



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS  
ESCUELA DE GRADUADOS

TESIS  
MAGISTER EN ESTADÍSTICA APLICADA

**LA TEORÍA DE RESPUESTA AL ÍTEM  
APLICADA A PRUEBAS DIAGNÓSTICO  
DE INGRESO UNIVERSITARIO**

**Janina Micaela Roldan**

**Directora:** María Cristina Martín

**Co-Director:** Oscar Humberto Bustos

CÓRDOBA

ARGENTINA

2022



La teoría de respuesta al ítem aplicada a pruebas diagnóstico de ingreso universitario por Janina Micaela Roldan se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución – No Comercial – Sin Obra Derivada 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).



# Prefacio

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de *Magister en Estadística Aplicada* de la Universidad Nacional de Córdoba y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa durante el año 2020. Investigaciones realizadas por la profesora Janina Roldan, bajo la dirección de la Dra. María Cristina Martín, profesora del Departamento de Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa y la co-dirección del Dr. Oscar Bustos, profesor de la Facultad de Matemática Astronomía, Física y Computación de la Universidad Nacional de Córdoba.



*A mi mamá Graciela y a mi abuela Hilda.*

*A mi gran amor y compañero de vida Maximiliano.*

*A mi hermana Nerina.*

*A mis hermanos, Mateo y Lautaro, y a su papá José.*

*Y, también,  
a todas aquellas personas que jamás se dan por vencidas.*



# Agradecimientos

*A Dios por acompañarme a transitar la vida y bendecir cada día a mi familia.*

*A mi mamá, Graciela Gándara, por estar de manera incondicional en mi vida y por enseñarme a no rendirme y a luchar por los sueños con constancia y voluntad.*

*A mi abuela, por ser el pilar de mi vida tantos años, que a pesar de que ya no esté físicamente, siempre la tengo presente.*

*A mi compañero de vida, Maximiliano Luquin, por acompañarme desde hace más de diez años con mucho amor, por confiar en mí y alentarme a seguir adelante en cada momento.*

*A mi hermana, Nerina Roldan; mis hermanos, Mateo y Lautaro Lucero; y a su papá José Lucero, por brindarme todo su cariño y aliento.*

*A mi directora, María Cristina Martín, por confiar en mí desde el primer momento, por conducirme en este camino con predisposición y responsabilidad, por brindarme siempre su apoyo, tanto profesional como personal, y por convertirse en parte de mis afectos.*

*A todos los familiares, amigas y amigos, compañeros y compañeras de trabajo, por su afectuosidad y por darme siempre palabras de aliento.*





# Resumen

Esta investigación consta de dos partes esenciales y complementarias entre sí. Por un lado, se exponen las bases estadístico-matemáticas en las que se fundamentan los Modelos Logísticos, desarrollados en el contexto de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), desde el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados. Por otro lado, se emplea el análisis de la TRI a los datos obtenidos de la Prueba Diagnóstico en Matemática suministrada a ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam) en el año 2020. Se aplican los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros y, mediante el método de Máxima Verosimilitud Marginal, se obtienen las estimaciones de los parámetros para cada ítem, y a posteriori, una estimación de la Habilidad en Matemática de los estudiantes que conforman la muestra que permita inferir acerca del grado de conocimiento que poseen los estudiantes ingresantes a FCEyN. En relación a la calidad del instrumento, se analiza la dificultad de las preguntas que componen la prueba diagnóstico, se clasifican los ítems que contribuyen a establecer diferencias entre estudiantes y se determinan los casos donde el azar tuvo una mayor ponderación. Adicionalmente, se analiza la precisión con la que cada ítem mide en los distintos niveles de Habilidad en Matemática.

**Palabras clave:** Teoría de Respuesta al Ítem, Modelos Logísticos, Prueba Diagnóstico en Matemática, Habilidad en Matemática, Ingresantes.



# Abstract

This research consists of two essential parts that complement each other. Firstly, the statistical-mathematical bases, in which the Logistic Models are based, are expounded; they are developed in the context of the Item Response Theory (IRT) and from the point of view of the Generalized Linear Models. Secondly, the IRT analysis is used on the data obtained from the “Diagnostic Test in Mathematics”, provided to students willing to get into the Faculty of Exact and Natural Sciences of the National University of La Pampa in 2020. The 1, 2 and 3-parameter Logistic Models are applied, and through the Maximum Marginal Likelihood method, the parameters estimates for each item are obtained, and subsequently, an estimate of the mathematical ability of the students that are part of the sample. This allows to infer the degree of knowledge that the entrants possess. Regarding the quality of the instrument, the difficulty of the questions that form the diagnostic test is analysed, the items that contribute to establish differences between students are classified, and the cases where chance had a bigger impact are determined. Additionally, the precision with which each item measures on all the different levels of “Ability in Mathematics” is analysed.

**Keywords:** Item Response Theory, Logistic Models, Diagnostic Test in Mathematics, Ability in Mathematics, entrants.



# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de Cuadros</b>	<b>XIII</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>XVII</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>XIX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Planteamiento del Problema . . . . .	4
1.3. Justificación . . . . .	6
1.4. Objetivos . . . . .	7
1.4.1. Objetivos Generales . . . . .	7
1.4.2. Objetivos Específicos . . . . .	7
1.5. Hipótesis . . . . .	8
1.6. Organización de la Tesis . . . . .	8
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>10</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
2.2. Modelos de Rasgos Latentes . . . . .	10
2.2.1. De la Teoría Clásica de los Test a la Teoría de Respuesta al Ítem . .	11

2.3.	Teoría de Respuesta al Ítem . . . . .	16
2.3.1.	Conceptos fundamentales . . . . .	17
2.3.1.1.	Unidimensionalidad del espacio latente . . . . .	17
2.3.1.2.	Independencia local . . . . .	18
2.3.2.	Curva Característica del Ítem . . . . .	18
2.3.3.	Modelos de Curva Característica del Ítem . . . . .	21
2.3.3.1.	Modelos de Ojiva Normal . . . . .	21
2.3.3.2.	Modelos Logísticos . . . . .	21
2.3.4.	Función de Información . . . . .	22
2.4.	Formulación de los Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem desde el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados . . . . .	23
2.4.1.	Modelos de Rasgos Latentes . . . . .	23
2.4.2.	Modelos TRI Binarios Unidimensionales . . . . .	26
2.5.	Estimación de los Modelos Logísticos . . . . .	38
2.5.1.	Estimación por Máxima Verosimilitud Conjunta . . . . .	42
2.5.1.1.	Proceso de Birnbaum . . . . .	43
2.5.2.	Estimación por Máxima Verosimilitud Marginal . . . . .	45
2.5.2.1.	Propuesta de Bock y Lieberman . . . . .	47
2.5.2.2.	Propuesta de Bock y Aitkin . . . . .	53
2.5.3.	Estimación Bayesiana . . . . .	59
2.6.	Bondad de ajuste de los Modelos Logísticos . . . . .	61
2.6.1.	Supuestos del modelo . . . . .	61
2.6.1.1.	Unidimensionalidad . . . . .	61
2.6.1.2.	Independencia Local . . . . .	64
2.6.2.	Verificación de las ventajas de los Modelos Logísticos . . . . .	65
2.6.3.	Verificación del ajuste de los Modelos Logísticos . . . . .	66
<b>3.</b>	<b>Marco Metodológico</b>	<b>71</b>
3.1.	Introducción . . . . .	71
3.2.	Materiales . . . . .	71
3.2.1.	Muestra . . . . .	71

3.2.2.	Instrumento de Investigación . . . . .	72
3.2.3.	Procedimiento de recolección de datos . . . . .	76
3.2.4.	Herramientas Computacionales . . . . .	76
3.3.	Método . . . . .	77
3.3.1.	Tipo y diseño de Investigación . . . . .	77
3.3.2.	Organización de la Base de Datos . . . . .	77
3.3.3.	Variables . . . . .	78
3.3.4.	Análisis Exploratorio de Datos . . . . .	79
3.3.5.	Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem . . . . .	79
3.3.5.1.	Estimación y Bondad de Ajuste de los Modelos Logísticos	80
<b>4.</b>	<b>Resultados y Discusión</b>	<b>82</b>
4.1.	Introducción . . . . .	82
4.2.	Análisis Exploratorio . . . . .	82
4.3.	Ajuste de los Modelos Logísticos . . . . .	87
4.3.1.	Análisis de la Unidimensionalidad . . . . .	87
4.3.2.	Ajuste del Modelo de Rasch . . . . .	91
4.3.3.	Ajuste del Modelo Logístico de 1 parámetro . . . . .	95
4.3.4.	Ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros . . . . .	100
4.3.5.	Ajuste del Modelo Logístico de 3 parámetros . . . . .	106
4.4.	Estimación de la Habilidad en Matemática . . . . .	108
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>119</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	119
5.2.	Recomendaciones . . . . .	123
<b>A.</b>	<b>Prueba Diagnóstico en Matemática</b>	<b>125</b>
<b>B.</b>	<b>Datos</b>	<b>129</b>
<b>C.</b>	<b>Script en R</b>	<b>138</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>149</b>





# Índice de Cuadros

2.1. Clasificación de Modelos de Variables Latentes. Fuente: Bartholomew <i>et al.</i> (2008). . . . .	11
2.2. Frecuencias observadas de patrones de respuesta para el par de ítems $i$ y $j$ .	64
2.3. Frecuencias esperadas, bajo el ajuste del modelo TRI, de patrones de respuesta para el par de ítems $i$ y $j$ . . . . .	64
3.1. Capacidades específicas de la Competencia Resolución de Problemas y desempeño esperado, de acuerdo con las Pruebas Aprender y a los Materiales Curriculares para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria del área de Matemática. . . . .	74
3.2. Ejes y contenidos específicos considerados para la elaboración de la PDM 2020. Fuente: MCE-MCCOES Matemática (2013). . . . .	74
3.3. Análisis de los ítems que conforman la Prueba Diagnóstico en Matemática 2020. . . . .	75
3.4. Características personales de interés de cada estudiante en la muestra. . . .	79
4.1. Distribución empírica del N° de estudiantes que responden la PDM 2020, según la carrera de la FCEyN de la UNLPam en la que están inscriptos. . .	83
4.2. Coeficientes Alpha de Cronbach excluyendo cada ítem de la PDM 2020. . .	84
4.3. Proporciones de respuestas correctas e incorrectas a los 10 ítems de la PDM 2020. . . . .	85
4.4. N° de Respuestas correctas y Porcentaje por Eje Temático en la PDM 2020.	85
4.5. Respuestas correctas por Capacidad específica en la PDM 2020. . . . .	86

4.6. Correlación Punto Biserial de cada ítem con el Puntaje Total, en la PDM 2020 . . . . .	86
4.7. p-valores de la Prueba de Independencia Chi-Cuadrado de Pearson entre los pares de ítems que conforman la PDM 2020. . . . .	87
4.8. Resultado de la prueba Kaiser-Meyer-Olkin y valores de las Medidas de adecuación para cada ítem de la PDM 2020. . . . .	89
4.9. Resultados del Análisis Factorial Exploratorio aplicado a los datos de la PDM 2020 considerando la Matriz de Correlaciones Tetracóricas. . . . .	89
4.10. Estimaciones del parámetro de dificultad para cada ítem al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020. . . . .	91
4.11. Información por intervalos proporcionada por cada ítem al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020. . . . .	93
4.12. Análisis Paralelo Modificado aplicado al Modelo de Rasch. . . . .	93
4.13. Test de Razón de Verosimilitud para contrastar el Modelo Logístico de 1 parámetro y el Modelo de Rasch. . . . .	95
4.14. Estimaciones del parámetro de dificultad para cada ítem al ajustar el Modelo de Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020. . . . .	96
4.15. Información por intervalos proporcionada por cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020. . . . .	98
4.16. Análisis Paralelo Modificado aplicado al Modelo Logístico de 1 parámetro. . . . .	98
4.17. Valores estimados del estadístico $\chi^2_{LD}$ para cada par de ítems al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020. . . . .	98
4.18. Test de Razón de Verosimilitud para contrastar el Modelo Logístico de 2 parámetros y el Modelo Logístico de 1 parámetro. . . . .	100
4.19. Estimaciones de los parámetros de dificultad y discriminación para cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 2 Parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	101
4.20. Información por intervalos proporcionada por cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	103
4.21. Valores estimados del estadístico $\chi^2_{LD}$ para cada par de ítems al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	105

4.22. Estimaciones del estadístico de Yen para cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	105
4.23. Estimaciones de los parámetros de discriminación, dificultad y pseudo-azar para cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 3 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	107
4.24. Test de Razón de Verosimilitud para contrastar el Modelo Logístico de 3 parámetros y el Modelo Logístico de 2 parámetros. . . . .	107
4.25. Ecuaciones de las Curvas Características de cada ítem bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	108
4.26. Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	109
4.27. Información proporcionada por la PMD 2020 en los grupos determinados por los cuartiles correspondientes a la variable Habilidad en Matemática. . . . .	110
4.28. Información proporcionada por cada ítem de la PMD 2020 en los grupos determinados por los cuartiles correspondientes a la variable Habilidad en Matemática. . . . .	111
4.29. Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Carrera. . . . .	113
4.30. Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Condición de estudiante. . . . .	114
4.31. Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Edad. . . . .	114
4.32. Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Lugar de origen. . . . .	115
4.33. Distribución empírica del N° de estudiantes con menores estimaciones en el nivel de Habilidad en Matemática, según la carrera en la que están inscriptos. . . . .	117
4.34. Estudiantes con menores estimaciones en el nivel de Habilidad en Matemática identificados por su número de registro en la base de datos. . . . .	118
B.1. Datos resultantes de aplicar la Prueba Diagnóstico en Matemática 2020 a los estudiantes que conforman la muestra. . . . .	137



# Índice de Figuras

2.1. Curvas Características de ítems con diferentes valores en los parámetros de discriminación, de dificultad y de pseudo-azar. . . . .	20
4.1. Matriz de Correlaciones Tetracóricas entre pares de ítems en la PDM 2020.	88
4.2. Gráfico de líneas de los valores propios de los factores obtenidos al aplicar un Análisis Factorial Exploratorio a los datos de la PDM 2020. . . . .	90
4.3. Curvas Características de los Ítem estimadas al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020. . . . .	92
4.4. Funciones de Información estimadas al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020. . . . .	92
4.5. Residuos Marginales estimados al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020. . . . .	94
4.6. Curvas Características de los Ítems estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020. . . . .	96
4.7. Funciones de Información estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020. . . . .	97
4.8. Residuos Marginales estimados al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020. . . . .	99
4.9. Curvas Características de los Ítems estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	102
4.10. Funciones de Información estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	104

4.11. Residuos Marginales estimados al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	106
4.12. Distribución de la variable Habilidad en Matemática bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020. . . . .	109
4.13. Diagramas de Caja y Bigotes de la variable latente Habilidad en Matemática bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020 según los factores Carrera, Edad, Condición de estudiante y Lugar de origen. . . . .	116

# Lista de Abreviaturas

<b>AIC</b>	Criterio de Información de Akaike
<b>AF</b>	Análisis Factorial
<b>AFC</b>	Análisis Factorial Confirmatorio
<b>AFE</b>	Análisis Factorial Exploratorio
<b>BIC</b>	Criterio de Información Bayesiano
<b>CCI</b>	Curva Característica del Ítem
<b>E</b>	Esperanza
<b>EB</b>	Enfoque Bayesiano
<b>EBM</b>	Estimación Bayesiana Marginal
<b>EM</b>	Esperanza y Maximización
<b>EMVC</b>	Estimación por Máxima Verosimilitud Conjunta
<b>EMVM</b>	Estimación por Máxima Verosimilitud Marginal
<b>EE. UU</b>	Estados Unidos
<b>EGB</b>	Educación Básica General
<b>FCEyN</b>	Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
<b>FI</b>	Función de Información
<b>GNU GPL</b>	GNU General Public License
<b>HM</b>	Habilidad en Matemática
<b>IRNyM</b>	Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente
<b>KMO</b>	Kaiser-Meyer-Olkin
<b>LCB</b>	Licenciatura en Ciencias Biológicas
<b>LD</b>	Dependencia Local (Local Dependence)



<b>LF</b>	Licenciatura en Física
<b>LG</b>	Licenciatura en Geología
<b>LM</b>	Licenciatura en Matemática
<b>LO</b>	Lugar de origen
<b>LQ</b>	Licenciatura en Química
<b>M</b>	Maximización
<b>MAD</b>	Mediana de la Desviación Absoluta
<b>MCE</b>	Ministerio de Cultura y Educación
<b>MCCOED</b>	Materiales Curriculares para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria
<b>MCT</b>	Matriz de Correlaciones Tetracóricas
<b>ML</b>	Modelos Logísticos
<b>MLC</b>	Modelo Lineal Clásico
<b>MLG</b>	Modelos Lineales Generalizados
<b>ML1</b>	Modelo Logístico de 1 parámetro
<b>ML2</b>	Modelo Logístico de 2 parámetros
<b>ML3</b>	Modelo Logístico de 3 parámetros
<b>MR</b>	Modelo de Rasch
<b>MRL</b>	Modelo de Rasgos Latente
<b>MRLB</b>	Modelo de Rasgo Latente Binario
<b>MRLBU</b>	Modelo de Rasgo Latente Binario Unidimensional
<b>MSA</b>	Measure of Sampling Adequacy
<b>MV</b>	Máxima Verosimilitud
<b>MVL</b>	Modelos de Variables Latentes
<b>OCDE</b>	Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos
<b>ONE</b>	Operativo Nacional de Evaluación
<b>PA</b>	Pruebas Aprender
<b>PC</b>	Profesorado en Computación
<b>PCB</b>	Profesorado en Ciencias Biológicas
<b>PDM 2020</b>	Prueba Diagnóstico en Matemática 2020
<b>PEB</b>	Prueba de Esfericidad de Bartlett

<b>PF</b>	Profesorado en Física
<b>PISA</b>	Programme for International Student Assessment
<b>PM</b>	Profesorado en Matemática
<b>PQ</b>	Profesorado en Química
<b>RT</b>	Razones Trigonométricas
<b>SEE</b>	Secretaría de Evaluación Educativa
<b>TCT</b>	Teoría Clásica de los Test
<b>TIG</b>	Tecnicatura en Informática de Gestión
<b>TRI</b>	Teoría de Respuesta al Ítem
<b>UNLPam</b>	Universidad Nacional de La Pampa

## Capítulo 1

# Introducción

El abandono universitario es una de las problemáticas que en la actualidad está afectando a muchas instituciones de nivel superior. Numerosas investigaciones se han realizado a fin de analizar cómo influyen diferentes factores socioeconómicos, socioculturales o académicos en la decisión que toma un estudiante de no continuar su carrera (González Tirados, 1989; Valdez *et al.*, 2008; Kuna *et al.*, 2009). Las situaciones de dificultades en el aprendizaje son, indudablemente, una de las causas principales de abandono de estudios universitarios. Por tanto, cuantificar la habilidad o capacidad que un individuo presenta en diferentes áreas disciplinares, transversales a su carrera, es un aporte clave para que las autoridades gestionen y planifiquen propuestas dirigidas a aquellos estudiantes más vulnerables. En particular, en las unidades académicas que dictan carreras relacionadas con las Ciencias Exactas, la Matemática es, sin duda, la disciplina que más problemas presenta a los estudiantes. La Matemática es una ciencia elemental, considerada universal, que contribuye al desarrollo intelectual de las personas y constituye uno de los principales lenguajes representativos de la ciencia (Rodríguez, 2011), por lo que su conocimiento resulta imprescindible para estudiantes universitarios de las más diversas áreas de las ciencias experimentales.

Una medida que refleje la habilidad que un estudiante presenta en Matemática es un dato esencial, útil para identificar a aquellos individuos que requieren de un acompañamiento diferenciado a fin de lograr un cursado satisfactorio y posterior aprobación de las materias relacionadas con esta ciencia exacta. Sin embargo, claro está que no es posible medir la habilidad pretendida de manera directa. Este es un aspecto del que se ha en-

cargado la Psicometría, específicamente para medir la habilidad en Matemática, propone, entre las más destacadas, la Teoría Clásica de los Test y la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) que permiten medir constructos inobservables en forma directa.

## 1.1. Antecedentes

Desde hace varios años existe interés a nivel mundial por cuantificar la habilidad de los estudiantes de nivel primario y medio en áreas básicas del conocimiento, tales como Matemática y Lengua. Ejemplo de ello es el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes conocido como PISA (por sus siglas en inglés: Programme for International Student Assessment) que se lleva a cabo desde el año 2000, y cada tres años, por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). PISA es un estudio que mide el rendimiento académico de los alumnos de 15 años en Matemática, Ciencias y Lengua, mediante pruebas estandarizadas, esto significa que se aplica la misma prueba a todos los estudiantes del mismo grado bajo condiciones idénticas y son evaluados con los mismos criterios. Sus objetivos principales consisten en orientar las políticas educativas de los países que participan del programa, profundizar en el concepto de competencia, relacionar resultados con la capacidad para el autoaprendizaje y elaborar tendencias longitudinales a fin de mostrar la evaluación de los sistemas educativos (Instituto Nacional de Evaluación Educativa, 2016, p.7). Básicamente se busca proporcionar datos comparables que posibiliten a los países mejorar sus políticas de educación y sus resultados, por lo tanto, este programa no examina al alumno en particular, sino al sistema educativo donde está siendo educado.

En Argentina, el interés por evaluar a los estudiantes surge en la década del 90 bajo la Ley 24.195 sancionada en 1993, conocida por el nombre de Ley Federal de Educación. A partir del nuevo marco otorgado por esta ley, el Ministerio de Educación de la Nación se debe encargar de generar sistemas de información y evaluación que proporcionen nuevas bases para la definición de políticas, la planificación y la gestión del Sistema Educativo. Así, se crea y lleva a cabo en 1993 el primer Operativo Nacional de Evaluación (ONE), en el que se evalúa a los alumnos del último año de los niveles primario y medio en

Matemática y Lengua, con el fin de generar información válida y confiable sobre los conocimientos y capacidades cognitivas que poseen y pueden aplicar en diferentes situaciones de su vida cotidiana (Secretaría de Evaluación Educativa [SEE-ONE], 2013, p.7). En 1994 se incorporan a los ONE las áreas de Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. A partir de 1995 y hasta 2013 los ONE se aplican, en general, en 3° y 6° grado del nivel primario y 2°/3° año o 5°/6°, según corresponda a jurisdicciones con estructuras de nivel secundario de cinco o seis años de duración, o los años correspondientes con la Educación Básica General (EGB). Los ONE comienzan siendo de carácter anual hasta 2002, a partir de ese momento y hasta 2010 se desarrollan cada dos años y culminan en 2013. En Secretaría de Evaluación Educativa [SEE-PA] (2016a) se presenta un resumen detallado acerca de los niveles educativos y las áreas donde se aplican los ONE según el año de implementación.

Para llevar a cabo los ONE se han elaborado instrumentos de evaluación cognitiva compuestos por dos tipos de ítems: de respuesta de opción múltiple, con cuatro opciones donde solo una es la correcta; y de respuesta abierta, que se deben contestar realizando una explicación, una demostración de un proceso o un dibujo detallado (SEE-ONE, 2013, p.8). Estas pruebas han sido útiles para evaluar a los alumnos en las diferentes áreas disciplinares en distintos niveles del sistema educativo argentino y así obtener información en relación a los aprendizajes de cada uno. Sumado a las pruebas de cada asignatura, en los operativos se les administra, tanto a los alumnos como a los directivos y docentes, un cuestionario con el objeto de recopilar información vinculada con las condiciones materiales y sociales de las instituciones educativas. Con todo esto se busca identificar problemas y causas a fin de generar diversas estrategias didácticas y de gestión que aporten soluciones específicas para cada uno de los inconvenientes.

Luego de varios años de implementación de los ONE, a pesar de haber obtenido logros, también, se han evidenciado varias dificultades. Por tanto, en un marco de continuidad, pero bajo la necesidad de impulsar un cambio, se diseña un dispositivo nacional de evaluación de los aprendizajes de los estudiantes y de obtención de información sobre ciertas condiciones en las que se desarrollan, denominado Pruebas Aprender (PA), que comienza a implementarse en el año 2016 y se mantiene vigente en la actualidad (SEE-ONE, 2013,

p.9). Con estas pruebas se busca posicionar a la evaluación nacional de aprendizajes como un insumo estratégico para el diagnóstico y toma de decisiones en educación (SEE-ONE, 2013, p.9), buscando obtener información más precisa, de mayor calidad y más pertinente para las necesidades del Sistema Educativo del Siglo XXI.

Respecto del análisis estadístico, tanto para cuantificar las habilidades de los estudiantes en las diversas áreas, así como, para analizar la calidad de los ítems que conforman los instrumentos de investigación, los tres programas presentados se valen de los modelos estadísticos desarrollados en el contexto de la TRI, denominados Modelos Logísticos (ML). Específicamente, PISA y los ONE (los ONE a partir del año 2005) implementan el Modelo Logístico de 1 parámetro que permite establecer la dificultad que presenta cada ítem. Por su parte, las PA emplean el Modelo Logístico de 2 parámetros que aporta más flexibilidad al permitir estimar no sólo la dificultad de cada ítem, sino también, la capacidad discriminatoria de cada uno (SEE-PA, 2016a, p.38).

Hasta aquí, se ha realizado un breve recorrido sobre los dispositivos con jerarquía nacional (ONE y PA) o internacional (PISA) utilizados para evaluar a los estudiantes de primaria y secundaria. Con respecto al nivel superior, no se han encontrado pruebas reconocidas a nivel mundial o nacional que se utilicen, esencialmente, para determinar la habilidad que poseen los estudiantes en algún área específica. Aunque, si se han realizado investigaciones independientes por parte de algunas universidades en las que se han aplicado pruebas estandarizadas para evaluar el nivel de los estudiante en alguna asignatura, o también, en pruebas de admisión. Por lo expuesto, y como esta investigación refiere a estudiantes universitarios, las definiciones y concepciones, así como las teorías que se apliquen, se remiten a las trabajadas y estudiadas en el contexto de las PA.

## 1.2. Planteamiento del Problema

Entre las carreras que ofrece la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam), se encuentran las licenciaturas en Ciencias Biológicas, en Química, en Geología, en Matemática y en Física; los profesados

en Ciencias Biológicas, en Química, en Matemática y en Física; la Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente; y, por último, la Tecnicatura en Informática de Gestión. Las currículas que presentan hoy en día estas carreras exigen que el estudiante obtenga sólidos conocimientos en Matemática, a fin de relacionarlos con los saberes propios de cada disciplina para intentar encontrar la solución de problemas que se presentan en las diferentes ramas científicas. Por tal motivo, todas las carreras mencionadas requieren del cursado de al menos una asignatura relacionada con una Matemática introductoria.

En los últimos años, el nivel en Matemática de los estudiantes que inician sus estudios universitarios, particularmente los que ingresan a la FCEyN de la UNLPam, no es suficiente para el cursado satisfactorio y posterior aprobación de la materia relacionada con una Matemática introductoria. Esto se deduce del bajo porcentaje de alumnos aprobados (en 2018 menos del 32% y en 2019 menos del 29%) y de la necesidad de volver a cursar, en su mayoría, las asignaturas vinculadas con Matemática.

Uno de los objetivos de esta investigación es crear un instrumento de medición con el fin de indagar acerca de los conocimientos que poseen los estudiantes universitarios, ingresantes a la FCEyN de la UNLPam, en el área de Matemática e identificar a aquellos que presenten un desempeño no satisfactorio. Al igual que los dispositivos desarrollados en los antecedentes mencionados, para cuantificar la habilidad en Matemática se hace uso de los métodos, técnicas y conceptos que conforman la TRI.

Los modelos generados desde el enfoque de la TRI han permitido formalizar la relación existente entre la puntuación observada de un sujeto en una prueba y la cuantía en el rasgo o habilidad latente que éste posee, de manera alternativa a la propuesta por el paradigma clásico que ha caracterizado a la Psicometría en el Siglo XX (Aune y Attorresi, 2019). La TRI se encuentra en pleno crecimiento desde la década del 80 gracias a los desarrollos teóricos y avances en softwares específicos adecuados para estimar los parámetros de sus modelos. Sin embargo, a pesar de que Europa y EE.UU utilizan esta teoría desde hace tiempo, en Latinoamérica y, particularmente en nuestro país, su aplicación es reciente (Aune y Attorresi, 2019). Al explorar sobre el tema, se advierte que pocos trabajos en

español refieren a las bases estadístico-matemáticas en las que se fundamenta la TRI. Esto se puede explicar debido a que es una teoría que ha sido desarrollada en el seno de la Psicología y, aunque presenta una metodología compleja matemáticamente, el lenguaje que utiliza la Psicología no es el mismo del que se vale la Matemática.

Ante lo expuesto, los propósitos que motivan esta investigación son dos. Por un lado, colaborar desde el enfoque estadístico-matemático en la definición de los conceptos fundamentales que conforman el núcleo de los Modelos Logísticos desarrollados en el contexto de la TRI. En este sentido, se propone una formulación de estos modelos bajo el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados. Por otro lado, el motivo es afrontar una de las problemáticas que influye en el abandono de los estudiantes ingresantes a la FCEyN de la UNLPam. A efectos de identificar a los sujetos con un rendimiento inferior en el área en cuestión, se crea y aplica una prueba estandarizada, en carácter de diagnóstico, a los estudiantes ingresantes a la FCEyN en el año 2020. Los resultados obtenidos se analizan mediante los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros, los cuáles permiten establecer una función que modela la probabilidad de responder correctamente cada ítem y obtener la estimación de la Habilidad en Matemática de los estudiantes que conforman la muestra. Por último, se analiza y evalúa la calidad del instrumento utilizado para recabar los datos, identificándose aquellos ítems que presentan características idóneas para medir a los sujetos con menor cuantía en el rasgo en cuestión.

La investigación se lleva a cabo con el fin de aportar información a las autoridades correspondientes, de manera que, gestionen y planifiquen propuestas dirigidas a los estudiantes que más lo necesiten. Estas propuestas deben buscar acompañarlos en su trayecto formativo y brindarles la posibilidad de ampliar, interpretar y comprender los contenidos desarrollados en el nivel medio, específicamente en el área de Matemática.

### **1.3. Justificación**

Muchos de los casos de abandono universitario en la FCEyN de la UNLPam se corresponden con la dificultad en el aprendizaje de los saberes básicos que hacen a la Matemáti-



ca. En virtud de ello, resulta esencial contar con insumos que cuantifiquen el nivel en esta disciplina que presentan quienes ingresan a la FCEyN, ya que al día de hoy no existen datos que lo representen. En este sentido, crear una Prueba Diagnóstico en Matemática (PDM), con característica de prueba estandarizada que sirva para los fines expuestos, es fundamental. Luego del proceso de mejora y selección de ítems adecuados, se busca que la PDM logre ser una poderosa herramienta que brinde evidencias para la toma de decisiones y la generación de políticas que contribuyan a reducir la brecha entre las oportunidades de aprendizaje que ha tenido cada estudiante.

Este trabajo no sólo va a permitir crear, analizar y evaluar la calidad de la PDM, sino también, medir el nivel de Habilidad en Matemática de los estudiantes ingresantes e identificar a quienes presenten un rendimiento mínimo y requieran de la atención pertinente por parte de las autoridades.

## 1.4. Objetivos

### 1.4.1. Objetivos Generales

- Brindar un enfoque matemático de la Teoría de Respuesta al Ítem, estableciendo las bases estadístico - matemáticas en las que se fundamenta.
- Aplicar diversos modelos estadísticos propuestos en la TRI a los datos de las pruebas diagnósticas realizadas a los estudiantes ingresantes a la FCEyN de la UNLPam en 2020.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Realizar una formulación de los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros desde el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados.
- Crear el instrumento de investigación de manera tal que sus ítems midan el rasgo latente Habilidad en Matemática.
- Analizar la dificultad de los ítems, distinguiendo los más difíciles y los más fáciles.

- Clasificar los ítems que contribuyen a establecer diferencias entre estudiantes.
- Determinar los ítems donde el azar tiene mayor ponderación.
- Cuantificar el nivel de Habilidad en Matemática de los estudiantes ingresantes a la FCEyN de la UNLPam en el año 2020.
- Identificar los examinados que presenten niveles más bajos en el rasgo latente.
- Analizar y evaluar la calidad del instrumento de investigación en relación al grupo que se pretende medir.

## 1.5. Hipótesis

El desempeño en el área de Matemática de los ingresantes a cualquier Institución Universitaria, en particular a la FCEyN de la UNLPam, es deficiente y la Teoría de Respuesta al Ítem permite cuantificar el nivel de habilidad en Matemática.

## 1.6. Organización de la Tesis

Con el fin de lograr los objetivos propuestos y contrastar la hipótesis planteada, este trabajo de tesis se desarrolla por capítulos, siendo su estructura la siguiente:

- **Capítulo I:**

*Introducción:* El capítulo introductorio describe antecedentes destacados acerca de la medición de la habilidad de los estudiantes, de nivel primario y medio, en diversas áreas disciplinares, que han servido para establecer algunos aspectos poco desarrollados sobre los modelos aplicados para el análisis estadístico. Por otro lado, se exponen varios elementos que justifican la realización de esta Tesis de Maestría, se describen los objetivos generales y específicos que se pretenden alcanzar, se plantea la hipótesis de la investigación y se explica la organización del trabajo de tesis.

- **Capítulo II:**

*Marco teórico:* El segundo capítulo hace a la estructura de la investigación. Se realiza un breve recorrido por los orígenes de la TRI y se desarrollan los conceptos

preliminares y las características principales de la teoría. Se presenta la formulación de los Modelos Logísticos TRI desde el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados y, para concluir, se proponen los Métodos de Estimación de los parámetros de los modelos en cuestión y las técnicas de Bondad de Ajuste que permiten evaluarlos.

■ **Capítulo III:**

*Marco Metodológico:* Se presentan los materiales y métodos considerados para el desarrollo de la investigación. En relación a los materiales, se incluye el tipo de investigación y de diseño; la descripción de la población, el período y lugar del estudio; las variables, el instrumento elaborado para la recolección de los datos y el software a utilizar para realizar el análisis estadístico. En cuanto a los métodos, se exponen las técnicas y procedimientos utilizados para analizar los datos recolectados, tanto desde el enfoque exploratorio como desde el inferencial.

■ **Capítulo IV:**

*Resultados:* Se realiza la descripción de los datos resultantes de las pruebas diagnósticas y se analiza un supuesto fundamental que debe satisfacer el conjunto de datos para poder aplicar los ML de la TRI: la Unidimensionalidad. A continuación, se ajustan los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros y se especifican las estimaciones de sus parámetros. Se presentan las Curvas Características y las Funciones de Información de cada ítem, esenciales para evaluar la calidad del instrumento de investigación y para establecer la precisión de las mediciones. Por último, mediante diferentes pruebas de Bondad de Ajuste se selecciona el modelo que mejor representa al conjunto de datos y, bajo ese modelo, se estima la Habilidad en Matemática de los estudiantes en la muestra identificándose a aquellos con menor rendimiento en la disciplina.

■ **Capítulo V:**

*Conclusiones y recomendaciones:* Se presentan las conclusiones arribadas como consecuencia de los resultados alcanzados y se exponen las recomendaciones para futuras investigaciones.

## Capítulo 2

# Marco Teórico

### 2.1. Introducción

En este capítulo se describen los Modelos de Rasgos Latentes, y específicamente, los Modelos Logísticos (ML) desarrollados en el contexto de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI). Se comienza realizando un breve recorrido por el origen de la TRI y por las ventajas que presenta sobre el enfoque clásico. Se exponen los conceptos fundamentales que conforman el núcleo de los ML y se propone una formulación de los mismos desde la perspectiva de los Modelos Lineales Generalizados (MLG). Por último, se explican algunas técnicas disponibles para estimar los ML y se presentan diversas pruebas para evaluar el ajuste de estos modelos al conjunto de datos .

### 2.2. Modelos de Rasgos Latentes

En diferentes áreas de investigación, tales como Educación, Economía o Psicología, se trabaja con conjuntos de datos que están relacionados con variables no observables en forma directa. Para ello, es imprescindible considerar modelos que representen la relación entre las variables observadas o manifiestas y las variables no observadas, llamadas latentes. Estos modelos estadísticos que relacionan los dos tipos de variables se denominan, en su conjunto, Modelos de Variables Latentes (MVL). Existen varias clases de MVL diferenciados por el tipo de variables manifiestas y latentes, es decir, sean éstas cualitativas o cuantitativas. Bartholomew *et al.* (2008) realiza la clasificación que se muestra en el Cuadro 2.1. En particular, cuando se trabaja con variables manifiestas categóricas

y variables latentes continuas, se utilizan los denominados Modelos de Rasgos Latentes (MRL) (Bazán *et al.*, 2010).

Variables Latentes	Variables Observadas	
	Métrica (intervalo o razón)	Categoría (nominal/ordinal)
Métrica (intervalo o razón)	<i>Análisis Factorial</i>	<i>Análisis de Rasgos Latentes</i>
Categoría (nominal/ordinal)	<i>Análisis de Perfil Latentes</i>	<i>Análisis de Clases Latentes</i>

**Cuadro 2.1:** Clasificación de Modelos de Variables Latentes. Fuente: Bartholomew *et al.* (2008).

Los MRL se enmarcan dentro de dos grandes teorías, la Teoría Clásica de los Test (TCT) (Lord y Novick, 1968) y la Teoría de Respuesta al Ítem (Lord, 1980). Los modelos desarrollados en el contexto de ambas teorías se utilizan para el análisis de datos de indicadores (variables manifiestas) obtenidos en procesos de medición donde lo que se pretende medir es subyacente a estos indicadores y, en consecuencia, es una variable latente (Bazán *et al.*, 2010). Los instrumentos de medición utilizados son los conocidos test (prueba, evaluación, cuestionario, etc.). Un test está compuesto por un conjunto de ítems (indicadores) de manera tal, que se encuentra en forma implícita uno o más rasgos latentes (nivel de aptitud, característica de personalidad, habilidad, etc.) que no se pueden medir directamente, sino mediante su relación con las respuestas dadas a los ítems de un cuestionario. En este aspecto, Navas (1994) postula que tanto la TCT como la TRI pretenden estimar una variable latente: la puntuación verdadera en la TCT y el nivel en el rasgo latente en la TRI. Sin bien en este trabajo interesan los modelos TRI que miden un único rasgo latente, es importante destacar la existencia de otros modelos más complejos que involucran más de un rasgo, conocidos como Modelos TRI Multidimensionales (ver, por ejemplo, Antonio Rojas, 2013).

### 2.2.1. De la Teoría Clásica de los Test a la Teoría de Respuesta al Ítem

A comienzo del Siglo XX, Spearman realiza los primeros trabajos (Spearman, 1904, 1907, 1913) que le dan origen a la Teoría Clásica de los Test (Muñiz, 2010). En los años

siguientes, continua el desarrollo de la teoría y en 1950 Gulliksen presenta una síntesis coherente de los principales conceptos de la misma y expone los resultados de la confiabilidad (Eскурra Mayaute, 2011). Sin embargo, son Lord y Novick (1968) quienes establecen una reformulación de la teoría clásica y abren camino al nuevo enfoque de modelos de estructura latente conocido como TRI.

La TCT propone el Modelo Lineal Clásico (MLC) para estimar la puntuación verdadera de un sujeto que responde un determinado cuestionario. Este modelo asume que la puntuación que un examinado obtiene en un test, denominada Puntuación Empírica ( $X$ ), resulta ser una combinación de dos componentes: la Puntuación Verdadera ( $V$ ) del examinado en ese test y un error ( $e$ ), que puede ser debido a diferentes causas (referidas al examinado, al ambiente externo, al instrumento de medida, entre otras) (Muñiz, 2010). De esta manera, la expresión que representa al MLC es  $X = V + e$ .

Como toda teoría, la TCT parte de supuestos teóricos fundamentales que son aceptados como verdaderos, pero incontrastables empíricamente de forma directa, los mismos son (Muñiz, 2010):

- Se define la puntuación verdadera de un examinado en un test como la esperanza matemática de la puntuación empírica, expresada formalmente por  $V = E(X)$ .
- No existe relación entre la puntuación verdadera de los examinados y el tamaño de los errores que afectan a esas puntuaciones, es decir que  $corr(V, e) = 0$ .
- Los errores de medida de los examinados en un test no están relacionados con los errores de medida en otro test distinto. Esto, matemáticamente, se expresa mediante  $corr(e_{ip}, e_{ik}) = 0$ , donde  $e_{ip}$  y  $e_{ik}$  representan el error cometido por el individuo  $i$  en el test  $p$  y en el test  $k$ , respectivamente.

Sumados al MLC y a los supuestos, las características métricas que debe tener un test (validez y fiabilidad) y los ítems que lo componen (dificultad y discriminación), conforman el núcleo de la teoría clásica.

