Operaciones financieras a tasas de interés y tasas de rendimiento variables. Tasas de interés y rendimiento promedio

Olga Graciela Andonian, Evelyn Mariel Rabbia

Ponencia presentada en XXXVI Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de Matemática Financiera realizado en 2015 por la Asociación de Profesores Universitarios de Matemática Financiera. Salta, Argentina

"OPERACIONES FINANCIERAS A TASAS DE INTERÉS Y TASAS DE RENDIMIENTO VARIABLES – TASAS DE INTERÉS Y RENDIMIENTO PROMEDIO"

DRA. ANDONIAN, Olga Graciela[1]
RABBIA, Evelín Mariel

Departamento de Estadística y Matemática
Instituto de Estadística y Demografía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Córdoba.

olga.andonian@gmail.com
everabbia@yahoo.com

[1]Docente-Investigadora del Instituto de Estadística y Demografía Hebe Goldengersch y del Departamento de Estadística y Matemática .FCE de la UNC.

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo, es considerar algunos aspectos relacionados con las tasas de interés y de rendimiento de las operaciones financieras, teniendo en cuenta el contexto y las diferentes situaciones que se pueden presentar en la valuación de las operaciones financieras básicas y complejas.

El análisis financiero puede realizarse en distintos momentos en el tiempo, al comienzo del período de análisis considerado para tomar decisiones futuras, y también, en situaciones en las que se requiere tener información respecto de los resultados obtenidos al final de un período de tiempo, cuando se quieren evaluar decisiones financieras ya tomadas.

El modelo de capitalización a tasa variable resulta interesante cuando se realiza un análisis ex post del rendimiento financiero de las operaciones, surgiendo el concepto de tasa de interés promedio. En un contexto inflacionario en las operaciones financieras sin cláusula de ajuste, el cálculo de las tasas de inflación, de rendimiento en términos reales y de rendimiento promedio resulta relevante.

OPERACIONES FINANCIERAS

Introducción

Matemática Financiera, como rama de las ciencias matemáticas, proporciona información cuantitativa para la toma de decisiones, es decir, es la disciplina que aplicada a la resolución de problemas de naturaleza económica-financiera, mediante el estudio analítico y sistemático de las operaciones financieras, brinda métodos, técnicas y modelos basados en el concepto dinámico de capital.

Como disciplina define conceptos básicos como: tasa de interés, tasas de descuento, tasas equivalentes, proporcionales (nominales), entre otros, y tiene como objetivo primordial la consideración de los cambios cuantitativos del capital por el transcurso del tiempo, estableciendo las equivalencias financieras entre los distintos valores.

El objetivo del presente trabajo, es considerar algunos aspectos relacionados con las tasas de interés y de rendimiento de las operaciones financieras, teniendo en cuenta el contexto y las diferentes situaciones que se pueden presentar en las valuaciones financieras básicas y complejas.

La variación cuantitativa del capital es consecuencia del transcurso del tiempo sujeto a una ley financiera. Por lo tanto, se puede definir una operación financiera como el intercambio no simultáneo de capitales a título oneroso.

Es decir que, para que una operación se considere financiera, deben cumplirse los requisitos: que sea una relación de dos partes con intereses opuestos, que haya un intercambio de capitales a título oneroso y que transcurra el tiempo.

En las operaciones financieras aparecen elementos que las definen tales como capital inicial, capital final, variable tiempo, tasa y pagos, entre otros.

La teoría del interés se basa en el postulado fundamental que la sustenta y que sostiene que "El capital aplicado a una operación financiera crece continuamente con el transcurso del tiempo".

Si bien las valuaciones financieras pueden realizarse en distintos momentos en el tiempo, al comienzo del período de análisis considerado para tomar decisiones futuras, y también, en situaciones en las que se requiere tener información respecto de los resultados obtenidos al final de un período de tiempo, cuando se quieren evaluar decisiones financieras ya tomadas.

Operaciones Financieras en el campo discreto

Las operaciones financieras simples de capitalización y actualización constituyen los pilares básicos de nuestra disciplina, es decir, las leyes financieras que establecen las relaciones funcionales entre el capital inicial y el capital final.

Siendo $f(0)$ el capital inicial y $f(t)$ el valor que asume el capital final o valor futuro al cabo de t unidades de tiempo, la ley financiera de capitalización, a partir del capital inicial permite a una tasa de interés convenida, que llamaremos tasa de interés de la operación, obtener el valor futuro que asumirá con el transcurso del tiempo. Si el capital de referencia es el monto o valor final, existe una ley financiera de actualización que valúa dicho capital en el momento presente.

Tasa de interés

Todo análisis financiero en el campo discreto descansa en un concepto neurálgico de la teoría del interés, que es el de tasa de interés, a partir de la cual se basan, en general, las valoraciones del cálculo financiero.

La tasa de interés de una operación financiera, se puede definir como "el interés o rendimiento financiero de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo", asumiendo valores positivos.

La unidad de tiempo es el período al final del cual se capitalizan y/o pagan los intereses, mientras que, la unidad de capital surge de la moneda en que se pactó la operación.

Siendo:

$i =$ tasa de interés

$f(0)$ = capital inicial

$f(1)$ = capital final al final de la unidad de tiempo

Resulta:

$$i = \frac{f(1) - f(0)}{f(0)}$$

En las operaciones financieras las tasas de interés pueden ser constantes o variables y las unidades pueden ser equiespaciadas o no. El entorno o universo en el cual se realizan las valoraciones pueden ser diferentes, nos referimos al contexto inflacionario.

