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$*, entonces*
$(\{Y \text{ cerrado de } X(\mathbf{L}) : Y = Y^*\}, \cup, \cap, \emptyset, X(\mathbf{L}))$ *y* $(\mathrm{Con}(\mathbf{L}), \vee, \wedge, \triangle^{\mathbf{L}}, \triangledown^{\mathbf{L}})$ *son antiisomorfos.*

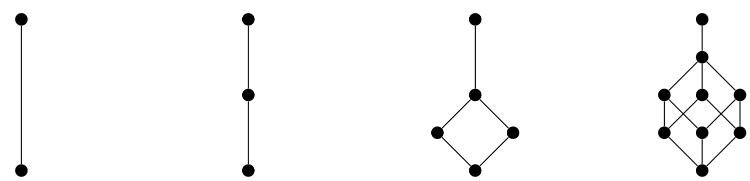
Prueba. Por el lema 4.28, los mapeos $Y \rightarrow \theta_Y$ y $\theta \rightarrow Y_\theta$ con sus dominios restringidos apropiadamente, son antiisomorfismos.

∎

Definición 4.30. Sea $\mathbf{B} = (B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Con $\mathbf{B} \oplus \mathbf{1}$ denotamos la p-álgebra distributiva $(B \cup \{1_g\}, \vee, \wedge, ^*, 0, 1_g)$ que resulta de extender $\mathbf{B}$ con el elemento 1_g de manera que satisface

$$\begin{aligned}
&\forall b \in B \quad b \vee 1_g = 1_g \\
&(.)^* \mid_B = (.)^c \\
&1_g^* = 0
\end{aligned}$$

Definimos $\mathcal{B} = \{\mathbf{B} \oplus \mathbf{1} : \mathbf{B} \text{ es un álgebra de Boole}\}$.



$\mathbf{2}^0 \oplus \mathbf{1}$ $\qquad$ $\mathbf{2}^1 \oplus \mathbf{1}$ $\qquad$ $\mathbf{2}^2 \oplus \mathbf{1}$ $\qquad$ $\mathbf{2}^3 \oplus \mathbf{1}$

Lema 4.31. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$, *entonces*

1. $\bigcap\limits_{p \in X(\mathbf{L})} \theta_{\{p\}^*} = \triangle^{\mathbf{L}}$

2. *Sea* $p \in X(\mathbf{L})$, *entonces* $\mathbf{L}/\theta_{\{p\}^*} \cong \mathbf{B} \oplus \mathbf{1}$ *para algún álgebra de Boole* $\mathbf{B}$.

Prueba. 1. $\bigcap\limits_{p \in X(\mathbf{L})} \theta_{\{p\}^*} \subseteq \bigcap\limits_{p \in X(\mathbf{L})} \theta_p = \triangle^{\mathbf{L}}$.

2. El lema 4.21 nos dice que $\mathbf{L}/\theta_{\{p\}^*} \cong \mathbf{L}(\mathbf{Y})$ con $Y = \{p\}^*$. $\emptyset$ e Y son clopens crecientes de $\mathbf{Y}$. Por otro lado, $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) = \bigcap\limits_{d \in D(\mathbf{L})} \sigma(d)$ que es cerrado, luego $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y$ es cerrado. Como $\{p\}$ es cerrado, $Y \smallsetminus \{p\} = \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y$ es abierto, y por lo tanto es clopen creciente. Entonces si $Z \subseteq \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y$ es clopen, $(\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y) \smallsetminus Z$ también es clopen (y es creciente). Por lo tanto los clopen crecientes de $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y$ son complementados y luego $\mathbf{L}/\theta_{\{p\}^*} \cong \mathbf{B} \oplus \mathbf{1}$ para algún álgebra de Boole $\mathbf{B}$ como queríamos ver.
∎

El lema anterior nos permite aplicar el lema 2.36 para obtener la siguiente representación subdirecta

Proposición 4.32.
$$\mathcal{P} = \mathbb{ISP}(\mathcal{B})$$

Lema 4.33. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$*, se tiene que*

1. $\mathbf{L}$ *es de congruencias distributivas.*

2. $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})) = \{\theta_{\{p\}^*}\}_{p \in X(\mathbf{L})}$.

Prueba. 1. Por el lema 4.29 $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ es subreticulado de $\mathrm{Con}(\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}})$ donde $\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}}$ es $\mathbf{L}$ mirado en $\mathcal{D}_{01}$, y como $\mathrm{Con}(\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}})$ es distributivo resulta $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ también distributivo.

2. Por el lema 4.21 tenemos la siguiente equivalencia
$\theta \in \mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})) \iff \forall \{Z_i\}_{i \in I}$ cerrados de Y_θ tales que $Z_i = Z_i^*$
si $\overline{\bigcup_{i \in I} Z_i} = Y_\theta$ entonces $Z_i = Y_\theta$ para algún $i \in I$

Supongamos $Y_\theta = \{p\}^*$ y $p \notin \bigcup_{i \in I} Z_i$, luego $\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq \{m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) : p \subseteq m\}$ que es cerrado, por lo tanto $\overline{\bigcup_{i \in I} Z_i} \subseteq \{m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) : p \subseteq m\}$ y $p \notin \overline{\bigcup_{i \in I} Z_i}$. Entonces si $\overline{\bigcup_{i \in I} Z_i} = \{p\}^*$, debe ser $p \in \bigcup_{i \in I} Z_i$ y luego $p \in Z_i$ para algún $i \in I$. Y como $Z_i = Z_i^*$, tenemos $Z_i = \{p\}^*$ con lo cual $\theta \in \mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))$.

Por otro lado, si $\theta \in \mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L}))$ entonces como $Y_\theta = \bigcup_{p \in Y_\theta} \{p\}^*$, $Y_\theta = \{p\}^*$ con $p \in X(\mathbf{L})$.