En referencia a los atributos del test, Morales Vallejo (2007) plantea que un cuestionario es válido si mide aquello que se pretende medir, aunque lo puede medir con un margen de error grande, si esto sucede se obtendrán resultados diferentes en mediciones sucesivas o con test similares. Por su parte, la fiabilidad de un test es la precisión con que éste mide un determinado rasgo latente, independientemente de la validez del test. Si la fiabilidad es alta, las personas medidas con el mismo instrumento en ocasiones consecutivas quedan ordenadas de manera semejante; mientras que, si la fiabilidad es baja, el error aumenta y, en consecuencia, los resultados varían en las diferentes mediciones (Morales Vallejo, 2007). Para calcular la fiabilidad existen tres enfoques: test-retest, pruebas paralelas y coeficientes de consistencia interna. En el primero, los individuos de la muestra responden el mismo test en dos momentos diferentes, separados por un intervalo de tiempo, y el coeficiente de fiabilidad test-retest resulta ser el coeficiente de correlación entre las puntuaciones obtenidas por los examinados en las dos ocasiones. Para el enfoque de pruebas paralelas, se consideran dos test que pretenden medir lo mismo, pero con diferentes ítems. En este caso, el coeficiente de fiabilidad se interpreta como una medida de equivalencia entre los dos test y se calcula como la correlación entre las puntuaciones empíricas obtenidas por los mismos individuos en las dos pruebas paralelas. El último enfoque es el más utilizado, a saber, cuando se habla de la fiabilidad de un instrumento y no se especifica nada más, se entiende que se trata de la fiabilidad entendida como consistencia interna. Según Morales Vallejo (2007), los coeficientes de consistencia interna determinan hasta qué punto las respuestas son lo suficientemente coherentes como para inferir que todos los ítems miden lo mismo, razón por la cual, se citan como garantía de que un único rasgo subyace a un conjunto de ítems. La interpretación de estos coeficientes depende del valor que asuman, se dice que la consistencia interna es baja si el coeficiente varía en el intervalo (0 - 0.29), media si está en (0.30 - 0.59) y alta si se mantiene entre (0.6 - 1) (Carvajal Álzate *et al.*, 2016).

Considerando las características de los ítems que componen una prueba, se define la dificultad como la proporción de examinados de un grupo que responde el ítem de manera correcta. En este sentido, la dificultad del ítem depende de la habilidad latente de los individuos en la muestra, y de manera inversa, la habilidad de los examinados depende

de la dificultad de los ítems, según estos sean fáciles o difíciles. La segunda característica, la discriminación, indica la capacidad del ítem de diferenciar entre examinados con distintos niveles en la habilidad latente medida por la puntuación en el test. Al igual que la dificultad, la discriminación también depende del grupo de examinados.

La TCT ha sido muy popular durante el Siglo XX, pero ha presentado varias limitaciones. Conforme expone Navas (1994), las principales críticas que ha recibido el enfoque clásico están relacionadas con los supuestos en los que se fundamenta, puesto que se consideran verdaderos sin comprobación alguna. En este aspecto, el supuesto más cuestionable por ser prácticamente imposible de cumplir es el de la independencia entre las puntuaciones verdaderas y el error.

Por otro lado, ha sido objetada la evaluación de la precisión de la medida, calculada mediante el error típico de medida y la fiabilidad del test (Navas, 1994). El error plantea dos aspectos cuestionables, se define para un test global, no para cada ítem particular, y supone que es el mismo (homocedástico) para todos los niveles del rasgo en la escala latente (Gómez Benito e Hidalgo Montesinos, 2003). En relación a la fiabilidad, las estimaciones de la misma son una función del conjunto particular de ítems y de la muestra de individuos que responden esos ítems (Navas, 1994). Si se evalúa un individuo con un mismo test, pero incluido en diferentes muestras, su puntuación será distinta, pues la fiabilidad no será la misma ya que diferirá el error en las dos muestras.

Otra limitación de la TCT está relacionada con la ausencia de invarianza en dos sentidos. Por un lado, de las mediciones respecto del instrumento de medida, lo que implica que los resultados obtenidos con diferentes pruebas que miden lo mismo no son comparables. Esto es así, debido a que las puntuaciones estimadas en los tests no están en la misma escala de medición, cada uno tiene su propia métrica (Muñiz, 2010). Por otro lado, la falta de invarianza de las propiedades de los tests respecto de las personas que lo contestan. En este aspecto, las características de los ítems (dificultad y discriminación) dependen de los sujetos que los responden, de igual manera, las características del test (fiabilidad y validez) dependen de la muestra y del número de ítems que lo componen (Matas Terrón, 2010).



Finalmente, debido a que la TCT considera al test en su conjunto, e impide analizar particularmente a los ítems que lo conforman, resulta imposible realizar inferencias sobre el comportamiento de los examinados en un ítem determinado, por lo que no se puede estimar la probabilidad de que una persona responda correctamente a un ítem.

Frente a los inconvenientes que presenta el enfoque clásico, se hace imprescindible la investigación de otros modelos que den respuesta a estas limitaciones. Así, surge la TRI como alternativa a la TCT y es la teoría que domina en la actualidad y representa el mayor avance en la medición psicológica y educativa en los últimos años (Muñiz y Hambleton, 1992). Sin embargo, la TRI no es una teoría contrapuesta a la TCT sino una teoría complementaria, dado que, brinda soluciones a varios de los problemas de la teoría clásica, proporciona mejores respuestas a los planteamientos de ésta y presenta aspectos que no se podrían abordar desde la TCT (Muñiz, 1997). En lo que sigue se describen algunas de las soluciones que propone la TRI a las limitaciones de la TCT.

Con respecto a los supuestos en los que se fundamenta cada teoría, a diferencia de la TCT, la TRI propone supuestos que pueden ser contrastados empíricamente. En referencia al problema del enfoque clásico de satisfacer el supuesto de independencia entre la puntuación verdadera y el error, la TRI considera al rasgo latente independiente del ítem y, por lo tanto, la respuesta del examinado está relacionada sólo con su nivel en la escala de habilidad latente (Matas Terrón, 2010).

Para dar respuesta al problema de la evaluación de la precisión de la medida que presenta la TCT, la TRI define la fiabilidad como información. Esta información, concretamente, es una función del rasgo latente y depende inversamente del error de medida. Los autores Muñiz y Hambleton (1992) plantean que la Función de Información del test, o del ítem, expresa la precisión con la que el test, o el ítem, mide a lo largo de los distintos valores de la escala de la variable latente en cuestión. A diferencia de la TCT, donde el error de medida es homocedástico, la Función de Información varía según el valor del rasgo latente y depende solamente de los ítems que conforman el test, no de los sujetos que lo

responden (Navas, 1994). Esto permite diferenciar los ítems en función de la contribución que aporta cada uno a la precisión total del test.

Por último, la TRI consigue medidas invariantes respecto de los sujetos evaluados y de los instrumentos de medición utilizados (Muñiz, 1997). De este modo, los parámetros de los ítems son independientes de la habilidad de los examinados utilizados para su estimación y el nivel de un sujeto en el rasgo latente no depende de los ítems considerados para estimarlo (Navas, 1994). Una consecuencia importante que resulta de la propiedad de invarianza es la posibilidad de comparar entre sujetos según el rasgo latente, dado que, la TRI permite que los resultados de los examinados con distintos test estén en la misma escala de medición (Muñiz, 2010).

La TRI intenta dar respuesta a varias limitaciones de la teoría clásica mediante supuestos sólidos y restrictivos, además de una metodología formal que requiere establecer modelos matemáticos más complejos, estimar sus parámetros y evaluar el ajuste de los datos, entre otras cosas. De acuerdo con Muñiz (2010), este novedoso enfoque de la TRI promueve el desarrollo de nuevos conceptos y herramientas psicométricas por lo que supone un gran avance para la medición psicológica.

### 2.3. Teoría de Respuesta al Ítem

La Teoría de Respuesta al Ítem ha sido investigada desde la segunda década del Siglo XX, siendo Thurstone en 1925, Lawley en 1943 y Tucker en 1946, quienes realizaron las primeras exploraciones en el tema. Los principales trabajos que cobran relevancia son los de Lord (1952), quién presenta las primeras bases de la TRI y Birnbaum en la década del 50 que propone los Modelos Logísticos. A principios de la década del 60, Rasch publica un libro (Rasch, 1960) donde desarrolla el Modelo de Rasch, muy utilizado hasta la actualidad. Sin embargo, el incentivo primordial, que marca un hito en la historia de la TRI, fue el libro presentado por Lord y Novick en 1968 (Lord y Novick, 1968), en el que, según Muñiz y Hambleton (1992), los autores dedican cinco capítulos al tema y cuatro de ellos fueron escritos por Birnbaum. Desde la publicación de este libro surgen diferentes

softwares indispensables para trabajar con los modelos TRI, tales como BICAL, LOGIST, BILOG, MULTILOG, entre otros (Muñiz, 2010). En conjunto con los softwares, el libro publicado por Lord (Lord, 1980), donde el autor expone los conceptos teóricos y las aplicaciones de la TRI desarrolladas hasta el momento, marca la expansión y crecimiento de la TRI en las últimas dos décadas del Siglo XX, momento en que comienza a ser la teoría que predomina en Psicometría.

Desde principios del Siglo XXI y hasta la actualidad la expansión de la TRI ha sido notable, principalmente, debido a nuevos desarrollos teóricos y al avance de la tecnología, característica de esta época. Esta teoría ha ganado relevancia gracias al perfeccionamiento de softwares específicos, como R y STATA que estiman los parámetros de los modelos TRI. El uso de programas computacionales es una particularidad indispensable que caracteriza a la TRI, puesto que se necesita realizar cálculos bastantes complejos y un gran volumen de datos para aplicar los modelos TRI.

### **2.3.1. Conceptos fundamentales**

Entre las principales aplicaciones en las que se utiliza la TRI se encuentran la construcción de tests, la evaluación de ítems y la estimación del nivel de un individuo en algún rasgo latente. La TRI pretende brindar una fundamentación probabilística al problema de la medición de constructos inobservables y considera al ítem como unidad básica del test (Cortada de Kohan, 2004). El objetivo principal que subyace en esta teoría es conseguir medidas invariantes respecto de los sujetos medidos y de los instrumentos utilizados para recabar los datos (Muñiz, 1997). Los principales supuestos de la TRI son: la unidimensionalidad del espacio latente y la independencia local. El primero refiere a la naturaleza del rasgo a medir y el segundo a las relaciones que se presentan entre los ítems.

#### **2.3.1.1. Unidimensionalidad del espacio latente**

En los modelos unidimensionales las respuestas dadas a cada ítem deben estar en función de un único rasgo, por tanto los ítems que constituyen un test deben medir sólo una variable latente. Sin embargo, debido a que múltiples factores pueden afectar la

respuesta dada por un sujeto a un ítem, es bastante difícil cumplir con este supuesto en su totalidad. En este sentido, Hambleton y Swaminathan (1985) señalan que en la práctica, la definición del espacio latente se limita a la exigencia de una dimensión dominante. Por consiguiente, en los modelos unidimensionales es suficiente que exista un rasgo principal que sea útil para explicar las respuestas de los sujetos. Para probar la unidimensionalidad existen varios métodos, algunos de ellos se desarrollan en 2.6.1.1.

### 2.3.1.2. Independencia local

El conjunto de los patrones de respuesta es la única información con la que cuenta el enfoque de la TRI para estimar el nivel en el rasgo latente de los examinados. Por tanto, resulta fundamental establecer restricciones sobre las relaciones que puedan existir entre las respuestas en un patrón dado, y entre los patrones de respuestas. En este sentido, se define el supuesto de independencia local, el cual hace referencia a que las respuestas que un examinado brinda a un par de ítems son independientes y no existe relación entre las respuestas dadas por el individuo a distintos ítems (Cortada de Kohan, 2004). Tal como exponen Chen y Thissen (1997), la independencia local significa que para un valor dado de la variable latente, la probabilidad conjunta de responder correctamente a un par de ítems es igual al producto de las probabilidades de respuestas correctas a los dos ítems.

La asunción del supuesto de independencia local se deriva del cumplimiento del supuesto de unidimensionalidad porque implica que la respuesta a un ítem sólo depende de sus parámetros y de la habilidad del examinado, y no está condicionada por otros factores (Ponsoda *et al.*, 1998). Otra manera de identificar la existencia de Dependencia Local (LD por sus siglas en inglés: *Local Dependence*) entre pares de ítems es mediante alguno de los cuatro estadísticos propuestos por Chen y Thissen (1997) que se detallan en 2.6.1.2.

### 2.3.2. Curva Característica del Ítem

La Curva Característica del Ítem (CCI) representa la relación funcional que existe entre los valores de la variable latente y la probabilidad de responder correctamente cada ítem. A cada examinado le corresponde un valor numérico en la escala de habilidad, por

tanto, sujetos con distinta puntuación en el rasgo latente tendrán diferentes posibilidades de resolver satisfactoriamente determinado ítem.

La función que representa la probabilidad de responder correctamente el ítem  $j$  según la habilidad de cada persona se denota  $\pi_j(\theta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , siendo  $p$  la cantidad de ítems y  $\theta$  el valor que asume la variable latente. Esta probabilidad será grande para examinados con un valor alto de habilidad latente y, por el contrario, pequeña para sujetos con valores bajos en el nivel de habilidad medida. La  $\pi_j(\theta)$  depende de tres parámetros:  $a_j$ ,  $b_j$  y  $c_j$ ; denominados parámetro de discriminación, de dificultad y de pseudo-azar, respectivamente. La Figura 2.1(d) muestra una CCI con diferentes valores en estos parámetros.

- **Parámetro de dificultad**

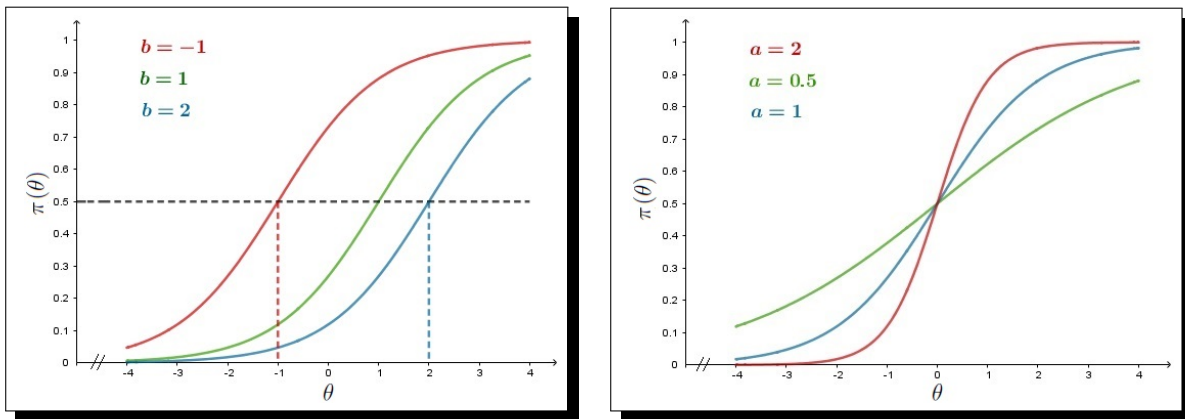
El parámetro  $b_j$  representa el índice de dificultad del ítem  $j$ , es un parámetro de localización y se define como el valor de  $\theta$  para el cual la probabilidad de responder correctamente el ítem en cuestión es 0,5. En este sentido, cuánto más grande sea su valor mayor será la capacidad necesaria para que una persona responda el ítem correctamente con una probabilidad de 0,5. De manera gráfica, se puede observar que las CCI de ítems fáciles se ubican hacia la izquierda de la escala latente, mientras que, las CCI de ítems difíciles se sitúan más hacia la derecha (Figura 2.1(a)).

- **Parámetro de discriminación**

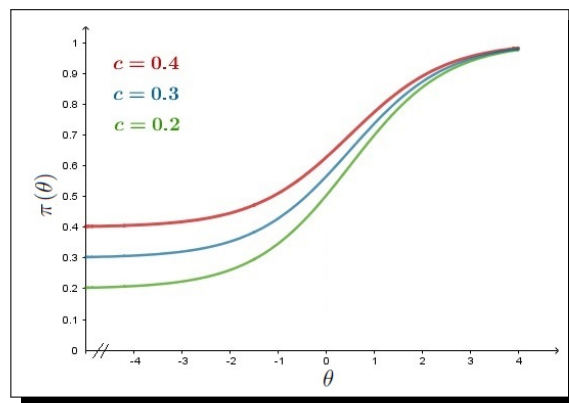
El parámetro de discriminación del ítem  $j$ , denotado por  $a_j$ , es proporcional al valor de la pendiente de la recta tangente a la CCI en el punto de máxima pendiente de ésta (Figura 2.1(b)). En este sentido, cuanto mayor sea el valor de la pendiente, más grande será el valor del índice de discriminación, lo que indica que el ítem tiene una gran capacidad de discriminación entre las personas con mayores y menores niveles de habilidad.

- **Parámetro de pseudo-azar**

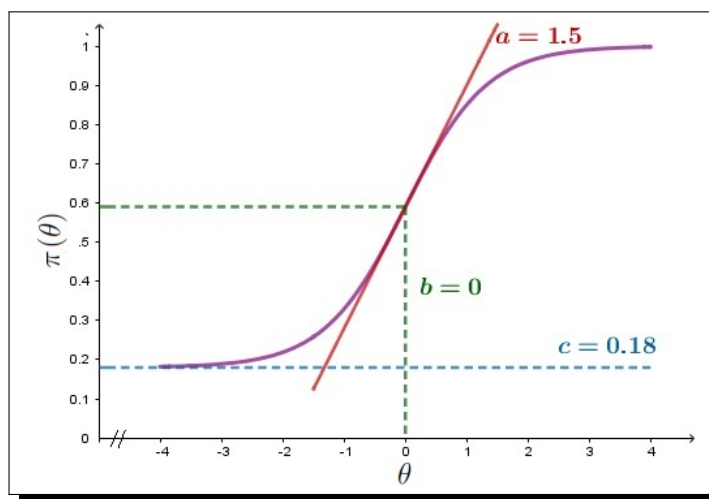
El parámetro de pseudo-azar del ítem  $j$ , representado por  $c_j$ , indica la probabilidad de responder correctamente un ítem cuando el examinado no sabe la respuesta o su nivel de habilidad es muy bajo. Gráficamente, el valor de  $c_j$  representa una asíntota horizontal inferior de la curva característica del ítem  $j$ . (Figura 2.1(c)).



(a) CCI de tres ítems con diferentes valores para el parámetro  $b$ , en todos los casos  $a = 1$  y  $c = 0$ . (b) CCI de tres ítems con diferentes valores para el parámetro  $a$ , en todos los casos  $b = 0$  y  $c = 0$ .



(c) CCI de tres ítems con diferentes valores para el parámetro  $c$ , en todos los casos  $a = 1$  y  $b = 0,5$ .



(d) Curva Característica de un ítem con diferentes valores en los parámetros.

**Figura 2.1:** Curvas Características de ítems con diferentes valores en los parámetros de discriminación, de dificultad y de pseudo-azar.

### 2.3.3. Modelos de Curva Característica del Ítem

La CCI queda determinada al definir sus parámetros y al adoptar una determinada función matemática para conformar la curva, la cual debe ser monótona creciente en el rasgo latente y tomar valores entre 0 y 1. Para poder cumplir con estas condiciones se debe transformar la probabilidad de respuesta. En general, se han investigado dos funciones matemáticas: la función logística y la curva normal acumulada (Attorresi *et al.*, 2009).

#### 2.3.3.1. Modelos de Ojiva Normal

La función de la curva normal acumulada para la CCI fue propuesta en los primeros modelos de la TRI, éstos se denominaron Modelos de Ojiva Normal y su formulación definitiva fue presentada por Lord en 1952 (Lord, 1952). A pesar de que este modelo fue el primero en brindar la propiedad de invarianza de los parámetros, con el tiempo se buscó otra alternativa debido a que era muy complejo matemáticamente y presentaba problemas al estimar sus parámetros.

#### 2.3.3.2. Modelos Logísticos

La función logística se caracteriza por ser matemáticamente más sencilla de utilizar y de interpretar. Según Lord (1980), los individuos con niveles de habilidad altos prácticamente nunca deberían responder de manera incorrecta un ítem muy fácil, sin embargo, en la realidad dichos individuos pueden cometer un error descuidado y, como la función logística se acerca a sus asíntotas menos rápido que la ojiva normal, tales errores descuidados serán menos agresivos para el modelo que utilice el enlace *logit* que para el modelo determinado a partir del enlace *probit*. Por estos motivos, y dado que las estimaciones de los parámetros mediante la distribución normal y la logística no difieren sustancialmente, en la actualidad los modelos de la TRI más utilizados son los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros (ML1, ML2 y ML3, respectivamente) (Rasch, 1960; Birnbaum, 1968). Estos modelos son unidimensionales y asumen que la respuesta a los ítems es dicotómica (correcta o incorrecta), independientemente de la cantidad de categorías que presente el ítem. En definitiva, ML1, ML2 y ML3, son modelos TRI Binarios Unidimensionales que adoptan el enlace *logit*.

El ML1 asume que el índice de pseudo-azar es 0 y que el de discriminación es el mismo para todos los ítems. En particular, si el valor de este último es 1, se obtiene el Modelo de Rasch (MR) propuesto por Rasch en 1960. El ML2 permite un parámetro de discriminación diferente para cada ítem y el ML3, además, asume un valor distinto del índice de pseudo-azar para cada ítem. Cada uno de los ML descritos adopta un valor del parámetro de dificultad que puede diferir en cada ítem (Ver Sección 2.4).

### 2.3.4. Función de Información

La Función de Información (FI) ha sido un aspecto muy importante que aporta la TRI para la construcción y análisis de los instrumentos de medida (Muñiz y Hambleton, 1992). Los autores exponen que la FI de un test, o de un ítem, indica la precisión con la que el test, o el ítem, mide en los diferentes valores de la escala de la variable latente. Precisamente, la FI del test es la suma de las FI de los ítems en cada nivel del rasgo latente. Conforme exponen Attorresi *et al.* (2009), la FI de un ítem difícil es mayor para niveles de habilidad altos y menor para niveles de habilidad bajos, por lo que el ítem será útil para medir a los examinados más hábiles que para los menos hábiles.

La FI del test se relaciona directamente con el error típico de estimación. Específicamente, se calcula como la inversa de la varianza de los valores que asume la variable latente, por lo tanto, cuanto mayor es el valor de la FI menor es el error de estimación. Este es un aspecto en el cual la TRI presenta ventajas por sobre el enfoque clásico, puesto que permite calcular el error de estimación para cada examinado en el test. Este error depende de varios factores (Ponsoda *et al.*, 1998), a saber:

- **Cantidad de ítems:** a mayor número de ítems, menor error de estimación.
- **Capacidad discriminativa de los ítems:** el error disminuye a medida que aumenta el valor del parámetro de discriminación.
- **Diferencia entre el parámetro de dificultad y el rasgo latente:** mientras más pequeña sea esta diferencia, menor será el error de estimación.



## 2.4. Formulación de los Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem desde el enfoque de los Modelos Lineales Generalizados

### 2.4.1. Modelos de Rasgos Latentes

**Definición 2.4.1.** Se denominan variables latentes a las variables que no se pueden observar de manera empírica, y variables manifiestas a aquellas que pueden ser observadas en forma directa.

**Notación:**

- $Y$ : variable aleatoria manifiesta.
- $\mathbf{Y}$ : vector de variables aleatorias manifiestas.
- $\Theta$ : variable aleatoria latente.
- $\Theta$ : vector de variables aleatorias latentes.

**Definición 2.4.2.** Se denomina **Modelo de Variable Latente** al sistema  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  que vincula  $\mathbf{Y}$  con  $\Theta$ , donde  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$ , con  $p \in \mathbb{N}$ , es un vector de variables manifiestas, también llamadas ítems o indicadores y  $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q)$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , es un vector formado por variables latentes, igualmente llamadas rasgos o habilidades.

**Definición 2.4.3.** Se denomina **Modelo de Rasgos Latentes (MRL)** al modelo de variable latente  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  que relaciona  $\mathbf{Y}$  con  $\Theta$ , donde  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$ , con  $p \in \mathbb{N}$ , es una secuencia de variables manifiestas categóricas y  $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q)$ , con  $q \in \mathbb{N}$ , un vector de variables latentes medidas en escala de intervalo o razón.

**Observación 2.4.1.** Según Bartholomew *et al.* (2008), los objetivos para la aplicación del modelo  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  presentado en la Definición 2.4.3 son:

- indagar acerca de las relaciones entre las respuestas observadas;
- determinar si las relaciones anteriores pueden ser explicadas por una pequeña cantidad de variables latentes;
- asignar una puntuación a cada examinado para cada variable latente en función de las respuestas observadas.

**Definición 2.4.4.** El Modelo de Rasgos Latentes  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  se denomina **Modelo de Rasgo Latente Binario (MRLB)** si la variable manifiesta  $Y_j$  con  $j = 1, \dots, p$ , puede tomar dos valores posibles: 1 (éxito) con probabilidad  $\pi_j(\Theta)$  y 0 (fracaso) con probabilidad  $1 - \pi_j(\Theta)$ , donde  $0 \leq \pi_j(\Theta) \leq 1$ .

**Observación 2.4.2.** En un test dicotómico compuesto por  $p$  ítems respondido por  $n$  individuos,  $\mathbf{Y}$  está formado por  $p$  variables manifiestas  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Debido a que  $Y_j$  es una variable observada en  $n$  individuos, se dispone de  $n$  variables aleatorias  $Y_{ij}$ , donde  $Y_{ij}$  representa la respuesta del individuo  $i$  al ítem  $j$ . Por consiguiente,  $Y_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{nj})'$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Matricialmente,  $\mathbf{Y}$  se puede representar como sigue:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1j} & \dots & Y_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{np} \end{pmatrix}$$

**Observación 2.4.3.** Sobre todo MRLB  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  se impone el supuesto de **independencia condicional**, el cual implica que para  $\Theta = \theta$  la probabilidad conjunta de responder correctamente a un par de ítems es igual al producto de las probabilidades de respuestas correctas a los dos ítems, es decir,

$$P(Y_j, Y_k | \theta) = P(Y_j | \theta)P(Y_k | \theta), \quad j, k = 1, \dots, p; \quad j \neq k.$$

**Observación 2.4.4.** Se dice que el MRLB  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  satisface el supuesto de **unidimensionalidad** si  $\Theta$  está formado por una única variable latente, es decir,  $q = 1$ .

**Observación 2.4.5.** El MRLB se basa en un Modelo de Regresión para datos dicotómicos, pero su tratamiento es más complicado puesto que no se tiene una única variable manifiesta (ítems) sino  $p$ , que no están correlacionadas condicionalmente a las variables explicativas, denominadas en este contexto, variables latentes. Sumado a esto, las variables latentes no se pueden observar de manera directa sino que son subyacentes, y por lo tanto, se deben estimar.

Para relacionar los ítems con las variables latentes del MRLB se debe realizar una regresión de cada variable manifiesta  $Y_j$  sobre las variables latentes contenidas en el vector  $\Theta$ . Esta regresión es el valor esperado de  $Y_j$  condicional a  $\Theta$ , denotado por  $E(Y_j|\Theta)$  y, debido a que las variables  $Y_j$  son de tipo binarias,  $E(Y_j|\Theta) = P(Y_j = 1|\Theta) = \pi_j(\Theta)$ . La variable  $Y_j$  está compuesta por  $n$  variables dicotómicas  $Y_{ij}$ , con  $i = 1, \dots, n$ , correspondientes a los  $n$  individuos que responden un test, en donde la probabilidad condicional de que  $Y_{ij}$  sea igual 1 dado los valores de las variables latentes  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q$  para el individuo  $i$  se denota  $\pi_{ij}$ , es decir,  $P(Y_{ij} = 1|\Theta = \theta_i) = \pi_{ij}$ , donde  $\theta_i = (\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{iq})$ .

**Definición 2.4.5.** Considerando un test dicotómico formado por  $p$  ítems y respondido por  $n$  individuos, el MRLB  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  se define a partir de la regresión de cada  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , sobre las variables latentes como sigue:

#### MRLB

▪ **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

donde,

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la respuesta del individuo } i \text{ al ítem } j \text{ es correcta} \\ 0 & \text{si la respuesta del individuo } i \text{ al ítem } j \text{ es incorrecta} \end{cases}$$

■ **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = \boldsymbol{\theta}_i' \boldsymbol{\beta}_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^q \beta_{jk} \theta_{ik} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

donde,

- $\eta_{ij}$  es el predictor lineal latente.
- $\boldsymbol{\theta}_i' = (1, \theta_{i1}, \dots, \theta_{iq})$  con  $\theta_{ik}$  el valor de la  $k$ -ésima variable latente para el individuo  $i$ ,  $k = 1, \dots, q$ .
- $\boldsymbol{\beta}_j = (\alpha_j, \beta_{j1}, \dots, \beta_{jq})'$  es un vector de parámetros desconocidos que se denominan coeficientes de regresión.

■ **Función de enlace:**

$$g(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

**Observación 2.4.6.** La especificación del MRLB se completa detallando los supuestos de los que depende como sigue (Bartholomew *et al.*, 2008):

- El MRLB satisface el supuesto de independencia condicional puesto que las respuestas a los  $p$  ítems observados son independientes condicionalmente a las variables latentes.
- Las variables latentes  $\Theta_1, \dots, \Theta_q$  son independientes y se distribuyen Normal Estándar, es decir,  $\Theta_k \sim N(0, 1) \forall k = 1, \dots, q$ .
- Una función de enlace debe ser elegida de manera tal que  $g(\pi_{ij}) = \alpha_j + \sum_{k=1}^q \beta_{jk} \theta_{ik}$ .

### 2.4.2. Modelos TRI Binarios Unidimensionales

Un caso singular de los MRLB se presenta cuando el conjunto de ítems que conforman un test mide una única variable latente. Estos modelos han sido estudiados, principalmente, bajo el contexto de la Teoría de Respuesta al Ítem (Birnbaum, 1968; Lord, 1980), motivo

por el cual se los conoce como Modelos TRI Binarios Unidimensionales.

**Definición 2.4.6.** Un MRLB que considera una única variable latente se denomina **Modelo de Rasgos Latentes Binario Unidimensional (MRLBU)**. A partir de un test dicotómico compuesto por  $p$  ítems y respondido por  $n$  individuos, el MRLBU se denota  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  y se define a partir de las componentes de la regresión de cada  $Y_j$  sobre  $\Theta$ ,  $j = 1, \dots, p$ , como sigue:

#### MRLBU

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = \boldsymbol{\theta}_i' \boldsymbol{\beta}_j = \alpha_j + \beta_j \theta_i \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

donde,

- $\eta_{ij}$  es el predictor lineal latente
- $\boldsymbol{\theta}_i' = (1, \theta_i)$  con  $\theta_i$  el valor de la variable latente para el individuo  $i$
- $\boldsymbol{\beta}_j = (\alpha_j, \beta_j)'$

- **Función de enlace:**

$$g(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

**Observación 2.4.7.** La especificación del modelo MRLBU se completa detallando los supuestos de los que depende como sigue:

- EL MRLBU satisface el supuesto de unidimensionalidad puesto que mide una única variable latente.

- El MRLBU satisface el supuesto de independencia condicional.
- $\Theta \sim N(0, 1)$ .
- Una función de enlace debe ser elegida de manera tal que sea monótona en función de  $\theta$ , definida de  $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , doblemente diferenciable y  $g(\pi_{ij}) = \alpha_j + \beta_j \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Observación 2.4.8.** En el contexto de la Teoría de Respuesta al Ítem, el MRLBU se conoce como **Modelo TRI Binario Unidimensional**.

**Observación 2.4.9.** La función matemática, denotada por  $\pi_j(\theta)$ , modela el comportamiento de la probabilidad de respuesta correcta para cada ítem  $j$ , con  $j = 1, \dots, p$ , según la habilidad o rasgo latente de cada individuo. En el marco de la TRI esta función se denomina Curva Característica del Ítem (CCI).

Se debe adoptar una función matemática (enlace) para conformar la CCI y, de esta manera, completar la definición del MRLBU. Según el enlace elegido, existen diferentes Modelos TRI Binarios Unidimensionales. La función con la que se trabaje debe ser monótona creciente en el rasgo latente y asignarle el rango  $[0, 1]$  al rango  $(-\infty; +\infty)$  (Bartholomew *et al.*, 2008). Para poder cumplir con las condiciones anteriores es necesario transformar la probabilidad de respuesta. En general, se han investigado dos tipos de funciones matemáticas para la CCI, los enlaces *logit* y *probit*, los cuáles se definen de  $\mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ . En este trabajo se utiliza el enlace *logit*, debido a que los modelos originados a partir del mismo son los más utilizados en la actualidad (ver 2.3.3.2).

En lo que sigue, se definen las componentes del Modelo Logístico de 2 parámetros y se presentan sus casos particulares: el Modelo Logístico de 1 parámetro y el Modelo de Rasch. Seguidamente, se contruye la CCI del Modelo Logístico de 3 parámetros y se detallan las componentes del MLG que lo definen.

**Definición 2.4.7.** El Modelo TRI Binario Unidimensional  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  que adopta la función de enlace *logit* se denomina **Modelo Logístico de 2 parámetros (ML2)**.

**Resultado 2.4.1.** La CCI del ML2 para el ítem  $j$  es:

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}{1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}} \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.1)$$

*Demostración.* La relación entre  $\eta_j$  y  $\pi_j(\theta)$  para el ítem  $j$  está dada por:

$$g(\pi_j(\theta)) = \eta_j(\theta) \quad j = 1, \dots, p.$$

Si se considera el enlace logit se tiene:

$$\text{logit}(\pi_j(\theta)) = \eta_j(\theta) \quad j = 1, \dots, p.$$

Entonces, por definición de la función logística, es:

$$\log \frac{\pi_j(\theta)}{1 - \pi_j(\theta)} = \eta_j(\theta).$$

Y, por ende,

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\eta_j(\theta)}}{1 + e^{\eta_j(\theta)}},$$

que, por Definición 2.4.6 constituye la ecuación de la CCI del ML2, es decir:

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}{1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}} \quad j = 1, \dots, p.$$

■

**Observación 2.4.10.** El ML2 es el más conocido dentro de la TRI y es muy utilizado en diferentes áreas cuando se trabaja con datos binarios. En el marco de la TRI, la CCI queda determinada no sólo al adoptar una función matemática que conforme la curva, sino también, al determinar los parámetros que la configuran. Éstos se denominan: “parámetro de discriminación” y “parámetro de dificultad” del ítem; y se especifican a partir de los coeficientes de regresión  $\alpha_j$  y  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

**Definición 2.4.8.** Se denomina **parámetro de discriminación**, y se denota  $a_j$ , al valor proporcional a la pendiente de la recta tangente a la CCI del ítem  $j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , en el punto de inflexión de  $\pi_j(\theta)$ .

**Observación 2.4.11.** El parámetro de discriminación indica el grado en el que la respuesta al ítem varía según la habilidad del individuo (Lord, 1980). Los ítems con mayor valor en el parámetro de discriminación son más útiles para diferenciar a los individuos en distintos niveles de habilidad que los ítems con menor valor en el parámetro de discriminación (Cortada de Kohan, 2004).

**Resultado 2.4.2.** El coeficiente de regresión  $\beta_j$  y el parámetro de discriminación  $a_j$  son iguales,  $\forall j = 1, \dots, p$ .

*Demostración.* Por la ecuación (2.1) la CCI del ML2 para cada ítem  $j$ , con  $j = 1, \dots, p$  es:

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}{1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}.$$

Tomando la primera derivada  $\pi_j'(\theta)$  respecto de  $\theta$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_j'(\theta) &= \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta} \cdot \beta_j \cdot (1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}) - e^{\alpha_j + \beta_j \theta} \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta} \cdot \beta_j}{(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2} \\ &= \frac{\beta_j \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta} + \beta_j (e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2 - \beta_j (e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2}{(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2} \end{aligned}$$

de donde resulta,

$$\pi_j'(\theta) = \frac{\beta_j \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta}}{(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2}.$$

Y la segunda derivada,  $\pi_j''(\theta)$ , de la CCI es:

$$\pi_j''(\theta) = \frac{\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta} \cdot (1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2 - \beta_j^2 \cdot (e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^2 \cdot 2(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})}{(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^4}$$

o equivalentemente,

$$\pi_j''(\theta) = \frac{\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta} \cdot (1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta}) (1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta} - 2e^{\alpha_j + \beta_j \theta})}{(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^4}.$$

De esta manera, la segunda derivada de la CCI queda determinada por la ecuación:

$$\pi_j''(\theta) = \frac{\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta} \cdot (1 - e^{\alpha_j + \beta_j \theta})}{(1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta})^3}.$$



Luego, el punto de inflexión se obtiene a partir de la igualdad  $\pi_j''(\theta_0) = 0$ , por lo que:

$$\beta_j^2 \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} = 0 \quad \text{ó} \quad 1 - e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} = 0.$$

De donde se tiene que:

$$1 = e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0},$$

en consecuencia,

$$\alpha_j + \beta_j \theta_0 = 0.$$

Entonces, existe un posible punto de inflexión en

$$\theta_0 = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Para determinar si efectivamente  $\theta_0$  es un punto de inflexión, se debe analizar si cambia la concavidad de la CCI en  $\theta_0$ . Para ello, se estudia el comportamiento de la función en los puntos  $-\frac{\alpha_j}{\beta_j} - 1$  y  $-\frac{\alpha_j}{\beta_j} + 1$ .

La imagen de estos valores dada por la segunda derivada de la CCI es:

$$\begin{aligned} \pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} - 1\right) &= \frac{\beta_j^2 e^{-\beta_j} (1 - e^{-\beta_j})}{(1 + e^{-\beta_j})^3} & j = 1, \dots, p \\ \pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} + 1\right) &= \frac{\beta_j^2 e^{\beta_j} (1 - e^{\beta_j})}{(1 + e^{\beta_j})^3} & j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Para determinar el signo de la CCI es necesario considerar el comportamiento de  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ :

- Si  $\beta_j < 0$ :  $\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} - 1\right) < 0$  y  $\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} + 1\right) > 0$ , de donde se infiere que la concavidad cambia de negativa a positiva en  $\theta_0$ .
- Si  $\beta_j > 0$ :  $\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} - 1\right) > 0$  y  $\pi_j''\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} + 1\right) < 0$ , de donde se deduce que la concavidad se modifica de positiva a negativa en  $\theta_0$ .

Luego, se concluye que en  $\theta_0 = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}$  existe un punto de inflexión y, por consiguiente, es el punto donde la pendiente de la recta tangente a  $\pi_j(\theta)$  es máxima.

Por último, teniendo en cuenta la Definición 2.4.8, se tiene que:

$$a_j = k \cdot \pi_j' \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) \quad j = 1, \dots, p ; \quad k \in \mathbb{R}$$

de donde,

$$\pi_j' \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right) = \frac{\beta_j \cdot e^{\alpha_j + \beta_j \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)}}{\left( 1 + e^{\alpha_j + \beta_j \left( -\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)} \right)^2} = \frac{\beta_j}{4} \quad j = 1, \dots, p$$

Luego,

$$a_j = k \cdot \frac{\beta_j}{4}.$$

Considerando  $k = 4$ , se obtiene

$$a_j = \beta_j \quad j = 1, \dots, p$$

■

**Definición 2.4.9.** El **parámetro de dificultad**, denotado por  $b_j$ , es un parámetro de localización y se define como el valor de la variable latente para el cual la probabilidad de responder correctamente el ítem  $j$  es 0,5,  $j = 1, \dots, p$ .

**Observación 2.4.12.** El parámetro de dificultad indica el grado de dificultad del ítem. Para valores altos de este parámetro un individuo deberá tener un nivel elevado de habilidad para responder correctamente el ítem con probabilidad 0,5 (Lord, 1980).

**Resultado 2.4.3.** La relación entre los coeficientes de regresión y el parámetro de dificultad es  $b_j = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

*Demostración.* Si  $\pi_j(\theta_0) = 0,5$  (Definición 2.4.9) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0}}{1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0}} &= 0,5 \\ e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} &= 0,5 \cdot (1 + e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0}) \\ e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} &= 0,5 + 0,5e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} \\ e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} - 0,5e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} &= 0,5 \\ 0,5e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} &= 0,5 \\ e^{\alpha_j + \beta_j \theta_0} &= 1 \end{aligned}$$

de donde,

$$\alpha_j + \beta_j \theta_0 = 0,$$

entonces,

$$\theta_0 = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Por lo que, el parámetro de dificultad es

$$b_j = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

■

**Propiedad 2.4.1.** El predictor lineal latente del ML2 es:

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p.$$

*Demostración.* El predictor lineal del MRLBU es, por Definición 2.4.6,

$$\eta_{ij} = \alpha_j + \beta_j \theta_i \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.2)$$

Del Resultado 2.4.3 se tiene que:

$$b_j = -\frac{\alpha_j}{\beta_j},$$

o equivalentemente, por el Resultado 2.4.2,

$$b_j = -\frac{\alpha_j}{a_j},$$

de donde se tiene:

$$-b_j \cdot a_j = \alpha_j. \quad (2.3)$$

Reemplazando la igualdad obtenida en (2.3) en la ecuación (2.2) se establece el predictor latente  $\eta_{ij}$  del ML2 mediante la siguiente ecuación:

$$\eta_{ij} = -b_j \cdot a_j + a_j \theta_i \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

análogamente,

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

■

**Definición 2.4.10.** Para cada  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , las componentes que definen el ML2 son:

**ML2**

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Función de enlace:**

$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

**Corolario 2.4.1.** La CCI del ML2 para el ítem  $j$ , con  $j = 1, \dots, p$ , es la función:

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}}$$

o equivalentemente,

$$\pi_j(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-a_j(\theta - b_j)}}.$$

**Definición 2.4.11.** Se denomina **Modelo Logístico de 1 parámetro (ML1)** al ML2  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  que asume que el parámetro de discriminación  $a$  es el mismo en todas las CCI correspondientes a cada ítem  $j$ , con  $j = 1, \dots, p$ , y que el parámetro de dificultad  $b$  puede diferir en las CCI.

**Corolario 2.4.2.** De la Definición 4.14 se concluye que el predictor latente del ML1 es:

$$\eta_{ij} = a(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p.$$

**Definición 2.4.12.** Para cada  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , las componentes que definen el ML1 son:

**ML1**

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$
- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = a(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$
- **Función de enlace:**

$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, p$$

**Corolario 2.4.3.** La CCI del ítem  $j$ , para  $j = 1, \dots, p$  queda expresada por la ecuación:

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{a(\theta - b_j)}}{1 + e^{a(\theta - b_j)}}.$$

**Definición 2.4.13.** El ML1  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  que considera que el parámetro de discriminación asume el valor 1 en todas las CCI correspondientes a cada ítem  $j$ , con  $j = 1, \dots, p$  se denomina **Modelo de Rasch**.