<u>Valor final de un capital en el campo discreto a tasa de interés constante</u>

El modelo de valoración del valor futuro de un capital inicial permite obtener el valor final de un capital al cabo de un cierto período de tiempo, a través de las variables tasa de interés y plazo considerado, mediante la aplicación del factor de capitalización. Este factor puede obtenerse de acuerdo a los distintos escenarios que pueden presentarse.

Si bien se trabaja con la operación de capitalización, este análisis es válido para las operaciones financieras de actualización en virtud de la ley de equivalencia financiera.

El capital es función de la variable tiempo, y el valor que asume al cabo de un cierto período de tiempo se obtiene conforme a la tasa de interés convenida y el plazo estipulado.

El modelo de capitalización, cuando la tasa de interés es constante y las unidades de tiempo equiespaciadas, en un contexto estable, responde a la siguiente expresión, para el cálculo del monto o valor final de un capital en el campo discreto:

El valor final de un capital $f(0)$ al cabo de *t* unidades de tiempo será:

$$f(t) = f(0)(1+i)^t$$

Siendo $(1+i)^t$ el factor de capitalización y *t* la cantidad de unidades de tiempo en el plazo considerado.

Valor final de un capital en el campo discreto a tasa de interés variable. Tasa de interés promedio

Cuando se trata de valuaciones financieras con tasas de interés variables, en un entorno estable, el valor final de un capital resulta de aplicar al capital inicial el factor de capitalización a tasa variable. En consecuencia, el valor final responde a la siguiente expresión:

$$f(t) = f(0)[(1+i_1)^{t_1}(1+i_2)^{t_2}(1+i_3)^{t_3} \ldots (1+i_n)^{t_n}]$$

$$f(t) = f(0)\prod_{j=1}^{n}(1+i_j)^{t_j}$$

En este caso, el factor de capitalización para todo el período de análisis, surge del producto de cada uno de los factores de capitalización correspondientes a cada una de las tasas de interés convenidas para los diferentes plazos en los cuales se aplican.

$$\prod_{j=1}^{n}(1+i_j)^{t_j}$$

La suma de la cantidad de unidades de tiempo de cada uno de los factores de capitalización indica la cantidad total de unidades de tiempo.

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

Si al valor final de la unidad de capital en t unidades de tiempo le restamos la unidad de moneda inicial, se tendrá:

$$i = \prod_{j=1}^{n}(1+i_j)^{t_j} - 1$$

que indica la tasa de interés de todo el plazo *t* considerado, que simbolizamos por *i*.

El modelo de capitalización a tasa variable resulta interesante cuando se realiza un análisis ex post del rendimiento financiero de las operaciones, surgiendo un concepto relevante de tasa de interés promedio.

La tasa de interés promedio es una tasa de interés para una unidad de tiempo menor, que será determinada por el sujeto decisor a los fines del análisis financiero, calculada respetando las leyes de equivalencia financieras de tasas, es decir, que el interés de la unidad de moneda inicial en una unidad de tiempo, para el mismo plazo, debe ser el mismo.

Simbolizando por $\bar{\imath}$ a la tasa de interés promedio, se tendrá:

$$f(t) = f(0)(1 + \bar{\imath})^t$$

Si el capital inicial es la unidad de moneda o sea $1, y se trabaja con *t* unidades de tiempo, el valor final de la unidad de capital en *t* unidades de tiempo, utilizando la tasa de interés promedio y las tasas de interés variables, resulta de las siguientes expresiones:

$$(1 + \bar{\imath})^t = \prod_{j=1}^{t} \left(1 + i_j\right)^{t_j}$$

$$(1 + \bar{\imath})^t = 1 + i$$

La tasa de interés $\bar{\imath}$ es

$$\bar{\imath} = \left[\prod_{j=1}^{t} \left(1 + i_j\right)^{t_j}\right]^{\frac{1}{t}} - 1$$

$$\bar{\imath} = (1 + i)^{1/t} - 1$$

El exponente 1/t es un número real, que indica la unidad de tiempo de $\bar{\imath}$ en función de la unidad de tiempo de i . Simbolizando:

$$\frac{1}{t} = m$$

Se tendrá la fórmula general de cálculo de tasas de interés equivalentes, en la cual m indica la unidad de tiempo de la tasa que se quiere obtener (tasa de interés promedio) en función de la unidad de tiempo de la tasa de interés dada, o sea de la unidad de tiempo de la tasa de interés para todo el plazo.

$$\bar{\imath} = (1 + i)^m - 1$$

Ejemplo 1

En una operación financiera se ha depositado un determinado capital a plazo fijo por un año, pactando una tasa de interés de 0,15 anual. Luego de este período, se decidió renovar dicho plazo fijo por otro año, a una tasa de 0,046635139 trimestral. A su vencimiento, se coloca por un año más, a una tasa de 0,140175425 semestral.