∎

Busquemos ahora una representación global

Proposición 4.34. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$*. Entonces todo sistema* $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ *en* $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ *tal que* $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ *minoriza a* $\Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{F} \oplus \mathbf{1} : \mathbf{F} \in \mathcal{P}, D(\mathbf{F}) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}\}) = \{\theta_{\{p,q\}^*} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$ *tiene solución.*

Prueba. Se puede encontrar una prueba de $\{\theta_{\{p,q\}^*} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\} = \Sigma(\mathbf{L}, \{\mathbf{F} \oplus \mathbf{1} : \mathbf{F} \in \mathcal{P}, D(\mathbf{F}) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}\})$ en [3].

Sea $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ un sistema sobre $\mathrm{Con}(\mathbf{L})$ tal que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ minoriza a $\{\theta_{\{p,q\}^*} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$.

Sea $\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}}$ el álgebra $\mathbf{L}$ mirada como reticulado acotado distributivo.

Notemos que $\theta_{\{p,q\}^*} \subseteq \theta_{\{p,q\}}$, luego $\{\theta_{\{p,q\}^*} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}) = \{\theta_{\{p,q\}} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$ y por transitividad $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}}, \{\mathbf{2}, \mathbf{3}\})$, pero entonces como $(\theta_1, \ldots, \theta_n, x_1, \ldots, x_n)$ también es un sistema sobre $\mathrm{Con}(\mathbf{L}_{\mathcal{D}_{01}})$, la proposición 4.23 nos asegura que tiene una solución.

∎

Proposición 4.35. *Sean* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$ *y* $\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \oplus \mathbf{1} : \mathbf{F} \in \mathcal{P}, D(\mathbf{F}) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}\}$, *entonces*

1. $\mathbf{L} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{L},\mathcal{M})} \mathbf{L}/\theta = \prod_{p,q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q} \mathbf{L}/\theta_{\{p,q\}^*}$.

2. *Cada* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ *es globalmente indescomponible.*

Prueba. 1. Por el inciso 1 del lema 4.33 sabemos que $\mathbf{L}$ es de congruencias distributivas y el inciso 2 junto con la proposición 2.38 nos dicen que en $\mathcal{M} = \{\mathbf{F} \oplus \mathbf{1} : \mathbf{F} \in \mathcal{P}, D(\mathbf{F}) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}\}$ están todas las imágenes homomórficas (no triviales) subdirectamente irreducibles pues $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}(\mathbf{L})) = \{\theta_{\{p\}^*}\}_{p \in X(\mathbf{L})} \subseteq \{\theta_{\{p,q\}^*} : p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q\}$.

Por otro lado, en [3] la clase $\mathcal{M}$ aparece axiomatizada universalmente mediante las siguientes fórmulas (además de las correspondientes a p-álgebra)

$\forall x, y\ (x^* = y^* = 0) \to (x \leq y \vee y \leq x)$

$\forall x, y, z, w\ (x^* = y^* = z^* = w^* = 0) \to \neg(x < y < z < w)$

$\forall x\ (x \neq 1 \wedge x \neq 0) \to (x \vee x^* \neq 1)$

$0 \neq 1$

Por lo tanto podemos aplicar el teorema 4.4 para obtener la representación global.

2. Se puede encontrar una prueba de la indescomponibilidad global de los factores en [3].

∎

Un ejemplo de aplicación de esta representación es la siguiente proposición "estilo Nachbin"

Proposición 4.36. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$. *Entonces* $\forall d \in D(\mathbf{L})$ *el intervalo* $[d, 1]$ *visto como reticulado acotado distributivo es complementado* $\iff$ *toda cadena de* $X(\mathbf{L})$ *tiene longitud a lo sumo 2.*

Prueba. La propiedad $\forall d \in D(\mathbf{L})$ el intervalo $[d, 1]$ visto como reticulado acotado distributivo es complementado se puede expresar como

$$\forall d, x \in L, \exists! y \in L : d^* = 0 \bigwedge x \wedge d = d \bigwedge y \wedge d = d \bigwedge x \wedge y = 0 \bigwedge x \vee y = 1$$

luego es preservada por productos subdirectos globales.

La proposición 4.35 nos da la representación global $\mathbf{L} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{p,q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q} \mathbf{L}/\theta_{\{p,q\}^*}$, entonces $\mathbf{L}$ satisface la propiedad si todos sus factores lo hacen.

Si toda cadena de $X(\mathbf{L})$ tiene longitud a lo sumo 2, entonces todos los factores satisfacen la propiedad pues pertenecen a $\mathcal{B}$ y por lo tanto $D(\mathbf{L}) \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$. Con lo cual $\mathbf{L}$ satisface la propiedad.

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{L}$ satisface la propiedad y sean $p, q \in X(\mathbf{L})$ con $p \subsetneq q$, veremos que $q \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ y por lo tanto toda cadena de filtros primos tiene longitud a lo sumo 2.

Sean $d \in D(\mathbf{L})$ y $x \in q \setminus p$, luego $x \vee d \in q$.

Si $x \vee d \in p$, por ser p filtro primo y $x \notin p$ debe ser $d \in p$ y luego $d \in q$

Si $x \vee d \notin p$, como $x \vee d \in [d, 1]$, $\exists y : (x \vee d) \vee y = 1$ y $(x \vee d) \wedge y = d$, pero entonces $(x \vee d) \vee y \in p$ y como $x \vee d \notin p$, debe ser $y \in p$. Esto implica que $y \in q$ y como $x \vee d \in q$ tenemos $(x \vee d) \wedge y = d \in q$.

Entonces $D(\mathbf{L}) \subseteq q$ y por lo tanto, $q \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$.