**Corolario 2.4.4.** De la Definición 2.4.13 se deriva que el predictor latente del Modelo de Rasch queda configurado por la siguiente ecuación,

$$\eta_{ij} = (\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, p$$

**Definición 2.4.14.** Para cada  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , las componentes que definen el Modelo de Rasch son:

## Modelo de Rasch

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = (\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Función de enlace:**

$$\text{logit}(\pi_{ij}) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

**Corolario 2.4.5.** La CCI del Modelo de Rasch queda expresada por

$$\pi_j(\theta) = \frac{e^{\theta - b_j}}{1 + e^{\theta - b_j}} \quad j = 1, \dots, p.$$

**Observación 2.4.13.** En el Modelo de Rasch la probabilidad de responder correctamente a un ítem depende únicamente de la dificultad del ítem y del nivel de habilidad del sujeto en la escala latente, por consiguiente, la probabilidad de acertar el ítem aumentará cuanto mayor sea el nivel de habilidad del sujeto y menor sea la dificultad del ítem.

**Observación 2.4.14.** En algunas situaciones es muy común que las personas que contestan un test no conozcan la respuesta y, por ende, respondan de manera aleatoria, eligiendo al azar entre las opciones presentadas en cada ítem. En estos casos, se considera que el nivel que presenta el examinado en la variable latente es muy bajo, en consecuencia, la probabilidad de responder correctamente el ítem  $j$  cuando la variable latente asume un valor muy pequeño es una constante  $c_j \in [0, 1)$ , con  $j = 1, \dots, p$ . Matemáticamente, se representa mediante el  $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \pi_j(\theta) = c_j$ .

Es claro que  $c_j$  es una asíntota horizontal inferior de la función  $\pi_j(\theta)$ , por lo tanto, considerando la CCI del ML2 (Definición 2.1), se tiene que:

$$\pi_j(\theta) = c_j + \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}} \quad j = 1, \dots, p.$$

Se observa que  $\pi_j(\theta)$  asume valores en el intervalo  $(c_j, 1 + c_j)$ , lo cual no es admisible, ya que, la función  $\pi_j$  se define de  $\mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ . Para solucionar este problema, se multiplica la CCI del ML2 por la proporción  $(1 - c_j)$  y se obtiene una nueva función dada por la expresión:

$$\pi_j(\theta) = c_j + (1 - c_j) \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}} \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.4)$$

**Definición 2.4.15.** La constante  $c_j$  se denomina **parámetro de pseudo-azar** del ítem  $j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , y representa la probabilidad de responder correctamente el ítem  $j$  cuando la habilidad del examinado es muy baja.

**Definición 2.4.16.** El modelo TRI binario unidimensional  $(\mathbf{Y}, \Theta)$  que asume la función de enlace *logit* y cuya CCI coincide con la ecuación (2.4) se denomina **Modelo Logístico de 3 parámetros (ML3)**.

**Definición 2.4.17.** Para cada  $Y_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , las componentes que definen el ML3 son:

#### ML3

- **Componente aleatoria:**

$$Y_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\pi_{ij}) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Componente sistemática:**

$$\eta_{ij} = a_j(\theta_i - b_j) \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

- **Función de enlace:**

$$\text{logit} \left( \frac{\pi_{ij} - c_j}{1 - c_j} \right) = \eta_{ij} \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, p$$

**Corolario 2.4.6.** En el ML3, el parámetro de dificultad  $(b_j)$  del ítem  $j$  se corresponde con el nivel de habilidad en la escala latente donde la probabilidad de responder correctamente el ítem  $j$  es  $c_j + \frac{1 - c_j}{2}$ , es decir que,  $\pi_j(b_j) = c_j + \frac{1 - c_j}{2}$ , para  $j = 1, \dots, p$ .

**Definición 2.4.18.** Para todos los Modelos Logísticos se define la **varianza** de los niveles de la variable latente, representados por  $\theta$ , como

$$Var(\theta) = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \frac{[\pi'_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)(1-\pi_j(\theta))}}.$$

**Definición 2.4.19.** El **error típico de estimación** ( $S_e$ ) de  $\theta$  indica la precisión con la que se ha estimado la variable latente y se calcula como la desviación típica de los niveles de la variable latente estimados, es decir,

$$S_e = \sqrt{Var(\theta)}.$$

**Definición 2.4.20.** La **Función de Información de un Ítem** indica los niveles de la variable latente para el cual cada ítem proporciona mediciones más precisas y se calcula para  $j = 1, \dots, p$  como

$$I_j(\theta) = \frac{[\pi'_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)(1 - \pi_j(\theta))}.$$

**Definición 2.4.21.** La **Función de Información del Test** establece la precisión con la que el conjunto de ítems mide los diferentes valores de la variable latente. Se define como la inversa de la varianza de  $\theta$  o, equivalentemente, como la sumatoria de las funciones de información de cada ítem. Esto es,

$$I(\theta) = \frac{1}{Var(\theta)} = \sum_{j=1}^p \frac{[\pi'_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)(1 - \pi_j(\theta))}.$$

## 2.5. Estimación de los Modelos Logísticos

La probabilidad de que un individuo responda correctamente un determinado ítem depende únicamente de la habilidad del individuo y de los parámetros que configuran la CCI de ese ítem. Por lo tanto, en el proceso de estimación se busca cuantificar el rasgo o habilidad latente de cada individuo y para cada ítem los parámetros de discriminación, dificultad y pseudo-azar, según corresponda, conforme al modelo elegido. En esta línea, Andrade *et al.* (2000) describen tres casos que se pueden presentar al momento de estimar:



- 1°) La habilidad latente de los examinados es conocida y se quiere estimar los parámetros de los ítems.
- 2°) Los parámetros de los ítems son conocidos y se pretende estimar la habilidad latente de cada uno de los examinados.
- 3°) Tanto la habilidad latente de los examinados como los parámetros de los ítems son desconocidos y se busca estimar ambos.

El 3° caso se diferencia de los dos anteriores, principalmente, por el tratamiento de las métricas consideradas para estimar los parámetros de los ítems y los niveles de cada examinado en el rasgo latente. En el contexto de la TRI, se habla de métrica para referir a los parámetros de la distribución de una variable aleatoria. En el 1° caso, los parámetros de los ítems se estiman considerando la misma métrica de las habilidades; similarmente, en el 2° caso, las habilidades se estiman teniendo en cuenta la métrica de los parámetros de los ítems. En cambio, cuando se da la tercera situación no hay una métrica definida y, por ende, se debe establecer. Tal como exponen Andrade *et al.* (2000), la necesidad de especificar la métrica se fundamenta en un problema conocido como “falta de identificabilidad del modelo” que ocurre debido a que más de una combinación de parámetros produce el mismo valor en el ML3, y por tanto, en verosimilitud. El problema se puede resolver definiendo una métrica para las habilidades y, consecuentemente, para los parámetros de los ítems. Para ello, se debe establecer una medida de posición y otra de dispersión para las habilidades, por ejemplo, el promedio y la desviación estándar.

En la investigación que se realiza se desconocen tanto las habilidades como los parámetros de los ítems, por lo tanto, se van a estimar de manera conjunta (3° caso). Al igual que en la mayoría de los estudios que se han realizado para resolver el problema de la identificabilidad del modelo, se define una media  $\mu$  y un desvío estándar  $\sigma$  (determinados) para la distribución de la variable latente.

En la TRI existen varios métodos de estimación que se basan, esencialmente, en el principio de Máxima Verosimilitud (MV) o en el Enfoque Bayesiano (EB). Bajo cualquiera de ellos, los métodos de estimación de los modelos TRI requieren el uso de algoritmos

de aproximación numérica debido a la imposibilidad de resolver, de manera directa, las ecuaciones resultantes de derivar la función de log-verosimilitud. Las técnicas de aproximación numérica más utilizadas son: el algoritmo de Newton-Raphson (Issac y Keller, 1966) y el método de Puntuación de Fisher (Rao, 1973).

Los métodos de estimación que permiten estimar simultáneamente los parámetros (de los ítems) y la habilidad (de los individuos) basados en MV se denominan: Estimación Máxima Verosimilitud Conjunta (EMVC) y Estimación Máxima Verosimilitud Marginal (EMVM). Ambos métodos buscan estimar los parámetros maximizando la función de verosimilitud y han sido los más explorados, dado que, los estimadores MV poseen varias propiedades importantes. En condiciones generales, los estimadores de MV se caracterizan por ser (Hambleton y Swaminathan, 1985):

- consistentes: a medida que aumenta el tamaño de la muestra y el número de ítems los estimadores convergen a los valores verdaderos;
- funciones de estadísticos suficientes: siempre que existan estadísticos suficientes, los cuales contienen toda la información del parámetro;
- eficientes: asintóticamente, los estimadores MV tienen la varianza más pequeña;
- asintóticamente normales: los estimadores MV tienden a distribuirse normal.

Los parámetros y las habilidades, además, pueden ser estimados de manera conjunta mediante métodos bayesianos. Pérez Gil (s.f) expone que los métodos basados en el EB consisten en combinar la función de verosimilitud de los datos muestrales con una distribución a priori, la cual es la distribución que se supone siguen los parámetros, dando lugar a una distribución a posteriori. Las estimaciones de los parámetros son los valores que maximizan la distribución a posteriori, considerando como el máximo de la distribución la moda o la media. Existen otros métodos alternativos de estimación, pero no son tan utilizados y escapan al interés de este trabajo, en el cual se pretende realizar el proceso de estimación mediante el método de EMVM.

En lo que sigue, se explican los métodos descritos anteriormente (EMVC, EMVM, EB) aplicados al ML3 (los desarrollos alcanzados pueden ser aplicados al ML1 y al ML2 por ser casos particulares del ML3). Se comienza presentando algunas definiciones, notaciones y suposiciones necesarias para el desarrollo de los mismos.

Considere una prueba conformada por  $p$  ítems que responden  $n$  individuos. Sea  $Y_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, p$ ), la variable manifiesta binaria definida como sigue:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el examinado } i \text{ responde correctamente al ítem } j, \\ 0 & \text{si el examinado } i \text{ responde incorrectamente al ítem } j. \end{cases}$$

Se define el vector de respuestas aleatorias del individuo  $i$  por  $\mathbf{Y}_i = (Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ip})$  y el conjunto integral de respuestas de los individuos por  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n)$ . De la misma manera, se representan las observaciones por  $y_{ij}$ ,  $\mathbf{y}_i$  e  $\mathbf{y}$ . Por la naturaleza de las variables manifiestas, el vector respuesta para el individuo  $i$  está formado por ceros y unos y se escribe  $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El conjunto de ítems mide en forma subyacente una variable aleatoria no observada representada por  $\Theta$ , llamada en el contexto de la TRI habilidad o rasgo latente. Entonces, el vector de habilidades observadas de  $n$  individuos se expresa por  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  y el conjunto de parámetros de los ítems se representa mediante  $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_p)$ , con  $\boldsymbol{\xi}_j = (a_j, b_j, c_j)'$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

La probabilidad de que el individuo  $i$  con habilidad  $\theta_i$  responda correctamente el ítem  $j$  se expresa por  $P(Y_{ij} = 1|\theta_i, \boldsymbol{\xi}_j)$  y se denota por  $\pi_{ij}$  o equivalentemente por  $P_{ij}$  para simplificar la notación. Como  $Y_{ij}$  es una variable de tipo Bernoulli, la función de probabilidad se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(Y_{ij} = y_{ij}|\theta_i, \boldsymbol{\xi}_j) &= P(Y_{ij} = 1|\theta_i, \boldsymbol{\xi}_j)^{y_{ij}} P(y_{ij} = 0|\theta_i, \boldsymbol{\xi}_j)^{1-y_{ij}} \\ &= P_{ij}^{y_{ij}} (1 - P_{ij})^{1-y_{ij}} \\ &= P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde,  $Q_{ij} = 1 - P_{ij}$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, p$ .

Adicionalmente, se asumen dos supuestos fundamentales (Andrade *et al.*, 2000):

$S_1$ ) Las respuestas de diferentes individuos son independientes.

$S_2$ ) Los ítems son respondidos de manera independiente por cada examinado fijada su habilidad (Independencia local).

El supuesto  $S_2$  garantiza que, para cada valor de la variable latente, si se toma un conjunto de individuos con habilidad  $\theta$ , las covarianzas entre las respuestas para cada par de ítems son nulas. Sin embargo, si se considera un conjunto de individuos con habilidades variadas, estas covarianzas no serán necesariamente nulas, sino que serán positivas (Andrade *et al.*, 2000).

### 2.5.1. Estimación por Máxima Verosimilitud Conjunta

En la situación presentada en el 3° caso, el número de parámetros que se estiman al mismo tiempo puede resultar considerablemente grande, por ejemplo, en el ML3 serán  $3p + n$  parámetros a estimar, siendo  $p$  el número de ítems y  $n$  la cantidad de individuos que realizan una prueba. Ésto, inevitablemente, demanda una enorme exigencia computacional. Ante esta situación, Birnbaum (1968) propone un proceso de ida y vuelta que requiere del cumplimiento de dos condiciones para poder ser aplicado. Por un lado, se deben eliminar los individuos con puntuaciones extremas, es decir, aquellos examinados cuyas respuestas son todas correctas o incorrectas (Luzardo, 2013). Según la autora León Carvajal (2017), sino se eliminaran estos individuos con puntuaciones extremas podrían presentarse dos situaciones: si el  $i$ -ésimo individuo responde incorrectamente los  $p$  ítems del test, la función de verosimilitud queda reducida a una función decreciente respecto de la habilidad y, en consecuencia, el estimador máximo verosímil para  $\theta_i$  será  $-\infty$ ; por el contrario, si el  $i$ -ésimo individuo responde de manera correcta los  $p$  ítems del test, la función de verosimilitud se convierte en una función creciente en función de la habilidad y, en consecuencia, el estimador máximo verosímil para  $\theta_i$  será  $+\infty$ . Por otro lado, para llevar a cabo el proceso de Birnbaum, no pueden ser considerados los sujetos cuyas respuestas a los ítems pueden dividirse en dos grupos, de manera tal, que los individuos respondan correctamente todos los ítems del primer grupo e incorrectamente los del segundo grupo (Luzardo, 2013).

### 2.5.1.1. Proceso de Birnbaum

Si el individuo  $i$  con habilidad  $\theta_i$  responde a  $p$  ítems, la probabilidad conjunta de las respuestas  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ip}$  puede ser denotada por  $P(\mathbf{Y}_i|\theta_i)$ . Al verificarse el supuesto de  $S_2$ , dada una habilidad  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , las respuestas a los  $p$  ítems son independientes, en consecuencia:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}_i|\theta_i) &= P(Y_{i1}|\theta_i)P(Y_{i2}|\theta_i) \dots P(Y_{ip}|\theta_i) \\ &= \prod_{j=1}^p P(Y_{ij}|\theta_i) \\ &= \prod_{j=1}^p P_{ij}^{Y_{ij}} Q_{ij}^{1-Y_{ij}}, \quad Q_{ij} = 1 - P_{ij}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Cuando las variables aleatorias,  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{ip}$ , adoptan valores específicos  $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip}$ , se obtiene la función de verosimilitud:

$$L(\theta_i, \boldsymbol{\xi}) = \prod_{j=1}^p P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}} \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Asumiendo el supuesto  $S_1$ , las respuestas de diferentes examinados son independientes, entonces, la Ecuación 2.7 puede ser escrita como:

$$L(\theta, \boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^p P_{ij}^{y_{ij}} Q_{ij}^{1-y_{ij}}.$$

Tomando el logaritmo natural de la función de verosimilitud se obtiene:

$$\ln L(\theta, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p [y_{ij} \ln P_{ij} + (1 - y_{ij}) \ln Q_{ij}].$$

Entonces, las derivadas parciales del logaritmo natural de la función de verosimilitud en relación a  $\boldsymbol{\xi}_j$  y  $\theta_i$  resultan ser, respectivamente:

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} = \sum_{i=1}^n \left[ y_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} + (1 - y_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \right]$$

y

$$\frac{\partial \ln L(\theta, \boldsymbol{\xi})}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^p \left[ y_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} + (1 - y_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i} \right].$$

A partir de estas derivadas se construye una matriz de resultados que se denomina  $\mathbf{h}$  y, considerando las derivadas segundas de  $\ln L(\theta, \boldsymbol{\xi})$  en relación a  $\boldsymbol{\xi}_j$  y  $\theta_i$ ,  $j = 1, \dots, p$

e  $i = 1, \dots, n$ , se establece otra matriz que se denomina  $\mathbf{H}$ . Esta matriz es cuadrada de orden  $3p + n$ , lo cual puede causar una exigencia importante desde el punto de vista computacional. Por lo tanto, se realizan tres presunciones (Luzardo, 2013):

- $P_1$ ) Por  $S_1$  se asume la independencia entre las respuestas de examinados diferentes, en consecuencia, las derivadas cruzadas entre pares de examinados tienen esperanza cero.
- $P_2$ ) Los examinados y los parámetros se reconocen independientes, ya que, no hay motivo para que exista covariación entre un individuo y los parámetros de los ítems. Esto deriva en la eliminación de las derivadas cruzadas.
- $P_3$ ) Se asume que los ítems son independientes por el supuesto  $S_2$ , razón por la cual, se descartan las derivadas cruzadas entre ítems diferentes.

Así, la matriz  $\mathbf{H}$  se convierte en un bloque diagonal, donde el primer bloque son matrices de  $3 \times 3$  relacionadas con los parámetros de los ítems y los  $n$  bloques siguientes son escalares en la diagonal vinculados con las habilidades de los examinados (Andrade *et al.*, 2000). Considerando esta estructura de bloque diagonal, Birnbaum (1968) propone un algoritmo donde los parámetros de los ítems y las habilidades se estiman individualmente, utilizando el algoritmo de Newton-Raphson o Puntuación de Fisher, en el que cada iteración se compone de dos etapas (Andrade *et al.*, 2000):

- **Etapas N°1:** Se consideran estimaciones aproximadas de las habilidades (puntaje estandarizado del examinado, por ejemplo) y se estiman los parámetros suponiendo conocidas las habilidades. Por  $P_3$ , los ítems son independientes, entonces, la estimación de los parámetros de los ítems se resuelve iterativamente mediante las ecuaciones siguientes:

- Método de Newton-Raphson:

$$\hat{\xi}_j^{(t+1)} = \hat{\xi}_j^{(t)} - \left[ \mathbf{H} \left( \hat{\xi}_j^{(t)} \right) \right]^{-1} \mathbf{h} \left( \hat{\xi}_j^{(t)} \right) \quad j = 1, \dots, p.$$

- Método de Puntuación de Fisher:

$$\hat{\xi}_j^{(t+1)} = \hat{\xi}_j^{(t)} - \left[ E \left( \mathbf{H} \left( \hat{\xi}_j^{(t)} \right) \right) \right]^{-1} \mathbf{h} \left( \hat{\xi}_j^{(t)} \right) \quad j = 1, \dots, p.$$

- **Etapa N°2:** Considerando conocidos los parámetros de los ítems obtenidos en la 1° etapa, se estiman las habilidades mediante:

- Método de Newton-Raphson:

$$\hat{\theta}_i^{(t+1)} = \hat{\theta}_i^{(t)} - \left[ \mathbf{H} \left( \hat{\theta}_i^{(t)} \right) \right]^{-1} \mathbf{h} \left( \hat{\theta}_i^{(t)} \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

- Método de Puntuación de Fisher:

$$\hat{\theta}_i^{(t+1)} = \hat{\theta}_i^{(t)} - \left[ E \left( \mathbf{H} \left( \hat{\theta}_i^{(t)} \right) \right) \right]^{-1} \mathbf{h} \left( \hat{\theta}_i^{(t)} \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

De esta manera, se concreta el primer ciclo del paradigma de Birnbaum en el que se han conseguido las estimaciones de los parámetros de los ítems y de las habilidades de los examinados.

Luego, se especifica la métrica que se va a considerar para estimar las habilidades, es decir, los parámetros de la distribución que sigue la variable latente en cuestión,  $(\hat{\theta}, \sigma_{\hat{\theta}})$  y se obtiene la puntuación estandarizada del individuo  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$\theta_i^* = \frac{\hat{\theta}_i - \bar{\theta}}{s_{\hat{\theta}}};$$

y los parámetros del ítem  $j$  estandarizados ( $j = 1, \dots, p$ ):

$$b_j^* = \frac{\hat{b}_j - \bar{\theta}}{s_{\hat{\theta}}} \quad \text{y} \quad a_j^* = s_{\hat{\theta}} \hat{a}_j$$

donde,  $\bar{\theta} = \hat{\mu}$  y  $s_{\hat{\theta}} = \sigma_{\hat{\theta}}$ .

El proceso concluye estableciendo un criterio de parada para finalizar los ciclos. Según Luzardo (2013), este criterio es arbitrario, y expone que los autores Wood *et al.* (1976) proponen que la diferencia entre dos ciclos sucesivos debe ser menor a un valor determinado.

### 2.5.2. Estimación por Máxima Verosimilitud Marginal

De acuerdo a lo expuesto por los autores Andrade *et al.* (2000), un problema destacable que se presenta en la EMVC radica en la falta de consistencia de los estimadores

de los parámetros de los ítems (o de las habilidades) cuando es muy grande el número de examinados en la muestra (o el de ítems). Esta limitación promueve la investigación de diferentes alternativas, una de las más relevante es la propuesta por Bock y Lieberman (1970) que consiste en el desarrollo de la estimación en dos etapas: primero se estiman los parámetros de los ítems y luego las habilidades. Este método se fundamenta en la existencia de una distribución de la habilidad de los individuos de la población de interés, lo que permite estimar los parámetros de los ítems mediante Máxima Verosimilitud Marginal, es decir, considerando una distribución específica para las habilidades de los individuos de la población e integrando la función de verosimilitud con respecto a la distribución de habilidades (Andrade *et al.*, 2000). Conforme exponen los autores, la estimación se realiza por medio de métodos numéricos como Newton-Raphson o Puntuación de Fisher que involucran las derivadas segundas de la función de log-verosimilitud en relación a  $\xi_j$  y  $\xi_k$  ( $j, k = 1, \dots, p$ ), las cuales pueden ser distintas de cero para  $j \neq k$ . Por lo tanto, el proceso requiere de la inversión de matrices cuadradas de orden  $3p$  para el ML3 (orden  $2p$  para el ML2), lo que puede demandar una gran exigencia computacional.

Una propuesta alternativa a la expuesta por Book y Lieberman (1970), que consiste en la modificación de su modelo, la realizan Bock y Aitkin (1981). Básicamente, estos autores adicionan el supuesto de independencia entre los ítems, logrando así, que las segundas derivadas de la función de log-verosimilitud en relación a  $\xi_j$  y  $\xi_k$ , con  $j, k = 1, \dots, p$ , sean nulas para todo  $j, k = 1, \dots, p$  (Andrade *et al.*, 2000). De esta manera, la matriz  $3p \times 3p$  (para el ML3) de derivadas segundas se convierte en un bloque diagonal, lo que permite estimar los parámetros de los ítems individualmente y, en consecuencia, la exigencia computacional se reduce considerablemente. A diferencia de la propuesta anterior, Book y Aitkin (1981) obtienen las estimaciones de MV mediante el algoritmo denominado Esperanza y Maximización (EM) desarrollado por Dempster, Laird y Rubin (1977) (Andrade *et al.*, 2000).

A fin de desarrollar los métodos expuestos, se realizan suposiciones necesarias para su explicación y se siguen, principalmente, las ideas de los autores Andrade *et al.* (2000) y Luzardo (2013).



Suponga que  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son realizaciones de la variable aleatoria latente  $\Theta$  con función de distribución continua y función de densidad de probabilidad  $g(\theta|\boldsymbol{\tau})$ , doblemente diferenciable, donde  $\boldsymbol{\tau} = (\mu, \sigma)$  y  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes conocidas y finitas que representan la media y la desviación estándar, respectivamente. En este trabajo, se asume que  $\Theta$  se distribuye Normal Estándar, por ende, se estiman las habilidades de los examinados en la métrica  $(0, 1)$ , a saber,  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ .

### 2.5.2.1. Propuesta de Bock y Lieberman

La función de probabilidad marginal de  $\mathbf{Y}_i$ , considerando que la distribución de  $\mathbf{Y}_i$  no es función de  $\boldsymbol{\tau}$ , está dada por:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) &= \int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta. \end{aligned}$$

Por el cumplimiento del supuesto  $S_1$ , la función de verosimilitud asociada al vector de respuestas  $\mathbf{Y}$  es:

$$L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) = \prod_{i=1}^n P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}),$$

y el logaritmo natural de la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) &= \sum_{i=1}^n \ln P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left( \int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta \right). \end{aligned}$$

El sistema a resolver a fin de encontrar los parámetros de los ítems es, para  $j = 1, \dots, p$ :

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} = \mathbf{0} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \begin{cases} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial a_j} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial b_j} = 0 \\ \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial c_j} = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

En lo que sigue, se busca la expresión de las ecuaciones que conforman el sistema anterior, para lo cual se comienza desarrollando la derivada del logaritmo natural de la función de verosimilitud con respecto a  $\xi_j$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\xi, \tau)}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \sum_{i=1}^n \ln P(\mathbf{y}_i | \xi, \tau) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{P(\mathbf{y}_i | \xi, \tau)} \frac{\partial P(\mathbf{y}_i | \xi, \tau)}{\partial \xi_j}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Como,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\mathbf{y}_i | \xi, \tau)}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i | \theta, \xi) g(\theta | \tau) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} P(\mathbf{y}_i | \theta, \xi) \right) g(\theta | \tau) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi_j} \prod_{l=1}^p P(y_{il} | \theta, \xi_l) \right) g(\theta | \tau) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^p P(y_{il} | \theta, \xi_l) \right) \left( \frac{\partial P(y_{ij} | \theta, \xi_j)}{\partial \xi_j} \right) g(\theta | \tau) d\theta.\end{aligned}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $P(y_{ij} | \theta, \xi_j)$ , el producto sobre  $l \neq j$  se convierte en un producto sobre  $j$ , por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(\mathbf{y}_i | \xi, \tau)}{\partial \xi_j} &= \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^p P(y_{il} | \theta, \xi_l) \frac{P(y_{ij} | \theta, \xi_j)}{P(y_{ij} | \theta, \xi_j)} \right) \left( \frac{\partial P(y_{ij} | \theta, \xi_j)}{\partial \xi_j} \right) g(\theta, \tau) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{j=1}^p P(y_{ij} | \theta, \xi_j) \frac{1}{P(y_{ij} | \theta, \xi_j)} \right) \left( \frac{\partial P(y_{ij} | \theta, \xi_j)}{\partial \xi_j} \right) g(\theta, \tau) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i | \theta, \xi) \frac{1}{P(y_{ij} | \theta, \xi_j)} \left( \frac{\partial P(y_{ij} | \theta, \xi_j)}{\partial \xi_j} \right) g(\theta | \tau) d\theta.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Previo a determinar la expresión que representa a  $\frac{\partial P(\mathbf{y}_i | \xi, \tau)}{\partial \xi_j}$ , se busca el resultado de  $\frac{\partial P(y_{ij} | \theta, \xi_j)}{\partial \xi_j}$  para los Modelos Logísticos de la TRI.

Usando las notaciones  $P_j = P(Y_{ij} = 1 | \theta, \xi_j)$  y  $Q_j = 1 - P_j$ , y reescribiendo  $P(y_{ij} | \theta, \xi_j)$  como en (2.5) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P(y_{ij}|\theta, \boldsymbol{\xi}_j) &= P(Y_{ij} = y_{ij}|\theta, \boldsymbol{\xi}_j) \\
 &= P(Y_{ij} = 1|\theta, \boldsymbol{\xi}_j)^{y_{ij}} P(Y_{ij} = 0|\theta, \boldsymbol{\xi}_j)^{1-y_{ij}} \\
 &= P_j^{y_{ij}} Q_j^{1-y_{ij}}.
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(y_{ij}|\theta, \boldsymbol{\xi}_j)}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \left( P_j^{y_{ij}} Q_j^{1-y_{ij}} \right) \\
 &= (y_{ij}) P_j^{y_{ij}-1} \frac{\partial P_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} Q_j^{1-y_{ij}} + P_j^{y_{ij}} (1-y_{ij}) Q_j^{-y_{ij}} \frac{\partial Q_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \\
 &= (y_{ij}) P_j^{y_{ij}-1} \frac{\partial P_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} Q_j^{1-y_{ij}} + P_j^{y_{ij}} (1-y_{ij}) Q_j^{-y_{ij}} \frac{\partial(1-P_j)}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \\
 &= \frac{\partial P_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} \left( y_{ij} P_j^{y_{ij}-1} Q_j^{1-y_{ij}} - (1-y_{ij}) P_j^{y_{ij}} Q_j^{-y_{ij}} \right).
 \end{aligned}$$

Analizando la expresión resultante entre paréntesis, se observa que:

$$\begin{cases} \text{si } y_{ij} = 1 : & y_{ij} P_j^{y_{ij}-1} Q_j^{1-y_{ij}} - (1-y_{ij}) P_j^{y_{ij}} Q_j^{-y_{ij}} = 1 \\ \text{si } y_{ij} = 0 : & y_{ij} P_j^{y_{ij}-1} Q_j^{1-y_{ij}} - (1-y_{ij}) P_j^{y_{ij}} Q_j^{-y_{ij}} = -1, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial P(y_{ij}|\theta, \boldsymbol{\xi}_j)}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} = (-1)^{y_{ij}+1} \frac{\partial P_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j}.$$

Reemplazando este resultado en (2.10) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} &= \int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi}) \frac{1}{P_j^{y_{ij}} Q_j^{1-y_{ij}}} (-1)^{y_{ij}+1} \frac{\partial P_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} g(\theta|\boldsymbol{\tau}) d\theta. \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^{y_{ij}+1}}{P_j^{y_{ij}} Q_j^{1-y_{ij}}} \frac{\partial P_j}{\partial \boldsymbol{\xi}_j} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi}) g(\theta|\boldsymbol{\tau}) d\theta.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Considerando que:

$$\frac{(-1)^{y_{ij}+1} P_j Q_j}{P_j^{y_{ij}} Q_j^{1-y_{ij}}} = \begin{cases} Q_j & \text{si } y_{ij} = 1 \\ -P_j & \text{si } y_{ij} = 0, \end{cases}$$

se puede escribir

$$\frac{(-1)^{y_{ij}+1}P_jQ_j}{P_j^{y_{ij}}Q_j^{1-y_{ij}}} = y_{ij} - P_j,$$

de donde,

$$\frac{(-1)^{y_{ij}+1}}{P_j^{y_{ij}}Q_j^{1-y_{ij}}} = \frac{y_{ij} - P_j}{P_jQ_j}. \quad (2.12)$$

Entonces, retomando la Ecuación 2.11 y sustituyendo  $\frac{(-1)^{y_{ij}+1}}{P_j^{y_{ij}}Q_j^{1-y_{ij}}}$  por su equivalente (Ecuación 2.12), se tiene:

$$\frac{\partial P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \xi_j} = \int_{\mathbb{R}} \frac{y_{ij} - P_j}{P_jQ_j} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} P(\mathbf{y}_i|\theta, \xi)g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta.$$

Realizando la ponderación que se propone a continuación:

$$w_j = \frac{P_j^*Q_j^*}{P_jQ_j} \quad \Rightarrow \quad P_jQ_j = \frac{P_j^*Q_j^*}{w_j},$$

donde

$$P_j^* = \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta-b_j)}} \quad y \quad Q_j^* = 1 - P_j^*,$$

resulta que:

$$\frac{\partial P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \xi_j} = \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta, \boldsymbol{\tau})d\theta.$$

Luego, la expresión dada en la Ecuación 2.9 queda establecida por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \xi_j} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})} \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} \frac{P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})}{P(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})} d\theta \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} \frac{P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})}{\int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Escribiendo  $\frac{P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})}{\int_{\mathbb{R}} P(\mathbf{y}_i|\theta, \boldsymbol{\xi})g(\theta|\boldsymbol{\tau})d\theta} = g(\theta|\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ , la derivada del logaritmo natural de la función de verosimilitud en relación a  $\xi_j$  resulta:

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \xi_j} = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial \xi_j} g(\theta|\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})d\theta.$$

donde,  $P_j^* Q_j^*$  es:

$$\begin{aligned}
 P_j^* Q_j^* &= \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta-b_j)}} \cdot \left( 1 - \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta-b_j)}} \right) \\
 &= \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta-b_j)}} - \frac{e^{2a_j(\theta-b_j)}}{(1 + e^{a_j(\theta-b_j)})^2} \\
 &= \frac{(1 + e^{a_j(\theta-b_j)})e^{a_j(\theta-b_j)} - e^{2a_j(\theta-b_j)}}{(1 + e^{a_j(\theta-b_j)})^2} \\
 &= \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{(1 + e^{a_j(\theta-b_j)})^2}
 \end{aligned}$$

Por último, se desarrollan las derivadas parciales del logaritmo natural de la función de verosimilitud para cada parámetro del vector  $\boldsymbol{\xi}_j = (a_j, b_j, c_j)'$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial a_j} &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial a_j} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} (1 - c_j) (\theta - b_j) \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{(1 + e^{a_j(\theta-b_j)})^2} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} (1 - c_j) (\theta - b_j) P_j^* Q_j^* g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j (\theta - b_j) g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial b_j} &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial b_j} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} (1 - c_j) (-a_j) \frac{e^{a_j(\theta-b_j)}}{(1 + e^{a_j(\theta-b_j)})^2} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} (1 - c_j) (-a_j) P_j^* Q_j^* g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= -a_j (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial c_j} &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} \frac{\partial P_j}{\partial c_j} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^* Q_j^*} Q_j^* g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Así, el sistema de la Ecuación 2.8 resulta ser:

$$\begin{cases} 0 = (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j (\theta - b_j) g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\ 0 = -a_j (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\ 0 = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta. \end{cases}$$

El sistema de ecuaciones a resolver comprende integrales que no presentan solución analítica, razón por la cual, se debe buscar la solución numérica de cada integral mediante algún método de aproximación de integrales. En general, en la TRI se utiliza el comúnmente llamado Método de Cuadratura Gaussiano. Conforme exponen Andrade *et al.* (2000), si  $g(\theta | \boldsymbol{\tau})$  es una función continua con integral finita, entonces, puede ser aproximada por otra función que asuma una cantidad finita de puntos. Por lo tanto, la solución aproximada de la integral de una función continua se obtiene al sumar las áreas de un número finito de rectángulos.

### Ecuaciones de cuadratura

Siguiendo a Luzardo (2013), se consideran  $q$  intervalos cada uno con punto medio  $\bar{\theta}_k$  conocido ( $k = 1, \dots, q$ ), llamado nodo. A cada nodo le corresponde un peso  $A_k$  que tiene en cuenta la altura de la función de densidad  $g(\bar{\theta}_k | \boldsymbol{\tau})$  y el ancho del intervalo  $\Delta_k$ , a saber  $A_k = g(\bar{\theta}_k | \boldsymbol{\tau}) \Delta_k$  (Andrade *et al.*, 2000).

Considerando que  $P_j(\bar{\theta}_k) = P(Y_{ij} = 1 | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}_j) = c_j + (1 - c_j) \frac{e^{a_j(\bar{\theta}_k - b_j)}}{1 + e^{a_j(\bar{\theta}_k - b_j)}}$ , se puede escribir:

- $P(\mathbf{y}_i | \bar{\theta}, \boldsymbol{\xi}) = \prod_{j=1}^p [P_j(\bar{\theta}_k)^{y_{ij}} Q_j(\bar{\theta}_k)^{1-y_{ij}}]$ .
- $P(\mathbf{y}_i | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) g(\bar{\theta}_k | \boldsymbol{\tau}) = P(\mathbf{y}_i | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) A_k \Delta_k^{-1}$ .
- $P(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) \simeq \sum_{k=1}^q P(\mathbf{y}_i | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) g(\bar{\theta}_k | \boldsymbol{\tau}) \Delta_k = \sum_{k=1}^q P(\mathbf{y}_i | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) A_k$ .

Luego,  $g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$  en forma de cuadratura es:

$$\begin{aligned}
g(\bar{\theta}_k | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) &= \frac{P(\mathbf{y}_i | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) g(\bar{\theta}_k | \boldsymbol{\tau})}{P(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})} \\
&= \frac{P(\mathbf{y}_j | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) A_k \Delta^{-1}}{\sum_{k=1}^q P(\mathbf{y}_j | \bar{\theta}_k, \boldsymbol{\xi}) A_k}
\end{aligned}$$

Finalmente, con las notaciones  $g_j^*(\bar{\theta}_k) = g(\bar{\theta}_k | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ ,  $P_{jk} = P_j(\bar{\theta}_k)$  y  $P_{jk}^* = P_j^*(\bar{\theta}_k)$ , las ecuaciones de estimación para los parámetros del ítem  $j$  en forma de cuadratura son:

$$\begin{aligned}
a_j : \quad 0 &= (1 - c_j) \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^n [y_{ij} - P_{jk}] w_{kj} (\bar{\theta}_k - b_j) g_j^*(\bar{\theta}_k). \\
b_j : \quad 0 &= -a_j (1 - c_j) \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^n [y_{ij} - P_{jk}] w_{kj} g_j^*(\bar{\theta}_k). \\
c_j : \quad 0 &= \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^n \frac{y_{ij} - P_{jk}}{P_{jk}^*} w_{kj} g_j^*(\bar{\theta}_k),
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se deben resolver aplicando el método numérico de Newton-Raphson o el de Puntuación de Fisher, puesto que, no presentan soluciones explícitas para estimar por Máxima Verosimilitud los parámetros de los ítems (Andrade *et al.*, 2000). Como se expuso anteriormente, el método demanda una gran exigencia desde el punto de vista computacional, ya que, se deben estimar los parámetros de los ítems de manera simultánea y esto implica invertir una matriz cuadrada de orden  $3p$ , motivo por el cual, la propuesta de Book y Lieberman (1970) se limita a pruebas con muy pocos ítems (Luzardo, 2013).

### 2.5.2.2. Propuesta de Bock y Aitkin

Bock y Aitkin (1981) reformularon el enfoque de Bock y Lieberman (1970) y lograron menor exigencia computacional. Esta reformulación se basa en los mismos supuestos que los utilizados en la estimación conjunta: se asume la independencia de los ítems y de los examinados, y que son independientes los sujetos de los ítems (Andrade *et al.*, 2000). De esta forma,

$$\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\xi}_j \partial \boldsymbol{\xi}_l} = \mathbf{0}, \quad j, l = 1, \dots, p; \quad j \neq l, \quad (2.16)$$

lo que implica que la matriz  $\mathbf{H}$  se transforme en un bloque diagonal. En la propuesta de Book y Aitkin la estimación por Máxima Verosimilitud se realiza mediante el algoritmo denominado Esperanza y Maximización. Para llevar a cabo este proceso, se utilizan las mismas expresiones desarrolladas anteriormente, pero haciendo la adaptación debida a 2.16 (Andrade *et al.*, 2000).

