



FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA
Y COMPUTACIÓN

TESIS DE DOCTORADO

Influencia de plasmas astrofísicos en la desviación de la luz

Autor:
Lic. Gabriel CRISNEJO

Director:
Dr. Emanuel GALLO

11 de mayo de 2022



Influencia de plasmas astrofísicos en la desviación de la luz por Gabriel Crisnejo se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](#).

Resumen

Influencia de plasmas astrofísicos en la desviación de la luz

La propagación de la luz en el Universo se ve influenciada por diferentes fenómenos. Entre ellos es de particular importancia la influencia ejercida por el campo gravitacional de objetos masivos como galaxias, cluster de galaxias o agujeros negros. Entre otros efectos, estos campos gravitacionales producen una desviación de los rayos de luz respecto de la trayectoria que seguirían si estos objetos masivos no estuvieran presentes, actuando de esta forma como focos deflectores. Este fenómeno ha sido y continúa siendo extensamente estudiado y se lo conoce comúnmente como *efecto de lente gravitacional*.

Sin embargo, existen otros procesos físicos que intervienen en la propagación de la luz como es el caso de las distribuciones de plasma habidas tanto en el medio interestelar como en las nubes de gas ionizado presentes en algunas galaxias, mientras que a nivel del sistema solar, la distribución de electrones libres en la corona solar también afecta a los rayos de luz que se propagan en su vecindad. Este fenómeno es conocido usualmente como *plasma lensing* y si bien ha sido estudiado desde hace décadas, recientemente ha vuelto a tomar relevancia debido a la observación de diferentes fenómenos que ocurren en el Universo como son los eventos de dispersión extrema cuyo origen físico aún es desconocido.

En esta tesis doctoral modelaremos dicho plasma como un plasma frío no magnetizado a fin de estudiar su influencia en la propagación de la luz. Para ello hemos extendido un método novedoso y originalmente aplicado al estudio de la desviación de la luz en gravedad pura al caso más general donde se tenga en cuenta la influencia del plasma. Dicho, método basado en el teorema de Gauss-Bonnet, nos permite relacionar el ángulo de deflexión de los rayos de luz con la geometría de una determinada variedad Riemanniana 2-dimensional de una manera muy simple ya sea para espaciotiempos esféricamente simétricos como axialmente simétricos. En base al mismo, estudiaremos correcciones al ángulo de deflexión por distancias finitas tanto del observador al foco deflector como de la fuente al mismo, y también correcciones de orden superior que no suelen ser abordadas generalmente. Desarrollaremos a su vez expresiones para los escalares ópticos en términos de las propiedades del entorno plasmático y de distintas componentes del tensor energía-momento del foco deflector. A su vez, describiremos el movimiento de partículas cargadas en campos de Einstein-Maxwell haciendo uso de una correspondencia entre el comportamiento de éstas y el de la luz en medios plasmáticos particulares.

Por último, implementaremos un estudio numérico y perturbativo sobre la ecuación de lente gravitacional, incluyendo la presencia del plasma en el régimen de lente fuerte, determinando la posición, forma y magnificación de las imágenes de fuentes lejanas extendidas, como a su vez de las curvas críticas y cáusticas que caracterizan al foco deflector.

Palabras clave:

Relatividad General, Lentes gravitacionales, Plasmas astrofísicos

Abstract

Influence of astrophysical plasmas on the light deflection

Light propagation across the Universe is influenced by different phenomena. Of particularly importance among them is the influence of the gravitational field of massive objects (e.g. galaxies, galaxy clusters, black holes) which produce the deflection of light-rays with respect to the trajectory they would follow if the massive bodies were not present. This phenomenon has been and continues to be extensively studied and it is commonly known as *gravitational lensing effect*.

However, there exist other physical processes that affect light propagation, both at large scales, as in plasma distribution in the interstellar medium and ionized gas in some galaxies, as well as at solar system scales where free electrons in the solar corona also deflect light-rays in its vicinity. The plasma effect in light propagation is known as *plasma lensing* and, although this phenomenon has been known for decades, in recent years it has recently become relevant again due to the observation of different phenomena that occur in the Universe such as extreme scattering events whose physical origin is still unknown.