Tabla 1:

Tasa de interés	**Cantidad de unidades de tiempo**
i_1 = 0,15 anual	t_1 = 1 (año)
i_2 = 0,046635139 trimestral	t_2 = 4 (trimestres)
i_3 = 0,140175425 semestral	t_3 = 2 (semestres)

El monto aproximado resulta ser de $1,79 al cabo de todo el período de tiempo:

$$f(t) = (1 + 0{,}15) * (1 + 0{,}046635139)^4 * (1 + 0{,}140175425)^2$$
$$f(t) = 1{,}794 \cong \$1{,}79$$

La tasa de interés para todo el plazo (3 años) es:

$$i = (1 + 0{,}15) * (1 + 0{,}046635139)^4 * (1 + 0{,}140175425)^2 - 1$$
$$i = 0{,}794\ para\ 3\ años$$

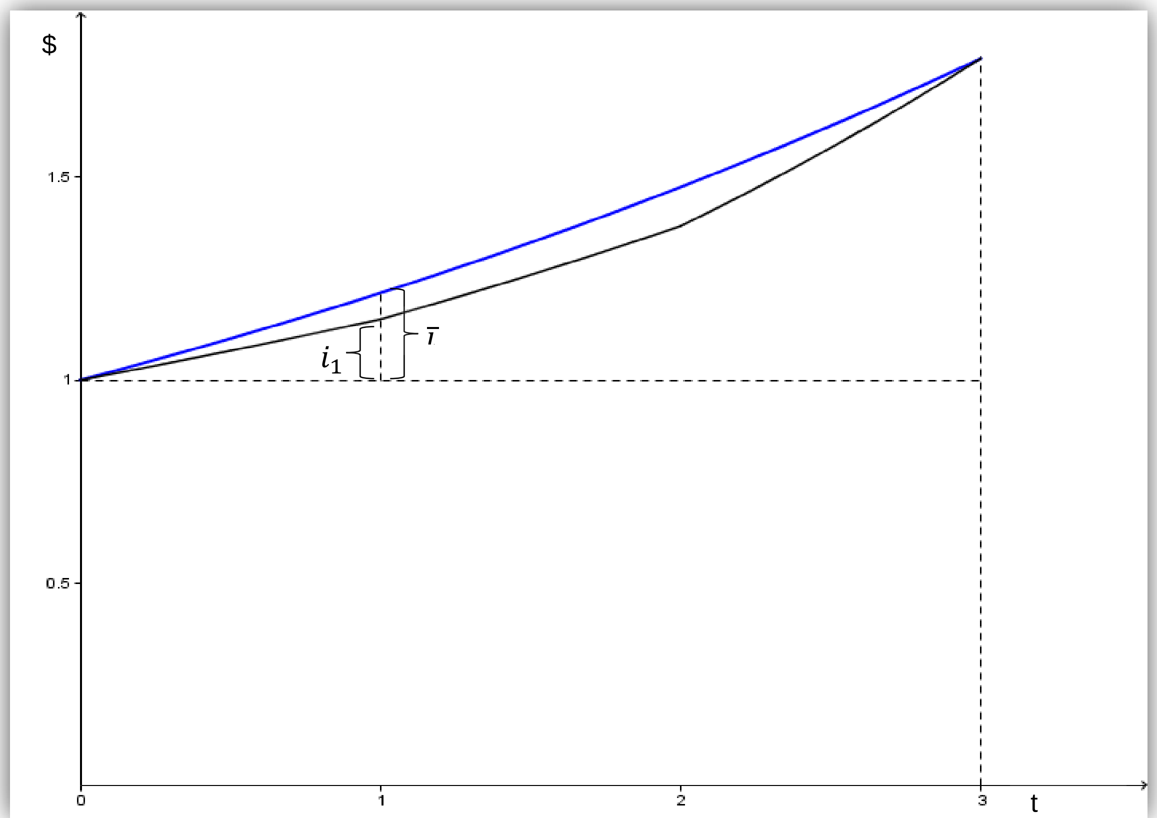
La tasa de interés promedio anual resulta:

$$\bar{\imath} = [(1 + 0{,}15) * (1 + 0{,}046635139)^4 * (1 + 0{,}140175425)^2]^{\frac{1}{3}} - 1$$
$$\bar{\imath} = 0{,}215087294\ anual$$

La tasa de interés promedio anual considerando un plazo de tres años, indica el rendimiento financiero promedio de una unidad de moneda inicial en un año.

Gráficamente se puede observar el comportamiento de la tasa de interés promedio y las tasas de interés variables aplicadas en todo plazo considerado, y el valor final obtenido.

Gráfico 1:



Ejemplo 2

Sea una capital de $20000 colocado en una operación financiera durante 110 días, que se fue renovando sucesivamente durante ese período bajo las condiciones contenidas en la siguiente tabla:

Tabla 2

Fecha de depósito	TNA (*)	Unidad de tiempo	Tasa de interés
18/07/2014	0,222837	42 días	0,02564152 p/42 ds
29/08/2014	0,222702	38 días	0,02318541 p/38 ds
06/10/2014	0,228977	30 días	0,01882003 p/30 ds

(*) TNA= Tasa nominal anual (proporcional)

$$f(t) = 20000 * (1 + 0{,}02564152) * (1 + 0{,}02318541) * (1 + 0{,}01882003)$$
$$f(t) = \$\ 21383{,}43$$

La tasa de interés para todo el plazo (110 días) es:

$$i = [(1 + 0{,}02564152) * (1 + 0{,}02318541) * (1 + 0{,}01882003)] - 1$$

$$i = 0{,}069171581\ para\ 110\ días$$

La tasa de interés promedio mensual resulta:

$$\bar{\imath} = [(1 + 0{,}02564152) * (1 + 0{,}02318541) * (1 + 0{,}01882003)]^{\frac{30{,}4167}{110}} - 1$$

$$\bar{\imath} = 0{,}018666556\ mensual$$

Tasas de rendimiento en términos reales y de rendimiento promedio en operaciones financieras básicas

El análisis precedentemente efectuado, que supone un contexto estable, nos brinda las herramientas para considerar el efecto de un contexto inflacionario en las operaciones financieras sin cláusula de ajuste. Surge el concepto de tasa de rendimiento en términos reales (r) como el rendimiento de una unidad de capital inicial en una unidad de tiempo, medido en unidades monetarias de igual poder adquisitivo. Otro elemento a utilizar es la tasa de inflación (α), definida como el incremento sostenido en el nivel general de precios de una unidad de moneda inicial en una unidad de tiempo.