Teniendo en cuenta que la distribución condicional de  $\Theta$  dado  $\mathbf{y}_i$  es  $g(\theta|\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})$ , que se denota por  $g_i^*(\theta)$  para simplificar la notación, se define por

$$f_j(\theta) = \sum_{i=1}^n g_i^*(\theta),$$

al número esperado de individuos que tienen habilidad  $\theta$  entre los que respondieron el ítem  $j$  en una población de tamaño  $n$ . Similarmente, la cantidad de examinados con habilidad  $\theta$  que se espera que respondan correctamente el ítem  $j$  en una población de tamaño  $n$  se establece mediante la expresión que sigue,

$$r_j(\theta) = \sum_{i=1}^n y_{ij} g_i^*(\theta).$$

Luego, de las ecuaciones 2.13, 2.14 y 2.15 se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial a_j} &= (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j(\theta - b_j) g(\theta|\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\ &= (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j(\theta - b_j) g_i^*(\theta) d\theta \\ &= (1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (\theta - b_j) [(y_{ij} g_i^*(\theta) - P_j g_i^*(\theta))] w_j d\theta \\ &= (1 - c_j) \int_{\mathbb{R}} (\theta - b_j) \left[ \sum_{i=1}^n y_{ij} g_i^*(\theta) - P_j \sum_{i=1}^n g_i^*(\theta) \right] w_j d\theta \\ &= (1 - c_j) \int_{\mathbb{R}} (\theta - b_j) [r_j(\theta) - P_j f_j(\theta)] w_j d\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial b_j} &= -a_j(1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
&= -a_j(1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) w_j g_i^*(\theta) d\theta \\
&= -a_j(1 - c_j) \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} [y_{ij} g_i^*(\theta) - P_j g_i^*(\theta)] w_j d\theta \\
&= -a_j(1 - c_j) \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{i=1}^n y_{ij} g_i^*(\theta) - P_j \sum_{i=1}^n g_i^*(\theta) \right] w_j d\theta \\
&= -a_j(1 - c_j) \int_{\mathbb{R}} [r_j(\theta) - P_j f_i(\theta)] w_j d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau})}{\partial c_j} &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*} g(\theta | \mathbf{y}_i, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) d\theta \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (y_{ij} - P_j) \frac{w_j}{P_j^*} g_i^*(\theta) d\theta \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} [y_{ij} g_i^*(\theta) - P_j g_i^*(\theta)] \frac{w_j}{P_j^*} d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \sum_{i=1}^n y_{ij} g_i^*(\theta) - P_j \sum_{i=1}^n g_i^*(\theta) \right] \frac{w_j}{P_j^*} d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}} [r_i(\theta) - P_j f_i(\theta)] \frac{w_j}{P_j^*} d\theta
\end{aligned}$$

### Ecuaciones de estimación en forma de cuadratura

Las ecuaciones de estimación en forma de cuadratura considerando conocidos los nodos  $\bar{\theta}_k$  y sus pesos  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ , son para cada uno de los parámetros:

$$\begin{aligned}
a_j : \quad & 0 = (1 - c_j) \sum_{k=1}^q (\bar{\theta}_k - b_j) [r_j(\bar{\theta}_k) - P_{jk} f_j(\bar{\theta}_k)] w_{kj} \\
b_j : \quad & 0 = -a_j(1 - c_j) \sum_{k=1}^q [r_j(\bar{\theta}_k) - f_j(\bar{\theta}_k) P_{jk}] w_{kj} \\
c_j : \quad & 0 = (1 - c_j)^{-1} \sum_{k=1}^q \frac{[r_j(\bar{\theta}_k) - f_j(\bar{\theta}_k) P_{jk}] w_{kj}}{P_j^*(\bar{\theta}_k)}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

### Estimaciones iniciales:

Siguiendo Andrade *et al.* (2000), se detallan los estimadores iniciales propuestos para cada uno de los parámetros:

- $c_j$  : Si el ítem  $j$  presenta  $m_j$  opciones, se puede suponer que

$$\widehat{c}_j^{(0)} = \frac{1}{m_j} \quad j = 1, \dots, p.$$

- $a_j$  : Los autores Richardson (1936) y Tucker (1946) probaron que el coeficiente de correlación biserial, utilizado en la Teoría Clásica de la Medida, entre  $\theta$  y la variable  $Y_j$  cuando se adopta la curva normal acumulada para la CCI, es:

$$\rho_{\theta, Y_j} = \frac{a_j}{\sqrt{1 + a_j^2}} \quad -1 < \rho_{\theta, Y_j} < 1.$$

de donde,

$$\widehat{a}_j^{(0)} = \frac{\rho_{\theta, Y_j}}{\sqrt{1 - (\rho_{\theta, Y_j})^2}}.$$

- $b_j$  : Por último, Tucker (1946) expresó el parámetro de dificultad asociado al ítem  $j$  de la teoría clásica del ítem  $\pi_j$  (proporción verdadera de respuestas correctas) como:

$$\pi_j = \Phi(-b_j \rho_{\theta, Y_j})$$

de donde,

$$\widehat{b}_j^{(0)} = -\frac{\Phi^{-1}(\pi_j)}{\rho_{\theta, Y_j}},$$

siendo  $\Phi$  la función de distribución asociada a la  $N(0, 1)$ .

### Estimación EM

En los Modelos Logísticos de la TRI se pretende obtener estimaciones de los parámetros de los modelos ( $\xi$ ) en presencia de una única variable latente ( $\Theta$ ). Para esta situación, se debe recurrir al algoritmo denominado EM, puesto que es un método útil para determinar las estimaciones por MV de los parámetros de modelos de probabilidad cuando las variables explicativas son variables aleatorias no observadas (Luzardo, 2013). EM es un proceso iterativo en el que cada iteración se realiza en dos pasos: Esperanza (E) y Maximización (M) (Andrade *et al.*, 2000). Siguiendo a los autores, se define por  $\mathbf{y}$  al vector de datos

incompletos, por  $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$  al vector de datos completos y mediante  $f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\xi})$  a la densidad conjunta de los datos completos. Si  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}$  es una estimación de  $\boldsymbol{\xi}$  en la iteración  $t$ , entonces los pasos del algoritmo EM para obtener  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{(k+1)}$  tal como describen Andrade *et al.* (2000) son:

- **Paso E:** Calcular  $E \left[ \ln f(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\xi}) | \mathbf{y}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}^{(k)} \right]$ .
- **Paso M:** Obtener  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}^{(k+1)}$  que maximiza la función del Paso E.

En el paso M, la maximización se realiza utilizando el algoritmo de Newton-Raphson o Puntuación de Fisher. Asumiendo que los ítems son independientes, la matriz de derivadas segundas se convierte en un bloque diagonal. Esto permite que los parámetros de los ítems se estimen de manera individual, logrando así, evitar el problema de trabajar con matrices cuadradas de orden  $3p$  y pasando a trabajar con matrices cuadradas de orden 3 (Andrade *et al.*, 2000).

El proceso EM es un algoritmo que ha cobrado relevancia gracias a la simplicidad y generalidad de la teoría asociada, sumadas a la amplia gama de ejemplos donde puede ser aplicado (Dempster *et al.*, 1977). El algoritmo EM se puede generalizar en tres niveles, de manera que, el segundo nivel incluya al primero y el tercero a los dos anteriores. En el primer nivel los datos completos subyacentes provienen de una familia exponencial regular, para el segundo nivel la especificación de datos completos refiere a una familia exponencial curva y en el último nivel se omite toda referencia a familias exponenciales (Dempster *et al.*, 1977). Para el caso particular de los Modelo Logísticos de la TRI, se considera el tercer nivel del algoritmo EM (Andrade *et al.*, 2000).

Siguiendo Andrade *et al.* (2000), se explica brevemente el nivel más general del algoritmo EM. Suponga que la habilidad latente puede asumir un número finito de valores representados por  $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q$ , cada uno con probabilidad  $\pi_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ . Se define por  $f_{jk} = f_j(\bar{\theta}_k)$  la frecuencia de examinados en cada valor del rasgo para el ítem  $j$ , siendo  $\mathbf{f}_j = (f_{j1}, f_{j2}, \dots, f_{jq})'$ , y por  $r_{jk} = r_j(\bar{\theta}_k)$  la frecuencia de respuestas correctas del ítem  $j$  para el valor  $\bar{\theta}_k$ , con  $\mathbf{r}_j = (r_{j1}, r_{j2}, \dots, r_{jq})'$ . Si se considera una muestra aleatoria de tamaño  $n$  extraída de la población, entonces la probabilidad conjunta de que los  $f_{jk}$  indivi-

duos tengan habilidades  $\bar{\theta}_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ , se corresponde con una distribución multinomial dada por:

$$P(\mathbf{f}_j|\boldsymbol{\pi}) = \frac{n!}{f_{j1!} \cdots f_{jq!}} \prod_{k=1}^q \pi_k^{f_{jk}} \quad j = 1, \dots, p.$$

Dados  $f_{jk}$  y  $\bar{\theta}_k$ , la probabilidad de que ocurran  $r_{jk}$  aciertos en el ítem  $j$  entre los  $f_{jk}$  intentos de individuos con habilidad  $\bar{\theta}_k$  está dada por:

$$P(r_{jk}|f_{jk}, \bar{\theta}_k) = \binom{f_{jk}}{r_{jk}} P_{jk}^{r_{jk}} Q_{jk}^{f_{jk}-r_{jk}},$$

con

$$P_{jk} = P_j(\bar{\theta}_k) = c_j + (1 - c_j) \frac{e^{a_j(\bar{\theta}_k - b_j)}}{1 + e^{a_j(\bar{\theta}_k - b_j)}} \quad \text{y} \quad Q_{jk} = 1 - P_{jk}.$$

La expresión que representa la probabilidad conjunta de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{r}$  dados  $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots, \bar{\theta}_q)$  y  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_q)$  es:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{f}, \mathbf{r}|\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\pi}) &= P(\mathbf{f}|\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\pi})P(\mathbf{r}|\mathbf{f}, \bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\pi}) \\ &= P(\mathbf{f}|\boldsymbol{\pi})P(\mathbf{r}|\mathbf{f}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^p P(\mathbf{f}_j, \boldsymbol{\pi}) \right\} \left\{ \prod_{j=1}^p \prod_{k=1}^q P(r_{jk}|f_{jk}, \bar{\theta}_k) \right\} \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^p \frac{n!}{f_{j1!} \cdots f_{jq!}} \prod_{k=1}^q \pi_k^{f_{jk}} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^p \prod_{k=1}^q \binom{f_{jk}}{r_{jk}} P_{jk}^{r_{jk}} Q_{jk}^{f_{jk}-r_{jk}} \right\} \end{aligned}$$

Luego, el logaritmo natural de la verosimilitud para los datos completos es:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\xi}) &= \ln P(\mathbf{f}, \mathbf{r}|\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\pi}) \\ &= \ln (P(\mathbf{f}|\boldsymbol{\pi})P(\mathbf{r}|\mathbf{f}, \bar{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= \ln P(\mathbf{f}|\boldsymbol{\pi}) + \ln P(\mathbf{r}|\mathbf{f}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \sum_{j=1}^p \ln P(\mathbf{f}_j|\boldsymbol{\pi}) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \left[ \ln \binom{f_{jk}}{r_{jk}} + r_{jk} \ln P_{jk} + (f_{jk} - r_{jk}) \ln Q_{jk} \right] \\ &= B + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q r_{jk} \ln P_{jk} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q (f_{jk} - r_{jk}) \ln Q_{jk} \end{aligned}$$

donde  $B = \sum_{j=1}^p \ln P(\mathbf{f}_j|\boldsymbol{\pi}) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \ln \binom{f_{jk}}{r_{jk}}$  es constante con respecto a  $\boldsymbol{\xi}$ .

Por último, a pesar de que  $(\mathbf{f}, \mathbf{r})$  no son observadas, tomando la esperanza posterior del logaritmo natural de la verosimilitud condicional a  $\mathbf{y}$  y a  $\boldsymbol{\xi}$  se obtiene:

$$E(\ln L(\boldsymbol{\xi})) = \bar{B} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q [\bar{r}_{jk} \ln P_{jk} + (\bar{f}_{jk} - \bar{r}_{jk}) \ln Q_{jk}]$$

donde,

$$\bar{r}_{jk} = E(r_{jk} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}), \quad \bar{f}_{jk} = E(f_{jk} | \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{y} \quad \bar{B} = E(B | \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}).$$

Maximizar esta ecuación representa el paso E del algoritmo. Como los ítems son independientes, las derivadas cruzadas segundas de ítems diferentes son nulas en el paso M y la maximización de la esperanza se hace para cada ítem de manera individual (Luzardo, 2013).

En resumen, los pasos del algoritmo EM consisten en:

- **Paso E:** Calcular  $g^*(\bar{\theta})$  utilizando los puntos de cuadratura,  $\bar{\theta}_k$ , con sus pesos correspondientes,  $A_k$  ( $k = 1, \dots, q$ ), y las estimaciones iniciales de los parámetros de los ítems,  $\hat{\boldsymbol{\xi}}_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ). A partir de  $g^*(\bar{\theta})$ , generar  $\bar{f}_{jk}$  y  $\bar{r}_{jk}$ .
- **Paso M:** Considerando las estimaciones de  $(\mathbf{f}, \mathbf{r})$ , obtenidas en el paso E, resolver las ecuaciones (2.17) a fin hallar las estimaciones de los parámetros de los ítems,  $\boldsymbol{\xi}_j$  ( $j = 1, \dots, p$ ), pudiendo utilizar cualquiera de los dos métodos ya indicados: Newton Raphson o Puntuación de Fisher.

Cuando se aplica el proceso EM con el objeto de estimar los parámetros de los Modelos Logísticos de la TRI, los pasos anteriores componen cada iteración del algoritmo EM. Al finalizar cada ciclo se estandarizan las estimaciones, puesto que, la TRI establece que los parámetros de los ítems y las habilidades de los individuos deben estar en la misma métrica (Debera y Nalbarte, 2006). Los pasos E y M, sumados a las estandarizaciones, se repiten hasta alcanzar alguna condición determinada previamente. Según Luzardo (2013), como criterio de parada se analiza si la verosimilitud no cambia respecto al ciclo anterior.

### 2.5.3. Estimación Bayesiana

La estimación Bayesiana surge para solucionar diferentes problemas que presenta la estimación vía MV. Por ejemplo, cuando existen puntuaciones extremas, es decir, cuando

un grupo de individuos responden correcta o incorrectamente todos los ítems que conforman un test, la estimación por MV presenta inconvenientes al estimar los parámetros de esos ítems (Debera y Nalbarte, 2006) o las habilidades de aquellos individuos. Máxima Verosimilitud tampoco funciona de manera adecuada cuando los parámetros de los ítems adoptan valores fuera del rango esperado, por ejemplo, cuando el parámetro de discriminación ( $a$ ) asume valores negativos o el parámetro de pseudo-azar ( $c$ ) valores fuera del rango  $[0,1)$  (Andrade *et al.*, 2000). Sumado a las respuestas brindadas a estos inconvenientes, las técnicas de Estimación Bayesiana resuelven el problema de identificabilidad del modelo (Bazán *et al.*, 2010).

De acuerdo a lo expuesto por Andrade *et al.* (2000), el Enfoque Bayesiano incluye varias propuestas para estimar los parámetros de los Modelos Logísticos de la TRI, la más difundida la desarrolla Mislevy (1986) basado en la propuesta de Book y Aitkin (1981). Esta técnica, se denomina Estimación Bayesiana Marginal (EBM) y, esencialmente, consiste en (Andrade *et al.*, 2000):

- 1°) establecer distribuciones a priori para los parámetros de los ítems y para la habilidad de los examinados;
- 2°) construir la función de distribución a posteriori de los parámetros y de la habilidad aplicando el Teorema de Bayes (Debera y Nalbarte, 2006);
- 3°) estimar los parámetros de interés en función de alguna característica de la distribución a posteriori (por ejemplo, la media o la moda).

En la EBM, al igual que en la propuesta de Book y Aitkin, la estimación de los parámetros se realiza por Máxima Verosimilitud Marginal en dos etapas: en la primera se estiman los parámetros y en la segunda las habilidades de los individuos (Debera y Nalbarte, 2006). En correspondencia con lo que expresan las autoras, el algoritmo que configura a la EBM es numéricamente robusto y fácil de implementar, además, tiene la ventaja de requerir únicamente las derivadas primeras de la función de verosimilitud.

## 2.6. Bondad de ajuste de los Modelos Logísticos

Conforme expone Lord y Novick (1968), los modelos TRI se basan en suposiciones fuertes, que no serán completamente cumplidas por cualquier conjunto de datos. Por tal motivo, es fundamental evaluar el ajuste de los modelos desde diferentes enfoques a fin de determinar qué tan bien el modelo elegido ajusta a un conjunto de datos (Hambleton y Swaminathan, 1985). En un principio se deben comprobar los supuestos que hacen a los Modelos Logísticos de la TRI: la Unidimensionalidad y la Independencia local. Se sugiere, además, analizar el cumplimiento de las ventajas derivadas del modelo, tales como la invarianza de los parámetros de los ítems y de las estimaciones de la habilidad (Hambleton y Swaminathan, 1985). Por último, el análisis de residuos y el cálculo de diferentes estadísticos brindan medidas de discrepancia entre los valores observados y los esperados bajo el modelo en estudio, por lo que es indispensable valerse de ellos en esta etapa.

### 2.6.1. Supuestos del modelo

#### 2.6.1.1. Unidimensionalidad

Existen muchas líneas metodológicas que desarrollan diferentes técnicas para probar el supuesto de unidimensionalidad en los Modelos Logísticos de la TRI. Algunos de los métodos más utilizados se presentan a seguir:

- I. **Análisis Factorial:** Dentro del Análisis Factorial, se distinguen el Análisis Factorial Exploratorio (AFE) y el Análisis Factorial Confirmatorio (AFC). Ambos procedimientos sirven para evaluar la estructura factorial subyacente a una matriz de correlaciones, pero mientras el AFE se utiliza para “investigar”, el AFC se utiliza para “confirmar” (Lloret Segura *et al.*, 2014). Los autores recomiendan utilizar el AFE cuando se conoce poco sobre la variable o constructo objeto de estudio, puesto que este análisis es útil para identificar tanto los factores latentes que subyacen a las variables manifiestas, como los patrones de relaciones entre variables latentes y manifiestas.

I.a) **Análisis Factorial Exploratorio:** Cuando se trabaja con datos binarios, Burga León (2006) expone que conviene realizar un AFE considerando la Matriz de Correlaciones Tetracóricas (MCT) para lograr una estimación mucho más precisa de la dimensionalidad de un conjunto de ítems. Previo a realizar este análisis se investiga la correlación entre los ítems, es fundamental que los ítems no estén incorrelados, pues si lo estuvieran no habría nada que explicar. Si el conjunto de datos es unidimensional, al aplicarle un AFE, se debe obtener como resultado un factor dominante. Diversos métodos, basados en diferentes enfoques, se han propuesto con el objetivo de determinar la existencia de un único factor principal, algunos de los cuales se exponen a seguir:

- Criterio de Kaiser (1960): debe existir un único autovalor mayor a uno.
- Criterio de Martínez Arias (1995): Según los autores Aune y Attorresi (2019),

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \geq 5$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son el primer y el segundo autovalor de la matriz de correlaciones, respectivamente.

- Diferencia entre autovalores: la diferencia entre el primer autovalor y el segundo debe ser grande y la diferencia entre el segundo autovalor y los demás autovalores debe ser pequeña (Lord, 1980).
- Diagrama de autovalores (Catell, 1966): Este diagrama es una representación gráfica de la magnitud de los autovalores, en el eje de ordenadas se representan los autovalores, y en el eje de abscisas, los factores. Según el criterio de contraste de caída de Catell, el punto de corte para el número de factores a extraer está determinado por el primer cambio de pendiente en la gráfica (Pérez y Medrano, 2010).
- Criterio de Hattie (1985): Este criterio establece que un instrumento de medida será unidimensional si el cociente entre la diferencia del primer y segundo autovalor, y la diferencia del segundo y tercer autovalor, es mayor a 3 (Burga León, 2006).
- Proporción de varianza explicada: varios autores han realizado diferentes



investigaciones y han determinado que, para satisfacer el supuesto de unidimensionalidad, el primer factor debe explicar al menos:

- ◇ el 40 % de la varianza (Carmines y Zeller, 1979);
- ◇ el 20 % de la varianza (Reckase, 1979);
- ◇ entre el 17 y 40 % de la varianza, usando matrices de correlaciones phi (Zwick, 1985);
- ◇ entre el 30 % a 40 % de la varianza, utilizando matrices de correlaciones tetracóricas (Zwick, 1985).

I.b) **Análisis Factorial Confirmatorio:** cuando ya se conoce previamente la variable objeto de estudio, el AFC permite probar la estructura que se presume que tiene el conjunto de datos (Lloret Segura *et al.*, 2014). En este caso, para probar el supuesto de unidimensionalidad, se impone una estructura unifactorial y, si se tienen indicadores convenientes de ajuste al modelo, se considera que se satisface el supuesto (Aune y Attorresi, 2019).

II. **Análisis Paralelo Modificado (Dragow y Lissak, 1983):** Este método se basa en el Análisis Paralelo propuesto por Horn (1965). La hipótesis nula es que los datos son unidimensionales y el estadístico que se utiliza es el segundo valor propio de la matriz de correlaciones tetracóricas entre los ítems dicotómicos de un conjunto de datos. Para aproximar la distribución de este estadístico bajo hipótesis nula se utiliza un procedimiento de Monte Carlo (Rizopoulos, 2018). De acuerdo al autor, el algoritmo consiste en repetir una cantidad  $B$  de veces los pasos que se detallan a continuación:

1. Las intercorrelaciones tetracóricas de los ítems de la prueba se analizan en factores y se calculan los autovalores de la solución no rotada.
2. Un modelo TRI genera un conjunto de datos unidimensionales “paralelos”. Este conjunto de datos es paralelo al observado en todos sus atributos: tiene el mismo número de examinados con habilidades idénticas y la misma cantidad de ítems con parámetros iguales. Dado que las respuestas son generadas por un modelo TRI unidimensional que satisface el principio de independencia local,

el conjunto de datos es, por definición, unidimensional.

3. Las correlaciones tetracóricas del conjunto de datos paralelo se analizan por factores y se calculan los valores propios de la solución no rotada.
4. La dimensionalidad del conjunto se evalúa comparando la magnitud de los segundos valores propios de los dos conjuntos de datos: si el valor real (calculado en la etapa 1.) es suficientemente cercano al obtenido del conjunto de datos paralelos (calculado en la etapa 3.), se concluye que el test es unidimensional.

### 2.6.1.2. Independencia Local

En la mayoría de las aplicaciones de los Modelos Logísticos de la TRI se asume el supuesto de independencia local si se satisface el supuesto de unidimensionalidad. Esto se fundamenta en que la respuesta a un ítem sólo depende de sus parámetros y de la habilidad del individuo y no está condicionada por otros factores como el orden de presentación de los ítems o las respuestas dadas a otros ítems (Ponsoda *et al.*, 1998). Sin embargo, los autores Chen y Thissen (1997) proponen una serie de estadísticos útiles para analizar la Dependencia Local entre pares de ítems, denominados en su conjunto índices LD. Para el cálculo de los mismos, se consideran los patrones de respuesta observados y los esperados bajo el modelo TRI propuesto, ubicándose las frecuencias observadas y esperadas en tablas marginales para cada par de ítems (Cuadro 2.2 y 2.3) (Chen y Thissen, 1997). Estos autores plantean que el modelo TRI propuesto es un buen ajuste a los datos si la covariación de las tablas observadas y esperadas es aproximadamente igual, mientras que, si esa covariación difiere más de lo previsto, el modelo TRI induce más o menos dependencia de la observada.

Ítem $i$	Ítem $j$	
	0	1
0	$O_{00}$	$O_{01}$
1	$O_{10}$	$O_{11}$

Ítem $i$	Ítem $j$	
	0	1
0	$E_{00}$	$E_{01}$
1	$E_{10}$	$E_{11}$

**Cuadro 2.2:** Frecuencias observadas de patrones de respuesta para el par de ítems  $i$  y  $j$ .

**Cuadro 2.3:** Frecuencias esperadas, bajo el ajuste del modelo TRI, de patrones de respuesta para el par de ítems  $i$  y  $j$ .

El conjunto de índices LD está formado por cuatro estadísticos, dos de ellos son los conocidos estadísticos  $G^2$  y  $\chi^2$  de Pearson, denotados por  $\chi_{LD}^2$  y  $G_{LD}^2$  para diferenciar de otras pruebas donde se utilizan. Ambos estadísticos se distribuyen  $\chi^2$  con un grado de libertad bajo hipótesis nula de que los ítem son localmente independientes (Chen y Thissen, 1997). Las ecuaciones correspondientes a cada uno son:

$$\chi_{LD}^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad (2.18)$$

y

$$G_{LD}^2 = -2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 O_{ij} \ln \left( \frac{E_{ij}}{O_{ij}} \right). \quad (2.19)$$

Los otros dos estadísticos son el coeficiente de diferencia estandarizado  $\phi$  y la diferencia *log-odds ratio* estandarizada. Se espera que ambos estadísticos se distribuyan  $N(0, 1)$  bajo la misma hipótesis nula. Además, como cada uno de ellos pueden asumir valores negativos o positivos, es posible determinar la dirección de la asociación: un valor positivo indica una mayor dependencia de las frecuencias observadas de lo que predice el modelo TRI y un valor negativo indica menos dependencia de las frecuencias observadas de lo que predice el modelo (Aune y Attorresi, 2019). Un resumen de las características y ecuaciones de los cuatro estadísticos se presentan en Chen y Thissen (1997).

En la actualidad, de acuerdo a lo expuesto por los autores Aune y Attorresi (2019), el índice  $\chi_{LD}^2$  está siendo muy utilizado para la verificación del cumplimiento del supuesto en cuestión y postulan que si

$$\chi_{LD}^2 > 10$$

es muy posible que exista dependencia local entre un determinado par de ítems.

### 2.6.2. Verificación de las ventajas de los Modelos Logísticos

Cuando se ajusta un modelo TRI a un conjunto de datos se deben verificar dos supuestos muy importantes: la invarianza en las estimaciones de la habilidad y de los parámetros de los ítems. Una manera de corroborar estos supuestos se explica a continuación.

- **Invarianza de las estimaciones de la habilidad latente**

Para comprobar si el modelo cumple con la invarianza de las estimaciones de la

habilidad, Hambleton y Swaminathan (1985) proponen estimar dos valores para la habilidad por cada examinado: uno a partir de la mitad de los ítems más fáciles (según el parámetro de dificultad de cada ítem) y otro considerando el subconjunto formado por la mitad de los ítems más difíciles. Se sugiere graficar los pares de estimaciones de habilidad obtenidas en las dos mitades de la prueba para cada examinado y analizar este gráfico. Como los valores de habilidad esperados no dependen de los ítems de la prueba, cuando el modelo TRI propuesto se ajusta a los datos de la prueba, entonces el gráfico bivariado de estimaciones de habilidad debe ser lineal. Sin embargo, es de esperar una dispersión de puntos sobre una línea de mejor ajuste debido a un error de medición (Hambleton y Swaminathan, 1985).

- **Invarianza de las estimaciones de los parámetros de los ítems**

La invarianza de las estimaciones de los parámetros de los ítems puede estudiarse de la misma manera que la anterior. En este caso, los grupos se arman considerando habilidades extremas y se comparan las estimaciones de los parámetros de los ítems en las dos muestras (Hambleton y Swaminathan, 1985). Si los datos de la prueba se ajustan al modelo propuesto, debe existir una relación lineal entre las estimaciones de los parámetros del ítem de las dos muestras de examinados, aún si las muestras difieren en habilidad (Lord y Novick, 1968). La comparación se realiza para cada uno de los parámetros de cada ítem en el modelo de interés.

### 2.6.3. Verificación del ajuste de los Modelos Logísticos

La Bondad del Ajuste de los Modelos Logísticos de la TRI debe ser comprobada desde diferentes perspectivas. Según Hambleton y Swaminathan (1985), ajustar más de un modelo y comparar los residuos, por ejemplo, proporciona información que es fundamental para determinar la adecuación de cada modelo. Existen muchas investigaciones en relación a diferentes estadísticos útiles para evaluar el ajuste de estos modelos (ver Hambleton y Swaminathan, 1985; Bartholomew *et al.*, 2008; Luzardo, 2013, entre otros). Algunas de las técnicas más utilizadas se detallan a seguir.

- **Bondad de Ajuste Global**

Esta prueba busca comparar las frecuencias observadas y esperadas en todos los

patrones de respuesta bajo el modelo propuesto. Debido a que se ajustan los modelos eligiendo los valores de los parámetros para que las distribuciones estén lo más cerca posible, la cercanía mínima sería una medida adecuada para determinar el buen ajuste del modelo (Bartholomew *et al.*, 2008). En esta línea, los autores proponen dos pruebas: Log-Verosimilitud-ratio y  $\chi^2$  de Pearson. Para cada una se considera un test con  $p$  ítems, por consiguiente, se pueden dar  $2^p$  patrones de respuesta distintos. Representando por  $r$  cada patrón de respuesta ( $r = 1, \dots, 2^p$ ), de manera que  $O_r$  y  $E_r$  identifican las frecuencias observadas y esperadas del patrón  $r$ , respectivamente, se tienen las siguientes definiciones de los estadísticos de prueba:

- **Prueba Log-Verosimilitud-ratio:** El estadístico de esta prueba es:

$$G^2 = 2 \sum_{r=1}^{2^p} O_r \ln \left( \frac{O_r}{E_r} \right),$$

- **Prueba  $\chi^2$  de Pearson:** El estadístico de esta prueba está dado por:

$$\chi^2 = 2 \sum_{r=1}^{2^p} \frac{(O_r - E_r)^2}{E_r}.$$

Si el modelo es conveniente, ambos estadísticos se distribuyen *Chi-cuadrado* con  $2^p - p(q + 1) - 1$  grados de libertad, donde  $p(q + 1)$  es el número de parámetros independientes, siendo  $q$  la cantidad de variables latentes. Conforme se expone en Bartholomew *et al.* (2008), cuando el tamaño de la muestra es mucho más grande que  $2^p$ , entonces las frecuencias observadas y esperadas serán razonablemente grandes y la aproximación en la que se basa la prueba será legítima. Para que cualquiera de las dos pruebas sea válida las frecuencias esperadas en los diferentes patrones de respuesta deben ser mayores o iguales a cinco. Si esto no es posible, se sugiere agrupar patrones de respuesta con frecuencias esperadas inferiores a 5, pero eso puede generar que no queden grados de libertad para realizar la prueba. Ante esta situación, la aproximación Bootstrap a la distribución de referencia es preferible y el Software R permite realizarla para la Prueba  $\chi^2$  de Pearson, únicamente, cuando se analiza el ajuste del ML1 y del MR.

- **Prueba de Ajuste para patrones de respuesta marginales**

En esta prueba no se observa todo el conjunto de patrones de respuesta, sino sola-

mente los márgenes bi o tri direccionales. Para el primer caso, se construyen tablas de contingencia  $2 \times 2$  considerando los ítems de dos en dos y se comparan las frecuencias observadas y esperadas utilizando el residuo  $\chi^2$  de Pearson, que brinda una medida de discrepancia entre las mismas (Bartholomew *et al.*, 2008). El estadístico está dado por:

$$\chi_{jk}^2 = \frac{(O_{jk} - E_{jk})^2}{E_{jk}}$$

donde  $O_{jk}$  y  $E_{jk}$  son la frecuencia observada y esperada, respectivamente, del ítem  $j$  y del ítem  $k$  para cada uno de los patrones de respuesta posibles:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 1)$ . Como regla general, si se considera que el residual en cada celda tiene una distribución  $\chi^2$  con un grado de libertad, entonces, un valor de residual mayor a 4 indica un mal ajuste para un nivel de significancia del 5% (Bartholomew *et al.*, 2008). A su vez, Rizopoulos (2018) propone como regla general un umbral para los residuales de 3.5 a fin de concluir que el modelo presenta un buen ajuste.

El mismo procedimiento se puede realizar considerando los márgenes tridireccionales, en este caso, las tablas de contingencia son de  $3 \times 3$  y los patrones de respuesta posibles son:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ .

■ **Estadístico  $Q_1$  (Yen, 1981)**

El estadístico  $Q_1$  permite evaluar el ajuste de los ítems al modelo TRI ajustado. Para calcularlo se deben ordenar los examinados según su estimación en el nivel de habilidad y luego dividirlos en diez grupos con aproximadamente el mismo número de examinados por grupo (Yen, 1981). Siguiendo a la autora, el estadístico para el ítem  $j$  es:

$$Q_{1j} = \sum_{k=1}^{10} \frac{n_k(O_{jk} - E_{jk})^2}{E_{jk}(1 - E_{jk})},$$

donde  $n_k$  es el número de examinados en el grupo  $k$ ,  $O_{jk}$  representa la proporción observada de examinados en el grupo  $k$  que responde de manera correcta el ítem  $j$  y  $E_{jk}$  es la probabilidad media predicha de respuesta correcta del ítem  $j$  en el grupo  $k$ . El estadístico  $Q_{1j}$  sigue una distribución  $\chi^2$  con grados de libertad igual a 10 menos la cantidad de parámetros estimados del modelo bajo investigación (Yen, 1981). A

pesar de que es un estadístico muy utilizado, Sueiro y Abad (2009) advierten que no conviene emplearlo en todos los casos, debido a que no funciona de manera correcta cuando el test está compuesto por poca cantidad de ítems (menos de 10 ítems). Para esta situación, el Software R brinda la posibilidad de utilizar un procedimiento Monte Carlo para aproximar la distribución del estadístico bajo la hipótesis nula.

■ **Estadístico  $L_0$  y  $L_z$**

En esta etapa no solo es importante analizar la adecuación del conjunto de ítems al modelo TRI bajo estudio, sino también, evaluar el ajuste de los patrones de respuesta presentados por los examinados. Por tanto, diversos trabajos se han abocado al estudio de los llamados “estadísticos de personas” con el propósito de identificar individuos que presenten patrones de respuesta incongruentes con el modelo especificado (Reise, 1990). Así, Levine y Rubin (1979) proponen el estadístico  $L_{0i}$  para el individuo  $i$  definido por

$$L_{0i} = \sum_{j=1}^p [y_{ij} \ln P_j(\theta_i) + (1 - y_{ij}) \ln Q_j(\theta_i)],$$

donde:

- $y_{ij}$  es la respuesta dada por el examinado  $i$  al ítem  $j$  (0 ó 1),
- $P_j(\theta_i)$  es la probabilidad de que el sujeto  $i$  responda correctamente el ítem  $j$ ,
- $Q_j(\theta_i) = 1 - P_j(\theta_i)$ , y
- $p$  es el número de ítems.

Para Reise (1990), el estadístico  $L_0$  es una medida simple y directa que mide qué tan bien se ajusta un patrón de respuesta al modelo propuesto. La autora concluye que un valor de  $L_0$  alto indica buen ajuste, mientras que valores de  $L_0$  relativamente bajos indican lo contrario. Según Núñez Núñez y López Pina (2006), el índice  $L_0$  permite indentificar un porcentaje alto de patrones de respuesta atípicos, pero presenta dos inconvenientes: no está estandarizado, lo cual implica que clasificar un patrón de respuesta como normal o atípico dependa de  $\theta$ , y la distribución de  $L_0$  es desconocida siendo ésta fundamental para poner a prueba la hipótesis nula de que el patrón de respuestas se ajusta al modelo propuesto. Ante estos inconvenientes,

Drasgow *et al.* (1985), suponiendo que  $L_0$  seguía una distribución Normal, proponen derivar analíticamente su esperanza matemática y desviación típica, dotando a este nuevo índice ( $L_Z$ ) de una prueba estadística que compara los valores observados con los teóricos, ya que sigue una distribución Normal Estándar si los datos se ajustan al modelo TRI (Núñez Núñez y López Pina, 2006). De esta manera, el estadístico  $L_{Zi}$  queda definido por (Luzardo, 2013):

$$L_{Zi} = \frac{L_{0i} - E(L_{0i})}{\sigma_{L_{0i}}}.$$

donde,

$$E(L_{0i}) = \sum_{j=1}^p [P_j(\theta_i) \ln P_j(\theta_i) + Q_j \ln Q_j(\theta_i)]$$

y

$$\sigma_{L_{0i}}^2 = \sum_{j=1}^p P_j(\theta_i) Q_j(\theta_i) \left[ \ln \left( \frac{P_j(\theta_i)}{Q_j(\theta_i)} \right) \right]^2.$$

Al ajustar un modelo TRI, usando alguna estimación obtenida para  $\theta$ , valores negativos del estadístico indican que los patrones de respuesta son poco probables, valores positivos manifiestan que el patrón de respuesta del examinado fue más consistente de lo que esperaba el modelo TRI ajustado, y 0 es el valor esperado (Reise, 1990).

- **Métodos de selección de modelos** Otros criterios a considerar en esta investigación y que son útiles para comparar modelos son el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC) (ver Sclove, 1987; Akaike, 1974).



## Capítulo 3

# Marco Metodológico

### 3.1. Introducción

En este capítulo se explicitan los materiales y métodos a considerar en la investigación. En relación a los materiales, se describe el instrumento de investigación consistente en una prueba estandarizada, compuesta por ítems que son indicadores de la Habilidad en Matemática de los estudiantes que conforman la muestra. A su vez, se detalla el procesamiento y la organización de la base de datos y el software estadístico. En cuanto a los métodos, se describe el análisis exploratorio y las técnicas y criterios para la estimación y validación de los Modelos Logísticos propuestos.

### 3.2. Materiales

#### 3.2.1. Muestra

La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam) ofrece diferentes carreras que incluyen en el primer año de su Plan de Estudio una asignatura relacionada con una Matemática introductoria, entre ellas se encuentran las licenciaturas en Ciencias Biológicas, en Química, en Geología, en Matemática y en Física; los profesorado en Ciencias Biológicas, en Química, en Computación, en Matemática y en Física; la ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente; y la Tecnicatura en Informática de Gestión.

La muestra la componen 332 estudiantes que en el año 2020 se matricularon en alguna de las Matemáticas introductorias que se dictan en la FCEyN de la UNLPam, entre ellas, Cálculo I, Matemática I, Introducción a la Matemática. Estos estudiantes son ingresantes a alguna de las carreras antes mencionadas o bien recursantes de la correspondiente asignatura de su Plan de Estudio relacionada con una Matemática preliminar.

### 3.2.2. Instrumento de Investigación

Una prueba estandarizada, denominada Prueba Diagnóstico en Matemática 2020 (PDM 2020), ha sido elaborada a fin de recolectar datos que brinden información sobre el constructo inobservable Habilidad en Matemática. Esta prueba está compuesta por 10 ítems con una sola respuesta correcta entre cuatro posibles. Las respuestas incorrectas fueron construidas en base a posibles errores que se pueden cometer en la resolución del ejercicio propuesto.

La PDM 2020 se ha confeccionado en conjunto con los docentes responsables de las cátedras relacionadas con alguna Matemática introductoria que se dicta en la FCEyN de la UNLPam y en base a los Materiales Curriculares para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria (MCCOED) específicos del área de Matemática de la provincia de La Pampa. Estos materiales establecen los contenidos mínimos, de las diferentes disciplinas, que se espera que los estudiantes hayan incorporado durante el transcurso por el nivel medio en establecimientos educativos de nuestra de provincia.

Se pretende que los ítems que conforman la PDM 2020 sean indicadores de la habilidad en Matemática que poseen los sujetos que la respondan. Por tanto, interesa evaluar la capacidad general **resolución de problemas**, que consiste en la búsqueda de la solución de situaciones que resulten desafiantes y exige, inevitablemente, la aplicación de conocimientos matemáticos previos (Secretaría de Evaluación Educativa [SEE-PA], 2016b, p.23). Esta capacidad adquiere un rol fundamental en la enseñanza de la Matemática, puesto que, mediante la resolución de este tipo de situaciones se busca producir nuevos conocimientos, a partir del debate generado como respuesta a los interrogantes propuestos

(Ministerio de Cultura y Educación, Gobierno de La Pampa [MCE-MCCOED Matemática], 2013). En este trabajo, las capacidades que involucra la resolución de problemas serán los indicadores de la variable latente habilidad en Matemática, las cuales, según SEE-PA (2016b, p.23) son: “capacidad de reconocer, relacionar y utilizar información; determinar la pertinencia, suficiencia y consistencia de los datos; reconocer, utilizar y relacionar conceptos; utilizar, transferir, modificar y generar procedimientos; juzgar la razonabilidad y coherencia de las soluciones y justificar y argumentar sus acciones.”

En esta investigación se siguen los lineamientos de las PA (SEE-PA, 2016; SEE-PA, 2016b) y de los MCCOED del área de Matemática de la provincia de La Pampa (MCE-MCCOES Matemática, 2013). En el Cuadro (3.1) se presentan las capacidades cognitivas específicas que se han tenido en cuenta para la construcción de la PDM en conjunto con el desempeño esperado en función de cada una de ellas.

Capacidades Específicas	Desempeño
Comunicación Matemática	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático.</li> <li>• Expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.</li> <li>• Interpretar cuadros, gráficos, datos, informaciones, e inferir a partir de ellos.</li> <li>• Estimar y analizar la lógica y validez de informaciones y resultados.</li> <li>• Diferenciar datos de incógnitas.</li> <li>• Comprender enunciados y consignas.</li> <li>• Pasar de un registro a otro, esto incluye identificar la expresión algebraica: <ul style="list-style-type: none"> <li>◦ de una función dada por su representación gráfica;</li> <li>◦ que corresponde a una situación enunciada coloquialmente.</li> </ul> </li> </ul>
Conocimiento de conceptos matemáticos	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer y utilizar propiedades de diferentes operaciones matemáticas.</li> <li>• Conocer y manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.).</li> <li>• Identificar conceptos, relaciones y propiedades matemáticas.</li> <li>• Aplicar los conocimientos matemáticos a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.)</li> </ul>

**Sigue en la página siguiente...**

Capacidades Específicas	Desempeño
Resolución de situaciones problemáticas	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.</li> <li>• Seleccionar las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible.</li> <li>• Resolver problemas en contexto intra/extra-matemáticos.</li> <li>• Aplicar algoritmos de cálculo o elementos de la lógica.</li> <li>• Seguir determinados procesos de pensamiento (ej: inducción y deducción).</li> <li>• Determinar la validez de los razonamientos.</li> </ul>

**Cuadro 3.1:** Capacidades específicas de la Competencia Resolución de Problemas y desempeño esperado, de acuerdo con las Pruebas Aprender y a los Materiales Curriculares para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria del área de Matemática.

En tanto, en el Cuadro (3.2) se detallan los ejes de Matemática y los contenidos evaluados correspondientes a cada uno de esos ejes. Por último, un análisis de cada uno de los diez ítems que conforman la PDM 2020 en relación al eje temático, contenido, capacidad específica y desempeño esperado se describe en el Cuadro (3.3).

Ejes	Contenido
Números y Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Números reales y sus propiedades.</li> <li>• Porcentaje, razones.</li> </ul>
Funciones y Álgebra	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funciones y ecuaciones lineales.</li> <li>• Funciones cuadráticas y ecuaciones asociadas a ellas.</li> <li>• Funciones polinómicas.</li> </ul>
Geometría y Medida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Áreas y perímetros.</li> <li>• Teorema de Pitágoras.</li> <li>• Razones trigonométricas.</li> </ul>
Probabilidad y Estadística	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Variables.</li> <li>• Formas de representación y comunicación.</li> </ul>

**Cuadro 3.2:** Ejes y contenidos específicos considerados para la elaboración de la PDM 2020. Fuente: MCE-MCCOES Matemática (2013).