In this thesis, we will model plasma as a non-magnetized cold fluid in order to study its influence on the propagation of light. For this, we will extend a geometrical method originally applied to the study of pure-gravity light-deviation to the more general setting including the effect of plasma. This method, based in the Gauss-Bonnet theorem, allows to link the light's deflection angle with the geometry of a 2-dimensional Riemannian manifold in a simple way in the spherically as well as in the axisymmetric cases. With this method, we also study corrections to the deflection angle due to finite distances between the observer and the deflecting focus as well between the observer and the source. We also study higher-order corrections which are usually ignored. We also present expressions for different optical scalars in terms of the properties of the plasma environment and the different components of the energy-momentum tensor. In turn, we describe the motion of charged particles in an Einstein-Maxwell field using a correspondence between their behaviour and that of light in a particular plasma medium.

Finally, we implement a numerical and perturbative study of the gravitational lens equation including plasma, in the strong-lensing regime and we determine the position, shape and magnification of the images of far extended sources. We also identify critical curves and the caustics that characterize the deflecting lens.

Keywords:

General relativity, Gravitational lenses, Astrophysical plasmas

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo a lo largo de este camino recorrido y sin el cual esta meta hubiera sido imposible de alcanzar.

A los amigos que han sabido estar en los momentos más difíciles. No quiero dejar de mencionar a Lautaro, Gastón, Walter, Matías; y tantos otros que de una u otra manera siempre han estado allí.

Un agradecimiento especial merece mi director, Emanuel, quien estuvo siempre a disposición incluso desde antes de comenzar mi doctorado aconsejándome en cada paso que daba. Su guía y su consejo hicieron posible este sueño.

Vaya un agradecimiento a los profesores e investigadores del grupo de Relatividad General de los cuales me llevo más de una enseñanza.

Quiero agradecer a Martín Makler por haberme dado una cálida acogida durante mi estadía en Río de Janeiro. Gracias por haber estado presente en todo momento incluso más allá de los aspectos profesionales.

Agradezco el financiamiento brindado por diversos organismos a lo largo de estos años: *The World Academy of Sciences for the advancement of science in developing countries* (TWAS), *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq) y el *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET).

Finalmente, quiero agradecer la hospitalidad de aquellas instituciones donde he llevado a cabo el presente trabajo: *Instituto de Física Enrique Gaviola* (IFEG), *Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación* (FaMAF) y *Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas* (CBPF).

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
1. Introducción	1
2. Influencia del plasma en espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos	5
2.1. Preliminares	5
2.1.1. Propagación de ondas electromagnéticas en plasmas	5
2.1.2. Métrica óptica asociada a un medio plasmático en un campo gravitacional externo	10
2.2. Ángulo de deflexión utilizando el teorema de Gauss-Bonnet	12
2.3. Ejemplos con plasmas homogéneos	13
2.3.1. Schwarzschild	14
2.3.2. Un ejemplo más general	15
2.3.2.1. Anillo de Einstein en presencia de plasma homogéneo	19
2.4. Plasma inhomogéneo	20
2.5. Deflexión de partículas masivas	22
2.5.1. Ángulo de deflexión a segundo orden en el espaciotiempo de Schwarzschild	24
2.6. Resumen del capítulo	25
3. Corrección por distancias finitas	27
3.1. Ángulo de deflexión para distancias finitas	29
3.1.1. Aspectos generales	29
3.1.2. Ángulo de deflexión desde un enfoque post-newtoniano	36
3.2. Sobre la medición de la desviación de la luz en un entorno plasmático	40
3.3. Plasma homogéneo	46
3.3.1. Casos especiales de (3.76) y (3.77)	48
3.3.1.1. Caso I: PPN a distancias infinitas con plasma	48
3.3.1.2. Caso II: Schwarzschild a distancias finitas	49
3.3.2. Ángulo de deflexión en términos del observable θ_I y su comparación con expresiones previas conocidas	50
3.4. Plasma inhomogéneo	52
3.4.1. Espaciotiempo de Schwarzschild con un perfil de densidad electrónica de la forma $N(r) = N_0 r^{-h}$	54
3.4.1.1. Un modelo de plasma para la parte más externa de la corona solar	55
3.5. Resumen del capítulo	57