El valor final de un capital inicial $f(0)$ al cabo de t unidades de tiempo, bajo este contexto, suponiendo que la tasa de inflación y la tasa de interés son constantes, y considerando que ambas tasas están referidas a la misma unidad de tiempo, o utilizando la equivalencia de tasas para expresarlas en la misma unidad de tiempo, será:

$$f\,'(t) = f(0)\left(\frac{1+i}{1+\alpha}\right)^t$$

Siendo $f'(t)$ el capital final ajustado a moneda constante, a los fines de expresar los capitales en moneda de igual poder adquisitivo.

Se puede expresar el valor final del capital ajustado a moneda constante en función de una tasa de rendimiento en términos reales, aplicada al capital inicial.

$$f\,'(t) = f(0)(1+r)^t$$

Considerando una unidad de capital inicial y una unidad de tiempo, resulta:

$$(1+r) = \left(\frac{1+i}{1+\alpha}\right)$$

$$r = \frac{1+i}{1+\alpha} - 1$$

$$r = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}$$

Si las tasas de interés y las tasas de inflación en el plazo de análisis son variables, el valor del capital final $f\,'(t)$ expresado en moneda de poder adquisitivo del momento inicial del intervalo de tiempo considerado, resulta:

$$f\,'(t) = f(0)\left(\frac{1+i_1}{1+\alpha_1}\right)^{t_1}\left(\frac{1+i_2}{1+\alpha_2}\right)^{t_2} \ldots \left(\frac{1+i_n}{1+\alpha_n}\right)^{t_n}$$

$$f\,'(t) = f(0)\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1+i_j}{1+\alpha_j}\right)^{t_j}$$

$$f\,'(t) = f(0)(1+r_1)^{t_1}(1+r_2)^{t_2} \ldots (1+r_n)^{t_n}$$

$$f\,'(t) = f(0)\prod_{j=1}^{n}\left(1+r_j\right)^{t_j}$$

Se puede calcular la tasa de rendimiento en términos reales promedio para una unidad de tiempo menor, como una tasa de rendimiento equivalente.

$$\bar{r} = r_{(m)} = (1+r)^m - 1$$

Siendo la tasa de rendimiento en términos reales r para todo el plazo considerado, la que se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$r = \prod_{j=1}^{n}\left(1+r_j\right)^{t_j} - 1$$

La tasa de rendimiento en términos reales puede ser positiva, negativa o nula.

Ejemplo 3
Considerando el Ejemplo 1, suponiendo que, en el primer año se produjo una tasa de inflación de 0,10 anual, durante el segundo año la tasa de inflación del primer y segundo trimestre fue del 0,035 trimestral, y en el tercer y cuarto trimestre dicha tasa fue del 0,05 trimestral. Y finalmente, en el tercer año, la tasa de inflación fue del 0,16 semestral, las tasas de rendimiento en términos reales son:

Tabla 3

Tasa de interés	**Cantidad de unidades de tiempo**	**Tasa de inflación**	**Tasa de rendimiento en términos reales**
i_1 = 0,15 anual	t_1 = 1 (año)	α_1 = 0,10 anual	r_1 = 0,045454545 anual
i_2= 0,046635139 trimestral	t_{21} = 2 (trimestres)	α_{21} = 0,035 trimestral	r_{21} = 0,011241681 trimestral
i_2 = 0,046635139 trimestral	t_{22} = 2 (trimestres)	α_{22} = 0,05 trimestral	r_{22} = -0,0032046292 trimestral
i_3 = 0,140175425 semestral	t_3 = 2 (semestres)	α_3 = 0,16 semestral	r_3 = -0,0170901508 trimestral

Como se puede observar, en el análisis del rendimiento en términos reales del segundo año se tomaron dos tasas de inflación, a los fines de ver el impacto de la inflación en las tasas de interés, resultando para α_{21} una tasa de rendimiento positiva, y para α_{22} una negativa.

La tasa de rendimiento en términos reales para el plazo total de 3 años, resulta:

$$r = (1 + 0{,}045454545) * (1 + 0{,}011241681)^2 * (1 - 0{,}0032046292)^2 * (1 - 0{,}0170901508)^2 - 1$$

$$r = 0{,}026253089 \; para \; 3 \; años$$

A partir de la tasa de rendimiento trianual, se obtiene la tasa de rendimiento promedio anual como:

$$\bar{r} = [(1 + 0{,}045454545) * (1 + 0{,}011241681)^2 * (1 - 0{,}0032046292)^2 * (1 - 0{,}0170901508)^2]^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$\bar{r} = 0{,}008675547 \; anual$$

La tasa de inflación para los 3 años es:

$$\alpha = (1 + 0{,}10) * (1 + 0{,}035)^2 * (1 + 0{,}05)^2 * (1 + 0{,}16)^2$$

$$\alpha = 0{,}748106797 \; para \; 3 \; años$$

Siendo la tasa de inflación promedio anual:

$$\bar{\alpha} = 0{,}204636414 \; anual$$

A partir de la tasa de interés promedio y de la tasa de inflación promedio para la misma unidad de tiempo, se obtiene la tasa de rendimiento promedio anual:

$$\bar{r} = \frac{1 + 0{,}215087294}{1 + 0{,}204636414} - 1$$

$$\bar{r} = 0{,}008675547 \; anual$$

Tasas de interés promedio y de rendimiento promedio en operaciones financieras complejas (rentas ciertas y evaluación de proyectos)

Tasas de interés promedio

En las operaciones financieras complejas referidas a los sistemas de amortización de deudas, se puede considerar el concepto de tasa de interés y de tasa de rendimiento en términos reales promedio, a partir de las tasas de interés y de inflación variables.