Ítem	Eje	Contenido	Capacidad Específica	Desempeño
1	Números y Álgebra	Números reales y sus propiedades	Conocimiento de conceptos matemáticos.	Resolver operaciones utilizando propiedades de diferentes operaciones matemáticas.
2	Funciones y Álgebra	Ecuaciones Lineales.	Conocimiento de conceptos matemáticos.	Resolver operaciones utilizando propiedades de diferentes operaciones matemáticas y analizar la validez del resultado obtenido.
3	Números y Álgebra	Porcentaje	Resolución de situaciones problemáticas	Resolver problemas en contexto extra matemático, aplicar algoritmos del cálculo según la información disponible y determinar la validez del resultado.
4	Geometría y Medida	Áreas y perímetros- Teorema de Pitágoras.	Resolución de situaciones problemáticas	Resolver situaciones problemáticas en contexto intra matemático y seleccionar las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible.
5	Números y Álgebra	Números reales y sus propiedades: números racionales	Resolución de situaciones problemáticas	Resolver problemas en contexto extra matemático, aplicar algoritmos del cálculo adecuados según la información disponible y analizar la validez del resultado.
6	Funciones y Álgebra	Funciones lineales	Comunicación en Matemática	Pasar de un tipo de registro a otro, lo que implica identificar la expresión algebraica que corresponde a una situación enunciada coloquialmente.
7	Geometría y Medida	Razones trigonométricas	Resolución de situaciones problemáticas	Resolver situaciones problemáticas en contextos extra matemáticos. Reconocer la información brindada y a partir de ella deducir el procedimiento correcto.
8	Funciones y álgebra	Funciones polinómicas	Comunicación en Matemática	Interpretar gráficos e inferir a partir del mismo.
9	Probabilidad y Estadística	Formas de representación y comunicación	Comunicación en Matemática	Interpretar un gráfico de barras e inferir a partir del mismo.
10	Funciones y Álgebra	Funciones cuadráticas	Comunicación en matemática	Pasar de una forma de representación a otra y de un tipo registro a otro.

Cuadro 3.3: Análisis de los ítems que conforman la Prueba Diagnóstico en Matemática 2020.

### 3.2.3. Procedimiento de recolección de datos

La PDM 2020 se implementa en un Formulario de Google con preguntas de tipo selección múltiple, de modo que cada estudiante solo puede elegir una única opción entre las cuatro posibles para cada ítem. Esta herramienta informática permite que las preguntas sean de tipo obligatorias, es decir, que cada individuo debe responder si o sí a todos los ítems. Considerar esta posibilidad en la investigación resulta fundamental por dos motivos: no tener datos faltantes en la base de datos; y considerar el azar al momento de seleccionar respuestas sin saber cuál es la correcta, pues de esta manera, tiene sentido aplicar el Modelo Logístico de 3 parámetros al conjunto de datos.

La PDM 2020 fue implementada, bajo las mismas condiciones, el primer día de clases de cada una de las asignaturas que conforman este grupo denominado Matemática introductoria (Cálculo I, Matemática I, Introducción a la Matemática, entre otras). Previo a que completaran la prueba se realizó una charla informativa a los estudiantes inscriptos para el cursado, donde al solicitarles que respondan la PDM 2020, se les explicó que los datos reunidos a partir de las respuestas a la prueba se emplearían con fines investigativos y se les sugirió resolver los diferentes ítems haciendo uso de conocimientos adquiridos en la formación académica previa. Seguidamente, los estudiantes utilizaron sus dispositivos móviles para ingresar al curso correspondiente de cada materia en la plataforma Moodle y mediante un link accedieron a la PDM 2020, la cual resolvieron sin límite de tiempo.

### 3.2.4. Herramientas Computacionales

El análisis estadístico se realiza mediante el Software R (R Development Core Team, 2010). El entorno R es la implementación de software libre del lenguaje estadístico S y fue desarrollado en el año 1993 por Robert Gentleman y Ross Ihaka del Departamento de Estadística de la Universidad de Auckland. Actualmente, R es distribuido en forma gratuita bajo licencia GNU GPL (GNU General Public License) que garantiza a los usuarios la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software. A su vez, lo declara como libre y protege de intentos de apropiación que restrinjan esas libertades a nuevos consumidores cada vez que el lenguaje es distribuido, modificado o ampliado.

Una de las características más importante de R es que permite definir funciones nuevas a partir de aquellas que ya tiene incorporadas el programa, y que pueden agruparse en lo que se llama librerías o paquetes. En este estudio se utiliza el paquete *ltm* que ha sido desarrollado para el análisis multivariante de datos dicotómicos y politómicos utilizando Modelos de Variables Latentes, bajo el enfoque de la Teoría de Respuesta al Ítem (Rizopoulos, 2006). La librería *ltm* permite estimar los parámetros de los Modelos Logísticos de la TRI mediante el Método de Máxima Verosimilitud Marginal. Entre otras funciones del paquete *ltm* que se han utilizado con la finalidad de obtener estadísticas descriptivas, estimar parámetros, realizar pruebas de Bondad de Ajuste y graficar Curvas Características y Funciones de Información de los ítems, se encuentran *descript()*, *rasch()*, *tpm()*, *factor.scores()*, *plot()*, *anova()*, *GoF.rasch()*, *margins()*, etc.

### 3.3. Método

#### 3.3.1. Tipo y diseño de Investigación

Esta investigación es de tipo cuantitativa, ya que se pretende evaluar un rasgo presente en los sujetos que conforman la muestra, pero que no puede ser medido de manera directa sino a través de las respuestas que cada sujeto brinda en una prueba. Por tal motivo, es fundamental realizar una recopilación de datos y valerse del uso de herramientas matemáticas, estadísticas e informáticas para medirlos. Así mismo, es una investigación descriptiva, puesto que, una vez estimado el rasgo en cada examinado se describe y agrupan los sujetos según diferentes factores a fin de comprender la distribución de ese rasgo en la muestra. Por último, debido a que en este trabajo no se manipulan las variables, el diseño de investigación que prevalece es de tipo observacional.

#### 3.3.2. Organización de la Base de Datos

Dado que la PDM 2020 fue implementada mediante un Formulario de Google, el procesamiento de los datos fue automático. Se codificaron las respuestas brindadas a los diferentes ítems con 1 si la respuesta fue correcta y 0 en caso contrario.

La PDM 2020 se aplicó a 349 estudiantes ingresantes o recursantes, de los cuáles 17 fueron eliminados de la base de datos por presentar patrones de respuesta extremos, es decir, las respuestas fueron todas correctas o todas incorrectas. Esta decisión fue tomada sobre la base de que es una restricción exigida por el Método de Estimación que se utiliza en este trabajo, la Estimación por Máxima Verosimilitud Marginal. En consecuencia, el tamaño de la muestra con la que realiza el análisis estadístico es de 332 estudiantes.

### 3.3.3. Variables

Las variables consideradas se diferencian por ser latentes o manifiestas y se detallan a continuación junto a la clasificación correspondiente.

**Variable latente:** Habilidad en Matemática de un estudiante inscripto para cursar, en el año 2020, alguna Matemática introductoria que se dicta en la FCEyN de la UNLPam.

- Clasificación: Cuantitativa continua.
- Nivel de medición: De intervalos.

**Variables manifiestas:** Resultado obtenido en el  $j$ -ésimo ítem ( $j = 1, \dots, 10$ ) de la PDM 2020 por un estudiante inscripto para cursar, en el año 2020, alguna Matemática introductoria que se dicta en la FCEyN de la UNLPam.

- Clasificación: Cualitativa nominal - dicotómica.
- Nivel de medición: Nominal.

Este estudio se fundamenta en la necesidad de cuantificar la Habilidad en Matemática que presentan los estudiantes que conforman la comunidad universitaria de la FCEyN de la UNLPam. En este sentido, resulta importante conocer su entorno, puesto que pueden existir diferentes factores que influyan en sus desempeños académicos. Por tal motivo, y a fin de realizar conclusiones concretas, mediante la PDM 2020 se recopilan otras características personales de los estudiantes en la muestra. Estas variables, su clasificación y su nivel de medición se presentan en el Cuadro (3.4).



Variable	Clasificación	Nivel de medición
Edad	Cuantitativa continua	De razón
Sexo (Femenino/Masculino)	Cualitativa nominal - dicotómica	Nominal
Carrera	Cualitativa nominal	Nominal
Condición de estudiante (Ingresante/ Recursante)	Cualitativa nominal	Nominal
Lugar de origen (Localidad y provincia)	Cualitativa nominal	Nominal

**Cuadro 3.4:** Características personales de interés de cada estudiante en la muestra.

### 3.3.4. Análisis Exploratorio de Datos

Luego del procesamiento y organización de los datos, se comienza el análisis estadístico de los mismos con un estudio exploratorio. Para evaluar la consistencia interna del conjunto de ítems de la PDM 2020, se calcula el coeficiente Alpha de Cronbach que estima la proporción de varianza de un instrumento de medida debida al factor común entre los ítems. Se presentan las proporciones de respuesta correcta e incorrecta para cada ítem, lo que permite determinar, en una primera instancia, la dificultad de cada uno. Así mismo, para indagar sobre la potencia discriminatoria de los indicadores, se evalúan las correlaciones punto biserial entre cada ítem y el puntaje total. Finalmente, se determina la asociación lineal entre pares de ítems mediante la Prueba de Independencia  $\chi^2$  de Pearson.

### 3.3.5. Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem

Como un primer paso del análisis inferencial se analiza si el conjunto de ítems que conforman la PDM 2020 mide una única variable latente. Debido a que en la práctica esta condición es muy difícil de cumplir, se espera que prevalezca una dimensión dominante. Se aplica el Análisis Factorial Exploratorio (AFE) considerando la matriz de correlaciones tetracóricas puesto que los ítems son variables manifiestas dicotómicas. Previo a ello, se estudian las relaciones existentes entre pares de ítems y se calculan dos medidas de adecuación de los indicadores de la PDM 2020 al Análisis Factorial: el índice *Kaiser-Meyer-Olkin*

(*KMO*) que indica qué proporción de la varianza en las variables es considerada varianza común, es decir, debido a factores subyacentes; y la Prueba de Esfericidad de Bartlett (PEB) que contrasta la hipótesis nula de que la matriz de correlaciones con la que se trabaja es una matriz identidad. Luego de realizar el AFE, se evalúa la existencia de un único factor dominante desde diferentes perspectivas, considerando los criterios expuestos en 2.6.1.1.

### 3.3.5.1. Estimación y Bondad de Ajuste de los Modelos Logísticos

La estimación de los parámetros de cada Modelo Logístico (ML) y de la Habilidad en Matemática de cada estudiante se realiza de manera simultánea mediante el Método de Máxima Verosimilitud Marginal. Una vez estimados el Modelo de Rasch (MR) y los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros, (ML1, ML2 y ML3, respectivamente) se presentan las Curvas Características y las Funciones de Información de cada ítem conjuntamente con la Función de Información del Test, estimadas cada una bajo los diferentes Modelos Logísticos.

Los ML requieren, fundamentalmente, del cumplimiento de dos supuestos: la Unidimensionalidad y la Independencia local. Luego de ajustar cada ML a los datos, se verifica el cumplimiento de la unidimensionalidad mediante el Análisis Paralelo Modificado utilizando un procedimiento Monte Carlo con el objetivo de aproximar la distribución del estadístico bajo la hipótesis nula de que los datos son unidimensionales. Con respecto al supuesto de Independencia Local, a pesar de que varios autores acuerdan con que la verificación del mismo deriva del cumplimiento de la unidimensionalidad, en esta investigación se calcula el estadístico  $\chi_{LD}^2$  de Chen y Thissen (1997). El mismo es útil para verificar la existencia de dependencia local entre pares de ítems y, puesto que su cálculo requiere de los patrones de respuesta esperados bajo el modelo TRI considerado, se debe analizar luego del ajuste de cada modelo al conjunto de datos.

En relación a la Bondad de Ajuste de los modelos bajo estudio, se realiza la Prueba de Ajuste global  $\chi^2$  de Pearson para el MR y ML1, y para todos los ML se estiman los residuos marginales a dos y a tres vías. A fin de comparar los modelos y seleccionar el

que mejor ajusta al conjunto de datos se computan dos índices conocidos, el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC). Una vez elegido el más adecuado, se analiza si los patrones de respuesta son o no congruentes con el modelo mediante el estadístico propuesto por Drasgon *et al.* (1985). Con el objetivo de evaluar si cada ítem ajusta al modelo seleccionado, se calcula el estadístico de Yen (1981) y, debido a que la cantidad de ítems está en el límite de lo mínimo que se necesita para aplicar este estadístico, se aproxima la distribución del mismo mediante un procedimiento Monte Carlo bajo la hipótesis nula de que los ítems se ajustan al modelo.

Por último, se estima la Habilidad en Matemática para cada estudiante bajo el modelo que se considera más adecuado para ajustar los datos de la PDM 2020, identificándose además, a los estudiantes que presentan los menores valores de Habilidad en Matemática.

## Capítulo 4

# Resultados y Discusión

### 4.1. Introducción

Este capítulo comienza con un análisis exploratorio del conjunto de datos, que incluye entre otros elementos, el estudio de la consistencia interna de los ítems y el cálculo de las proporciones de respuestas correctas e incorrectas a cada ítem. Se continúa con un análisis inferencial, donde se determina, en primer lugar, si el conjunto de ítems que conforman la Prueba Diagnóstico en Matemática 2020 (PDM 2020) mide una única variable latente mediante un Análisis Factorial Exploratorio (AFE). Luego, se estiman los parámetros de los Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) por el Método de Máxima Verosimilitud Marginal y se analiza la Bondad de Ajuste de los mismos. Finalmente, se selecciona el modelo que mejor ajusta a los datos, se estima la Habilidad en Matemática (HM) de cada estudiante bajo ese modelo y se identifican aquellos que necesitan un mayor acompañamiento para el aprendizaje de la disciplina.

### 4.2. Análisis Exploratorio

La base de datos está conformada por las respuestas de 332 estudiantes que conforman la muestra, a los 10 ítems considerados en la PDM 2020, además de ciertas características personales relevadas y detalladas en la Sección 3.3.3. La respuesta a cada uno de los 10 ítems, ha sido codificada con 1 si fue respondida correctamente, y 0 en caso contrario. Por lo tanto, el patrón de respuesta de cada estudiante es un vector conformado por ceros y unos.

De los 332 estudiantes, 282 son ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam) en el año 2020, lo que equivale al 85 % del total muestreado, mientras que, el 15 % restante corresponde a estudiantes que recursan alguna de las asignaturas relacionadas con Matemática. Por otra parte, del total de estudiantes, el 58,43 % (194) son mujeres y el 41,57 % (138) varones. Respecto a la edad, si bien los estudiantes tienen, en promedio, entre 22 y 23 años con un desvío de 6.8118, la mitad de ellos tiene entre 17 y 20 años con un desvío absoluto (MAD) de 2 años, lo que indica una clara asimetría positiva de esta variable. En el Cuadro 4.1 se detalla la cantidad de estudiantes que pertenecen a las diferentes carreras y el porcentaje que representa del total de la muestra. Puede advertirse que las carreras más elegidas han sido la Tecnicatura en Informática de Gestión y los profesorados en Matemática y en Computación, por el contrario, los profesorados en Física y Química y la Licenciatura en Física son las carreras que recibieron menor cantidad de ingresantes.

Carrera	N° de inscriptos	Porcentaje del total
Ing. en Recursos Naturales y Medio Ambiente (IRNyMA)	35	10,54
Lic. en Ciencias Biológicas (LCB)	19	5,72
Lic. en Física (LF)	6	1,81
Lic. en Geología (LG)	23	6,93
Lic. en Matemática (LM)	14	4,22
Lic. en Química (LQ)	21	6,33
Prof. en Ciencias Biológicas (PCB)	16	4,82
Prof. en Computación (PC)	41	12,35
Prof. en Física (PF)	5	1,51
Prof. en Matemática (PM)	59	17,77
Prof. en Química (PQ)	4	1,20
Tec. en Informática de Gestión (TIG)	89	26,81

**Cuadro 4.1:** Distribución empírica del N° de estudiantes que responden la PDM 2020, según la carrera de la FCEyN de la UNLPam en la que están inscriptos.

Comenzando con el análisis de la fiabilidad, en el sentido de consistencia interna, se observa del cálculo del coeficiente Alpha de Cronbach (0.4131), que los ítems presentan

una confiabilidad media, a saber, el 41.31 % de la varianza total es debida a lo que los ítems tienen en común. Los valores del coeficiente, incluyendo y excluyendo cada ítem, se exponen en el Cuadro (4.2). Si se desprecia el ítem 2 la consistencia interna del conjunto de indicadores desciende drásticamente, en cambio, si no se considera al ítem 8 se puede obtener el mayor valor del coeficiente Alpha de Cronbach con una diferencia significativa, llegando el mismo a 0,4421. En consecuencia, los ítems 2 y 8 son los más destacados, los cuáles resultan ser el más y el menos importante, respectivamente. Ambos enmarcados en el eje Funciones y Álgebra, el primero relacionado con la resolución de ecuaciones y el segundo con la interpretación gráfica de las funciones polinómicas.

Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
0.3997	0.3242	0.3923	0.3731	0.3477	0.3636	0.4178	0.4421	0.3862	0.4152

**Cuadro 4.2:** Coeficientes Alpha de Cronbach excluyendo cada ítem de la PDM 2020.

El Cuadro 4.3 resume las proporciones de respuestas correctas e incorrectas correspondientes a cada ítem. Se advierte que el ítem 9 es el más fácil, está enmarcado dentro del eje Estadística y Probabilidad, y fue respondido correctamente por el 91 % de los estudiantes, aproximadamente. Por el contrario, el más difícil es el ítem 7, que involucra a las Razones Trigonométricas (RT), y menos del 23 % de los encuestados logró responderlo de manera satisfactoria. Además, estos ítems se diferencian por el proceso que se debe realizar para llegar a la respuesta correcta, el ítem 9 propone interpretar un gráfico y decidir cuál afirmación es correcta, mientras que, el ítem 7 requiere identificar la ubicación de los datos, plantear una ecuación aplicando RT y, finalmente, despejar la variable solicitada.

La dificultad media la presenta el ítem 10, prácticamente la mitad de los estudiantes lo ha logrado resolver. Este ítem corresponde al eje Funciones y Álgebra y consiste en identificar la expresión algebraica de una función cuadrática dada por su representación gráfica.

Los ítems 1, 6 y 4 también han sido respondidos correctamente por un número alto de estudiantes, 77 %, 68 % y 67 % respectivamente. Esto era esperable, dado que los contenidos que se trabajan en estos ítems refieren a Cálculos Combinados (ítem 1), Funciones

Lineales (ítem 6) y Áreas y Perímetros (ítem 4), los cuales están presentes en la mayoría de las planificaciones de Matemática del nivel medio de la provincia de La Pampa.

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
1	0,7711	0,6355	0,6476	0,6687	0,5452	0,6807	0,2229	0,6476	0,9066	0,5331
0	0,2289	0,3645	0,3524	0,3313	0,4548	0,3193	0,7771	0,3524	0,0934	0,4669

**Cuadro 4.3:** Proporciones de respuestas correctas e incorrectas a los 10 ítems de la PDM 2020.

El Cuadro 4.4 expone los ítems correspondientes a cada Eje Temático, junto con la cantidad de respuestas correctas y el porcentaje correspondiente. Es claro que el eje Geometría y Medida ha sido el más complicado, menos del 45 % de los estudiantes lo ha resuelto satisfactoriamente. En tanto, los ejes Números y Álgebra y Funciones y Álgebra, son los que más ítems involucran y la cantidad de examinados que los ha respondido correctamente es semejante y superior al 60 %. Considerando el eje Probabilidad y Estadística, es claro que no ha sido representado por diferentes ítems, sino únicamente, por uno. Esto puede explicarse porque, en la mayoría de las ocasiones, los saberes contenidos en este eje se dictan en la última etapa del año, y frecuentemente, el tiempo para ello no es suficiente. Cabe destacar que, prácticamente, todos los estudiantes respondieron de manera satisfactoria el ítem relacionado específicamente con Estadística.

Ejes	Ítems	Resp. correctas	Porcentaje (%)
Números y Álgebra	1, 3 y 5	646	64,86
Funciones y Álgebra	2, 6, 8 y 10	829	62,42
Geometría y Medida	4 y 7	296	44,58
Probabilidad y Estadística	9	301	90,66

**Cuadro 4.4:** N° de Respuestas correctas y Porcentaje por Eje Temático en la PDM 2020.

El Cuadro 4.5 brinda información respecto de las capacidades específicas evaluadas. Las capacidades Conocimiento de conceptos matemáticos y Comunicación Matemática manifiestan un porcentaje de respuestas correctas alto, alrededor del 70 %. A su vez, la

capacidad Resolución de situaciones problemáticas, que generalmente presenta mayores inconvenientes a los estudiantes, ha superado apenas el 50 % de respuestas correctas.

Capacidad específica	Ítems	Resp. correctas	Porcentaje (%)
Comunicación Matemática	6, 8 , 9 y 10	919	69,20
Conocimiento de conceptos matemáticos	1 y 2	467	70,33
Resolución de situaciones problemáticas	3, 4, 5 y 7	692	52,11

**Cuadro 4.5:** Respuestas correctas por Capacidad específica en la PDM 2020.

Continuando con el análisis exploratorio de los datos, el Cuadro 4.6 muestra los coeficientes de correlación punto biserial de cada ítem con el puntaje total. Puede observarse que estos coeficientes son bastante diferentes entre sí, varían entre 0.2832 y 0.5406 cuando se incluye el ítem. Cuanto más alta sea la correlación punto biserial, mayor será la discriminación del ítem, es decir, el ítem tendrá una importante capacidad para separar a las personas que pertenecen a los grupos de desempeño alto de las del grupo de desempeño bajo. En este aspecto, los ítems de la PDM 2020 que más discriminan son el 2, el 5 y el 6, vale decir que una proporción alta de estudiantes que respondieron correctamente esos ítems también lograron una puntuación global alta en la PDM 2020. Mientras que, los ítems que menos discrimina son el 7 y el 8, ambos con coeficientes menores a 0,30. Ante estos resultados, pareciera que no es recomendable considerar todos los ítems con igual parámetro de discriminación, por lo tanto, el Modelo de Rasch y el Modelo Logístico de 1 Parámetro no serían adecuados para ajustar los datos en esta investigación.

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
Incluído	0.3513	0.5406	0.4017	0.4401	0.5017	0.4585	0.2992	0.2832	0.3376	0.3641
Excluído	0.1263	0.3104	0.1487	0.1966	0.2533	0.2206	0.0724	0.0201	0.1847	0.0945

**Cuadro 4.6:** Correlación Punto Biserial de cada ítem con el Puntaje Total, en la PDM 2020 .

Por último, de la Prueba de Independencia Chi-Cuadrado de Pearson entre pares de ítems, cuyos p-valores se detallan en el Cuadro 4.7, se determina que en 16 de 45 pares de ítems existe algún tipo de relación, a un nivel de significancia del 10 %. De los 16 pares en cuestión, en 12 están presentes los ítems 1, 2 y 5, lo que destaca su importancia. Por



el contrario, los pares que incluyen a los indicadores 3, 7, 8 y 10 generalmente presentan problemas, ya que no rechazan la hipótesis nula de independencia como se esperaba.

	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
Ítem1	0.001	0.008	0.079	0.069	1.000	0.444	0.149	0.281	0.068
Ítem2		0.357	0.023	0.000	0.001	0.076	0.162	0.638	0.170
Ítem3			0.248	0.147	0.307	0.695	0.760	0.001	0.977
Ítem4				0.002	0.273	0.160	0.504	0.927	0.973
Ítem5					0.008	0.403	0.767	0.096	0.825
Ítem6						0.548	0.833	0.063	0.001
Ítem7							0.076	1.000	0.285
Ítem8								0.309	0.508
Ítem9									0.252

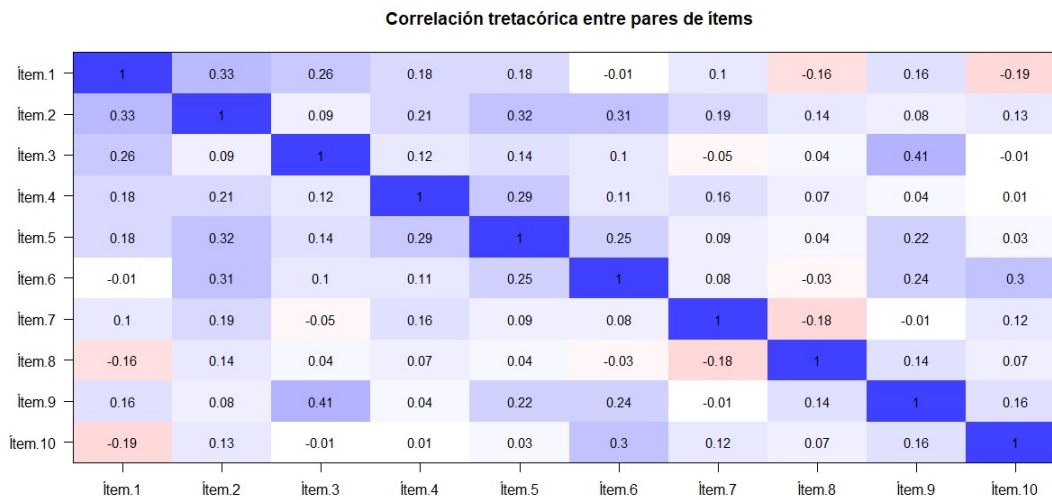
**Cuadro 4.7:** p-valores de la Prueba de Independencia Chi-Cuadrado de Pearson entre los pares de ítems que conforman la PDM 2020.

### 4.3. Ajuste de los Modelos Logísticos a la Prueba Diagnóstico en Matemática

#### 4.3.1. Análisis de la Unidimensionalidad

Con el objeto de evaluar la unidimensionalidad del conjunto de ítems, se verifica si es pertinente, desde el punto de vista estadístico, llevar a cabo el Análisis Factorial (AF) con los datos recolectados al aplicar la PDM a los estudiantes que conforman la muestra. La Prueba de Independencia Chi-Cuadrado afirma que existe asociación en al menos el 30 % de los pares de ítems. Sumado a esto, la Matriz de Correlaciones Tetracóricas (MCT) (ver, Figura 4.1) no es singular, puesto que su determinante es aproximadamente 0,2778, lo cual es conveniente para realizar los análisis siguientes, aunque un valor cercano a 0 sería más adecuado, puesto que, indicaría que existen ítems con intercorrelaciones muy elevadas. Se advierte que las correlaciones más altas las presentan: el ítem 1 con el 2 y 3; el ítem 2 con el 4, 5, 6 y 7; el ítem 4 con el 5; el ítem 9 con el 3 y 6; y el ítem 6 con el 10, mientras que, el ítem 8 sólo parece estar relacionado con el 7. Esto afirma la conclusión obtenida

al analizar el coeficiente de confiabilidad, el 8 resulta ser un ítem superficial y, por el contrario, el 2 es fundamental para medir la habilidad en Matemática de los estudiantes en la muestra. En tanto, de la Prueba de Esfericidad de Bartlett se afirma que la MCT no corresponde a una matriz identidad, pues, se obtiene una estimación en el estadístico  $\chi^2$  igual a 418,60 con 45 grados de libertad y un p-valor asociado menor a 0.0001, lo que conduce a rechazar la hipótesis nula de que los ítems no están correlacionados.



**Figura 4.1:** Matriz de Correlaciones Tetracóricas entre pares de ítems en la PDM 2020.

La prueba Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) permite decidir si un AF es idóneo para medir la unidimensionalidad del conjunto de ítems. Según Montoya Suárez (2007), los valores entre 0.5 y 1 indican que el análisis es apropiado. Otro procedimiento, también sugerido por este autor, es analizar la diagonal de la matriz de correlación anti-imagen, la cual brinda el valor de las medidas de adecuación para realizar un AF que presenta cada ítem, concretamente, indica la proporción de varianza en los ítems que podría ser causada por factores subyacentes y se conoce como *Measure of Sampling Adequacy (MSA)*. Los resultados de la prueba KMO se presentan en el Cuadro 4.8 junto con el valor de MSA para cada ítem. La medida general de adecuación muestral KMO es de 0.56 y el único ítem que presentan un valor de MSA inferior a 0,5 es el 8, por lo que, se determina que es posible detectar la estructura del conjunto de datos mediante un AF.

KMO	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
0.56	0.50	0.54	0.62	0.66	0.72	0.59	0.54	0.30	0.54	0.55

**Cuadro 4.8:** Resultado de la prueba Kaiser-Meyer-Olkin y valores de las Medidas de adecuación para cada ítem de la PDM 2020.

En base a los resultados alcanzados en el estudio de adecuación de la matriz de correlaciones al AF, se concluye que la MCT puede ser factorizada. Se aplica, entonces, un AFE al conjunto de datos considerando el Método Máxima Verosimilitud y sin realizar rotación alguna, ya que, la interpretación de las cargas factoriales no es el objetivo de esta investigación. En el Cuadro 4.9 se detallan los autovalores de los diez posibles factores junto a la proporción de varianza explicada por cada uno y a otros cálculos de interés.

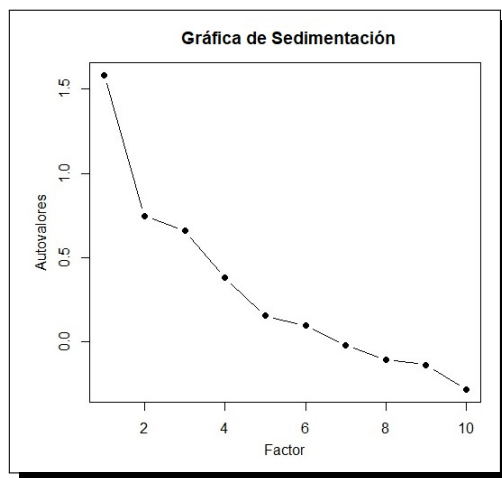
Factor	Autovalor	Diferencia	Prop. explicada	Prop. acumulada
1	1.5803	0.8340	0.48	0.48
2	0.7463	0.0880	0.21	0.69
3	0.6583	0.2786	0.18	0.88
4	0.3794	0.2244	0.10	0.97
5	0.1550	0.0580	0.02	1
6	0.0970	0.1175	0.00	1
7	-0.0205	0.0866	0.00	1
8	-0.1071	0.0279	0.00	1
9	-0.1350	0.1453	0.00	1
10	-0.2803	-	0.00	1

**Cuadro 4.9:** Resultados del Análisis Factorial Exploratorio aplicado a los datos de la PDM 2020 considerando la Matriz de Correlaciones Tetracóricas.

La unidimensionalidad es un supuesto muy difícil de cumplir por parte de cualquier conjunto de ítems, por tal motivo, analizar esta característica desde diferentes perspectivas resulta fundamental. En este sentido, luego de aplicar el AFE, se evalúa la existencia de un factor dominante según los criterios propuestos en 2.6.1.1.

Se observa en la primera columna del Cuadro 4.9 que el primer factor es el único que supera en magnitud a la unidad, satisfaciendo así el criterio de Kaiser (1960). La segunda columna contiene las diferencias entre el autovalor de cada factor y el siguiente, y según Hattie (1985) el cociente entre estas diferencias debe ser superior a 3, a efectos de asegurar unidimensionalidad. Así, se observa que la diferencia entre el primer y segundo autovalor es igual a 0,8340, mientras que la diferencia entre el segundo y el tercero es 0,088, arrojando un cociente mayor a 9. Análogamente, el cociente entre el primer y segundo autovalor es 2.1175, cuantía que no supera el mínimo de 5 recomendado por Martínez Arias (1995) para garantizar la existencia de un único factor principal. También, con respecto a la proporción de varianza explicada, el primer factor explica el 48 % del total, lo cual resulta suficiente para sustentar la unidimensionalidad del conjunto de ítems según lo expuesto por Carmines y Zeller (1979). Por último, según el diagrama de autovalores propuesto por Catell (1966), representado en la Figura 4.2, existen dos cambios de pendiente, razón por la cual, se aconseja retener 4 factores para explicar la mayor proporción de varianza posible, a saber, 4 factores explican el 97 % de la varianza total.

En base a lo expuesto, considerando que se satisfacen la mayoría de los criterios evaluados, se concluye que los ítems que conforman la PDM 2020 verifican el supuesto de unidimensionalidad.



**Figura 4.2:** Gráfico de líneas de los valores propios de los factores obtenidos al aplicar un Análisis Factorial Exploratorio a los datos de la PDM 2020.

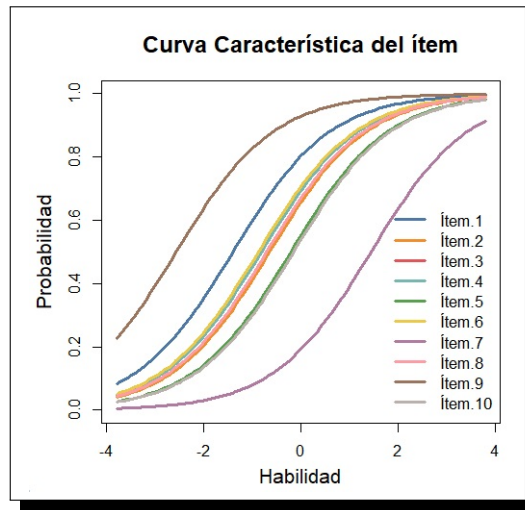
### 4.3.2. Ajuste del Modelo de Rasch

En el Modelo de Rasch (MR) se considera que el parámetro de discriminación es igual a 1 y el parámetro de pseudo azar es 0. Los resultados estimados para este modelo se presentan en el Cuadro 4.10 donde los ítems son ordenados de menor a mayor según el grado de dificultad que presentan. Este ajuste valida los resultados obtenidos en el análisis exploratorio de los datos: los ítems 9 y 1 son los más fáciles con valores en el parámetro de dificultad de -2.57 y -1.40, respectivamente; y el 7 es el más difícil, la dificultad de este indicador es estimada en 1.44, mientras que, los demás ítems presentan valores de dificultad que varían entre -0.88 y -0.15. Se advierte que el parámetro en cuestión es exactamente igual en los indicadores 3 y 8 y que no es significativo para los ítems 5 y 10. En relación a la probabilidad de que el estudiante promedio (nivel de habilidad igual a 0) responda correctamente cada ítem, la última columna de la tabla permite observar que ésta es bastante alta, superior a 0.53 en todos los casos, excepto al tratarse del ítem 7.

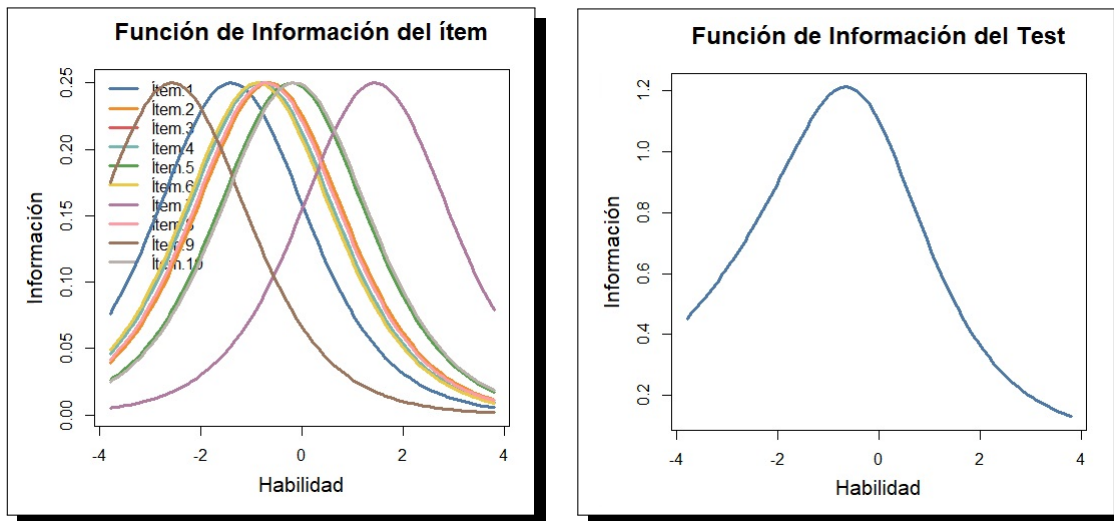
	Dificultad	Error Estándar	$z$	$P >  z $	$P(X=1 Z=0)$
Ítem.9	-2.5684197	0.2040	-12.5880	0.000	0.9288013
Ítem.1	-1.4013553	0.1499	-9.3516	0.000	0.8023989
Ítem.6	-0.8790809	0.1380	-6.3688	0.000	0.7066317
Ítem.4	-0.8157787	0.1370	-5.9544	0.000	0.6933395
Ítem.3	-0.7074475	0.1354	-5.2233	0.000	0.6698369
Ítem.8	-0.7074475	0.1354	-5.2233	0.000	0.6698369
Ítem.2	-0.6467641	0.1347	-4.8027	0.000	0.6562809
Ítem.5	-0.2106738	0.1312	-1.6059	0.108	0.5524745
Ítem.10	-0.1540963	0.1310	-1.1764	0.239	0.5384480
Ítem.7	1.4405944	0.1509	9.5478	0.000	0.1914533

**Cuadro 4.10:** Estimaciones del parámetro de dificultad para cada ítem al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020.

La Figura 4.3 muestra las Curvas Características para cada Ítem (CCI) con parámetros estimados bajo el MR. Estas curvas permiten consolidar las conclusiones obtenidas previamente en función de la dificultad de cada indicador, observándose que las CCI de los ítems 9 y 1 están ubicadas en los extremos derecho e izquierdo, respectivamente.



**Figura 4.3:** Curvas Características de los Ítem estimadas al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020.



(a) Función de Información para cada Ítem.

(b) Función de Información del Test.

**Figura 4.4:** Funciones de Información estimadas al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020.

En tanto, la Figura 4.4(a) presenta las Funciones de Información (FI) para cada ítem. Puede apreciarse que todas las curvas presentan la misma forma y altura, esto permite inferir que todos los ítems aportan, aproximadamente, igual cantidad de información, pero, no todos brindan la misma información en los diferentes niveles de la variable latente. En este sentido, se advierte que la FI del ítem 7 está ubicada más hacia a la derecha, por lo que

el 7 brinda mayor información para niveles altos de Habilidad en Matemática, mientras que, los ítems 1 y 9 aportan mayor cantidad de información para niveles bajos de habilidad. A su vez, se observa que la mayoría de los ítems proporcionan mayor información cuando el nivel de habilidad es menor a cero. Esto se confirma mediante los resultados presentados en el Cuadro 4.11, donde se evidencia, además, que los indicadores 5 y 10 aportan cantidades de información similares para los intervalos de habilidades que van del -4 al 0 y del 0 al 4. Lo expuesto se resume en la Función de Información del Test (Figura 4.4(b)), donde es claro que la mayor información se concentra en el intervalo  $(-4, 1)$  en la escala de habilidad.

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
$(-4, 0)$	0.7332	0.6225	0.6340	0.6536	0.5304	0.6644	0.1871	0.6340	0.7359	0.5175
$(0, 4)$	0.1931	0.3342	0.3212	0.2986	0.4329	0.2858	0.7367	0.3212	0.0698	0.4461

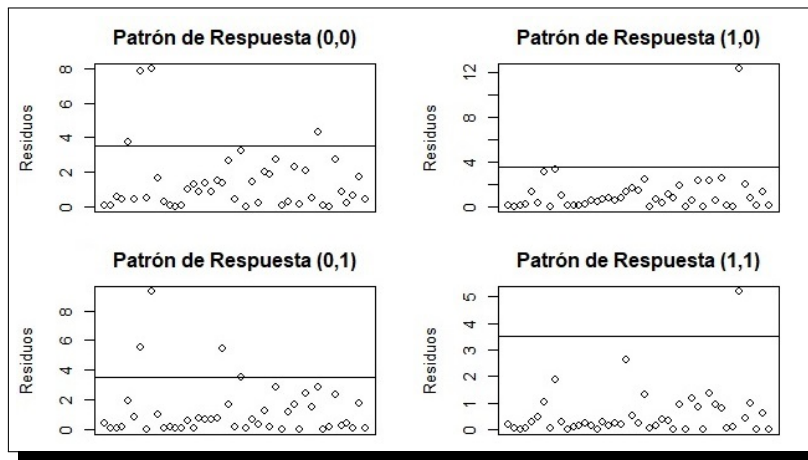
**Cuadro 4.11:** Información por intervalos proporcionada por cada ítem al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020.

Para analizar el ajuste realizado por el MR, se comienza verificando el cumplimiento del supuesto de unidimensionalidad mediante el Análisis Paralelo Modificado utilizando un procedimiento Monte Carlo. Esta prueba postula como hipótesis alternativa que el segundo valor propio de los datos observados es sustancialmente mayor que el segundo valor propio de los datos según el MR. Los resultados obtenidos se presentan en el Cuadro 4.12, los cuáles permiten concluir, con un 95 % de confiabilidad, que el MR propuesto asume el supuesto de unidimensionalidad. El paso siguiente consiste en verificar el supuesto de independencia local, mediante el uso del estadístico  $\chi_{LD}^2$ , encontrándose que éste supera el valor 10 en los pares de ítems (3, 7); (1, 8); (6, 8); (7,8); (1, 10) y (3, 10), por lo que, es muy posible que exista dependencia local entre determinados pares de ítems.