∎

4.4 Álgebras de Stone

Proposición 4.37. *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$, luego son equivalentes*

1. $\mathbf{L} \in \mathcal{S}$.
2. *Cada filtro primo de $\mathbf{L}$ está contenido en exactamente un filtro primo maximal.*
3. *Si $\mathbf{B} \oplus \mathbf{1}$ es imagen homomórfica de $\mathbf{L}$ con $\mathbf{B}$ álgebra de Boole, entonces $\mathbf{B}$ tiene a lo sumo dos elementos.*

Prueba. ($1 \implies 2$) Supongamos $m, m' \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ con $p \subseteq m$, $p \subseteq m'$ y $m \neq m'$. Luego sea $x \in m \setminus m'$, y como $x \vee x^* \in m'$, debe ser $x^* \in m' \setminus m$. Pero entonces como $x^* \vee x^{**} = 1 \in p$, tenemos $x^{**} \in p \subseteq m'$ con lo que $x^* \wedge x^{**} = 0 \in m'$. Absurdo. Por lo tanto cada filtro primo de $\mathbf{L}$ está contenido en exactamente un filtro primo maximal.

($2 \implies 3$) Tenemos que $\{p\}^* = \begin{cases} \{p\} & p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \\ \{p, m\} & p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \end{cases}$ y por lo tanto $\mathbf{L}/\theta_{\{p\}^*} \cong \begin{cases} \mathbf{2}_{\mathcal{P}} & p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \\ \mathbf{3}_{\mathcal{P}} & p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \end{cases}$.

($3 \implies 1$) Ya vimos que $\mathbf{L}$ es isomorfo a un producto subdirecto de sus imágenes homomórficas subdirectamente irreducibles. Luego como $\mathbb{ISP}$ preserva identidades, $\forall x \in \mathbf{L} \quad x^* \vee x^{**} = 1$ es una identidad y $\mathbf{2}_{\mathcal{P}}$ y $\mathbf{3}_{\mathcal{P}}$ la cumplen, tenemos que $\mathbf{L} \in \mathcal{S}$.

∎

Proposición 4.38.

$$\mathcal{S} = \mathbb{ISP}(\{\mathbf{2}_{\mathcal{P}}, \mathbf{3}_{\mathcal{P}}\})$$

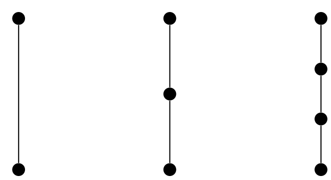
Prueba. La prueba es directa usando el lema anterior y la proposición 4.32.

∎

Proposición 4.39. *Sean* $\mathbf{S} \in \mathcal{S}$ *y* $\mathcal{M} = \{\mathbf{2}_{\mathcal{P}}, \mathbf{3}_{\mathcal{P}}, \mathbf{4}_{\mathcal{P}}\}$*, entonces*

1. $\mathbf{S} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{S},\mathcal{M})} \mathbf{S}/\theta = \prod_{p,q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q} \mathbf{S}/\theta_{\{p,q\}^*}.$

2. *Cada* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ *es globalmente indescomponible.*



$\mathbf{2}_{\mathcal{S}}$ $\mathbf{3}_{\mathcal{S}}$ $\mathbf{4}_{\mathcal{S}}$

Prueba. 1. Como toda álgebra de Stone es también una p-álgebra distributiva, usamos la misma representación global encontrada para p-álgebras distributivas. Para ver cuáles son los factores, sólo basta notar que el inciso 2 de la proposición 4.37 implica que

$$\{p,q\}^* = \begin{cases} \{p,q,m\} & \text{si } p \subsetneq q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \{p,q\} & \text{si } p \subsetneq q \in \mathrm{Max}(X(S)) \\ \{p,m\} & \text{si } p = q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \{p\} & \text{si } p = q \in \mathrm{Max}(X(S)) \end{cases}$$

es decir que

$$S/\theta_{\{p,q\}^*} = \begin{cases} \mathbf{4} & \text{si } p \subsetneq q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \mathbf{3} & \text{si } p \subsetneq q \in \mathrm{Max}(X(S)) \\ \mathbf{3} & \text{si } p = q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \mathbf{2} & \text{si } p = q \in \mathrm{Max}(X(S)) \end{cases}$$

2. Si uno de los factores fuera globalmente descomponible como álgebra de Stone, también lo sería como p-álgebra distributiva y ya vimos que como p-álgebras distributivas son globalmente indescomponibles.

∎

5 Representaciones globales de cuasivariedades

5.1 Teoremas de representaciones globales para cuasivariedades

Tenemos las siguientes generalizaciones de los teoremas de representación para cuasivariedades.

Teorema 5.1. *Sean $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad, $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ un álgebra de congruencias relativas distributivas y $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Q}$ una clase universal que contiene a toda imagen homomórfica (no trivial) relativamente subdirectamente irreducible de $\mathbf{A}$, entonces los siguientes son equivalentes:*
(a) $\mathbf{A}$ es isomorfa a un producto subdirecto global con factores en $\mathcal{M}$.
(b) El mapeo natural

$$\tau : \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathcal{M})} \mathbf{A}/\theta$$

dado por

$$x \longrightarrow \langle x/\theta \rangle_{\theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathcal{M})}$$

es un embedding y $\tau(A)$ es un producto subdirecto global de $\{\mathbf{A}/\theta\}_{\theta \in \Sigma(\mathbf{A},\mathcal{M})}$.
(c) Todo sistema $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ en $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ tal que $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{A},\mathcal{M})$ tiene solución.

Se puede encontrar una prueba del teorema anterior en [9].

Teorema 5.2. *Sean $\mathcal{Q}$ una cuasivariedad y $\mathbf{A} \in \mathcal{Q}$ un álgebra tal que $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ es finita. Los siguientes son equivalentes*

1. *$\mathbf{A}$ es globalmente indescomponible en $\mathcal{Q}$.*
2. *Para cada $n \geq 1$, $\theta_1, ..., \theta_n \in \mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A}) \backslash \{\Delta\}$ tal que $\bigcap \{\theta_i : 1 \leq i \leq n\} = \Delta$, existen $x_1, ..., x_n \in A$ tales que $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ es un sistema en $\mathrm{Con}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{A})$ que no tiene solución.*

Se puede dar una prueba del teorema anterior similar a la dada para congruencias generales en [4].