En el caso de las deudas, la unidad de tiempo está dada por el período de pago de las cuotas. En el presente trabajo se considerará el supuesto de equiespaciamiento de las unidades de tiempo.

Sistema de Amortización Francés:

El Sistema de Amortización Francés, con cuota constante, basado en el supuesto de tasa de interés constante y equiespaciamiento constante, en un contexto estable, responde a las siguientes fórmulas para el cálculo de la deuda, los saldos, los intereses y las amortizaciones.

$$V = c.\sum_{t=1}^{n} v^t$$

Siendo:

V = suma de los valores actuales de n cuotas constantes, equiespaciadas y vencidas de $c cada una, a la tasa i de interés. Es la deuda que se amortiza con n cuotas constantes, periódicas, vencidas, equiespaciadas, de $c cada una, a la tasa de interés i.

c = Es el importe de cada una de las n cuotas de pago inmediato, constantes, periódicas, vencidas, equiespaciadas, que en n unidades de tiempo (udt), y a la tasa de interés i, amortizan una deuda de $V.

n = número de cuotas.
i = tasa de interés de la operación.
v^t = factor de actualización:

$$v^t = \left(\frac{1}{1+i}\right)^t$$

Por lo tanto:

$$c = V/\sum_{t=1}^{n} v^t$$

El saldo después de abonada la cuota r (S_r) puede obtenerse mediante la suma de las cuotas no vencidas, actualizadas como:

$$S_r = c.\sum_{t=1}^{n-r} v^t$$

El saldo al final de la unidad de tiempo r+1, antes de pagar la cuota, es igual al saldo al comienzo de dicha unidad de tiempo capitalizado por una unidad de tiempo.

$$S'_{r+1} = S_r \,.\, (1+i)$$

Los elementos que componen la cuota son la amortización y el interés.

$$c = t_{r+1} + I_{r+1}$$

El interés contenido en la cuota r+1, es:

$$I_{r+1} = S_r \,.\, i$$

La amortización de la cuota r+1, se obtiene por diferencia entre la cuota y el interés:

$$t_{r+1} = c - I_{r+1}$$

Si se quiere expresar la amortización en función de la cuota, la siguiente expresión indica el valor de la amortización:

$$t_{r+1} = c.\, v^{n-r}$$

Teniendo en cuenta la modalidad de “Sistema Francés con tasas variables”, se considera la variación de las tasas de interés durante todo el plazo de financiamiento. Bajo esta modalidad, la constancia de las cuotas se mantiene durante la permanencia de una misma tasa de interés. El valor de la deuda se obtiene como la suma de los valores actuales de las cuotas que resultan de aplicar diferentes tasas de interés.

En este tipo de operaciones, la tasa de interés promedio es la tasa interna de rendimiento, conocida como TIR, que iguala el valor de la deuda con la suma de los valores actuales de las cuotas:

$$V = \sum_{t=1}^{n} c_t \,(1+TIR)^{-t}$$

$$V = \sum_{t=1}^{n} c_t \,(1+\bar{\imath})^{-t}$$

Siendo la tasa de rendimiento interna una tasa de interés promedio para la unidad de tiempo correspondiente al período de pago de las cuotas.

Ejemplo 4:

Se pactó una operación financiera bajo el Sistema Francés, amortizable en 6 cuotas mensuales, a tasa variable. El valor solicitado fue de $100.000, siendo las tasas de interés aplicadas:

i_1= 0,02 mensual

i_2= 0,03 mensual

i_3= 0,015 mensual

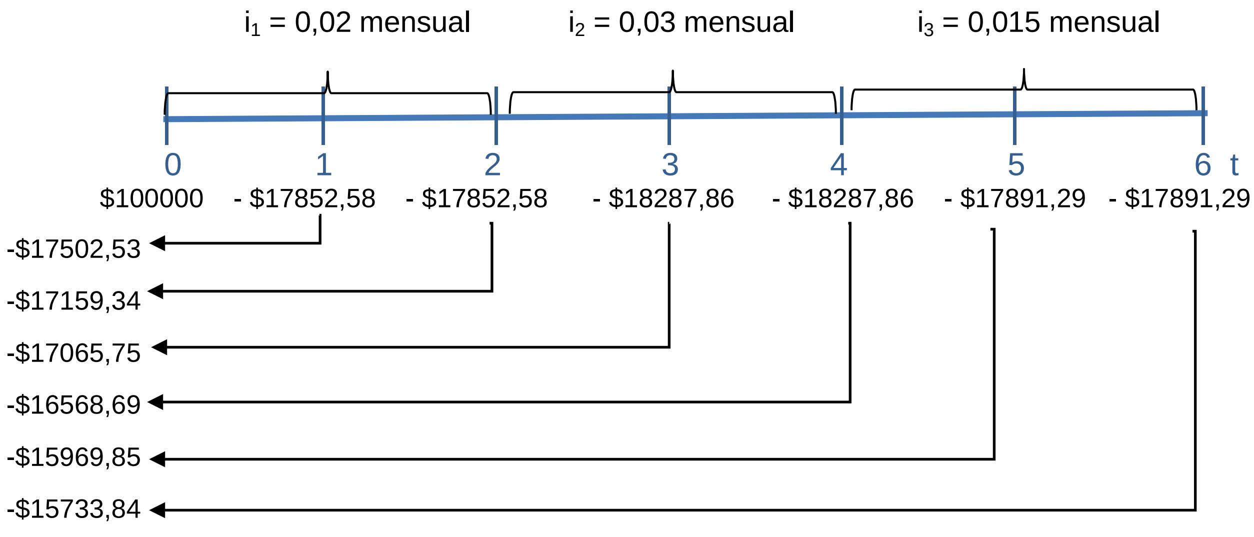
Dichas tasas de interés se mantuvieron vigentes durante dos unidades de tiempo (meses) cada una.
El siguiente cuadro de amortización muestra el comportamiento de los distintos elementos durante todo el período de tiempo de la operación financiera considerada:

Cuadro 1:

Unidad de tiempo	Saldo al inicio	Saldo al final	Amortización	Interés	Cuota
1	100000,00	102000,00	15852,58	2000,00	17852,58
2	84147,42	85830,37	16169,63	1682,95	17852,58
3	67977,79	70017,12	16248,53	2039,33	18287,86
4	51729,26	53281,13	16735,99	1551,88	18287,86
5	34993,27	35518,17	17366,39	524,90	17891,29
6	17626,88	17891,29	17626,88	264,40	17891,29

Se observa en el siguiente gráfico el comportamiento de los elementos del cuadro de amortización precedente:

Gráfico 2:



Utilizando la fórmula de cálculo del valor de la deuda a tasa variable, indicada ut supra, para el problema planteado, se confirma que el valor de la deuda asciende a $100.000:

Tabla 4

Cuota	Factor de actualización	Cuota actualizada
17852,58	$(1+0{,}02)^{-1}$	17502,53
17852,58	$(1+0{,}02)^{-2}$	17159,34
18287,86	$(1+0{,}03)^{-1}.(1+0{,}02)^{-2}$	17065,75
18287,86	$(1+0{,}03)^{-2}.(1+0{,}02)^{-2}$	16568,69
17891,29	$(1+0{,}015)^{-1}.(1+0{,}03)^{-2}.(1+0{,}02)^{-2}$	15969,85
17891,29	$(1+0{,}015)^{-2}.(1+0{,}03)^{-2}.(1+0{,}02)^{-2}$	15733,84
Suma de los valores actuales de las cuotas a tasa variable		100000,00

$$100000 = \frac{17852{,}58}{(1+TIR)} + \frac{17852{,}58}{(1+TIR)^2} + \frac{18287{,}86}{(1+TIR)^3} + \frac{18287{,}86}{(1+TIR)^4} + \frac{17891{,}29}{(1+\mathrm{TIR})^5} + \frac{17891{,}29}{(1+\mathrm{TIR})^6}$$

En consecuencia, la tasa de interés promedio mensual es:

$$\bar{\imath} = TIR = 0{,}02260601\, mensual$$

Los elementos del cuadro de amortización no pueden obtenerse a partir de esta tasa promedio. La misma sólo es un indicador promedio.

Tabla 5

Cuota	Factor de actualización	Cuota actualizada
17852,58	$(1+0{,}02260601)^{-1}$	17457,93
17852,58	$(1+0{,}02260601)^{-2}$	17072,00
18287,86	$(1+0{,}02260601)^{-3}$	17101,65
18287,86	$(1+0{,}02260601)^{-4}$	16723,59
17891,29	$(1+0{,}02260601)^{-5}$	15999,26
17891,29	$(1+0{,}02260601)^{-6}$	15645,58
Suma de los valores actuales de las cuotas a tasa promedio		100000,00

Se comprueba que, en el caso de operaciones complejas de deudas, la tasa de rendimiento interna (TIR) es la tasa de interés promedio.

Sistema de amortización constante o Alemán:

Si bien el sistema Alemán es de cuota variable, siendo la amortización constante, el elemento de la cuota que se ve afectado por la variación de la tasa de interés es el interés contenido en cada cuota.

$$V = \sum_{t=1}^{n} c_t . v^t$$

Siendo la amortización constante, la misma se obtiene como:

$$t = \frac{V}{n}$$

El saldo al inicio de la unidad de tiempo *r+1* es:

$$S_r = V - r.\frac{V}{n}$$

El saldo al final de la unidad de tiempo *r+1 es:*

$$S\,\acute{}_{r+1} = S_r\,.(1+i)$$

La metodología utilizada en el caso del Sistema Francés, cuando las tasas de interés son variables, es válida para cualquier sistema de amortización.

Ejemplo 5:
Se pactó una operación financiera bajo el Sistema Alemán, amortizable en 6 cuotas mensuales, a tasa variable. El valor solicitado fue de $100.000, siendo las tasas aplicadas:

i_1= 0,02 mensual

i_2= 0,03 mensual

i_3= 0,015 mensual

Dichas tasas se mantuvieron vigentes durante dos unidades de tiempo (meses) cada una.