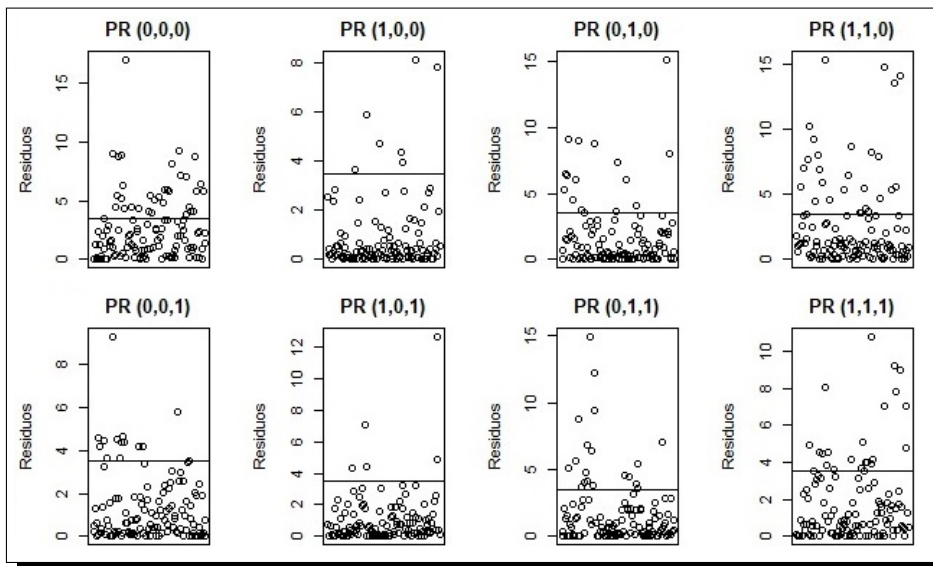
Segundo autovalor observado	0.8261
Promedio de segundos autovalores en Montecarlo	0.6814
<b>p-valor</b>	<b>0.0891</b>

**Cuadro 4.12:** Análisis Paralelo Modificado aplicado al Modelo de Rasch.

Verificados los supuestos, se procede a testear la hipótesis nula de que los datos han sido generados mediante el modelo propuesto, con valores de parámetros estimados por Máxima Verosimilitud, y para ello se utiliza una prueba de Bondad de Ajuste  $\chi^2$  de Pearson, considerando la técnica de muestreo Bootstrap. Los resultados conducen al rechazo de la hipótesis nula (Valor observado del estadístico =1939.86 y p-valor=0.005), por lo que el ajuste del Modelo de Rasch a los datos no es el adecuado.



(a) Residuos Marginales a 2 vías.



(b) Residuos Marginales a 3 vías.

Figura 4.5: Residuos Marginales estimados al ajustar el Modelo de Rasch a los datos de la PDM 2020.



Por último, del análisis de los residuos marginales a dos vías (Figura 4.5(a)) se advierte la existencia de unos pocos valores muy grandes, principalmente para los patrones de respuesta (0,0) y (0,1). Para ambos patrones de respuesta, los pares de ítems que presentan mayores residuales son el (1,10) y el (1,8), mientras que, para los patrones de respuesta (1,0) y (1,1) solo presenta problemas el par conformado por los ítems 7 y 8. En tanto, en la Figura 4.11(b) se percibe claramente que una cantidad importante de residuos marginales considerados a tres vías son superiores a 3.5, para todos los patrones de respuesta. Es claro que, al ajustar el MR al conjunto de datos de la PDM 2020 se obtienen magnitudes en los residuos muy grandes. Sumado esto a los resultados en las pruebas de Bondad de Ajuste anteriores se infiere que el MR no es adecuado.

### 4.3.3. Ajuste del Modelo Logístico de 1 parámetro

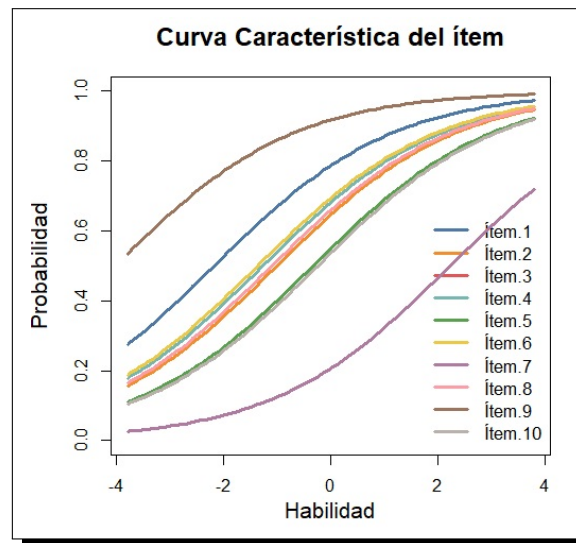
El Modelo Logístico de 1 parámetro (ML1) admite un valor de discriminación idéntico para los todos los ítems, un valor diferente en el parámetro de dificultad para cada ítem y asume que el parámetro de pseudo azar es 0 en todos los casos. Se ajusta el ML1 a los datos de la PDM 2020 y se muestran las estimaciones de los parámetros en el Cuadro 4.14 ordenados los ítems en forma creciente en función del nivel de dificultad. El ML1 ajustado, estima la discriminación por el valor 0.6007, que resulta significativo ( $p\text{-valor} < 0.0001$ ), y considerablemente diferente de 1 (valor del parámetro asumido en el MR). Sumado a esto, los coeficientes AIC y BIC para el ML1 son menores a los calculados para el MR. Esto se observa en el Cuadro 4.13 que muestra los resultados de realizar el Test de Razón de Verosimilitud para comparar ambos modelos. La prueba confirma que el ML1 es más adecuado que el MR ( $p\text{-valor} < 0.001$ ) para ajustar los datos de la PDM 2020.

	AIC	BIC	log.Lik	LRT	g.1	p-valor
MR	3972.30	4010.36	-1976.15			
ML1	3940.29	3982.15	-1959.15	34.01	1	<0.001

**Cuadro 4.13:** Test de Razón de Verosimilitud para contrastar el Modelo Logístico de 1 parámetro y el Modelo de Rasch.

	Dificultad	Error Estándar	z	$P >  z $	$P(X=1 Z=0)$
Ítem.9	-4.0223900	0.4980	-8.0766	0.000	0.9180541
Ítem.1	-2.1753588	0.3061	-7.1065	0.000	0.7869621
Ítem.6	-1.3610429	0.2449	-5.5573	0.000	0.6937183
Ítem.4	-1.2627147	0.2389	-5.2866	0.000	0.6810272
Ítem.3	-1.0946118	0.2293	-4.7738	0.000	0.6587029
Ítem.8	-1.0945939	0.2293	-4.7738	0.000	0.6587005
Ítem.2	-1.0005357	0.2244	-4.4584	0.000	0.6458871
Ítem.5	-0.3255854	0.2010	-1.6199	0.105	0.5487385
Ítem.10	-0.2380985	0.1996	-1.1928	0.233	0.5356948
Ítem.7	2.2367590	0.3112	7.1879	0.000	0.2069200

**Cuadro 4.14:** Estimaciones del parámetro de dificultad para cada ítem al ajustar el Modelo de Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020.

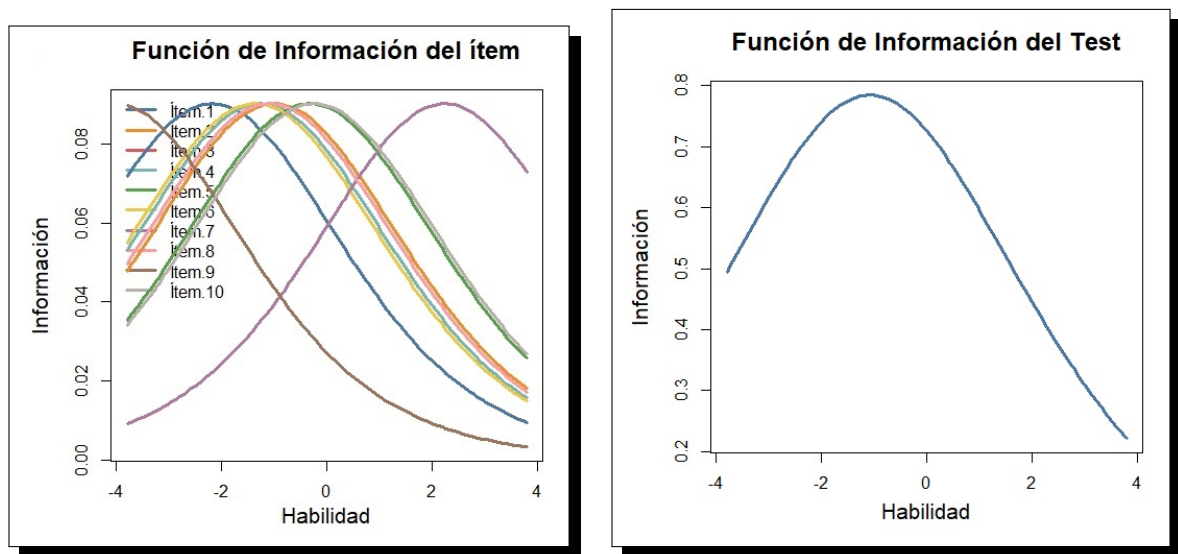


**Figura 4.6:** Curvas Características de los Ítems estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020.

Al igual que en el MR, puede observarse que los ítems más fáciles son el 9 y el 1, mientras que el más difícil sigue siendo el 7. Además, los ítems 3 y 8 son idénticos en dificultad y este parámetro no es significativo para los indicadores 5 y 10. En la Figura 4.6 se presentan las Curvas Características de los Ítems, en donde se puede notar de manera clara la dificultad del ítem 7, puesto que, requiere que un estudiante supere el valor 4

en Habilidad en Matemática para responderlo de manera correcta con una probabilidad superior a 0.6, mientras que, los demás ítems precisan una habilidad superior a 0.5 para ser respondidos satisfactoriamente con la misma probabilidad.

En relación a la cantidad de información que brinda cada ítem, el Cuadro 4.15 detalla la cuantía para los intervalos de HM  $(-4, 0)$  y  $(0, 4)$ . Para los valores entre  $-4$  y  $0$ , todos los ítems aportan prácticamente la misma cantidad de información (alrededor de 0.30), excepto el 7 que sólo brinda 0.1104 de información. En cambio, para las habilidades que van desde el  $0$  al  $4$ , el ítem 7 es el que más aporta y el que menos lo hace es el 8, con 0.0444. Esto se observa, además, en la Figura 4.7(a) que representa la Función de Información para cada ítem, en donde la curva del ítem 7 está más hacia la derecha y la del 8 hacia la izquierda. La Figura 4.7(b) muestra que la Función de Información del Test concentra la mayor cantidad de valores entre  $-4$  y  $1$  aproximadamente, a saber, de la información total que brinda la PDM 2020, el 46,33 % corresponde a niveles de habilidad inferiores (entre  $-4$  y  $0$ ) y alrededor del 30 % para niveles altos (entre  $0$  y  $4$ ).



(a) Función de Información de cada Ítem.

(b) Función de Información del Test.

**Figura 4.7:** Funciones de Información estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020.

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
(-4, 0)	0.3223	0.3029	0.3064	0.3118	0.2701	0.3146	0.1104	0.3064	0.2491	0.2650
(0, 4)	0.1136	0.1843	0.1781	0.1672	0.2295	0.1609	0.3217	0.1781	0.0444	0.2352

**Cuadro 4.15:** Información por intervalos proporcionada por cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020.

La verificación del supuesto de unidimensionalidad por parte del ML1 se verifica mediante un Análisis Paralelo Modificado. Los resultados de esta prueba se presentan en el Cuadro 4.16, la cual brinda un p-valor asociado de 0.0792, por lo que, no se rechaza la hipótesis nula de unidimensionalidad al nivel usual del 5%. En relación a la evaluación de la independencia local, tal como se muestra en el Cuadro 4.17, sólo el par formado por los ítems 1 y 10 supera al umbral de 10 en la estimación de los índices del estadístico  $\chi_{LD}^2$ , en virtud de lo cual, podría existir dependencia local entre ellos.

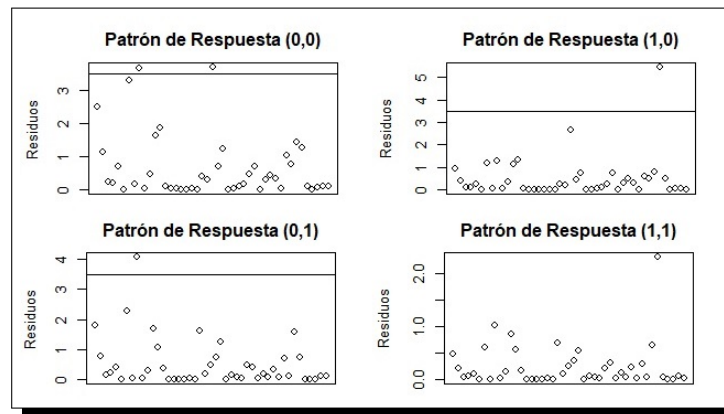
Segundo autovalor observado	0.8261
Promedio de segundos autovalores en Montecarlo	0.6761
p-valor	<b>0.0792</b>

**Cuadro 4.16:** Análisis Paralelo Modificado aplicado al Modelo Logístico de 1 parámetro.

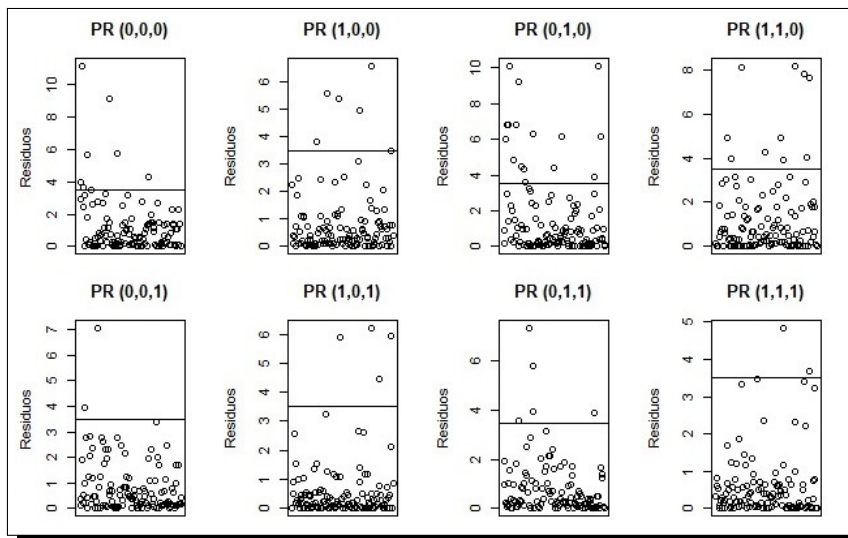
	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
Ítem 1	5.6817	2.5070	0.5016	0.5539	1.4498	0.0030	7.3337	0.2407	10.0094
Ítem 2		0.07594	1.1818	5.2842	4.8292	0.6522	0.0392	0.0322	0.0168
Ítem 3			0.0003	0.0470	0.0195	2.8941	0.7698	7.0563	2.2331
Ítem 4				3.7561	0.0026	0.2156	0.2506	0.2815	1.3979
Ítem 5					2.1468	0.0450	0.8767	0.9933	1.1414
Ítem 6						0.1276	2.5616	1.3957	4.4269
Ítem 7							9.7765	0.6074	0.0005
Ítem 8								0.1265	0.3279
Ítem 9									0.2279

**Cuadro 4.17:** Valores estimados del estadístico  $\chi_{LD}^2$  para cada par de ítems al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020.

La prueba de Bondad de Ajuste Global sugiere que el ML1 no es adecuado para modelar los datos de la PDM 2020, dado que, brinda un valor del estadístico observado de 1579,31 y un p-valor de 0.015. Ante estos resultados, con una probabilidad de error de 0.05, se rechaza la hipótesis nula de que los datos han sido generados mediante el ML1 con valores de los parámetros correspondientes con los estimadores de Máximo Verosimilitud.



(a) Residuos Marginales a 2 vías.



(b) Residuos Marginales a 3 vías.

**Figura 4.8:** Residuos Marginales estimados al ajustar el Modelo Logístico de 1 parámetro a los datos de la PDM 2020.

Por último, en la Figura 4.8(a) se observa una mejora en los residuos marginales a dos vías en relación a los obtenidos por el ajuste del MR: solo cuatro pares de ítems

presentan valores apenas superiores a 3,5. Sin embargo, al considerarlos a tres vías, en los ocho tripletes de posibles patrones de respuesta se advierten residuos muy grandes (Figura 4.8(b)). A partir de estos resultados y de los obtenidos en las pruebas de Bondad de Ajuste, se determina que no es bueno el ajuste del ML1 a los datos de la PDM 2020.

#### 4.3.4. Ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros

Continuando con el ajuste de los Modelos Logísticos de la Teoría de Respuesta al Ítem al conjunto de datos ofrecido en la PDM 2020, se propone un Modelo Logístico de 2 parámetros (ML2) que asume nulo el índice de pseudo azar para todos los ítems y permite que los valores de los parámetros de discriminación y dificultad difieran de un indicador a otro. Las estimaciones de los parámetros involucrados en el ML2 se presentan en el Cuadro 4.19 junto a su desvío estándar y a la probabilidad de que el alumno promedio responda correctamente el ítem, entre otras cosas. A un nivel de significancia del 10 %, el parámetro de discriminación resulta significativo para todos los ítems, excepto para el 8 y para el 10. Por tanto, es adecuado considerar que las estimaciones en el parámetro de discriminación de cada ítem son diferentes, tal como se había concluido mediante el análisis de la correlación punto biserial realizado previamente. Comparando los coeficientes AIC y BIC de ML2 y ML1, que se presentan en el Cuadro 4.18, se advierte que adoptan valores más bajos para el ML2, de manera que, adicionar parámetros al modelo parece ser lo conveniente. Es indudable, entonces, que el ML2 ajusta mejor a los datos de esta investigación que el ML1, lo que se comprueba mediante la Prueba de Razón de Verosimilitud, cuyos resultados se presentan en el Cuadro 4.18 y sugieren el rechazo de la hipótesis nula de que el ML1 es más adecuado que el ML2 ( $p$ -valor=0.003).

	AIC	BIC	log.Lik	LRT	g.l	p-valor
ML1	3940.29	3982.15	-1959.15			
ML2	3933.54	4009.65	-1946.77	24.75	9	0.003

**Cuadro 4.18:** Test de Razón de Verosimilitud para contrastar el Modelo Logístico de 2 parámetros y el Modelo Logístico de 1 parámetro.

	Parámetro	Coefficiente	Error Estándar	$z$	$P >  z $	$P(X=1 Z=0)$
Ítem 1	Discriminación	0.6759701	0.2356	2.8694	0.004	0.7907790
	Dificultad	-1.9669916	0.6125	-3.2113	0.001	
Ítem 2	Discriminación	1.2855461	0.3554	3.6175	0.000	0.6746518
	Dificultad	-0.5673081	0.1507	-3.7653	0.000	
Ítem 3	Discriminación	0.4933781	0.1954	2.5252	0.012	0.6552859
	Dificultad	-1.3019555	0.5252	-2.4792	0.013	
Ítem 4	Discriminación	0.6953714	0.2131	3.2632	0.001	0.6848461
	Dificultad	-1.1161417	0.3378	-3.3045	0.001	
Ítem 5	Discriminación	1.0518587	0.2796	3.7626	0.000	0.5548236
	Dificultad	-0.2093243	0.1346	-1.5548	0.120	
Ítem 6	Discriminación	0.8199699	0.2422	3.3859	0.001	0.7035700
	Dificultad	-1.0541314	0.2920	-3.6102	0.000	
Ítem 7	Discriminación	0.3851384	0.2117	1.8193	0.069	0.2160184
	Dificultad	3.3469067	1.7637	1.8977	0.058	
Ítem 8	Discriminación	0.1092664	0.1703	0.6417	0.521	0.6479905
	Dificultad	-5.5846805	8.7171	-0.6407	0.522	
Ítem 9	Discriminación	0.7581796	0.3164	2.3964	0.017	0.9239310
	Dificultad	-3.2934100	1.1713	-2.8118	0.005	
Ítem 10	Discriminación	0.2762409	0.1767	1.5633	0.118	0.5337327
	Dificultad	-0.4891962	0.5058	-0.9672	0.333	

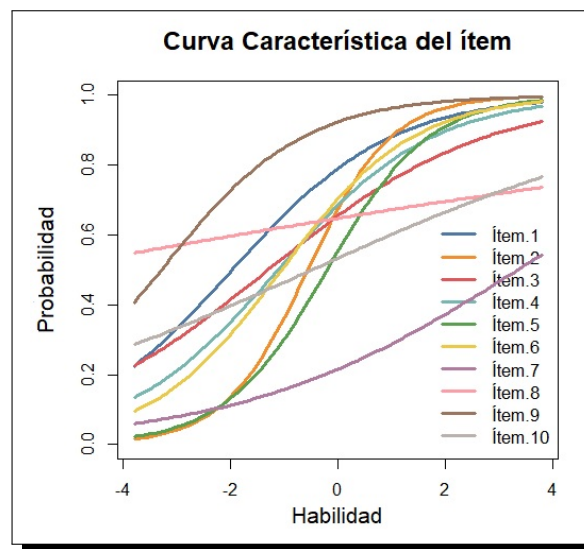
**Cuadro 4.19:** Estimaciones de los parámetros de dificultad y discriminación para cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 2 Parámetros a los datos de la PDM 2020.

El ML2 acentúa aún más las diferencias entre la dificultad de los ítems, indicando que el 8 y 9 manifiestan un grado de dificultad que hace considerarlos como muy fáciles y, por el contrario, el 7 se comporta como un indicador bastante difícil. Los ítems 1, 3 y 4 presentan un valor de dificultad mínimo, mientras que el 2, 5 y 10 están más cercanos a una dificultad promedio ( $b = 0$ ). Lo cual es interesante debido a que en cada uno de ellos se evalúa una capacidad específica diferente: el conocimiento de conceptos matemáticos, la resolución de situaciones problemáticas y la comunicación en matemática, respectivamente. Concretamente, el ítem 5 consiste en resolver una situación problemática que involucra fracciones y, tanto el ítem 2 como el 10 corresponden al eje Funciones y Álgebra, el primero requiere resolver una ecuación lineal y el segundo pasar una función cuadrática

de una forma de representación a otra.

Al analizar la capacidad discriminatoria de cada uno de los indicadores, se infiere que el 2 y el 5 son los ítems más destacados de la PDM 2020 para distinguir a estudiantes pertenecientes al grupo de mayor Habilidad en Matemática de los de menor habilidad, cada uno con un valor estimado en el índice de discriminación de 1.2855 y 1.0519, respectivamente.

Considerando los valores estimados de los parámetros de discriminación y dificultad de cada ítem que se presentan en el Cuadro 4.19, se puede observar, en la última columna, que prácticamente todos los estudiantes con valor de Habilidad en Matemática promedio, es decir igual a 0, responden bien el ítem 9. Además, para estos estudiantes, las chances de resolver satisfactoriamente los ítems 1 y 6 son muy altas, mientras que, la probabilidad de responder de manera correcta el ítem 7 es la más baja, específicamente de 0.2160.



**Figura 4.9:** Curvas Características de los Ítems estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

La Figura 4.9 presenta las Curvas Características (CCI) de cada uno de los ítems de la PDM 2020, observándose claramente que las CCI de los ítems 8 y 9 están ubicadas más a la izquierda por ser más fáciles y la del 7 más hacia a la derecha. Además, se evidencia

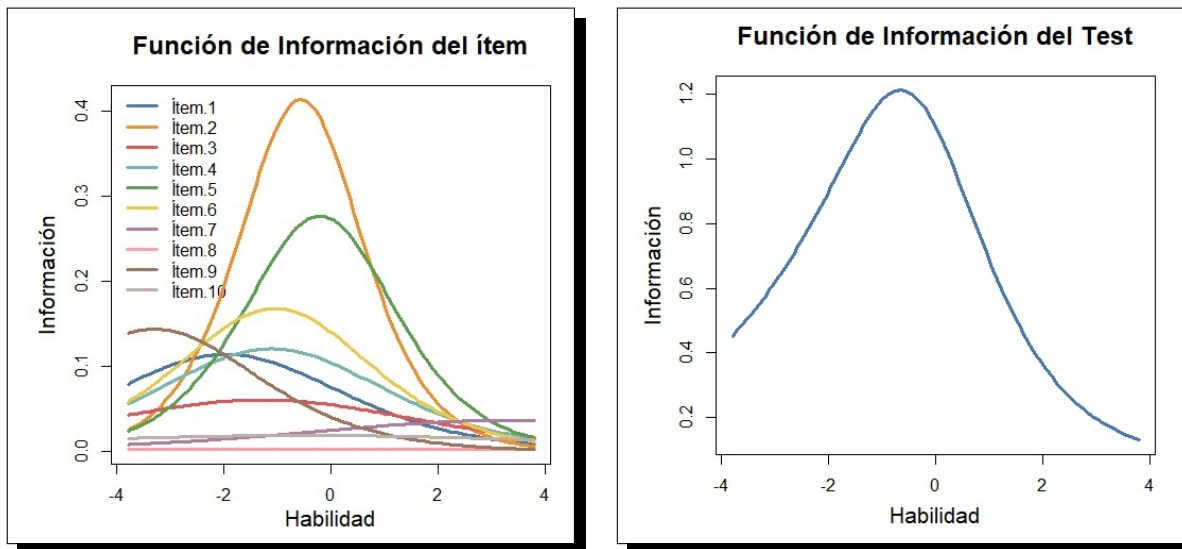


en los ítems 8 y 10 que la probabilidad de responder un ítem correctamente en función del nivel de Habilidad en Matemática aumenta de manera lineal conforme crece el valor en el rasgo latente medido. Esto se debe, en parte, a que la estimación del parámetro de discriminación para estos ítems es prácticamente nula.

La Figura 4.10(b) representa la Función de Información del Test, la cual permite deducir que la prueba proporciona más información para niveles de habilidad menores a 0. El total de información que brinda la PDM 2020 es 6.41, de los cuales, más de la mitad (54,65%) corresponde a niveles de habilidad en Matemática bajos, valores entre -4 y 0 en la escala de la habilidad en cuestión, mientras que, la información que se proporciona para valores de habilidad entre 0 y 4 es 1.83, es decir el 28,57% del total. De las gráficas de las Funciones de Información (FI) de cada ítem representadas en la Figura 4.10(a), se destacan los ítems 2 y 5 que ofrecen la mayor cantidad de información y el ítem 8 que prácticamente no brinda información alguna. El Cuadro 4.20 muestra la cantidad de información que aporta cada ítem para los niveles de habilidad que se encuentran en los intervalos  $(-4, 0)$  y  $(0, 4)$ . Los resultados validan lo expuesto, la mayor cantidad de información la brindan los ítems 2 y 5, la cuál es 0.8519 y 0.5644, respectivamente para el intervalo de habilidad  $(-4, 0)$ , mientras que, para los niveles de habilidad entre 0 y 4, la información provista por el ítem 5 es 0.4558 y por el 2 es 0.4146. Por el contrario, para los niveles más bajos en el rasgo latente, los ítems 7 y 8 se destacan por no brindar prácticamente información, a saber, menos de 0.08 entre los dos. Y, considerando los niveles más altos de habilidad, los ítems 8 y 9 son los que menos contribuyen.

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
$(-4, 0)$	0.3980	0.8519	0.2202	0.3937	0.5644	0.5097	0.0617	0.0115	0.4206	0.0715
$(0, 4)$	0.1297	0.4146	0.1365	0.1999	0.4558	0.2303	0.1335	0.0101	0.0547	0.0668

**Cuadro 4.20:** Información por intervalos proporcionada por cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.



(a) Función de Información del Ítem.

(b) Función de Información del Test.

**Figura 4.10:** Funciones de Información estimadas al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

En relación al cumplimiento de los supuestos del ML2 se confirma, mediante un Análisis Paralelo Modificado, que el ML2 satisface el supuesto de unidimensionalidad, presentado un valor medio de segundos autovalores de 0.7227 y un p-valor de 0.1294, no rechazando así la hipótesis nula de unidimensionalidad. Respecto del supuesto de independencia local, el Cuadro 4.21 presenta los valores estimados del estadístico  $\chi^2_{LD}$  para cada par de ítems, en el cual se advierte que ninguna pareja de indicadores supera el límite de 10. En consecuencia, no se observa dependencia local entre los pares de ítems de la PDM 2020, satisfaciéndose así el supuesto de independencia local.

Siguiendo con el análisis de la Bondad de Ajuste del ML2, es de interés estudiar si, tanto los ítems que conforman la PDM 2020 como los patrones de respuesta observados, se ajustan al ML2 propuesto. En el Cuadro 4.22 se presentan los valores estimados del estadístico de Yen para cada indicador de la PDM 2020 con su correspondiente p-valor asociado. Estos resultados permiten afirmar que todos los ítems se ajustan al ML2 estimado. Analizando los patrones de respuestas mediante el estadístico propuesto por Dragon, Levine y Williams, se determina que sólo 8 de los 173 patrones de respuesta (menos del

5 %) no se ajustan al ML2.

	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
Ítem 1	1.4905	2.7750	0.1651	0.0156	2.8961	0.0421	3.3228	0.0376	6.7935
Ítem 2		0.8450	0.0598	0.0165	0.2386	0.3798	1.1304	1.4237	0.1008
Ítem 3			0.0021	0.0361	0.0638	1.3884	0.0450	6.8697	0.4840
Ítem 4				0.8636	0.4203	0.5389	0.2547	0.7444	0.3416
Ítem 5					0.0151	0.0588	0.0004	0.0485	0.5227
Ítem 6						0.0403	0.4259	0.4397	6.6989
Ítem 7							4.2665	0.4161	0.6718
Ítem 8								1.0110	0.4212
Ítem 9									0.6635

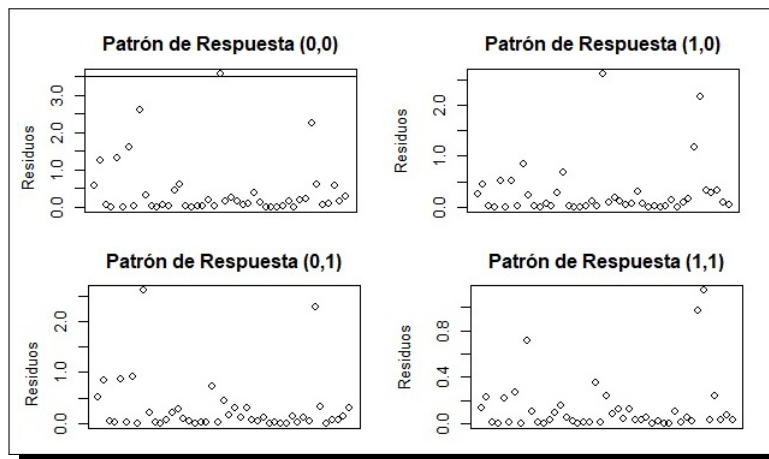
**Cuadro 4.21:** Valores estimados del estadístico  $\chi_{LD}^2$  para cada par de ítems al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

	Ítem1	Ítem2	Ítem3	Ítem4	Ítem5	Ítem6	Ítem7	Ítem8	Ítem9	Ítem10
$\chi^2$	31.03	45.89	20.87	39.21	34.77	34.66	22.06	11.37	20.45	14.08
<i>p - valor</i>	0.1584	0.5050	0.4257	0.1584	0.8614	0.2970	0.1485	0.4554	0.2475	0.5644

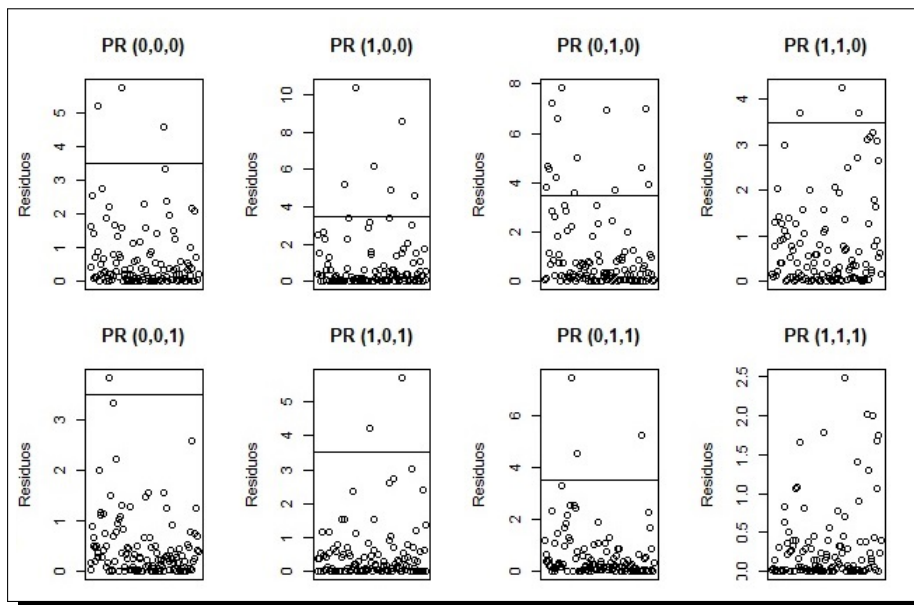
**Cuadro 4.22:** Estimaciones del estadístico de Yen para cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

En base a los residuos marginales, el ML2 mejora notablemente en comparación con el ML1. Considerando los residuos marginales a dos vías, se observa en la Figura 4.11(a) que casi todos son menores a 3.5, sólo el par formado por los ítems 3 y 9 presenta un valor apenas superior (3.57) para el patrón de respuesta (0,0). Evaluando tripletes de ítems, en la Figura 4.11(b) puede apreciarse que los patrones de respuesta (1,0,0) y (0,1,0) presentan varios residuos considerablemente altos y que sólo tres son mayores a 3.5 en los pares de respuesta (0,0,0), (1,1,0) y (0,1,1).

En conclusión, las pruebas de Bondad de Ajuste realizadas muestran que el ML2 permite un ajuste mucho más apropiado de los datos de la PDM 2020.



(a) Residuos Marginales a 2 vías.



(b) Residuos Marginales a 3 vías.

**Figura 4.11:** Residuos Marginales estimados al ajustar el Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

#### 4.3.5. Ajuste del Modelo Logístico de 3 parámetros

A pesar de que el ML2 presenta un buen ajuste a los datos de la PDM 2020, es importante analizar si el Modelo Logístico de 3 parámetros (ML3) ofrece una mejor representación. El ML3 es el más versátil de los Modelos Logísticos enmarcados en la Teoría de Respuesta al Ítem, admite valores diferentes en los parámetros de discriminación, difi-

cultad y pseudo-azar para cada ítem. Las estimaciones de estos parámetros bajo el ajuste del ML3 a los datos de la PDM 2020 se presentan en el Cuadro 4.23.

	Discriminación	Dificultad	Pseudo-Azar	$P(X=1 Z=0)$
Ítem 1	0.5582362	-2.3241551	7.584346e-06	0.7854033
Ítem 2	1.2845055	-0.5699738	1.561109e-07	0.6752735
Ítem 3	0.4682296	-1.3647091	3.548943e-04	0.6546493
Ítem 4	0.8705508	-0.4559106	2.057330e-01	0.6806578
Ítem 5	0.9652509	-0.2253646	5.732008e-11	0.5541699
Ítem 6	9.8587576	0.4178210	5.040918e-01	0.5120250
Ítem 7	0.3752663	3.4329880	3.093487e-05	0.2161675
Ítem 8	0.1483196	-3.4661673	6.034904e-02	0.6483518
Ítem 9	0.6841434	-3.5239854	4.433292e-02	0.9213062
Ítem 10	1.6044880	1.2226011	4.174003e-01	0.4892283

**Cuadro 4.23:** Estimaciones de los parámetros de discriminación, dificultad y pseudo-azar para cada ítem al ajustar el Modelo Logístico de 3 parámetros a los datos de la PDM 2020.

Los valores estimados del parámetro de azar para todos los ítems son próximos a 0, lo cual era esperable, puesto que, la manera en que se diseñó la experiencia no permitió que factores externos pudieran influir en que los estudiantes elijan aleatoriamente (límite de tiempo, preguntas anidadas, orden de presentación de los ítems, aclaraciones que pudieran generar confusión, por ejemplo). Comparando el ML2 y el ML3 mediante el Test de Razón de Verosimilitud (Cuadro 4.24) se obtiene un p-valor no significativo e índices AIC y BIC mayores para ML3, por tanto, adicionar parámetros al modelo no es conveniente. En consecuencia, el ML2 es el más adecuado para modelar los datos de esta investigación.

	AIC	BIC	log.Lik	LRT	g.l	p-valor
ML2	3933.54	4009.65	-1946.77			
ML3	3949.89	4064.05	-1944.95	3.65	10	0.962

**Cuadro 4.24:** Test de Razón de Verosimilitud para contrastar el Modelo Logístico de 3 parámetros y el Modelo Logístico de 2 parámetros.

#### 4.4. Estimación de la Habilidad en Matemática

El modelo que mejor ajusta los datos de la PDM 2020 es el Modelo Logístico de 2 parámetros, asume la ausencia del parámetro de pseudo azar ( $c=0$ ) y admite un valor diferente en el parámetro de dificultad y de discriminación para cada ítem. De la estimación del ML2, por un lado, se obtienen las ecuaciones (Cuadro 4.25) que representan las Curvas Características para cada ítem en función de la variable latente Habilidad en Matemática ( $\Theta$ ). Por otro lado, para determinar la precisión con la que la PDM 2020 mide en los diferentes valores de la escala de Habilidad en Matemática, se calcula el total de información que brinda la PDM 2020, obteniéndose un valor de 6.41. Cabe aclarar que la HM se distribuye Normal Estándar, por tal motivo, la escala latente se corresponde con los números reales y se espera que los valores estimados de HM se concentren entre -4 y 4.

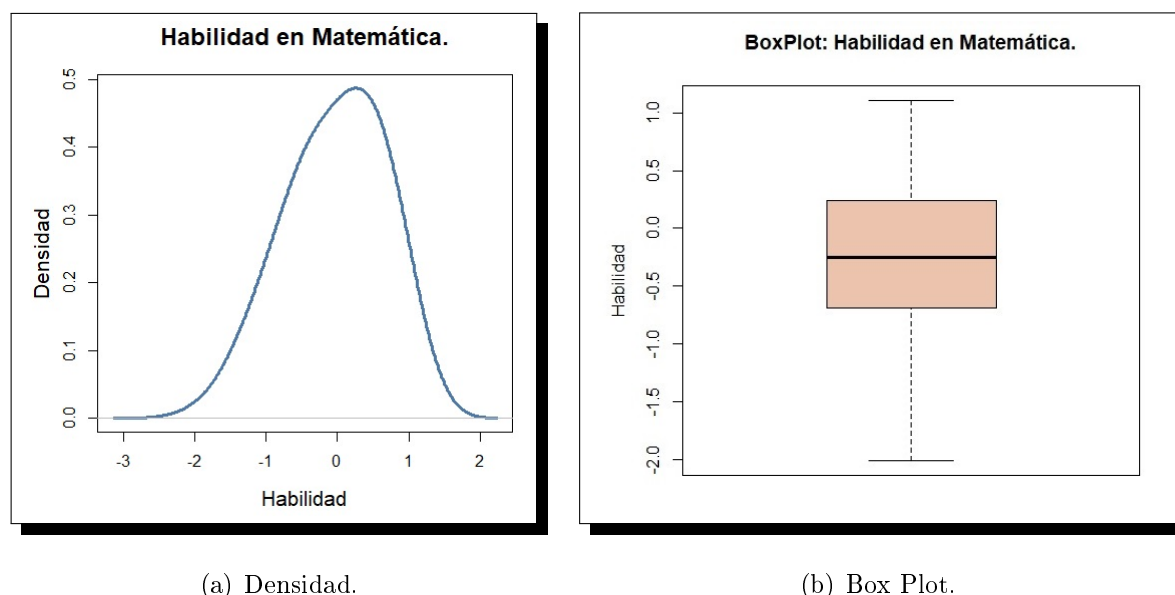
Ítem 1	$\pi_1(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,6760(\theta+1,9670)}}$
Ítem 2	$\pi_2(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-1,2855(\theta+0,5673)}}$
Ítem 3	$\pi_3(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,4934(\theta+1,3020)}}$
Ítem 4	$\pi_4(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,6954(\theta+1,1161)}}$
Ítem 5	$\pi_5(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-1,0519(\theta+0,2093)}}$
Ítem 6	$\pi_6(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,8200(\theta+1,0541)}}$
Ítem 7	$\pi_7(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,3851(\theta-3,3469)}}$
Ítem 8	$\pi_8(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,1093(\theta+5,5847)}}$
Ítem 9	$\pi_9(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,7582(\theta+3,2934)}}$
Ítem 10	$\pi_{10}(\theta) = \frac{1}{1 + e^{-0,2762(\theta+0,4892)}}$

**Cuadro 4.25:** Ecuaciones de las Curvas Carecterísticas de cada ítem bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

Se estima para cada estudiante la **Habilidad en Matemática** bajo el ML2. La Figura 4.12 muestra la gráfica de la distribución de la variable latente en cuestión y el Cuadro 4.26 presenta un conjunto de medidas resumen de la misma. Se observa una curva con muy leve asimetría a izquierda, ubicándose entre -0.8829 y 0.3901, aproximadamente, el 68 % de los estudiantes en la muestra. La HM promedio que presenta un estudiante inscripto en 2020 para cursar alguna de las Matemáticas introductorias que dicta la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNL-Pam) es -0.2464 y ningún estudiante en la muestra supera el valor 1.11 en la escala de habilidad, lo que apoya la hipótesis de insuficiencia en el nivel de Matemática requerido para cursar de manera satisfactoria las materias relacionadas con esta Ciencia Exacta.

Media	D.E	Mínimo	1st Qu.	Mediana	3rd Qu.	Máximo
-0.2464	0.6365	-2.0088	-0.6926	-0.2508	0.2376	1.1073

**Cuadro 4.26:** Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.



(a) Densidad.

(b) Box Plot.

**Figura 4.12:** Distribución de la variable Habilidad en Matemática bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020.

Las estimaciones del nivel de Habilidad en Matemática de los estudiantes de interés se encuentran entre los valores -2.0088 y 1.1073. La precisión con la que miden los ítems en los valores de habilidad de los sujetos en cuestión es considerablemente alta, bajo el ajuste del ML2. En efecto, el total de información que brinda la PDM 2020 para valores de habilidad es 6,41, de esta cantidad, 3.22 se corresponde con valores de Habilidad en Matemática que pertenecen al intervalo  $[-2.0088, 1.1073]$ , es decir que el 50 % de la información total que proporciona la PDM 2020 se brinda para el rango de valores de Habilidad en Matemática que presentan los estudiantes que conforman la muestra.