5.2 p-álgebras distributivas punteadas

Lema 5.3. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}$*, entonces* $\exists c \in \mathbf{L}$ *tal que* $D(\mathbf{L}) = [c, 1]$ *y* c *es dual denso* $\iff$ $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ *es clopen de* $X(\mathbf{L})$ *y* $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap \mathrm{Min}(X(\mathbf{L})) = \emptyset$*. En tal caso* $\sigma(c) = \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$*.*

Prueba. ($\Longrightarrow$) Si $D(\mathbf{L}) = [c, 1]$ entonces $p \in \sigma(c) \iff D(\mathbf{L}) \subseteq p \iff p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$, luego $\sigma(c) = \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ y por lo tanto $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ es clopen.

Por otro lado, si x es dual denso y $p \in \mathrm{Min}(X(\mathbf{L}))$ entonces $x \notin p$ o lo que es lo mismo $p \notin \sigma(x)$, pues supongamos $x \in p$, es fácil ver que $\{x \vee y : y \in L \setminus p\}$ es un ideal propio. Luego como $L \in \mathcal{D}_{01}$, existe un ideal primo que lo contiene, con lo cual su complemento es un filtro primo que está contenido en p, lo que contradice la minimalidad de p.

Esto nos dice que si c es además dual denso, entonces $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap \mathrm{Min}(X(\mathbf{L})) = \emptyset$.

($\Longleftarrow$) Si $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ es clopen, sea c tal que $\sigma(c) = \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$. Luego c es denso, pues todo clopen creciente contiene un maximal. Por otro lado, supongamos $d \in D(\mathbf{L})$ y $c \nleq d$, entonces existe un filtro primo que contiene a c pero no a d, pero como contiene a c, $p \in \sigma(c) = \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ y luego contiene a d. Absurdo. Entonces $D(\mathbf{L}) = [c, 1]$.

Además si $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \cap \mathrm{Min}(X(\mathbf{L})) = \emptyset$, el menor clopen creciente que contiene a $X(\mathbf{L}) \setminus \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ es $X(\mathbf{L})$ y por lo tanto c es dual denso.

∎

Definición 5.4. Sea $(X, \tau, \subseteq)$ un espacio de Priestley. Dado $Y \subseteq X$ definamos $^\circ : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dado por

$$Y^\circ = Y \setminus (\mathrm{Max}(X) \cap \mathrm{Min}(Y))$$

Lema 5.5. *Sean* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c$ *e* Y *cerrado de* $X(\mathbf{L})$ *tal que* $Y = Y^*$*, entonces*

1. $\theta_Y \in \mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L}) \iff Y = Y^\circ$.
2. *Dados* $Y, Z \subseteq X(\mathbf{L})$ *tales que* $\theta_Y, \theta_Z \in \mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L})$*, tenemos que*

$$\theta_Y \sqcup \theta_Z = \theta_{(Y \cap Z)^\circ}$$

Prueba. 1. Observemos que $\theta_Y \in \mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L}) \iff \mathbf{L}/\theta_Y$ tiene un menor denso dual denso pues ser el menor denso se puede expresar con identidades, por lo que es preservado por homomorfismos y luego por congruencias, y el menor denso dual denso (de existir) es único. Luego el lema 5.3 junto con el lema 4.21 nos dicen que

$\theta_Y \in \mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L}) \iff \mathbf{L}/\theta_Y$ tiene un menor denso dual denso
$\iff \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}/\theta_Y))$ es clopen y $\mathrm{Max}(X(\mathbf{L}/\theta_Y)) \cap \mathrm{Min}(X(\mathbf{L}/\theta_Y)) = \emptyset$

$\iff$ Max($\mathbf{Y}$) es clopen y $\text{Max}(\mathbf{Y}) \cap \text{Min}(\mathbf{Y}) = \emptyset$
$\iff \text{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y \cap \text{Min}(\mathbf{Y}) = \emptyset$
$\iff Y = Y^{\circ}$
pues como $Y = Y^*$, $\text{Max}(\mathbf{Y}) = \text{Max}(X(\mathbf{L})) \cap Y$ que es clopen de $\mathbf{Y}$.
2. Rutina.
∎

El inciso 2 del lema anterior nos dice que ahora ya $\text{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L})$ no es un subreticulado de $\text{Con}(\mathbf{L}_{\mathcal{P}})$.

Es fácil comprobar que $\mathbf{B} \oplus \mathbf{1}$ tiene un menor denso dual denso si y sólo si $\mathbf{B}$ no es trivial.

Definición 5.6. Dado $\mathbf{B} \oplus \mathbf{1}$ con $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole no trivial, denotamos con $(\mathbf{B} \oplus \mathbf{1})_{\mathcal{P}_c}$ la p-álgebra distributiva punteada $(B \cup \{1_g\}, \vee, \wedge, ^*, 0, 1_g, 1)$.

Definimos $\mathcal{B}_c = \{(\mathbf{B} \oplus \mathbf{1})_{\mathcal{P}_c} : \mathbf{B}$ es un álgebra de Boole no trivial$\}$.

Lema 5.7. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c$*, entonces*

1. $\displaystyle\bigcap_{p \notin Max(X(\mathbf{L}))} \theta_{\{p\}^*} = \triangle^{\mathbf{L}}$.
2. *Sea* $p \notin \text{Max}(X(\mathbf{L}))$*, entonces* $\mathbf{L}/\theta_{\{p\}^*} \cong (\mathbf{B} \oplus \mathbf{1})_{\mathcal{P}_c}$ *para algún álgebra de Boole no trivial* $\mathbf{B}$.

La prueba del lema anterior es rutina.

El lema anterior nos permite aplicar el lema 2.36 para obtener la siguiente representación

Proposición 5.8.
$$\mathcal{P}_c = \mathbb{ISP}(\mathcal{B}_c)$$

Lema 5.9. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c$*, entonces*

1. $\mathbf{L}$ *es de congruencias relativas distributivas.*
2. $\text{CMI}(\text{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L})) = \{\theta_{\{p\}^*}\}_{p \in X(\mathbf{L}) \smallsetminus \text{Max}(X(\mathbf{L}))}$.