El siguiente cuadro de amortización muestra el comportamiento de los distintos elementos durante todo el período de tiempo de la operación financiera considerada:

Cuadro 2

Unidades de tiempo	Saldo al inicio	Saldo al final	Amortización	Interés	Cuota
1	100000,00	102000,00	16666,67	2000,00	18666,67
2	83333,33	85000,00	16666,67	1666,67	18333,33
3	66666,67	68666,67	16666,67	2000,00	18666,67
4	50000,00	51500,00	16666,67	1500,00	18166,67
5	33333,33	33833,33	16666,67	500,00	17166,67
6	16666,67	16916,67	16666,67	250,00	16916,67

Se observa a continuación los valores que asumen las cuotas actualizadas aplicando los factores de actualización a tasas de interés variables:

Tabla 6

Cuota	Factor de actualización	Cuota actualizada
18666,67	$(1+0,02)^{-1}$	18300,65
18333,33	$(1+0,02)^{-2}$	17621,43
18666,67	$(1+0,03)^{-1}.(1+0,02)^{-2}$	17419,24
18166,67	$(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	16458,89
17166,67	$(1+0,015)^{-1}.(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	15323,05
16916,67	$(1+0,015)^{-2}.(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	14876,74
Suma de los valores actuales de las cuotas a tasa variable		100000,00

En este caso, la tasa interés promedio mensual es:

$$\bar{\imath} = TIR = 0{,}0226028\ mensual$$

Tasa de rendimiento promedio

Como se planteó en las operaciones simples, se puede obtener, en un contexto inflacionario, para las operaciones complejas, la tasa de rendimiento en término reales promedio.
En las operaciones complejas, cuando la tasa de interés y la de inflación son constantes, la tasa de rendimiento en términos reales, se obtiene a partir de la fórmula que se aplicó a operaciones simples:

$$r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha}$$

Cuando la tasa de interés y la tasa de inflación son variables, la tasa de rendimiento se obtiene a partir del siguiente procedimiento:

- Se ajustan las cuotas a moneda constante, utilizando para cada una de ellas el factor de corrección a tasa de inflación variable.
- Dichas cuotas a moneda constante se actualizan a las tasas de interés que corresponden a cada unidad de tiempo, utilizando el factor de actualización a tasa de interés variable.
- La suma de los valores actuales expresados en moneda homogénea de las cuotas, representa el valor de la deuda al momento inicial ajustado por inflación.
- Utilizando el método de la TIR, con los valores obtenidos precedentemente, se calcula la tasa de rendimiento en términos reales.

La tasa de rendimiento en términos reales sintetiza la tasa de interés y de inflación.

Se puede calcular la tasa de rendimiento en términos reales promedio utilizando el procedimiento de cálculo de la tasa interna de rendimiento (TIR), siendo c'_t el valor de cada una de las cuotas actualizadas y ajustadas a moneda constante.

$$V = \sum_{t=1}^{n} c'_t\,(1 + TIR)^{-t}$$

$$V = \sum_{t=1}^{n} c'_t \, (1 + \bar{r})^{-t}$$

En el caso de deuda, la tasa de rendimiento promedio está referida a la misma unidad de tiempo de los pagos.

Los procedimientos aplicados en los ejemplos 4 y 5, se pueden aplicar a proyectos de inversión, trabajando con flujos de caja.

En un contexto inflacionario, considerando las tasas de inflación mensuales de febrero a julio de 2014:

Tabla 7

Mes	Tasa de inflación mensual	Factor de corrección a moneda corriente
02/2014	0,034163	(1+0,034163)
03/2014	0,025897	(1+0,034163).(1+0,025897)
04/2014	0,017889	(1+0,034163).(1+0,025897).(1+0,017889)
05/2014	0,014353	(1+0,034163).(1+0,025897).(1+0,017889).(1+0,014353)
06/2014	0,012995	(1+0,034163).(1+0,025897).(1+0,017889).(1+0,014353).(1+0,012995)
07/2014	0,014253	(1+0,034163)(1+0,025897)(1+0,017889)(1+0,014353)(1+0,012995)(1+0,014253)

Los valores de las cuotas obtenidos de los ejemplos 4 y 5 correspondientes a operaciones financieras de préstamos pactados a tasa variable, en un contexto inflacionario, sin cláusula de ajuste, obliga a considerar los efectos que se producen en estas condiciones.
En el siguiente cuadro se presentan los valores utilizando el factor de corrección a moneda corriente, a los fines de determinar la tasa de rendimiento en términos reales promedio.

Ejemplo 4 con corrección monetaria:
Tabla 8

Cuota	Factor de corrección a moneda corriente	Factor de actualización	Cuota a moneda constante	Cuota actualizada a moneda constante
17852,58	1,034163	$(1+0,02)^{-1}$	17262,83	16924,35
17852,58	1,060945	$(1+0,02)^{-2}$	16827,06	16173,65
18287,86	1,079924	$(1+0,03)^{-1}.(1+0,02)^{-2}$	16934,40	15802,73
18287,86	1,095424	$(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	16694,78	15125,37
17891,29	1,109658	$(1+0,015)^{-1}.(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	16123,24	14391,68
17891,29	1,125474	$(1+0,015)^{-2}.(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	15896,66	13979,74
Suma de los valores actuales de las cuotas actualizadas a moneda constante				92397,51

Utilizando los valores de las cuotas expresadas en moneda de igual poder adquisitivo del momento de recibido el préstamo, es decir, a moneda constante, resulta una tasa de rendimiento en términos reales promedio para el acreedor, siendo para el deudor el costo financiero promedio en términos reales del:

$$100000 = \frac{17262,83}{(1+\bar{r})} + \frac{16827,06}{(1+\bar{r})^2} + \frac{16934,40}{(1+\bar{r})^3} + \frac{16694,78}{(1+\bar{r})^4} + \frac{16123,24}{(1+\bar{r})^5} + \frac{15896,66}{(1+\bar{r})^6}$$

$$\bar{r} = -0,000756\ mensual$$

Lo que estaría indicando, al ser negativa, que la tasa de inflación promedio mensual supera a la tasa de interés promedio de esta operación.