Se divide el intervalo  $[-2.0088, 1.1073]$  en cuatro grupos determinados por el primer, segundo y tercer cuartil, a fin de establecer los valores de Habilidad en Matemática para los cuáles la PDM 2020 mide con mayor precisión. El Cuadro 4.27 cuantifica la información que ofrece el conjunto de ítems en los cuatro grupos y el porcentaje que representa esta cantidad del total de información brindada por la PDM 2020 en las estimaciones de habilidades ubicadas entre -2.0088 a 1.1073 (cuantía que se corresponde con 3.22). Se advierte que la información que brinda la PDM 2020 entre -2.0088 y -0.6926 es de 1.43, lo que representa el 44,41 % del total de información proporcionada para los valores de habilidad en el intervalo  $[-2.0088, 1.1073]$ . Esto permite asegurar que el 25 % de las habilidades menores son medidas con la mayor precisión en comparación con los tres intervalos restantes.

	$[-2.0088, -0.6926)$	$[-0.6926, -0.2508)$	$[-0.2508, 0.2376)$	$[0.2376, 1.1073]$
Información	1.43	0.53	0.54	0.72
Porcentaje	44,41	16.46	17,77	22.36

**Cuadro 4.27:** Información proporcionada por la PMD 2020 en los grupos determinados por los cuartiles correspondientes a la variable Habilidad en Matemática.

De manera similar, el Cuadro 4.28 presenta la cantidad de información que ofrece cada uno de los ítems en los cuatro grupos determinados previamente. Estos resultados permiten concluir que los indicadores 2 y 5 son los que proveen mayor cantidad de información en todos los niveles de Habilidad en Matemática, aunque, tanto el ítem 2 como el 5 miden con mayor precisión los valores de habilidad que se encuentran entre -2.0088 y -0.6926. Por



el contrario, el ítem 8 se destaca por proporcionar la menor cuantía de información entre todos los ítems y para todos los intervalos. Se observa, además, que todos los ítems miden con prácticamente la misma precisión a los valores de habilidad que se encuentran en el 2° y en el 3° intervalo. Por último, se aprecia que el ítem 7 es el único que no mide con la mayor precisión al 25 % de los niveles de habilidad inferiores, sino que, aporta mayor cantidad de información para los valores de habilidad ubicados en el intervalo que agrupa al 25 % de valores superiores (4° intervalo).

	[-2.0088,-0.6926)	[-0.6926,-0.2508)	[-0.2508, 0.2376)	[0.2376, 1.1073]
Ítem 1	0.1420	0.0395	0.0370	0.0491
Ítem 2	0.4169	0.1806	0.1768	0.2032
Ítem 3	0.0794	0.0258	0.0269	0.0421
Ítem 4	0.1554	0.0507	0.0510	0.0730
Ítem 5	0.2573	0.1194	0.1329	0.1939
Ítem 6	0.2131	0.0700	0.0685	0.0920
Ítem 7	0.0237	0.0100	0.0123	0.0250
Ítem 8	0.0037	0.0012	0.0013	0.0023
Ítem 9	0.1152	0.0240	0.0199	0.0227
Ítem 10	0.0247	0.0084	0.0093	0.0162

**Cuadro 4.28:** Información proporcionada por cada ítem de la PMD 2020 en los grupos determinados por los cuartiles correspondientes a la variable Habilidad en Matemática.

Por otro lado, dado que uno de los objetivos que motiva esta investigación radica en identificar a los estudiantes que requieren un acompañamiento diferenciado para lograr un cursado satisfactorio y una posterior aprobación de las asignaturas relacionadas con una Matemática introductoria, se analiza la variable latente Habilidad en Matemática según diferentes factores:

- Carrera:** Se consideran las 12 carreras que ofrece la FCEyN de la UNLPam que requieren del cursado de una Matemática introductoria: Licenciatura en Ciencias Biológicas (LCB), Licenciatura en Química (LQ), Licenciatura en Geología (LG), Licenciatura en Matemática (LM), Licenciatura en Física (LF), Profesorado en Ciencias Biológicas (PCB), Profesorado en Química (PQ), Profesorado en Computación

(PC), Profesorado en Matemática (PM), Profesorado en Física (PF), Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente (IRNyMA) y Tecnicatura en Informática de Gestión (TIG).

- **Edad:** Se diferencian dos grupos etarios: estudiantes que al 9 de marzo del año 2020 tenían 19 años o menos y estudiantes que tenían más de 19 años a la misma fecha. El primer grupo se identifica por “ $\leq 19$ ” años y el segundo grupo por “ $> 19$ ” años.
- **Condición de estudiante:** Este factor clasifica los sujetos según su condición de estudiante, identificándose dos grupos: “Ingresantes”, son aquellos estudiantes que se inscribieron en el año 2020 a alguna de las carreras que ofrece la FCEyN de la UNLPam; y “Recursantes”, integran este grupo las personas que en el año 2020 se inscribieron para cursar nuevamente algunas de las Matemáticas introductorias, es decir que, su año de ingreso a la FCEyN de la UNLPam es anterior al 2020.
- **Lugar de Origen:** Se distinguen dos grupos de estudiantes según el lugar de origen: los que son oriundos de la provincia de La Pampa y los que no lo son, identificándose estos colectivos por “La Pampa” y “Otro lugar”, respectivamente.

El Cuadro 4.29 presenta medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática discriminada por el factor Carrera. Las carreras más elegidas en el año 2020 son la Tecnicatura en Informática de Gestión y la Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, mientras que, las menos preferidas son los profesorados en Química y en Física. Se observa que los estudiantes de la carrera IRNyMA se encuentran por debajo de la media global. Por el contrario, Los aspirantes a las carreras Lic. en Física y Lic. y Prof. en Química presentan los mayores valores de Habilidad en Matemática, la mitad de ellos superan la estimación de 0.30. Se debe prestar especial atención a los inscriptos en Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Licenciatura y Profesorado en Ciencias Biológicas y Licenciatura en Geología, ya que, al menos la mitad de los estudiantes de esas carrera presentan un valor menor a -0.05 de Habilidad en Matemática. Evaluando los casos extremos (Figura 4.13(a)), se destaca un solo estudiante de 27 años, de sexo masculino que cursa Licenciatura en Física y es oriundo de la capital de la provincia de La Pampa. Particularmente, su estimación en la escala de habilidad (-1.2794) es mucho

menor al nivel que presentan los demás aspirantes a licenciados en Física.

Carrera	Media	D.E	Mínimo	1st Qu.	Mediana	3rd Qu.	Máximo	n
IRNyMA	-0.3951	0.7363	-1.9215	-0.9119	-0.3243	0.2069	0.9428	35
LCB	-0.1979	0.6490	-1.3824	-0.4770	-0.2047	0.3603	0.7845	19
LF	0.1909	0.7387	-1.2794	0.3489	0.3734	0.5142	0.7763	6
LG	-0.1200	0.5403	-1.2794	-0.4537	-0.2508	0.2651	1.1073	23
LM	0.0298	0.7941	-1.4644	-0.4418	0.0235	0.7632	0.9428	14
LQ	0.0816	0.6197	-1.0659	-0.5035	0.3098	0.6641	1.0070	21
PCB	-0.0302	0.5208	-1.1106	-0.2427	-0.0588	0.3488	0.7845	16
PC	-0.0064	0.6969	-1.5399	-0.4399	0.1628	0.5468	0.9428	41
PF	0.0754	0.6075	-0.6084	-0.4398	0.1763	0.3695	0.8795	5
PM	0.0600	0.5151	-1.0494	-0.3838	0.1556	0.5468	0.9426	59
PQ	0.4382	0.5656	-0.3214	0.1798	0.5657	0.8241	0.9428	4
TIG	0.0244	0.7397	-2.0088	-0.4992	0.0354	0.7235	1.1073	89

**Cuadro 4.29:** Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Carrera.

El análisis del rasgo latente en cuestión, según si el estudiante es ingresante o recurrente en el año 2020, se realiza considerando las medidas resumen de la Habilidad en Matemática presentadas en el Cuadro 4.30. Se evidencia que los estudiantes que han tenido contacto con algunas de las materias relacionadas con Matemática manifiestan, en promedio, niveles de habilidad en la asignatura más altos que aquellos estudiantes cuyo primer año en la FCEyN de la UNLPam fue el 2020. Más de la mitad de los ingresantes presentan una estimación menor a 0.03 de HM, mientras que, el 50 % de los recurrentes supera el valor 0.13 en la escala de habilidad. En la Figura 4.13(c) se observa el Diagrama de Caja y Bigotes de la variable de interés por el factor Condición de estudiante, advirtiéndose una mayor variabilidad en los niveles de habilidad del grupo conformado por los ingresantes, aunque es importante aclarar que este grupo contiene cinco veces más la cantidad de personas que el grupo conformado por los recurrentes. Por su parte, los recurrentes presentan estimaciones entre -1 y 1 aproximadamente, destacándose la existencia de un valor extremo correspondiente al estudiante identificado con el número 307. Esta persona es de sexo femenino, tiene 23 años, es de la localidad de General Acha (La

Pampa) y está inscripta en la carrera Tecnicatura en Informática de Gestión. Su nivel de Habilidad en Matemática estimado es, aproximadamente, -2.

Cond. estudiantil	Media	D.E	Mínimo	1st Qu.	Mediana	3rd Qu.	Máximo	n
Recursante	0.0599	0.5621	-2.0088	-0.2351	0.1396	0.4180	0.9428	50
Ingresante	-0.0460	0.6860	-1.9215	-0.5024	0.0232	0.5529	1.1073	282

**Cuadro 4.30:** Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Condición de estudiante.

Las medidas resumen de la Habilidad en Matemática diferenciadas por los grupos etarios se muestran en el Cuadro 4.31 y el Diagrama de Caja y Bigotes correspondiente en la Figura 4.13(b). La cantidad de estudiantes en la muestra que no superan los 19 años es 154, mientras que, los mayores a 19 años son 178. De los resultados expuestos, se infiere que los sujetos que no superan los 19 años presentan, en media, una habilidad menor al promedio esperado, mientras que, los estudiantes que tienen al menos 20 años apenas superan el valor 0. Además, el gráfico (Figura 4.13(b)) permite visualizar que el grupo de menor edad es más homogéneo ( $D.E=0.5957$ ), a saber, la mitad de los valores de habilidad se concentran en el intervalo  $[-0.4627, 0.3143]$ . En cambio, en el conjunto compuesto por personas mayores a 19 años, la distribución del rasgo latente medido es asimétrica a izquierda, incluyendo al 50 % de los mayores valores de Habilidad en Matemática en el intervalo  $[0.2338, 1.1073]$ .

Edad	Media	D.E	Mínimo	1st Qu.	Mediana	3rd Qu.	Máximo	n
$\leq 19$	-0.1195	0.5957	-1.5399	-0.4627	-0.0845	0.3143	1.1073	154
$> 19$	0.0473	0.7194	-2.0088	-0.5151	0.2338	0.6639	1.1073	178

**Cuadro 4.31:** Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Edad.

En relación al último factor, el Cuadro 4.32 exhibe las medidas resumen de la Habilidad en Matemática por el Lugar de origen y la Figura 4.13(d) el Diagrama de Cajas y Bigotes asociado. Se contabilizaron 302 estudiantes oriundos de La Pampa y 30 que

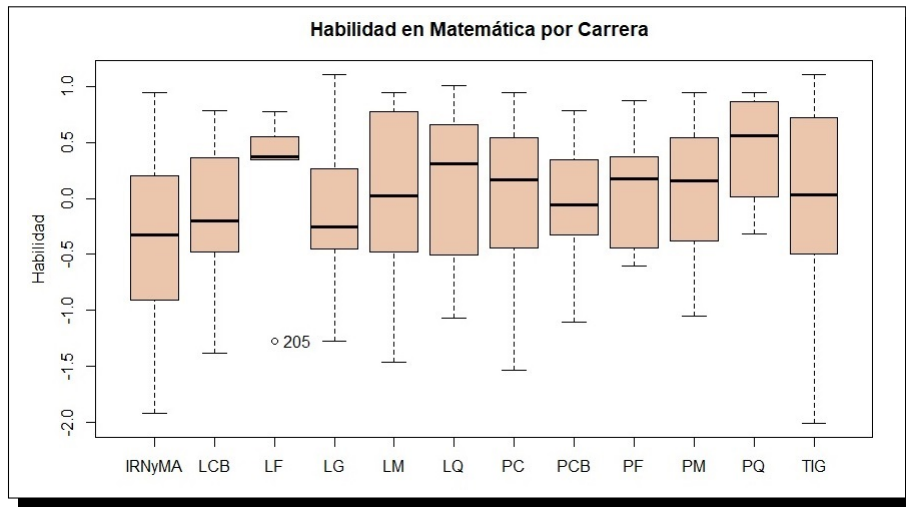
manifestaron que La Pampa no era su lugar de procedencia.

El grupo más heterogéneo es el conformado por los estudiantes cuyo lugar de origen no es La Pampa, su desvío estándar es de 0.7395 y el 25% de los mayores valores en habilidad se concentran en un rango de 0.3701. El 25% de los menores valores estimados de Habilidad en Matemática se encuentran en el intervalo  $[-1.9215, -0.1434]$ , cuya amplitud es 1.7781, la cual es bastante superior a 0.3701, evidenciando así, que la distribución de la variable latente HM en este grupo es asimétrica a izquierda. En tanto, del Diagrama de Caja y Bigotes (Figura 4.13(d)) se distingue un estudiante cuyo valor de habilidad (-1.9215) es muy inferior a las estimaciones presentadas por el grupo de recursantes. El número de identificación de este sujeto es 72, tiene 24 años, es de sexo masculino, proviene de la localidad de Salliqueló de la provincia de Buenos Aires y está inscripto a la carrera Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente.

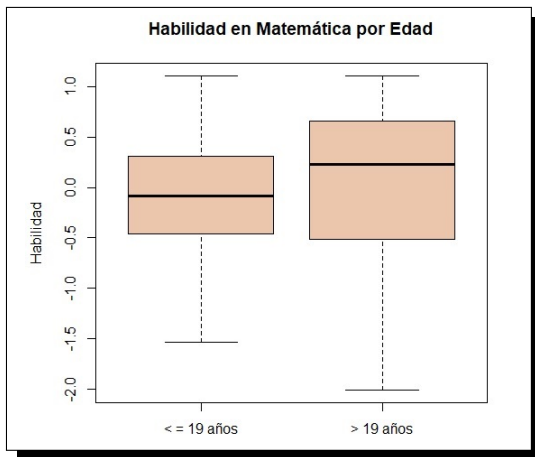
Por otro lado, la distribución de la Habilidad en Matemática en el conjunto formado por aquellos individuos que provienen de La Pampa, es simétrica alrededor del valor 0 que es el nivel de habilidad promedio esperado. El 50% de los valores centrales se encuentran en el intervalo  $[-0.4986, 0.4974]$ . Se observa, además, que un único estudiante presenta un nivel de Habilidad en Matemática extremo, considerado mucho menor a los del grupo de ingresantes, a saber el valor estimado de la habilidad es -2.0088 y su número de identificación es 307.

Lugar de origen	Media	D.E	Mínimo	1st Qu.	Mediana	3rd Qu.	Máximo	n
Otro lugar	0.1190	0.7395	-1.9215	-0.1434	0.3695	0.6369	1.0070	30
La Pampa	-0.0449	0.6612	-2.0088	-0.4986	0.0110	0.4974	1.1073	302

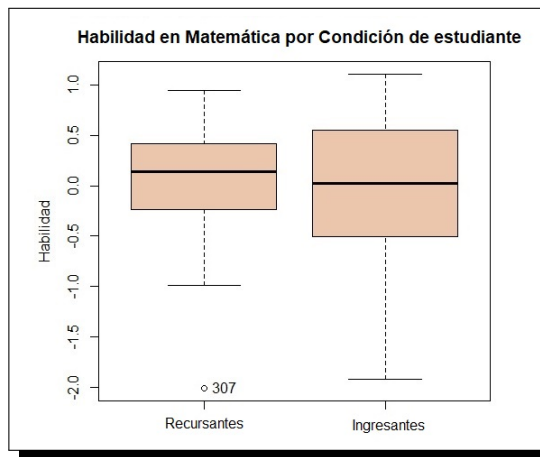
**Cuadro 4.32:** Medidas resumen de la variable latente Habilidad en Matemática por Lugar de origen.



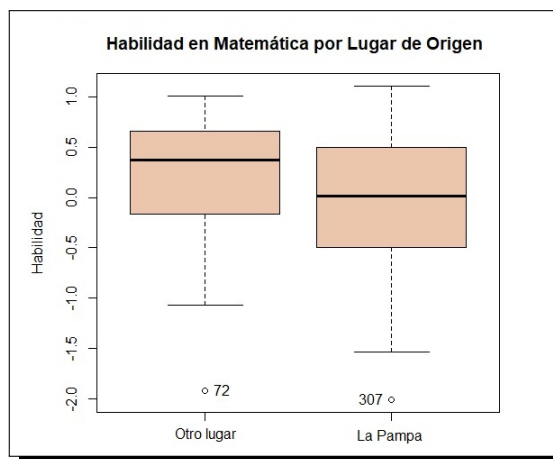
(a) Factor: Carrera



(b) Factor: Edad



(c) Factor: Condición de estudiante



(d) Factor: Lugar de origen

**Figura 4.13:** Diagramas de Caja y Bigotes de la variable latente Habilidad en Matemática bajo el ajuste del Modelo Logístico de 2 parámetros a los datos de la PDM 2020 según los factores Carrera, Edad, Condición de estudiante y Lugar de origen.

Continuando con la identificación de los estudiantes que presentan menor nivel de Habilidad en Matemática, que son los que requieren un mayor seguimiento, se distinguen los sujetos cuyas estimaciones en la escala de habilidad corresponden al 25 % de los valores más bajos, es decir, menores o iguales a  $-0.6926$ . Del total de la muestra, 60 estudiantes presentan estimaciones para el nivel de Habilidad en Matemática que se encuentran en el intervalo  $[-2.0088; -0.6926]$ , de los cuales, 41 son de sexo femenino y 19 de sexo masculino. En relación a la Condición de estudiante, se contabilizaron 57 ingresantes y 3 recursantes, y considerando el factor Lugar de origen, de los 60 estudiantes, 52 resultaron ser oriundos de la provincia de La Pampa. Respecto del factor Carrera, en el Cuadro 4.33 se indica la cantidad de estudiantes con valores estimados de HM en el intervalo  $[-2.088; -0.6926]$  que pertenece a cada carrera y el porcentaje que representa esta cuantía del total de inscriptos de la muestra en cada una de ellas. Se observa que, aproximadamente, 2 de cada 5 estudiantes que cursan la carrera Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente no superan el valor  $-0.69$  en la escala de Habilidad en Matemática. Así mismo, la quinta parte de los inscriptos a la Licenciatura en Ciencias Biológicas y a la Tecnicatura en Informática de Gestión va a requerir propuestas académicas que ayuden a potenciar su desempeño en el área de Matemática.

Carrera	IRNyMA	LCB	LF	LG	LM	LQ	PCB	PC	PF	PM	PQ	TIG
Frecuencia	15	4	1	2	3	2	2	8	0	6	0	17
Porcentaje	42.86	21.05	16.67	8.70	21.43	9.52	12.50	19.51	0	10.12	0	19.10

**Cuadro 4.33:** Distribución empírica del N° de estudiantes con menores estimaciones en el nivel de Habilidad en Matemática, según la carrera en la que están inscriptos.

Por último, en el Cuadro 4.34, los estudiantes que requieren de un mayor acompañamiento para un cursado satisfactorio de aquellas asignaturas relacionadas con Matemática son identificados por su número de registro en la base de datos. Se incluye también la información personal recogida, de acuerdo a las categorías ya descriptas: carrera en la que están inscriptos; condición de estudiante (si son ingresantes en el año 2020 o recursantes); grupo etario al que pertenecen (19 años o menos y mayores a 19 años); y lugar de origen

(La Pampa u otro lugar).

Carrera	Condición de estudiante	Lugar de origen	Edad	Identificación
IRNyMA	Ingresante	La Pampa	<=19 años	2, 9, 71, 75, 197
			>19 años	86, 202, 236, 323
	Recursante	Otro lugar	<= 19 años	44,76, 77
			>19 años	72, 199
LCB	Ingresante	La Pampa	<=19 años	74, 129
			>19 años	16, 57
LF	Ingresante	La Pampa	<=19 años	-
			>19 años	205
LG	Ingresante	La Pampa	<=19 años	62, 228
			>19 años	-
LM	Ingresante	La Pampa	<=19 años	122, 162
			>19 años	-
LQ	Ingresante	Otro Lugar	<= 19 años	208
			>19 años	211
PCB	Ingresante	La Pampa	<=19 años	13, 51
			>19 años	-
PC	Ingresante	La Pampa	<=19 años	105, 17, 67
			>19 años	60, 66, 80, 91, 193
PM	Ingresante	La Pampa	<=19 años	103, 144, 147, 148
			>19 años	166, 190
TIG	Ingresante	La Pampa	<=19 años	280, 317
			>19 años	194, 238, 249, 253, 264, 270, 271, 290, 296, 302, 321, 324
	Recursante	Otro lugar	<= 19 años	-
			>19 años	316
		La Pampa	<=19 años	-
			>19 años	278, 307

**Cuadro 4.34:** Estudiantes con menores estimaciones en el nivel de Habilidad en Matemática identificados por su número de registro en la base de datos.



## Capítulo 5

# Conclusiones y Recomendaciones

### 5.1. Conclusiones

En este trabajo se presentan las bases matemático - estadísticas de los Modelos Logísticos de 1, 2 y 3 parámetros, desarrollados en la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), a partir de la teoría de los Modelos Lineales Generalizados, dado que, estos modelos consideran las regresiones lineales con variables de tipo dicotómicas.

Se comienza definiendo los Modelos de Variables Latentes y de Rasgos Latentes y, debido a que el instrumento de investigación está conformado por ítems que asumen respuesta dicotómica, se explicitan los Modelos de Rasgos Latentes Binarios y a partir de ellos los que consideran una única dimensión, denominados Modelos de Rasgos Latentes Binarios Unidimensionales (MRLBU). Estos últimos se han desarrollado en el contexto de la TRI, por tal motivo, son conocidos como Modelos TRI Binarios Unidimensionales, de los cuáles existen muchos tipos según la función de enlace adoptada para configurar la Curva Característica del Ítem (CCI) que contempla cada modelo. La función considerada en este trabajo fue el enlace *logit*, el cual permite definir formalmente los Modelos Logísticos de 2 parámetros y sus casos particulares: el Modelo Logístico de 1 parámetro y el Modelo de Rasch. Se realiza la correspondencia entre los coeficientes de regresión del MRLBU y los parámetros de discriminación y dificultad que caracterizan a los Modelos Logísticos de la TRI. Seguidamente, se construye la Curva Característica del Ítem del Modelo Logístico de 3 parámetros y se presentan las componentes de los Modelos Lineales Generalizados que lo definen. Para finalizar, se presentan la Función de Información

de un ítem y la Función de Información del Test, útiles para analizar la precisión con la que se ha estimado la variable latente de interés.

El Modelo Logístico de 2 parámetros (ML2) se presenta como el adecuado para obtener una estimación apropiada del nivel de rasgo latente investigado, es decir, de la Habilidad en Matemática, de los estudiantes que en el año 2020 se inscribieron para cursar algunas de las Matemáticas introductorias que conforman el Plan de Estudio de las carreras que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (FCEyN) de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam).

De los resultados obtenidos, se concluye que el conjunto de ítems que conforman la PDM 2020 satisface el supuesto de unidimensionalidad y de independencia local, requisito indispensable para validar la representación de los datos mediante los Modelos Logísticos, particularmente por medio del ML2. Sumado a esto, se infiere que todos los ítems que conforman la PDM 2020 se ajustan al ML2 y más del 95% de los patrones de respuesta presentados por los estudiantes en la muestra, se adecuan al ML2 estimado.

El ML2 asume nulo el índice de pseudo azar para todos los ítems y admite que los valores de los parámetros de discriminación y dificultad difieran entre los indicadores. Esta característica permite identificar a los ítems 8 y 9 como los más fáciles, enmarcados en los ejes Funciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad, respectivamente. Por el contrario, el ítem 7 que está construido en base al eje Geometría y Medida y evalúa la capacidad específica Resolución de situaciones problemáticas, resulta ser el más difícil, el parámetro de dificultad estimado supera al valor 3. Los ítems que presentan un valor de dificultad mínimo son el 1 y el 3, que se corresponden con los contenidos del Eje temático Números y Álgebra, y el 4 relacionado con Geometría, específicamente con el cálculo de áreas y la aplicación del Teorema de Pitágoras. En tanto que, los ítems 2, 5 y 10 están más cercanos a una dificultad promedio, es decir, al valor cero. Tanto el ítem 2 como el 10 corresponden al eje Funciones y Álgebra, mientras que el 5 se ajusta a los contenidos pertenecientes al eje Números y Álgebra. Estos ejes temáticos son los más destacados al momento de realizar las planificaciones anuales del nivel medio en la provincia de La Pampa.

En relación a la capacidad que presenta cada ítem para diferenciar a estudiantes con mayor nivel de Habilidad en Matemática de los de menor habilidad, se destacan el 2 y el 5, ambos superan el valor 1 en la estimación del parámetro de discriminación. Además, estos indicadores sumados al ítem 6, son los que brindan mayor información del conjunto total de ítems de la PDM 2020 y miden con mayor precisión a los examinados cuya estimación en el nivel de Habilidad en Matemática es inferior a cero. Por el contrario, el ítem 8 prácticamente no brinda información alguna y presenta el menor valor estimado en el parámetro de discriminación.

Los resultados alcanzados indican que los estudiantes que conforman la muestra presentan un valor mínimo de -2.0088 en la escala de Habilidad en Matemática y un valor máximo de 1.1073 de esta habilidad. Se determina, además, que el 50 % de estos estudiantes manifiesta un nivel menor o igual a -0.2508 en la escala latente en cuestión, siendo el promedio de -0.2464 (ambos inferiores a la media esperada ubicada en cero).

Las personas que recursan algunas de las materias relacionadas con la disciplina han mostrado, en promedio, niveles de habilidad más altos que aquellos estudiantes cuyo primer año en la FCEyN de la UNLPam ha sido el 2020. Comparando por grupos etarios, menor o igual a 19 años y mayor a 19 años, se observa que el segundo grupo es más homogéneo en relación a los niveles de Habilidad en Matemática, superando en media al promedio esperado, mientras que, el grupo con edades menores o iguales a 19 años, no logra sobrepasarlo y la mitad de ellos presenta valores en habilidad que no exceden el umbral de 0.0232.

Considerando el colectivo de estudiantes por el lugar de procedencia, se advierte que la distribución de la Habilidad en Matemática en el conjunto formado por aquellos individuos que provienen de La Pampa, es simétrica alrededor del valor de habilidad promedio esperado, solo un estudiante presenta una magnitud de capacidad extrema, considerada mucho menor a las del grupo, a saber el valor es -2.0088. En tanto, en el conjunto de estudiantes que no son oriundos de La Pampa, se observa que los niveles de Habilidad en

Matemática son más dispares, el 50 % de ellos manifiesta valores superiores a 0.3695 pero inferiores 1.0070, mientras que, la otra mitad tiene una habilidad que varía entre -1.9215 y 0.3695, encontrándose el valor -1.9215 muy por debajo de los niveles de habilidad presentados por los individuos de este grupo.

Respecto a las carreras elegidas por los estudiantes de interés, se debe prestar especial atención a aquellos inscriptos en las carreras Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Licenciatura y Profesorado en Ciencias Biológicas y Licenciatura en Geología, ya que, el 50 % de los estudiantes de cada una de estas carreras tienen una estimación menor a -0.06 en la escala del rasgo latente medido.

Uno de los objetivos específicos que motiva este trabajo es identificar los estudiantes que presenten niveles más bajos en el rasgo latente. Por lo tanto, se brinda especial atención a los estudiantes cuyos valores en la escala de Habilidad en Matemática corresponden al 25 % de los valores más bajos, es decir, valores que se encuentren en el intervalo  $[-2.0088; -0.6926]$ . De los 332 examinados que conforman la muestra, 60 presentan niveles correspondientes con el 25 % de los valores más bajos de Habilidad en Matemática, de los cuales, 41 son de sexo femenino y 19 de sexo masculino. En relación a la Condición de estudiante, se contabilizaron 57 ingresantes y 3 recursantes, y considerando el factor Lugar de origen, 52 resultaron ser oriundos de la provincia de La Pampa. La mayoría de las personas identificadas en este conjunto están inscriptas a las carreras Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Tecnicatura en Informática de Gestión y Profesorado en Computación. Prácticamente, la mitad de los aspirantes a ingenieros en Recursos Naturales y Medio Ambiente presenta niveles muy bajos de Habilidad en Matemática. Por último, es importante reparar que, aproximadamente, 1 de cada 5 inscriptos a las carreras Licenciatura y Profesorado en Ciencias Biológicas, Licenciatura en Matemática y Tecnicatura en Informática de Gestión, va a necesitar atención distinguida en el proceso de enseñanza-aprendizaje para poder cursar y aprobar las asignaturas vinculadas con Matemática.

En resumen, la PDM 2020 presenta aspectos a modificar en función de los objetivos

que se persigan. Sin embargo, ha cumplido los requisitos para este estudio, pues no sólo permite estimar la Habilidad en Matemática de los sujetos de interés, sino que, mide con mayor precisión a los estudiantes cuyos niveles en el rasgo latente son menores. Esto resulta fundamental, puesto que uno de los objetivos que se persiguen en esta investigación es identificar a los estudiantes que necesiten un acompañamiento diferenciado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, aquellos cuyo nivel de Habilidad en Matemática se encuentre entre los más bajos.

En base a lo expuesto, se corrobora la hipótesis planteada: “la mayoría de los estudiantes que ingresan a la FCEyN de la UNLPam no poseen conocimientos en Matemática suficientes para un cursado satisfactorio y posterior aprobación de las asignaturas relacionadas con una Matemática introductoria”.

## 5.2. Recomendaciones

Con el objeto de mejorar la calidad de la PDM, en pruebas a futuro se recomienda eliminar el ítem 8, ya que, la cantidad de información que brinda no es relevante, presenta un nivel de dificultad demasiado pequeño y el valor en el parámetro de discriminación es prácticamente nulo. Se debieran incluir los ítems 2 y 5, puesto que presentan la mayor capacidad discriminatoria y sus estimaciones en el parámetro de dificultad se encuentran cercanas al valor 0, no son ni muy fáciles ni muy difíciles. Sumado a esto, los ítems 2 y 5 en conjunto con el 6 son los que más información aportan y los que miden con mayor precisión al conjunto de estudiantes cuyas habilidades se corresponden con desempeños no satisfactorios. El ítem 6, además, es muy potente desde la perspectiva discriminatoria, pero con respecto a la dificultad es uno de los más fáciles.

Respecto a la calidad de los ítems 1 y 4, ambos presentan estimaciones significativas en el parámetro de dificultad y discriminación por lo que se aconseja considerarlos, pero, teniendo en cuenta que son ítems bastante fáciles. Además, la precisión con la que miden en los diferentes niveles de Habilidad en Matemática es semejante, proporcionando, prácticamente, la misma información cuando las estimaciones en el rasgo latente son inferiores

a cero. Por su parte, los ítems 3 y 10 componen el conjunto formado por la mitad de los ítems que menos información brindan y son los menos potentes para establecer diferencias entre los grupos según los niveles de Habilidad en Matemática.

Se sugiere analizar la conveniencia de incluir ítems como el 9 y el 7 debido a que manifiestan niveles de dificultad extremos, bajo el ajuste del ML2 resultaron ser el más fácil y el más difícil, respectivamente. Sin embargo, el ítem 9 mide con una precisión aceptable a los estudiantes de menor habilidad y su poder discriminatorio está entre los más altos. Por último, en virtud de que las estimaciones en el parámetro de dificultad de todos los ítems es menor a 0, excepto en el caso del 7, en pruebas a futuro es recomendable analizar la utilidad de incorporar ítems que presenten valores entre 0 y 2 en el parámetro en cuestión.

En relación a las características personales de los estudiantes en la muestra, sumadas a las consideradas en este trabajo, sería importante investigar acerca de dos aspectos de los estudiantes: la condición laboral y la orientación de la Institución Secundaria de la cuál provienen.

Finalmente, se sugiere realizar propuestas académicas orientadas a garantizar el acompañamiento de los estudiantes que presentaron menores valores en la escala de Habilidad en Matemática. Particularmente, es importante que estas medidas estén dirigidas a personas que ingresaron a la FCEyN de la UNLPam en el año 2020 y que son aspirantes a recibirse de las carreras Ingeniería en Recursos Naturales, Tecnicatura en Informática de Gestión y Profesorado en Computación. Las currículas que presentan hoy en día estas carreras exigen que el estudiante disponga de sólidos fundamentos de Matemática, a fin de relacionarlos con los conocimientos propios de cada ciencia experimental, razón por la cual, resulta fundamental ofrecerle apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

## Apéndice A

# Prueba Diagnóstico en Matemática

### Datos personales

**Apellido y Nombre:**

**Edad:**

**Lugar de origen (Localidad y Provincia):**

**Sexo**

Femenino

Masculino

**Carrera:**

Ing. en Recursos Naturales y Medio Ambiente

Lic. en Ciencias Biológicas

Lic. en Física

Lic. en Geología

Lic. en Matemática

Lic. en Química

Prof. en Ciencias Biológicas

Prof. en Computación

Prof. en Física

Prof. en Matemática

Prof. en Química

Tec. en Informática de gestión

**¿Usted es ingresante a la FCEyN de la UNLPam?**

Sí

No

### Ítem 1

Indique el resultado de la siguiente operación:

$$\sqrt{36 + 64} \cdot (-2) + 3^2$$

-11

19

37

70

Ítem 2

¿Cuál debe ser el valor de  $x$  para que se cumpla la igualdad?

$$8 - 6x = 32$$

- 16                     
  4                     
  - 4                     
  30

Ítem 3

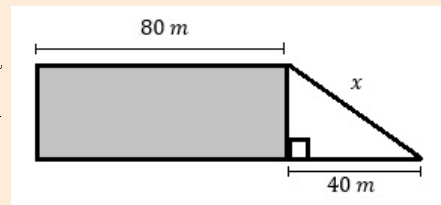
Booking ofrece el siguiente hotel para dos personas por siete días en Cancún. Al precio ofrecido hay que agregarle el “impuesto país” que recarga un 30% a las compras en el exterior. ¿Cuánto dinero representa el “impuesto país” en esta compra?



- \$60287, 5                     
  \$32462, 50                     
  \$13912, 50                     
  \$35673, 08

Ítem 4

El perímetro de la parte sombreada de la siguiente figura es de 220 m. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa  $x$  del triángulo?



- 146, 60m                     
  70m                     
  89, 44m                     
  50m

Ítem 5

El martes por la mañana un comerciante de naranjas vendió las  $\frac{3}{4}$  partes del stock que tenía y por la tarde  $\frac{1}{5}$  de lo que quedaba. Si el stock original era de 400 kg., ¿cuántos kg. vendió el martes?

- 220kg.                     
  300kg.                     
  380kg.                     
  320kg.



### Ítem 6

Una refinera de Río Negro compra el barril de petróleo crudo en la provincia de Neuquén a un precio de USD 61 cada uno, con un costo del viaje de USD 300. Si llamamos  $X$ = “cantidad de barriles de crudo” e  $Y$ =“precio total a pagar”, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el precio a pagar en función de la cantidad de barriles de crudo comprados?

$y = 300x + 61$

$y = 361x$

$y = 61x - 300$

$y = 61x + 300$

### Ítem 7

Se quiere construir un tobogán como el de la figura. La escalera ubicada en forma perpendicular al piso debe medir 1,7 m y se le quiere dar al tobogán una inclinación de  $30^\circ$  con respecto al suelo. Si llamamos  $x$  a la “medida de la tabla del tobogán”, ¿cuál de las siguientes expresiones permite calcular el valor de  $x$ ?



$x = 1,7 \cdot \sin(30^\circ)$

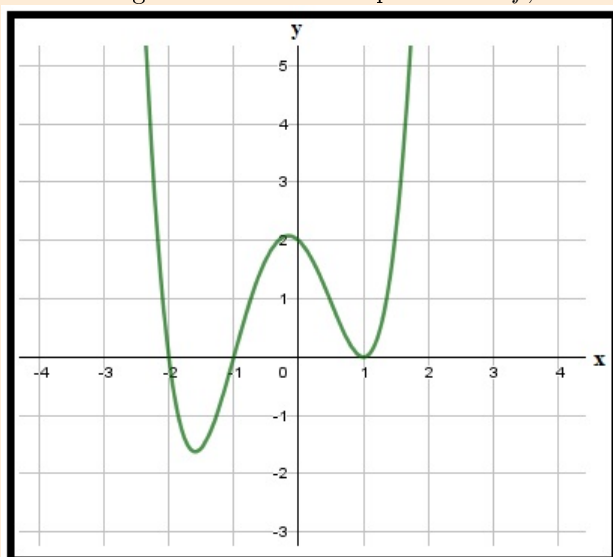
$x = \frac{1,7}{\cos(30^\circ)}$

$x = 1,7 \cdot \cos(30^\circ)$

$x = \frac{1,7}{\sin(30^\circ)}$

### Ítem 8

Observe el gráfico de la función polinómica  $f$ , e indique cuál de las afirmaciones es verdadera:



La imagen de la función es el conjunto de los números reales.

La función tiene raíces en 1; -1 y -2.

La función interseca al eje de las ordenadas en el punto  $(2, 0)$ .

$f(0) = 1$ .

Ítem 9

Se encuestó a 32 dueños de restaurantes de Santa Rosa y se les preguntó cuál era el material que reciclaban mayoritariamente. Los resultados se muestran en el siguiente gráfico.

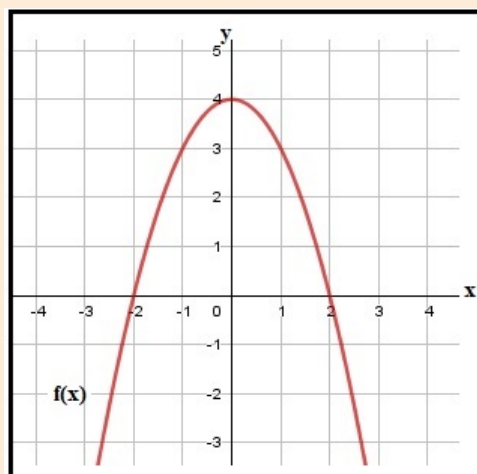


Indique cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera.

- El material más reciclado es el vidrio..
- La mitad de los encuestados no reciclan nada..
- Hay más dueños que reciclan plásticos que vidrios..
- La cantidad de dueños que reciclan cartón duplica a los que reciclan plásticos.

Ítem 10

Observe el gráfico de la función  $f$  e indique la expresión que la representa:



- $y = 2x - 4$
- $y = -x^2 - 4$
- $y = -x^2 + 4$
- $y = x^2 + 4$

## Apéndice B

# Datos

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	18	M	Toay	La Pampa	IRNyMA	No	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	17	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
3	19	M	Toay	La Pampa	PCB	No	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
4	22	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
5	19	F	Neuquén	Neuquén	IRNyMA	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
6	29	M	Toay	La Pampa	PC	Sí	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7	19	M	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
8	18	F	Francisco Made- ro	Buenos Aires	IRNyMA	Sí	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
9	18	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
10	18	F	Pehuajo	Buenos Aires	IRNyMA	Sí	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
11	17	M	Santa Rosa	La Pampa	LCB	Sí	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
12	23	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
13	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PCB	Sí	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
14	20	F	Santa Rosa	La Pampa	PQ	No	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
15	18	F	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
16	22	F	Toay	La Pampa	LCB	Sí	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
17	18	F	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
18	19	M	Telén	La Pampa	LG	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
19	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
20	18	M	Toay	La Pampa	LG	Sí	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
21	18	F	General Pico	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
22	17	M	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
23	20	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
24	18	F	Trenel	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
25	23	F	Trenel	La Pampa	PC	No	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
26	19	F	Toay	La Pampa	PC	No	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
27	19	M	Intendente Alvear	La Pampa	LCB	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
28	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PCB	No	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1

Sigue en la página siguiente...

APÉNDICE B. DATOS

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29	18	M	Victorica	La Pampa	LG	No	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
30	21	M	Intendente Alvear	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0
31	18	M	Toay	La Pampa	PC	Sí	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
32	17	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
33	20	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
34	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
35	18	M	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1
36	19	F	La Reforma	La Pampa	PCB	No	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
37	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
38	19	F	Macachín	La Pampa	LG	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
39	17	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
40	19	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
41	17	F	Santa Rosa	La Pampa	LCB	Sí	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
42	20	F	Trenque Lauquen	Buenos Aires	IRNyMA	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
43	18	F	Colonia Barón	La Pampa	LG	Sí	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
44	19	F	Rufino	Santa Fe	IRNyMA	Sí	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
45	18	M	Intendente Alvear	La Pampa	LCB	Sí	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
46	23	M	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	No	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
47	18	M	Victorica	La Pampa	LG	Sí	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
48	17	F	Intendente Alvear	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
49	21	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
50	17	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
51	18	F	Ceballos	La Pampa	PCB	Sí	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
52	21	M	Santa Rosa	La Pampa	PCB	No	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
53	18	F	Macachín	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
54	18	F	Coronel Hilario Lagos	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
55	19	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
56	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
57	22	M	La Reforma	La Pampa	LCB	Sí	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
58	19	M	General Acha	La Pampa	LQ	No	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
59	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LCB	Sí	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
60	21	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
61	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LCB	Sí	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
62	17	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
63	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
64	21	F	Villa Mercedes	San Luis	IRNyMA	Sí	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
65	17	F	Toay	La Pampa	PCB	Sí	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
66	29	F	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
67	17	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1

Sigue en la página siguiente...