La prueba del lema anterior es rutina.

Para la representación global, la clase de factores encontrada es

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c : X(\mathbf{L}) = \{p, q\}^*,$$
$$p \notin \text{Max}(X(\mathbf{L})), \exists m \in \text{Max}(X(\mathbf{L})) \quad p \subseteq m \wedge q \subseteq m\}$$

Probaremos más adelante que dicha clase es universal y sus elementos son globalmente indescomponibles.

Proposición 5.10. *Sea* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c$. *Entonces todo sistema* $(\theta_1, ..., \theta_n, x_1, ..., x_n)$ *en* $\mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L})$ *tal que* $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ *minoriza a* $\Sigma(\mathbf{L}, \mathcal{M})$ *con* $\mathcal{M} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c : X(\mathbf{L}) = \{p, q\}^*, p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})), \exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \quad p \subseteq m \wedge q \subseteq m\}$ *tiene solución.*

Prueba. Por el lema 2.50 podemos suponer que $\theta_1, ..., \theta_n$ son compactas.

Nuevamente dualizamos el problema al siguiente:

Tenemos el sistema

$$(Y_1, ..., Y_n, \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n)$$

donde $Y_1, ..., Y_n$ son clopens de $X(\mathbf{L})$ tales que $Y_i = \overline{Y_i}^{*^\circ}$ y $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ son clopens crecientes de $X(\mathbf{L})$ (correspondientes a $Y_{\theta_1}, ..., Y_{\theta_n}$ y $\sigma(x_1), ..., \sigma(x_n)$ respectivamente).

Ahora la condición de sistema $(x_i, x_j) \in \theta_i \sqcup \theta_j$ se transforma en (por el lema 4.17 y el inciso 3 de la proposición 5.5)

$$\mathcal{C}_i \cap (Y_i \cap Y_j)^\circ = \mathcal{C}_j \cap (Y_i \cap Y_j)^\circ \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Una solución se convierte en un $\mathcal{C}$ clopen creciente tal que

$$\mathcal{C} \cap Y_i = \mathcal{C}_i \cap Y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Notar que si los Y_i cubren todo $X(\mathbf{L})$, como quedará claro más adelante por la minorización, el único candidato a solución es $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq n} (\mathcal{C}_i \cap Y_i)$.

Comprobemos que efectivamente es solución.

La condición de que $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ minoriza a $\Sigma(\mathbf{L}, \mathcal{M})$ implica que $\forall p, q \in X(\mathbf{L}) : p \notin Max(X(\mathbf{L})) \wedge \exists m \in Max(X(\mathbf{L})) : p \subseteq m \wedge q \subseteq m$, tenemos que $\exists 1 \leq i \leq n : \theta_i \subseteq \theta_{\{p,q\}^*}$ o dicho dualmente $\{p, q\}^* \subseteq Y_i$.

Veamos que esto elimina la posibilidad de sistemas que no sean de congruencias de p-álgebra, es decir que vale

$$\mathcal{C}_i \cap Y_i \cap Y_j = \mathcal{C}_j \cap Y_i \cap Y_j \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$$

Para ello sea $p \in \mathcal{C}_i \cap Y_i \cap Y_j$. Entonces $p \in \mathcal{C}_i, p \in Y_i$ y $p \in Y_j$. Debemos ver que $p \in \mathcal{C}_j$.

Si $p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$

$$p \in Y_i \cap Y_j \implies p \in (Y_i \cap Y_j)^\circ \implies p \in \mathcal{C}_i \cap (Y_i \cap Y_j)^\circ \implies \mathcal{C}_j \cap (Y_i \cap Y_j)^\circ \implies p \in \mathcal{C}_j$$

Si $p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$, como $Y_i = \overline{Y_i}^{*^\circ}$ y $Y_j = \overline{Y_j}^{*^\circ}$, deben existir $r, s \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ con $r \in Y_i$ y $s \in Y_j$ que "atestigüen" la presencia de p. Como se cumple que $r \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ y $r \subseteq p \wedge s \subseteq p$ con $p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$, la minorización nos dice que existe un k tal que $\{r, s, p\} \subseteq \{r, s\}^* \subseteq Y_k$, luego como $\mathcal{C}_i \cap (Y_i \cap Y_k)^\circ = \mathcal{C}_k \cap (Y_i \cap Y_k)^\circ$

$$\{r, p\} \subseteq Y_i \cap Y_k \implies p \in (Y_i \cap Y_k)^\circ \implies p \in \mathcal{C}_k$$

y también como $\mathcal{C}_j \cap (Y_j \cap Y_k)^\circ = \mathcal{C}_k \cap (Y_j \cap Y_k)^\circ$

$$\{s,p\} \subseteq Y_j \cap Y_k \implies p \in (Y_j \cap Y_k)^\circ \implies p \in \mathcal{C}_j$$

A continuación chequeamos

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cap Y_i = \big(\bigcup_{1\le j\le n} (\mathcal{C}_j \cap Y_j)\big) \cap Y_i &= \bigcup_{1\le j\le n} (\mathcal{C}_j \cap Y_j \cap Y_i) \\ &= \bigcup_{1\le j\le n} (\mathcal{C}_i \cap Y_j \cap Y_i) = \mathcal{C}_i \cap Y_i \end{aligned}$$

Por otro lado, unión e intersección finita de clopens es clopen, luego $\mathcal{C}$ es clopen.