$$92327,54 = \frac{17502,53}{(1+\bar{\alpha})} + \frac{17159,34}{(1+\bar{\alpha})^2} + \frac{17065,75}{(1+\bar{\alpha})^3} + \frac{16568,69}{(1+\bar{\alpha})^4} + \frac{15969,85}{(1+\bar{\alpha})^5} + \frac{15733,84}{(1+\bar{\alpha})^6}$$

$$\bar{\alpha} = 0,02351\ mensual$$

La tasa de inflación promedio es del 0,02351 mensual que comparándola con la tasa de interés promedio mensual del 0,02260601, indica que la tasa de rendimiento (costo para el deudor) en términos reales por el efecto inflacionario es negativa.
La tasa promedio de inflación, calculada como tasa interna de rendimiento, surge del valor de la deuda a la suma de los valores actuales de las cuotas actualizadas a moneda constante (tabla 8) con las cuotas actualizadas de tabla 4.

Ejemplo 5 con corrección monetaria:
Tabla 9

Cuota	Factor de corrección a moneda corriente	Factor de actualización	Cuota a moneda constante	Cuota actualizada a moneda constante
18666,67	1,034163	$(1+0,02)^{-1}$	18050,03	17696,11
18333,33	1,060945	$(1+0,02)^{-2}$	17280,20	16609,19
18666,67	1,079924	$(1+0,03)^{-1}.(1+0,02)^{-2}$	17285,17	16130,06
18166,67	1,095424	$(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	16584,14	15025,13
17166,67	1,109658	$(1+0,015)^{-1}.(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	15470,23	13808,80
16916,67	1,125474	$(1+0,015)^{-2}.(1+0,03)^{-2}.(1+0,02)^{-2}$	15030,70	13218,20
Suma de los valores actuales de las cuotas actualizadas a moneda constante				92487,49

$$100000 = \frac{18050,03}{(1+\bar{r})} + \frac{17280,20}{(1+\bar{r})^2} + \frac{17285,17}{(1+\bar{r})^3} + \frac{16584,14}{(1+\bar{r})^4} + \frac{15470,23}{(1+\bar{r})^5} + \frac{15030,70}{(1+\bar{r})^6}$$

$$\bar{r} = -0,00088\ mensual$$

$$92487,49 = \frac{18300,65}{(1+\bar{\alpha})} + \frac{17621,43}{(1+\bar{\alpha})^2} + \frac{17419,24}{(1+\bar{\alpha})^3} + \frac{16458,89}{(1+\bar{\alpha})^4} + \frac{15323,05}{(1+\bar{\alpha})^5} + \frac{14876,74}{(1+\bar{\alpha})^6}$$

$$\bar{\alpha} = 0{,}023647 \ \ mensual$$

La tasa promedio de inflación, surge del valor de la deuda a la suma de los valores actuales de las cuotas actualizadas a moneda constante (tabla 9) con las cuotas actualizadas de tabla 6.

En este problema la tasa de rendimiento en términos reales promedio mensual para el acreedor o el costo financiero en términos reales para el deudor en promedio es de -0,00088 mensual, negativa porque la tasa de inflación promedio mensual es del 0,023647 superior a la tasa de interés promedio mensual de 0,0226028 mensual.
Los valores obtenidos proporcionan información respecto de las operaciones realizadas indicando en promedio los resultados obtenidos tanto desde el punto de vista del deudor como del acreedor.

CONCLUSIONES

Se ha pretendido en el presente trabajo considerar las operaciones financieras simples y complejas, pactadas a tasas de interés variables, en contextos de estabilidad monetaria y en un entorno inflacionario, sin cláusula de ajuste.

Se han presentado distintos escenarios en el tratamiento de las tasas de interés de la operación, que evidencian la necesidad de calcular las tasas de interés promedio cuando se quieren evaluar las operaciones financieras y determinar en promedio las tasas de interés en operaciones ya realizadas.

En un contexto inflacionario en las operaciones financieras sin cláusula de ajuste, se presenta el modelo financiero incorporando el concepto y cálculo de la tasa de rendimiento en términos reales, tasa de inflación promedio y tasa de rendimiento promedio. Para ello se han utilizado las herramientas de la Matemática Financiera, las que tienen plena validez en la corrección monetaria, permitiendo determinar el resultado de una operación financiera cuando hay un cambio en el poder adquisitivo de la moneda, desde el punto de vista del deudor y del acreedor.

En las operaciones financieras complejas referidas a los sistemas de amortización de deudas, se incorporaron a los modelos de financiamiento el tratamiento y cálculo de la tasa de interés, tasa de inflación y tasa de rendimiento en términos reales, promedio, a partir de las tasas de interés pactadas y de inflación variables.

BIBLIOGRAFÍA

1) Andonian, Olga Graciela (2001) "*Material Estudio Teórico Práctico de Matemática Financiera"*. Asociación Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Córdoba. Año 2001. ISBN 978-987-1436-84-2.

2) Andonian, Olga Graciela (1999) **"**Notas de Cátedra de Matemática Financiera" Centro de Estudiantes de Ciencias Económicas (CECE). Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Córdoba.

3) Karl de Vega, Ana, Andonian, Olga Graciela (1999) "*Introducción a la Teoría del interés"* Asociación Cooperadora Facultad de Ciencias Económicas Universidad Nacional de Córdoba.