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
68	22	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
69	18	F	General Acha	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
70	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	PCB	Sí	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
71	17	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
72	24	M	Salliqueló	Buenos Aires	IRNyMA	Sí	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
73	21	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	No	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
74	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	LCB	Sí	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
75	18	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
76	18	F	Pellegrini	Buenos Aires	IRNyMA	Sí	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
77	18	F	Pellegrini	Buenos Aires	IRNyMA	Sí	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
78	17	M	Toay	La Pampa	LG	Sí	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
79	21	M	General Pico	La Pampa	LG	Sí	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
80	20	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
81	20	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
82	20	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
83	22	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
84	22	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
85	22	F	Santa Rosa	La Pampa	LCB	No	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
86	24	M	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
87	21	M	Santa Rosa	La Pampa	LCB	No	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
88	22	M	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
89	18	F	General Pico	La Pampa	LCB	Sí	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
90	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
91	20	M	Victorica	La Pampa	PC	Sí	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
92	20	F	Macachín	La Pampa	PCB	Sí	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
93	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
94	25	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	No	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
95	18	F	General Pico	La Pampa	LCB	Sí	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
96	23	M	Ingeniero Luiggi	La Pampa	PC	Sí	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
97	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0
98	25	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	No	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
99	21	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	No	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
100	17	M	Toay	La Pampa	LM	Sí	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
101	23	F	General Acha	La Pampa	PM	No	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
102	23	F	General Acha	La Pampa	PM	No	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
103	18	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
104	25	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
105	24	M	Conhello	La Pampa	PM	No	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1
106	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
107	25	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
108	18	F	Ingeniero Luiggi	La Pampa	PM	Sí	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
109	20	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
110	18	F	Toay	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
111	19	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	Sí	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1

Sigue en la página siguiente...

APÉNDICE B. DATOS

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
112	19	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
113	21	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
114	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
115	21	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
116	17	F	General Acha	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
117	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
118	21	F	Telén	La Pampa	PM	No	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
119	17	F	General Acha	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
120	17	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
121	31	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
122	17	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
123	19	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
124	18	F	Ingeniero Luiggi	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
125	17	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
126	19	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
127	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
128	18	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
129	19	M	25 de Mayo	La Pampa	LCB	Sí	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
130	18	M	Ulapes	La Rioja	PM	Sí	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
131	20	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
132	18	F	Salliqueló	Buenos Aires	PM	Sí	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
133	21	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
134	17	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
135	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	No	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
136	46	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
137	20	M	Bernasconi	La Pampa	PC	Sí	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
138	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
139	20	M	Rucanelo	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
140	20	F	Cuchillo-Có	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
141	18	F	Eduardo Castex	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
142	25	M	Córdoba	Córdoba	LM	Sí	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
143	18	F	Toay	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
144	19	F	Toay	La Pampa	PM	Sí	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
145	18	F	Toay	La Pampa	PM	No	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
146	17	F	3 de Febrero	Buenos Aires	PM	Sí	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
147	19	F	Ingeniero Luiggi	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
148	19	M	General Pico	La Pampa	PM	Sí	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
149	20	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	No	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
150	19	M	Quemú Quemú	La Pampa	PM	Sí	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
151	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	No	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
152	20	F	General Acha	La Pampa	LM	No	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
153	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
154	19	M	General Pico	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
155	18	M	Quemú Quemú	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0

Sigue en la página siguiente...

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
156	20	M	Quemú Quemú	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
157	19	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
158	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
159	25	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	No	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
160	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	No	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
161	24	F	General Acha	La Pampa	PM	No	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
162	19	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
163	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
164	37	F	Caracas	Venezuela	PM	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
165	17	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
166	31	F	Caleufú	La Pampa	PM	Sí	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
167	19	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
168	19	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
169	22	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
170	19	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
171	25	M	Alpachiri	La Pampa	PC	No	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
172	17	F	Toay	La Pampa	PQ	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
173	17	M	Santa Rosa	La Pampa	LM	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
174	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
175	22	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
176	20	F	Santa Rosa	La Pampa	LCB	No	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
177	23	M	Santa Rosa	La Pampa	LCB	Sí	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
178	24	M	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
179	20	M	Unión	San Luis	PQ	No	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
180	18	F	General Villegas	Buenos Aires	PC	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
181	18	F	General Villegas	Buenos Aires	PC	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
182	20	F	Santa Rosa	La Pampa	PC	No	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
183	19	F	Lonquimay	La Pampa	LCB	Sí	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
184	21	F	Ingeniero Luiggi	La Pampa	PCB	No	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
185	19	M	Santa Rosa	La Pampa	LCB	No	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
186	18	F	Santa Rosa	La Pampa	PC	Sí	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
187	24	M	Cochabamba	Cercado, Bolivia	PM	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
188	32	M	General Pico	La Pampa	PM	Sí	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
189	19	F	La Humada	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
190	32	F	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
191	28	M	Santa Rosa	La Pampa	PM	Sí	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
192	19	F	Villa Maza	Buenos Aires	LM	Sí	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
193	23	M	General Acha	La Pampa	PC	Sí	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
194	33	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
195	32	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
196	45	M	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
197	19	F	Toay	La Pampa	IRNyMA	Sí	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
198	19	F	Santa Rosa	La Pampa	LG	No	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0

Sigue en la página siguiente...

APÉNDICE B. DATOS

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
199	20	F	Puerto Deseado	Santa Cruz	IRNyMA	Sí	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
200	21	M	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
201	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
202	21	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
203	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
204	28	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
205	27	M	Santa Rosa	La Pampa	LF	Sí	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
206	20	F	La Humada	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
207	23	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
208	18	F	La Toma	San Luis	LQ	Sí	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
209	18	F	Neuquén	Neuquén	LF	Sí	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
210	20	F	Intendente Alvear	La Pampa	PF	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
211	17	F	Victorica	La Pampa	LQ	Sí	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0
212	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
213	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LCB	Sí	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
214	19	F	Río Gallegos	Santa Cruz	LQ	No	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
215	19	M	Santa Rosa	La Pampa	LQ	No	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0
216	24	M	Santa Rosa	La Pampa	LF	No	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
217	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0
218	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LF	Sí	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
219	22	F	Salta	Salta	LQ	Sí	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
220	19	M	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
221	18	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
222	17	F	Santa Rosa	La Pampa	PQ	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
223	28	F	Santa Rosa	La Pampa	PF	Sí	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
224	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LF	Sí	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
225	18	F	Winifreda	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
226	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LG	Sí	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
227	32	M	Carranqueras	Chaco	TIG	Sí	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
228	18	M	Victorica	La Pampa	LG	Sí	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
229	18	M	Victorica	La Pampa	LG	Sí	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
230	18	M	Victorica	La Pampa	LG	Sí	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
231	20	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	No	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
232	17	F	Santa Rosa	La Pampa	PF	Sí	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
233	18	M	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
234	21	M	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
235	21	F	Guatraché	La Pampa	LQ	No	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
236	21	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
237	20	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	Sí	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
238	40	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
239	40	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
240	28	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
241	22	M	Rancul	La Pampa	LG	No	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0

Sigue en la página siguiente...



ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
242	21	M	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	Sí	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
243	26	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
244	29	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
245	33	M	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
246	28	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
247	27	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
248	23	M	Quemú Quemú	La Pampa	IRNyMA	No	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
249	27	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
250	35	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
251	38	M	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
252	33	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
253	34	F	Parera	La Pampa	TIG	Sí	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
254	18	M	Santa Rosa	La Pampa	PF	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
255	25	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
256	45	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
257	34	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
258	26	F	General Acha	La Pampa	TIG	No	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
259	39	F	Pico Truncado	Santa Cruz	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
260	29	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
261	32	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
262	38	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
263	38	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
264	33	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
265	43	F	Adolfo Praet	Van La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
266	20	F	Adolfo Praet	Van La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
267	38	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
268	19	M	Santa Rosa	La Pampa	LF	Sí	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
269	32	M	Chivilcoy	Buenos Aires	TIG	Sí	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
270	50	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
271	24	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
272	37	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
273	28	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
274	19	F	Villa Mirasol	La Pampa	IRNyMA	No	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
275	23	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
276	30	M	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
277	34	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
278	25	F	Telén	La Pampa	TIG	No	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
279	19	F	Santa Rosa	La Pampa	LQ	No	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
280	18	F	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
281	37	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
282	27	M	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

Sigue en la página siguiente...

APÉNDICE B. DATOS

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
283	38	F	Adolfo Praet	Van La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
284	17	F	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
285	23	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
286	20	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
287	36	M	Adolfo Praet	Van La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
288	36	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1
289	22	M	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
290	21	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
291	28	F	General Pico	La Pampa	TIG	Sí	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
292	28	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0
293	45	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
294	36	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
295	20	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
296	20	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
297	21	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
298	33	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
299	34	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
300	37	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
301	40	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
302	29	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
303	30	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
304	23	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
305	22	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
306	31	F	Realicó	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
307	23	F	General Acha	La Pampa	TIG	No	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
308	20	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
309	29	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
310	29	M	Puelches	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
311	41	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
312	25	F	Telén	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
313	27	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
314	22	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
315	19	M	Formosa	Formosa	TIG	Sí	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
316	21	F	Embarcacion	Salta	TIG	Sí	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
317	18	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
318	20	F	Formosa	Formosa	TIG	Sí	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
319	18	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
320	29	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
321	33	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
322	40	M	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
323	23	M	Quemú Quemú	La Pampa	IRNyMA	Sí	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
324	22	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0

Sigue en la página siguiente...

ID	Edad	Sexo	Localidad	Provincia	Carrera	Ing.	Ítem									
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
325	52	M	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
326	44	M	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
327	32	F	Telén	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
328	23	F	General Acha	La Pampa	TIG	Sí	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1
329	19	M	Telén	La Pampa	TIG	Sí	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
330	21	F	Victorica	La Pampa	TIG	Sí	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
331	21	F	Santa Rosa	La Pampa	IRNyMA	No	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
332	19	F	Santa Rosa	La Pampa	PF	No	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0

**Cuadro B.1:** Datos resultantes de aplicar la Prueba Diagnóstico en Matemática 2020 a los estudiantes que conforman la muestra.

## Apéndice C

# Script en R

```
#Carga y descripción de los datos#
base <- readXL("C:/Users/Janina/OneDrive/Tesis/Tesis Janina Roldan/Análisis estadístico/base.xlsx", rownames=FALSE,
header=TRUE, na="" sheet="Respuestas de formulario 1", stringsAsFactors=TRUE)

local({
  .Table <- with(base, table(Ingresante))
  cat("\ncounts:\n")
  print(.Table)
  cat("\npercentages:\n")
  print(round(100*.Table/sum(.Table), 2))
})

local({
  .Table <- with(base, table(Carrera))
  cat("\ncounts:\n")
  print(.Table)
  cat("\npercentages:\n")
  print(round(100*.Table/sum(.Table), 2))
})

local({
  .Table <- with(base, table(Sexo))
  cat("\ncounts:\n")
  print(.Table)
  cat("\npercentages:\n")
  print(round(100*.Table/sum(.Table), 2))
}) X=base[,8:17]

dsc <- descript(X,n.print=100);dsc
MCT=tetrachoric(X)$rho; round(MCT,2)
cor.plot(MCT,main="Correlación Tetracórica entre pares de ítem",show.legend=TRUE)

#Análisis Factorial Exploratorio#
det(MCT)
cortest.bartlett(MCT, n = 332)
KMO(MCT)
```

```

AF=fa(MCT, n.obs=332, nfactors=10, rotate="none", fm="ml"); AF
round(AF$values,4)
plot(AF$values, type="", pch=16, main="Scree.Plot", ylab="Autovalore", xlab="Factor")

##Ajuste de los Modelos de Teoría de Respuesta al Ítem##

#Modelo de Rasch#
fit0 <- rasch(X, constraint = cbind(length(X) + 1, 1))
summary(fit0)
coef(fit0, prob = TRUE, order = TRUE)

#Gráficos
plot(fit0, main="Curva Característica del ítem",xlab="Habilidad", ylab="Probabilidad", legend = TRUE, cx = "bottomright",
lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3, cex = 1.1,col=palette("Tableau 10"))
plot(fit0, main="Función de Información del ítem",xlab="Habilidad", ylab="Información",legend = TRUE, type =
"IIC", annot = FALSE, lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3,col=palette("Tableau 10"))
plot(fit0, main="Función de Información del Test",xlab="Habilidad", ylab="Información", type = "IIC", items =
0, lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3,col="#5FB0B7")

#Información
information(fit0,c(-4,0))
information(fit0,c(0,4))
info1=NULL
for (i in 1: 10) {
  información=information(fit0, c(-4, 0),items=c(i))
  info1=rbind(info1, información)}
info2=NULL
for (i in 1: 10) {
  información=information(fit0, c(0,4),items=c(i))
  info2=rbind(info2, información)}
info=cbind(info1[,1],info2[,1])
colnames(info)<-c("(-4, 0)","(0, 4)")
rownames(info)<-c("Ítem 1","Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9","Ítem 10")
info

#Unidimensionalidad unidimTest(fit0,X)

#Independencia Local
m=margins(fit0, type = "two-way", nprint = 5)
PR_00=m$margins[,1]
PR_10=m$margins[,2]
PR_01=m$margins[,3]
PR_11=m$margins[,4]
chi=numeric()
suma=numeric()
for(i in 1:45){
  suma[i]=((PR_00[i,3]-PR_00[i,4])^2)/PR_00[i,4]
}

```

APÉNDICE C. SCRIPT EN R

```

suma[2]=((PR_10[i,3]-PR_10[i,4])^2)/PR_10[i,4]
suma[3]=((PR_01[i,3]-PR_01[i,4])^2)/PR_01[i,4]
suma[4]=((PR_11[i,3]-PR_11[i,4])^2)/PR_11[i,4]
chi[i]=suma[1]+suma[2]+suma[3]+suma[4] }
LD=cbind(PR_00[,1:2],chi)
colnames(LD)<-c("Ítem","Ítem","X2")
subset(LD,LD[,“X2”]>10)
indep=matrix(nrow=9,ncol=9)
colnames(indep)<-c("Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9","Ítem 10")
rownames(indep)<-c("Ítem 1","Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9")
fila=0
for(i in 1:9){
  for(j in i:9){
    fila=fila+1
    indep[i,j]=LD[fila,3]
  }}
indep

#Medidas de bondad de ajuste
GoF.rasch(fit0, B = 199)

#Residuos marginales a dos vías:
par(mfrow = c(2, 2))
plot(PR_00[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_10[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_01[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_11[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

#Residuos marginales a tres vías:
m=margins(fit0, type = "three-way", nprint = 5)
PR_000=m$margins[,1]
PR_100=m$margins[,2]
PR_010=m$margins[,3]
PR_110=m$margins[,4]
PR_001=m$margins[,5]
PR_101=m$margins[,6]
PR_011=m$margins[,7]
PR_111=m$margins[,8]

par(mfrow = c(2, 4))
plot(PR_000[,6],xaxt = "n", main="PR (0,0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_100[,6],xaxt = "n", main="PR (1,0,0)", ylab="Residuos")

```

```

abline(h=3.5)
plot(PR_010[,6],xaxt = "n", main="PR (0,1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_110[,6],xaxt = "n", main="PR (1,1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_001[,6],xaxt = "n", main="PR (0,0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_101[,6],xaxt = "n", main="PR (1,0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_011[,6],xaxt = "n", main="PR (0,1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_111[,6],xaxt = "n", main="PR (1,1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

#Modelo Logístico de 1 parámetro#

fit1 <- rasch(X)
summary(fit1)
coef(fit1, prob = TRUE, order = TRUE)
anova(fit0,fit1)

plot(fit1, main="Curva Característica del ítem",xlab="Habilidad", ylab="Probabilidad", legend = TRUE, cx = "bottomright",
lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3, cex = 1.1,col=palette("Tableau 10"))
plot(fit1, main="Función de Información del ítem",xlab="Habilidad", ylab="Información",legend = TRUE, type = "l",
annot = FALSE, lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3,col=palette("Tableau 10"))
plot(fit1, main="Función de Información del Test",xlab="Habilidad", ylab="Información", type = "l", items = 0,
lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3,col="#5FB0B7")

#Información
information(fit1,c(-4,0))
information(fit1,c(0,4))
info1=NULL
for (i in 1: 10) {
  información=information(fit1, c(-4, 0),items=c(i))
  info1=rbind(info1, información)}
info2=NULL
for (i in 1: 10) {
  información=information(fit1, c(0,4),items=c(i))
  info2=rbind(info2, información)}
info=cbind(info1[,1],info2[,1])
colnames(info)<-c("(-4, 0)","(0, 4)")
rownames(info)<-c("Ítem 1","Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9","Ítem 10")
info

#Unidimensionalidad
unidimTest(fit1,X)

```

## APÉNDICE C. SCRIPT EN R

```
#Independencia Local
m=margins(fit1, type = "two-way", nprint = 5)
PR_00=m$margins[,1]
PR_10=m$margins[,2]
PR_01=m$margins[,3]
PR_11=m$margins[,4]

chi=numeric()
suma=numeric()
for(i in 1:45){
  suma[1]=((PR_00[i,3]-PR_00[i,4])^2)/PR_00[i,4]
  suma[2]=((PR_10[i,3]-PR_10[i,4])^2)/PR_10[i,4]
  suma[3]=((PR_01[i,3]-PR_01[i,4])^2)/PR_01[i,4]
  suma[4]=((PR_11[i,3]-PR_11[i,4])^2)/PR_11[i,4]
  chi[i]=suma[1]+suma[2]+suma[3]+suma[4] }
LD=cbind(PR_00[,1:2],chi)
colnames(LD)<-c("Ítem","Ítem","X2")
subset(LD,LD[, "X2"]>10)
indep=matrix(nrow=9,ncol=9)
colnames(indep)<-c("Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9","Ítem 10")
rownames(indep)<-c("Ítem 1","Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9")
fila=0
for(i in 1:9){
  for(j in i:9){
    fila=fila+1
    indep[i,j]=LD[fila,3]
  }}
indep

#Medidas de bondad de ajuste
GoF.rasch(fit1, B = 199)
item.fit(fit1, G = 10, FUN = mean, simulate.p.value = TRUE, B = 100)

#Residuos marginales a dos vías:
par(mfrow = c(2, 2))
plot(PR_00[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_10[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_01[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_11[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

#Residuos marginales a tres vías:
m=margins(fit1, type = "three-way", nprint = 5)
PR_000=m$margins[,1]
```



```

PR_100=m$margins[,2]
PR_010=m$margins[,3]
PR_110=m$margins[,4]
PR_001=m$margins[,5]
PR_101=m$margins[,6]
PR_011=m$margins[,7]
PR_111=m$margins[,8]

par(mfrow = c(2, 4))
plot(PR_000[,6],xaxt = "n", main="PR (0,0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_100[,6],xaxt = "n", main="PR (1,0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_010[,6],xaxt = "n", main="PR (0,1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_110[,6],xaxt = "n", main="PR (1,1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_001[,6],xaxt = "n", main="PR (0,0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_101[,6],xaxt = "n", main="PR (1,0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_011[,6],xaxt = "n", main="PR (0,1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_111[,6],xaxt = "n", main="PR (1,1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

#Modelo Logístico de 2 parámetros
fit2<- ltm(X~ z1)
summary(fit2)
coef(fit2, prob = TRUE, order = TRUE)
anova(fit1,fit2)

plot(fit2, main="Curva Característica del ítem",xlab="Habilidad", ylab="Probabilidad", legend = TRUE, cx = "bottomright",
lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3, cex = 1.1,col=palette("Tableau 10"))
plot(fit2, main="Función de Información del ítem",xlab="Habilidad", ylab="Información",legend = TRUE, type = "IC",
annot = FALSE, lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3,col=palette("Tableau 10"))
plot(fit2, main="Función de Información del Test",xlab="Habilidad", ylab="Información", type = "IC", items = 0,
lwd = 3, cex.main = 1.5, cex.lab = 1.3,col="#5FB0B7")

#Información
information(fit2,c(-4,0))
information(fit2,c(0,4))
info1=NULL
for (i in 1: 10) {
  información=information(fit2, c(-4, 0),items=c(i))
  info1=rbind(info2, información)}

```

## APÉNDICE C. SCRIPT EN R

```
info2=NULL
for (i in 1: 10) {
  información=information(fit2, c(0,4),items=c(i))
  info2=rbind(info2, información)}
info=cbind(info1[,1],info2[,1])
colnames(info)<-c("(-4, 0)","(0, 4)")
rownames(info)<-c("Ítem 1","Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9","Ítem 10")
info

#Unidimensionalidad
unidimTest(fit2,X)

#Independencia Local
m=margins(fit2, type = "two-way", nprint = 5)
PR_00=m$margins[,1]
PR_10=m$margins[,2]
PR_01=m$margins[,3]
PR_11=m$margins[,4]

chi=numeric()
suma=numeric()
for(i in 1:45){
  suma[1]=((PR_00[i,3]-PR_00[i,4])2)/PR_00[i,4]
  suma[2]=((PR_10[i,3]-PR_10[i,4])2)/PR_10[i,4]
  suma[3]=((PR_01[i,3]-PR_01[i,4])2)/PR_01[i,4]
  suma[4]=((PR_11[i,3]-PR_11[i,4])2)/PR_11[i,4]
  chi[i]=suma[1]+suma[2]+suma[3]+suma[4] }
LD=cbind(PR_00[,1:2],chi)
colnames(LD)<-c("Ítem","Ítem","X2")
subset(LD,LD[, "X2"]>10)
indep=matrix(nrow=9,ncol=9)
colnames(indep)<-c("Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9","Ítem 10")
rownames(indep)<-c("Ítem 1","Ítem 2","Ítem 3","Ítem 4","Ítem 5","Ítem 6","Ítem 7","Ítem 8","Ítem 9")
fila=0
for(i in 1:9){
  for(j in i:9){
    fila=fila+1
    indep[i,j]=LD[fila,3]
  }}
indep

#Medidas de bondad de ajuste
item.fit(fit2, G = 10, FUN = mean, simulate.p.value = TRUE, B = 100)
person.fit(fit2, alternative = c("less", "greater", "two.sided"), resp.patterns = NULL, FUN = NULL, simulate.p.value = TRUE, B = 1000)
y_1=numeric(2)
y=numeric(2)
```

```

N=length(patron$p.values)
for(i in 1:N) {
  if (patron$p.values[i]<0.05) {
    y_1[1]=i
    y_1[2]=patron$p.values[i]
    y=rbind(y,y_1) }}
y=y[2:9,]
w=matrix(nrow=8,ncol=10)
for(i in 1:8){
  w[i,]=patron$resp.patterns[y[i,1],]}
y=cbind(y[,1],w,y[,2])
dimnames(y)=list(c("1", "2", "3","4", "5", "6", "7", "8"), c("PR","Ítem.1", "Ítem.2", "Ítem.3", "Ítem.4", "Ítem.5",
"Ítem.6", "Ítem.7","Ítem.8", "Ítem.9", "Ítem.10","Pr(<Lz)")); y

  #Residuos marginales a dos vías:
par(mfrow = c(2, 2))
plot(PR_00[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_10[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_01[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_11[,5],xaxt = "n", main="Patrón de Respuesta (1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

  #Residuos marginales a tres vías:
m=margins(fit2, type = "three-way", nprint = 5)
PR_000=m$margins[,1]
PR_100=m$margins[,2]
PR_010=m$margins[,3]
PR_110=m$margins[,4]
PR_001=m$margins[,5]
PR_101=m$margins[,6]
PR_011=m$margins[,7]
PR_111=m$margins[,8]

  par(mfrow = c(2, 4))
plot(PR_000[,6],xaxt = "n", main="PR (0,0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_100[,6],xaxt = "n", main="PR (1,0,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_010[,6],xaxt = "n", main="PR (0,1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_110[,6],xaxt = "n", main="PR (1,1,0)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_001[,6],xaxt = "n", main="PR (0,0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

```

## APÉNDICE C. SCRIPT EN R

```
plot(PR_101[,6],xaxt = 'n', main="PR (1,0,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_011[,6],xaxt = 'n', main="PR (0,1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)
plot(PR_111[,6],xaxt = 'n', main="PR (1,1,1)", ylab="Residuos")
abline(h=3.5)

#Modelo Logístico de 3 parámetros#
fit3 <- tpm(X, max.guessing = 1)
coef(fit3, prob = TRUE, order = TRUE)
anova(fit2,fit3)

##Estimación de la Habilidad en Matemática##
habilidad<-ltm::factor.scores(fit2)
summary(habilidad$score.dat$z1)
var(habilidad$score.dat$z1)
sd(habilidad$score.dat$z1)
hab=habilidad$score.dat$z1
plot(habilidad, main="Habilidad en Matemática.",xlab="Habilidad", ylab="Densidad", annot = FALSE, lwd = 3, cex.main
= 1.5, cex.lab = 1.3, col=palette("Tableau 10"))
Boxplot(hab, main="BoxPlot: Habilidad en Matemática.",ylab="Habilidad", col="#ECC3AC")

#Busco el 25% de las habilidades menores.
conteo=0
pos=numeric()
j=1
for(i in 1:173){
  if (hab[i] <-0.6926){
    conteo=conteo+1
    pos[j]=i
    j=j+1 } }
grupo=numeric(173)
for(i in 1:173){
  for (j in 1:conteo){
    if (i==pos[j]) {
      grupo[i]=1 } } }
hab_mat=cbind(habilidad$score,grupo)

##Asigno la habilidad en matemática a cada alumno y el grupo##
HM=matrix(nrow = 332, ncol = 2)
for(i in 1:332){
  j=0   parar="FALSE"   while(parar=="FALSE"){   j=j+1   control=0   for (k in 8:17){   if
(base[i,k]==hab_mat[j,k-7]){control=control+1} }   if (control==10){
  HM[i,1]=hab_mat[j,13]
  HM[i,2]=hab_mat[j,15]
  parar="TRUE"} } }
```

```

baseHM=cbind(base,HM)
names(baseHM)[c(18,19)] <- c("habilidad","grupo")
baseHM <- within(baseHM, {grupo <- as.factor(grupo)})

grupoEdad=numeric()
for(i in 1:332){
  if(baseHM[i,2]<=19){grupoEdad[i]=« = 19 años"}
  else {grupoEdad[i]=» 19 años"} }
baseHM=cbind(baseHM,grupoEdad)

grupoProv=numeric()
for(i in 1:332){
  if(baseHM[i,5]=="La Pampa") { grupoProv[i]="Si"}
  else {grupoProv[i]="No"} }
baseHM=cbind(baseHM,grupoProv)

numSummary(baseHM[, "habilidad", drop=FALSE], groups=baseHM$Carrera, statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles"),
quantiles=c(0,.25,.5,.75,1))
numSummary(baseHM[, "habilidad", drop=FALSE], groups=baseHM$Ingresante, statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles"),
quantiles=c(0,.25,.5,.75,1))
numSummary(baseHM[, "habilidad", drop=FALSE], groups=baseHM$grupoEdad, statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles"),
quantiles=c(0,.25,.5,.75,1))
numSummary(baseHM[, "habilidad", drop=FALSE], groups=baseHM$grupoProv, statistics=c("mean", "sd", "IQR", "quantiles"),
quantiles=c(0,.25,.5,.75,1))

  Boxplot(habilidad~Ingresante, data=baseHM, id=list(method="z"), xlab=, ylab="Habilidad", main="Habilidad
en Matemática por Condición de estudiante", col="#ECC6AC")
Boxplot(habilidad~Carrera, data=baseHM, id=list(method="z"), xlab=, ylab="Habilidad", main="Habilidad en Matemática
por Carrera", col="#ECC6AC")
Boxplot(habilidad~grupoEdad, data=baseHM, id=list(method="z"), xlab="Edad", ylab="Habilidad", main="Habilidad
en Matemática por Edad", col="#ECC6AC")
Boxplot(habilidad~grupoProv, data=baseHM, id=list(method="z"), xlab="Lugar de origen", ylab="Habilidad", main="Habilidad
en Matemática por Lugar de Origen", col="#ECC6AC")
print(baseHM[72,])
print(baseHM[307,])
print(baseHM[205,])

#Niveles bajos de habilidad
nivel_menor=subset(baseHM, grupo == "1") local({ .Table <- with(nivel_menor, table(Carrera)) cat("\ncounts:\n")
print(.Table) cat("\npercentages:\n") print(round(100*.Table/sum(.Table), 2)) })
local({ .Table <- with(nivel_menor, table(Ingresante)) cat("\ncounts:\n") print(.Table) cat("\npercentages:\n")
print(round(100*.Table/sum(.Table), 2)) })
local({ .Table <- with(nivel_menor, table(Sexo)) cat("\ncounts:\n") print(.Table) cat("\npercentages:\n") print(round(100
2)) })

```



# Bibliografía

- [1] Akaike, H. (1974), A New Look at the Statistical Model Identification. *Transactions on Automatic Control*, AC-19(6), 716-723.
- [2] Andrade, D.F, Tavares, H.R., y da Cunha Valle, R. (2000). *Teoría da Resposta ao Item: Conceitos e Aplicaciones*. 14 Simposio Nacional de Probabilidade e Estatística. SINAPE, Caxambu, MG, Brasil, 154 páginas.
- [3] Antonio Rojas, D. S. (2013). *Modelo Multidimensional de Teoría de Respuesta al Item Jerárquico*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. [Link](#)
- [4] Attorresi, H., Lozzia, G. Abal, F. Galibert, M. y Agerri, M. (2009). Teoría de Respuesta al ítem. Conceptos básicos y aplicaciones para la medición de constructos psicológicos. *Revista Argentina de clínica psicológica*, 17, 179-188.
- [5] Aune, S. y Attorresi, H. F. (2019). *Teoría de la respuesta al ítem: Su utilización en América Latina. Supuestos de unidimensionalidad e independencia local* [Publicación en Actas]. XI Congreso Internacional de Investigación y Práctica Profesional en Psicología. XXVI Jornadas de Investigación. XV Encuentro de Investigadores en Psicología del MERCOSUR. I Encuentro de Investigación de Terapia Ocupacional. I Encuentro de Musicoterapia. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina. [Link](#)
- [6] Bartholomew, D.J., Steele, F., Moustaki, I. y Galbraith, J.I. (2008). *Analysis of Multivariate Social Science Data*. (2ª ed). Taylor & Francis Group, LLC.

- [7] Bazán, J. Valdivieso, L. Calderón, A. (3-5 de febrero de 2010). *Enfoque Bayesiano en Modelos de Teoría de Respuesta al Ítem* [Minicurso]. I Jornada Internacional de Probabilidad y Estadística, Universidad Católica de Perú, Lima, Perú.
- [8] Birnbaum, A. (1968). Some latent trait models and their use in inferring an examinee's ability. En F.M. Lord y M. Novick, *Statistical theories of mental scores*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [9] Bock, R. D. y Aitkin, M. (1981). Marginal maximum likelihood estimation of item parameters: An application of a EM algorithm. *Psychometrika*, 46, 433-459.
- [10] Bock, R. D. y Lieberman, M. (1970). Fitting a response model for n dichotomously scored items. *Psychometrika*, 35, 179-197.
- [11] Burga León, A. (2006). La unidimensionalidad de un instrumento de medición: perspectiva factorial. *Revista de Psicología de la PUCP*. 24(1), 53-80.
- [12] Carmines, E.G., y Zeller, R.A. (1979). *Reliability and validity assessment*. Londres: Sage.
- [13] Carvajal Álzate, D.E, Méndez Sánchez, H. y Torres Angulo, M.B. (2016). *Análisis de la confiabilidad y de algunos parámetros psicométricos de un test realizado en el colegio Vista Bella de la ciudad de Bogotá* [Trabajo de grado]. [Link](#)
- [14] Cattell, R. (1966). The Scree Test for the number of factors. *Multivariate Behavioral Research*, 1, 141-161.
- [15] Chen, W. y Thissen, D. (1997). Local dependence indices for item pairs using item response theory. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 22(3), 265-289. <https://doi.org/10.3102/10769986022003265>
- [16] Cortada de Kohan, N. (2004). Teoría de Respuesta al Ítem: Supuestos Básicos. *Evaluar*, (4), 95-110.
- [17] Debera, L. y Nalbarte, L. (2006). *Pruebas diagnósticas: una aplicación a la teoría de respuesta al ítem, aproximación clásica y bayesiana*. Serie documentos de trabajo DT (06/01), Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. [Link](#)



- [18] Dempster, A., Laird, N., y Rubin, D. (1977). Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(1), 1-38. [Link](#)
- [19] Drasgow, F., Levine, M. V. y Williams, E. A. (1985). Appropriateness measurement with polychotomous item response models and standardized indices. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 38, 67-86.
- [20] Drasgow, F. y Lissak, R. (1983). Modified parallel analysis: a procedure for examining the latent dimensionality of dichotomously scored item responses. *Journal of Applied Psychology*, 68, 363- 373.
- [21] Ecurra Mayaute, L.M. (2011). Análisis psicométrico del Cuestionario de Honey y Alonso de Estilos de Aprendizaje (CHAEA) con los modelos de la Teoría Clásica de los Tests y de Rasch. *Persona*, 14, 71-109.
- [22] González Tirados, R.M. (1989). *Análisis de las causas del fracaso escolar en la Universidad politécnica de Madrid*. Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, España.
- [23] Gómez Benito, J. e Hidalgo Montesinos, M.D. (2003). Desarrollos recientes en psicometría. *Avances en Medición*, 1(1), 17-36. [Link](#)
- [24] Hambleton, R.K. y Swaminathan, H. (1985). *Item Response Theory. Principles and Applications*. Springer Science+Business Media, LLC. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1988-9>
- [25] Hattie, J. (1985). Methodology review: assessing unidimensionality of tests and ítems. *Applied Psychological Measurement*, 9(2), 139-164.
- [26] Horn, J. L. (1965). A rationale and test for the number of factors in a factor analysis. *Psychometrika*, 30, 179-185.
- [27] Instituto Nacional de Evaluación Educativa. (2016). *Pisa 2015. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe Español*. [Link](#)
- [28] Issac, E. y Keller, H. B. (1966). *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley & Sons.

- [29] Kaiser, H.F. (1960). The application of electronic computers to factor analysis. *Educational and Psychological Measurement*, 20, 141-151.
- [30] Kuna, H., Martínez García, R. y Villatoro, F. (2009). *Identificación de Causales de Abandono de Estudios Universitarios. Uso de Procesos de Explotación de Información*. IV Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, Universidad Nacional de La Plata. [Link](#)
- [31] León Carvajal, L. N. (2017). *Modelo TRI Logístico Para Un Trazo Latente Que Sigue Una Distribución Asimétrica*. [Tesis de Maestría Universidad Nacional de Colombia]. [Link](#)
- [32] Le Levine, M. and Rubin, D. (1979) Measuring the appropriateness of multiple-choice test scores. *Journal of Educational Statistics*, 4, 269-290.
- [33] Lloret Segura, S., Ferreres Traver, A., Hernández Baeza, A. y Tomás Marco, I. (2014). El Análisis Factorial Exploratorio de los Ítems: una guía práctica, revisada y actualizada. *Anales de Psicología*. 30 (3), 1151-1169. <http://dx.doi.org/10.6018/analesps.30.3.199361>
- [34] Lord, F. M. (1952). A theory of test scores. *Psychometric Monographs*, (7).
- [35] Lord, F. M. (1980). *Applications of item response theory to practical testing problems*. Hillsdale: Erlbaum Associates.
- [36] Lord, F. M. y Novick, M. R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*. New York: Addison-Wesley.
- [37] Luzardo, M. (2013). *Consistencia conjunta de las CCI y el rasgo en TRI multidimensional mediante regresión no paramétrica* [Tesis de Maestría. CSIC. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay]. [Link](#)
- [38] Martínez Arias, M.R. (1995). *Psicometría: Teoría de los Tests Psicológicos y Educativos*. Madrid: Síntesis.
- [39] Matas Terrón, A. (2010). *Introducción al análisis de la Teoría de Respuesta al ítem*. Aidesoc. [Link](#)

- [40] Ministerio de Cultura y Educación, Gobierno de La Pampa. (2013). *Materiales Curriculares: Matemática. Ciclo Orientado de la Educación Secundaria [Versión preliminar 2013.]* [Link](#)
- [41] Mislevy, R. J. (1986). Bayes modal estimation in item response models. *Psychometrika*, 51, 177-195.
- [42] Montoya Suárez, O. (2007). Aplicación del Análisis Factorial a la investigación de mercados. Caso de Estudio. *Scientia et Technica*, 13(35), 281-286.
- [43] Morales Vallejo, P. (2007). *La fiabilidad de los tests y escalas*. [Ahivo PDF]. [Link](#)
- [44] Muñiz, J. (1997). *Introducción a la teoría de respuesta a los ítems*. Madrid: Pirámide.
- [45] Muñiz, J. (2010). Las teorías de los tests: Teoría clásica y teoría de respuesta a los ítems. *Papeles del Psicólogo*, 31 (1), 57-66.
- [46] Muñiz, J. y Hambleton, R. K. (1992). Medio siglo de teoría de respuesta a los ítems. *Anuario de Psicología*, 52(1), 41-66.
- [47] Navas, M.J. (1994). Teoría Clásica de los Tests versus Teoría de Respuesta al Ítem. *Psicológica*, 15, 175-208.
- [48] Núñez Núñez, R. M. y López Pina, J.A. (2006). Técnicas para detectar patrones de respuesta atípicos. *Anales de Psicología*, 22(1), 43-154. [Link](#)
- [49] Pérez Gil, J. A. (s.f). *Modelos de Medición: Desarrollos actuales, supuestos, ventajas e inconvenientes*. Universidad de Sevilla. [Link](#)
- [50] Pérez, E.R. y Medrano, L. (2010). Análisis Factorial Exploratorio: Bases Conceptuales y Metodológicas. *Revista Argentina de Ciencias del Comportamiento*, 2(1), 58-66.
- [51] Ponsoda, V., Olea, J. y Revuelta, J. (1998). *Teoría de la respuesta al ítem* [Archivo PDF]. Universidad Autónoma de Madrid, España.
- [52] Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: Wiley & Sons.

- [53] Rasch, G. (1960). *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Copenhagen: The Danish Institute for Educational Research.
- [54] R Development Core Team. (2010). *The R Project for Statistical Computing (Versión 4.0.3)* [Software]. [Link](#)
- [55] Reckase, M. (1979). Unifactor latent trait models applied to multifactor tests: Results and implications. *Journal of Educational Statistics*, 4(3), 207-230.
- [56] Reise, S. (1990). A comparison of item- and person-fit methods of assessing model-data fit in IRT. *Applied Psychological Measurement*, 14 (2), 127-137.
- [57] Richardson, M. W. (1936). The relationship between difficulty and the differential validity of a test. *Psychometrika*, 1, 33-49.
- [58] Rizopoulos, D. (2006). ltm: An R Package for Latent Variable Modeling and Item Response Theory Analyses. *Journal of Statistical Software*, 17 (5).
- [59] Rizopoulos, D. (2018). *Latent Trait Models under IRT. Package "ltm"* [Archivo PDF]. [Link](#)
- [60] Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números: Revista de Didáctica de la Matemática*, 77, 35-49. [Link](#)
- [61] Sclove, S. L. (1987). Application of model-selection criteria to some problems in multivariate analysis. *Psychometrika*, 52, 333-343. <https://doi.org/10.1007/BF02294360>
- [62] Secretaría de Evaluación Educativa. (2013). *Operativo Nacional de Evaluación (ONE) 2013. Diagnóstico y consideraciones metodológicas necesarias para el análisis y difusión de sus resultados*. [Link](#)
- [63] Secretaría de Evaluación Educativa. (2016a). *Aprender 2016. Notas Metodológicas*. [Link](#)
- [64] Secretaría de Evaluación Educativa. (2016b). *Aprender 2016. Análisis de desempeños por capacidades y contenidos. Nivel secundario*. [Link](#)

- [65] Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *American Journal of Psychology*, 15, 72-101.
- [66] Spearman, C. (1907). Demonstration of formulae for true measurement of correlation. *American Journal of Psychology*, 18, 161-169.
- [67] Spearman, C. (1913). Correlations of sums and differences. *British Journal of Psychology*, 5, 417-426.
- [68] Sueiro, M. y Abad, F. (2009). Bondad de ajuste en ítems politómicos: tasas de error tipo I y potencia de tres índices de ajuste. *Psicothema*, 21(4), 639-645.
- [69] Tucker, L. R. (1946). Maximum validity of a test with equivalent items. *Psychometrika*, 11, 1-13.
- [70] Valdez, E. A., Román Pérez, R., Cubillas Rodríguez, M. J. y Moreno Celaya, I. (2008). ¿Deserción o autoexclusión? Un análisis de las causas de abandono escolar en estudiantes de educación media superior en Sonora, México. *Revista electrónica de investigación educativa*, 10(1), 1-16. [Link](#)
- [71] Wood, R. L., Wingersky, M.S. y Lord, F. M. (1976). *LOGIST: A computer program for estimating examinee ability and item characteristic curve parameters*. (Memorandum de Investigación 76-6). Princeton, Nueva Jersey, Educational Testing Service.
- [72] Yen, W.M. (1981). Using Simulation Results to Choose a Latent Trait Model. *Applied Psychological Measurement*, 5(2), 245-262.
- [73] Zwick, R. (1985). *Assessment of the dimensionality of NAEP year 15 reading data* (ETS Res. Rep. No. 86-4). Princeton: Educational Testing Service.