Finalmente debemos probar que es creciente:

Supongamos $p, q \in X(\mathbf{L}), p \subseteq q, p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ y $p \in \mathcal{C}$, luego cualquier maximal que contiene a q también contiene a p por lo que la minorización nos dice que existe i tal que $\{p,q\} \subseteq \{p,q\}^* \subseteq Y_i$. Como $\mathcal{C} \cap Y_i = \mathcal{C}_i \cap Y_i$ tenemos que

$$p \in \mathcal{C} \implies p \in \mathcal{C} \cap Y_i \implies p \in \mathcal{C}_i \cap Y_i \implies p \in \mathcal{C}_i$$

y como $\mathcal{C}_i$ es clopen creciente,

$$p \in \mathcal{C}_i \implies q \in \mathcal{C}_i \implies q \in \mathcal{C} \cap Y_i \implies q \in \mathcal{C}$$
$$\therefore \mathcal{C} \text{ es clopen creciente}$$
$$\therefore \mathcal{C} \text{ es solución del sistema}$$
$$\therefore \sigma^{-1}(\mathcal{C}) \text{ es solución del sistema original}$$

∎

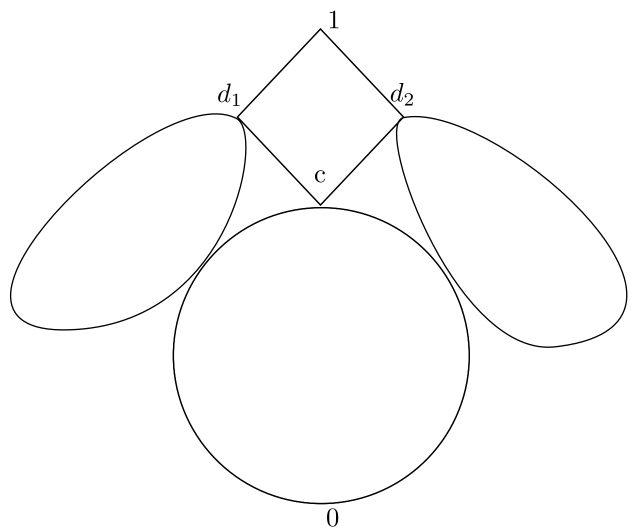
Lema 5.11. *Sea $\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c$ tal que $D(\mathbf{L}) = \{c, d_1, d_2, 1\}$ con $c, d_1, d_2, 1$ distintos dos a dos, d_1 y d_2 incomparables y*

$$A_1 = [0, d_1] \setminus [0, c]$$
$$A_2 = [0, d_2] \setminus [0, c]$$

tales que se cumplen cada una de las siguientes

1. *A_1 y A_2 son cerrados por $\wedge$,*
2. *$\forall x_1 \in A_1, x_2 \in A_2 \quad x_1 \wedge x_2 \neq 0$ y*
3. *$L = [0, c] \cup A_1 \cup A_2 \cup \{1\}$*

entonces $X(\mathbf{L}) = \{A_1 \cup \{1\}, A_2 \cup \{1\}\}^*$ con $A_1 \cup \{1\}, A_2 \cup \{1\} \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$ y tal que $\exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) : A_1 \cup \{1\} \subseteq m \wedge A_2 \cup \{1\} \subseteq m$.



Prueba. Notemos que la unión en 3 es disjunta, pues si $x \in A_1 \cap A_2$ entonces $x \leq d_1 \wedge d_2 = c$, absurdo.

Primero veamos que $A_1 \cup \{1\} \in X(\mathbf{L})$.

Por 1 sabemos que es cerrado por $\wedge$.

Sean $y \geq x \in A_1 \cup \{1\}$ y supongamos que $y \notin A_1 \cup \{1\}$, entonces por 3 debe ser $y \in [0, c] \cup A_2 = [0, d_2]$ pero luego $d_2 \geq y \geq x$ con lo que $x \in [0, c] \cup A_2$, absurdo. Luego $y \in A_1 \cup \{1\}$.

Supongamos $x \vee y \in A_1 \cup \{1\}$ y $x, y \notin A_1 \cup \{1\}$, luego por 3 $x, y \in [0, c] \cup A_2 = [0, d_2]$ pero entonces $x, y \leq d_2 \implies x \vee y \leq d_2 \implies x \vee y \in [0, c] \cup A_2$, absurdo. Luego $x \in A_1 \cup \{1\}$ o $y \in A_1 \cup \{1\}$.

Resulta entonces $A_1 \cup \{1\} \in X(\mathbf{L})$ y análogamente $A_2 \cup \{1\} \in X(\mathbf{L})$.

Por otro lado, sea $p \in X(\mathbf{L})$ y sean $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$. Veamos a dónde puede estar $x_1 \vee x_2$. No puede estar en $[0, c]$ ya que de lo contrario $x_1 \leq x_1 \vee x_2 \leq c$. Tampoco puede estar en A_1 ya que sino $x_2 \leq x_1 \vee x_2 \leq d_1$ y luego $x_2 \in A_1$ y análogamente tampoco puede estar en A_2. Entonces por 3 debe ser $x_1 \vee x_2 = 1 \in p$, luego $x_1 \in p$ o $x_2 \in p$. Si $\exists x_2 \in A_2 \setminus p$, variando $x_1 \in A$ tenemos que $A_1 \subseteq p$. Esto nos dice que todo filtro primo contiene a $A_1 \cup \{1\}$ o a $A_2 \cup \{1\}$.

Ahora, si $p \in X(\mathbf{L})$ contiene propiamente a alguno de los dos, por ejemplo $A_1 \cup \{1\}$, entonces $\exists x \in p \cap (A_2 \cup [0, c]) = p \cap [0, d_2]$ y luego $x \leq d_2$, con lo que por ser filtro $d_2 \in p$. Luego $c = d_1 \wedge d_2 \in p$ y entonces $D(\mathbf{L}) \subseteq p$ con lo que $p \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))$. Esto prueba que $X(\mathbf{L}) = \{A_1 \cup \{1\}, A_2 \cup \{1\}\}^*$.

Finalmente, sea $r = \{z \in L : z \geq x \wedge y \text{ con } x \in A_1, y \in A_2\}$. Es fácil ver que es un filtro, que contiene a $A_1 \cup \{1\}$,$A_2 \cup \{1\}$ y por 2 es un filtro propio. Luego como $\mathbf{L} \in \mathcal{D}_{01}$, r está contenido en un $m \in X(\mathbf{L})$ y ya vimos que debe ser maximal, luego $\exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) : A_1 \cup \{1\} \subseteq m \wedge A_2 \cup \{1\} \subseteq m$ como queríamos probar.

∎

Proposición 5.12. *Sean* $\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c$ *y* $\mathcal{M} = \{\mathbf{L} \in \mathcal{P}_c : X(\mathbf{L}) = \{p,q\}^*, p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})), \exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \quad p \subseteq m \wedge q \subseteq m\}$, *entonces*

1. $$\mathbf{L} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{L},\mathcal{M})} \mathbf{L}/\theta = \prod_{\substack{p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \\ \exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \quad p \subseteq m \wedge q \subseteq m}} \mathbf{L}/\theta_{\{p,q\}^*}.$$

2. *Cada* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ *es globalmente indescomponible.*

Prueba. 1. Por el inciso 1 del lema 5.9 sabemos que $\mathbf{L}$ es de congruencias relativas distributivas y el inciso 2 junto con la proposición 2.49 nos dicen que en $\mathcal{M}$ están todas las imágenes homomórficas (no triviales) relativamente subdirectamente irreducibles pues $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{L})) = \{\theta_{\{p\}^*}\}_{p \in X(\mathbf{L}) \smallsetminus \mathrm{Max}(X(\mathbf{L}))} \subseteq \{\theta_{\{p,q\}^*} : p,q \in X(\mathbf{L}), p \notin \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})), \exists m \in \mathrm{Max}(X(\mathbf{L})) \quad p \subseteq m \wedge q \subseteq m\}$.

Por otro lado, veamos que $\mathcal{M}$ es universal.

Se puede axiomatizar la clase universalmente con los siguientes

$$1. \forall x,y,z,w,p\ (x^* = y^* = z^* = w^* = p^* = 0) \rightarrow \neg(x \neq y \neq z \neq w \neq p)$$

$$2. \forall x,d\ (c < d < 1 \bigwedge x \not\leq d \bigwedge x \neq 1) \rightarrow x \vee x^* \neq 1$$

$$\begin{gathered} 3. \forall x,y,z,w,p\ ((x^* = y^* = 0) \wedge (c \neq x \neq y \neq 1)) \rightarrow \big((x \not\leq y) \bigwedge (y \not\leq x) \bigwedge \\ (((z \leq x \bigwedge z \not\leq c) \bigwedge (w \leq x \bigwedge w \not\leq c)) \rightarrow \\ (z \wedge w \leq x \bigwedge z \wedge w \not\leq c)) \bigwedge (((z \leq y \bigwedge z \not\leq c) \bigwedge (w \leq y \bigwedge w \not\leq c)) \rightarrow \\ (z \wedge w \leq y \bigwedge z \wedge w \not\leq c)) \bigwedge (((z \leq x \bigwedge z \not\leq c) \bigwedge (w \leq y \bigwedge w \not\leq c)) \rightarrow \\ (z \wedge w \neq 0)) \bigwedge ((p \leq c) \bigvee (p \leq x \bigwedge p \not\leq c) \bigvee (p \leq y \bigwedge w \not\leq c) \bigvee (p = 1)\big) \end{gathered}$$

El axioma 1 dice que hay a lo sumo 4 densos distintos.

El axioma 2 excluye álgebras con 3 densos que no son de la forma $\mathbf{N} \oplus 1$.

El axioma 3 traduce el lema 5.11 a primer orden.

Por lo tanto podemos aplicar el teorema 5.1 para obtener la representación global.

2. Veamos que podemos aplicar el teorema 5.2. Los factores $\mathbf{L} \in \mathcal{M}$ tienen $X(\mathbf{L}) = \{p,q\}^*$ (el caso $p = q$ corresponde a las congruencias CMI y luego son subdirectamente relativamente irreducibles, por lo tanto podemos considerar el caso $p \neq q$). Luego $\mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(L) = \{\Delta^{\mathbf{L}}, \theta_{\{p\}^*}, \theta_{\{q\}^*}, \nabla^{\mathbf{L}}\}$. Además $\theta_{\{p\}^*} \sqcup \theta_{\{q\}^*} = \nabla^{\mathbf{L}}$, pero $(\theta_{\{p\}^*}, \theta_{\{q\}^*}, 0, 1)$ no tiene solución pues $\theta_{\{p\}^*} \vee \theta_{\{q\}^*} \subsetneq \nabla^{\mathbf{L}}$. Entonces los factores en $\mathcal{M}$ son globalmente indescomponibles.

∎

5.3 Álgebras de Stone punteadas

Lema 5.13. *Dada* $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_c$*, se tiene que*

1. $\mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{S}_{\mathcal{P}_c}) = \mathrm{Con}_{\mathcal{S}_c}(\mathbf{S})$.
2. $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}_{\mathcal{S}_c}(\mathbf{S})) = \{\theta_{\{p\}^*} : p \in X(S) \smallsetminus \mathrm{Max}(X(S))\}$.

Prueba. 1. Es claro pues la axiomatización de $\mathcal{S}_c$ sólo agrega una identidad a la de $\mathcal{P}_c$ y las identidades son preservadas por homomorfismos y por lo tanto por congruencias.

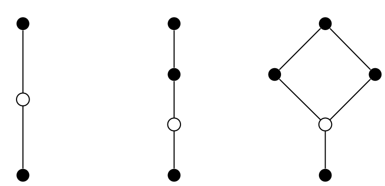
2. Por el inciso anterior basta tomar las congruencias en $\mathrm{CMI}(\mathrm{Con}_{\mathcal{P}_c}(\mathbf{S}_{\mathcal{P}_c}))$.
∎

Proposición 5.14.
$$\mathcal{S}_c = \mathbb{ISP}(\{\mathbf{3}_{\mathcal{S}_c}\})$$

Prueba. Basta observar que el único elemento de $\mathcal{B}_c$ que es álgebra de Stone es $\mathbf{3}_{\mathcal{S}_c}$ y usar $\mathcal{P}_c = \mathbb{ISP}(\mathcal{B}_c)$.
∎

Proposición 5.15. *Sean* $\mathbf{S} \in \mathcal{S}_c$*,* $\mathcal{M} = \{\mathbf{3}_{\mathcal{S}_c}, \mathbf{4}_{\mathcal{S}_c}, (\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}^2)_{\mathcal{S}_c}\}$*, entonces*

1. $\mathbf{S} \overset{glob}{\hookrightarrow} \prod_{\theta \in \Sigma(\mathbf{S},\mathcal{M})} \mathbf{S}/\theta$.
2. *Cada* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ *es globalmente indescomponible.*



$\mathbf{3}_{\mathcal{S}_c}$ $\mathbf{4}_{\mathcal{S}_c}$ $(\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}^2)_{\mathcal{S}_c}$

Prueba. 1. Toda álgebra de Stone punteada es también una p-álgebra distributiva punteada, luego usamos la misma representación global encontrada para p-álgebras distributivas punteadas. Para ver cuáles son los factores, notemos que el inciso 2 de la proposición 4.37 implica que

$$\{p,q\}^* = \begin{cases} \{p,q,m\} & \text{si } p \subsetneq q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \{p,q\} & \text{si } p \subsetneq q \in \mathrm{Max}(X(S)) \\ \{p,m\} & \text{si } p = q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \{p,q,m\} & \text{si } \neg(p \subseteq q \vee q \subseteq p) \text{ y } \exists m \in \mathrm{Max}(X(S)) \quad p \subsetneq m \wedge q \subsetneq m \end{cases}$$

es decir que

$$S/\theta_{\{p,q\}^*} = \begin{cases} \mathbf{4}_c & \text{si } p \subsetneq q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ \mathbf{3}_c & \text{si } p \subsetneq q \in \mathrm{Max}(X(S)) \\ \mathbf{3}_c & \text{si } p = q \notin \mathrm{Max}(X(S)) \\ (\mathbf{1} \oplus \mathbf{2}^2)_c & \text{si } \neg(p \subseteq q \vee q \subseteq p) \text{ y } \exists m \in \mathrm{Max}(X(S)) \quad p \subsetneq m \wedge q \subsetneq m \end{cases}$$

2. Si uno de los factores fuera globalmente descomponible como álgebra de Stone punteada, también lo sería como p-álgebra distributiva punteada y ya vimos que como p-álgebras distributivas punteadas son globalmente indescomponibles.

∎

6 Conclusión

El objetivo inicial de este trabajo fue encontrar una clase de factores globalmente indescomponibles con la cual poder representar globalmente todo miembro de la cuasivariedad de álgebras de Stone punteadas finitas. Sin embargo se terminó cumpliendo un objetivo más ambicioso: encontrar una clase de dichas características para la cuasivariedad de p-álgebras distributivas punteadas (no necesariamente finitas). Para ello debieron superarse algunos obstáculos que detallaremos a continuación.

En un primer momento se creyó que la clase de factores que se conocía para representar globalmente la variedad de p-álgebras distributivas, servía también para representar a las p-álgebras distributivas punteadas (quitando los factores que no podían ser punteados y punteando apropiadamente los restantes). Dicha creencia se basó en un argumento que probaba que la relativización de las congruencias no tenía efecto sobre las soluciones de los sistemas que minorizaban a un cierto conjunto de congruencias. Sin embargo se pasó por alto que, si bien los candidatos a solución de esos sistemas seguían siendo elementos del álgebra, podían dejar de cumplir las condiciones para ser solución.

Una vez entendido bien esto, se pudo completar la clase de factores con los necesarios para que no se rompan las condiciones que aseguraban que los candidatos eran solución. Dichos factores agregados distinguen en esencia la representación hallada de las representaciones obtenidas para variedades, lo cual evidencia que el cambio de variedades a cuasivariedades (y la respectiva relativización de las congruencias) no pasa desapercibido.

Luego, construir las representaciones globales para álgebras de Stone punteadas a partir de las obtenidas para p-álgebras distributivas punteadas fue tarea sencilla, puesto que las primeras son una subclase de las segundas.

Por otro lado, el resultado de este trabajo provee evidencia positiva de que el problema de encontrar representaciones globales para cuasivariedades mediante factores indescomponibles está bien condicionado y es probable que tenga solución en muchos otros casos.

A lo largo de la investigación desarrollada, la dualidad de Priestley cumplió un papel omnipresente, demostrando una vez más el poder que tiene para generar en el mundo topológico soluciones constructivas a problemas algebraicos.

Se eligió presentar solamente las pruebas de resultados conocidos que fueron repensadas y que poseen un giro propio, dejando las demás al lector o citando alguna referencia.

Referencias

[1] S. Burris and H.P. Sankappanavar. *A Course in Univesal Algebra.* Cambridge University Press, 2012.

[2] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order.* 2002.

[3] H. Gramaglia and D. Vaggione. Birkhoff-like sheaf representation for varieties of lattice expansions. *Studia Logica*, 56(1/2):111–131, 1996.

[4] H. Gramaglia and D. Vaggione. (finitely) subdirectly irreducibles and birkhoff-like sheaf representation for certain varieties of lattice ordered structures. *Algebra Universalis*, 38(1):56–91, 1997.

[5] P. Krauss and D. Clark. Global subdirect products. *Amer. Math. Soc. Mem.*, 210:287–299, 1979.

[6] R. C. Lyndon. Properties preserved under algebraic constructions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 65(5):287–299, 1959.

[7] L. Nachbin. Une propriété charactéristique des algèbres booliénnes. *Portugal. Math.*, 6, 1947.

[8] D. Pigozzi. Finite basis theorems for relatively congruence-distributive quasivarieties. *Transactions of the American Mathematical Society*, 310(2):499–533, 1988.

[9] D. Vaggione. A general sheaf representation theorem. Preprint.

[10] H. Volger. Preservation theorems for limits of structures and global sections of sheaves of structures. *Akademie-Verlag*, 1978.