4. Desviación en términos de la distribución de energía-momento y correspondencia con partículas masivas y cargadas	59
4.1. Órbitas espaciales asociadas a una métrica de tipo Gordon	61
4.2. Métrica tipo Gordon aplicada al estudio de lentes gravitacionales usando el enfoque basado en tetradas nulas	65
4.2.1. Revisión del formalismo basado en tetradas nulas para el estudio de lentes gravitacionales	66
4.2.2. Lentes gravitacionales rodeadas por un plasma homogéneo	68
4.2.2.1. Lente de Schwarzschild	68
4.2.2.2. Lente PPN (<i>Parametrized-post-Newtonian</i>)	70
4.3. Ángulo de deflexión y escalares ópticos en término de la distribución de energía-momento	73
4.3.1. Enfoque basado en tetradas nulas	73
4.3.1.1. Métrica tipo Gordon	74
4.3.1.2. Tetrada nula adaptada a la geometría de la distribución de materia y componentes de la curvatura	75
4.3.1.3. $\lambda_{I_S} \rightarrow \infty$ y $\lambda_I \rightarrow \infty$	77
4.3.1.4. Analogía entre fotones en un plasma frío y partículas masivas en gravedad pura	77
4.3.2. Enfoque basado en el teorema de Gauss-Bonnet	78
4.3.2.1. $\mathcal{K}dS \neq 0$	80
4.3.2.2. $\mathcal{K}dS = 0$	80
4.3.2.3. Comparación	81
4.4. Correspondencia entre el movimiento espacial de los fotones en un plasma inhomogéneo y partículas masivas en un campo externo	82
4.4.1. Deflexión de partículas masivas y cargadas en el espaciotiempo de Reissner-Nordström	84
4.5. Resumen del capítulo	87
5. Influencia del plasma en espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos	89
5.1. Métrica óptica para espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos en un plasma frío	90
5.2. Ángulo de deflexión en espaciotiempos estacionarios y axi-simétricos usando el teorema de Gauss-Bonnet	93
5.3. Ángulo de deflexión en la aproximación de campo débil usando el enfoque de Ono <i>et al</i>	94
5.3.1. Correspondencia entre fotones propagándose en un plasma homogéneo y partículas masivas	96
5.3.1.1. Espaciotiempo de Kerr-Newman	96
5.4. Ángulo de deflexión en la aproximación de campo débil usando el enfoque de Werner: partículas masivas	97
5.4.1. Espaciotiempo de Kerr	97
5.5. Correcciones de orden superior al ángulo de deflexión	100
5.5.1. Ángulo de deflexión para partículas masivas a tercer orden en el espaciotiempo de Kerr	100
5.5.2. Ángulo de deflexión de rayos de luz en un plasma inhomogéneo hasta tercer orden en el espaciotiempos de Kerr	105
5.6. Resumen del capítulo	109

6. Lentes fuertes con plasma: enfoque numérico y perturbativo	111
6.1. Ecuaciones básicas	112
6.1.1. Solución perturbativa de la ecuación de lente	113
6.1.2. N iteraciones	116
6.2. Modelo de galaxia-lente y formación de imágenes	116
6.2.1. Modelo de plasma esféricamente simétrico con decaimiento exponencial	117
6.2.2. Modelo exponencial para un disco de plasma visto de lado	120
6.2.2.1. Decaimiento exponencial en la dirección z	122
6.2.2.2. Decaimiento Gaussiano en la dirección z	124
6.2.3. Modelo Gaussiano para un disco de plasma visto de frente	125
6.3. Comparación gráfica para varias iteraciones	126
6.4. Curvas críticas, cáusticas y magnificación	130
6.5. Resumen del capítulo	133
7. Conclusión	137
A. Ángulo de deflexión para modelos de plasma particulares	139
A.1. Modelo de plasma con perfil $N(r) = N_0 r^{-h}$, $h > 0$ en el espaciotiempo de Schwarzschild	139
A.2. Modelo de plasma con perfil $N(r) = N_0 e^{-r/r_0}$ en el espaciotiempo de Schwarzschild	140
B. Comparación explícita de las fórmulas (3.4), (3.8) y (3.9)	143
C. Relación entre las diferentes coordenadas angulares y el ángulo de elongación	147
D. Espaciotiempo de Schwarzschild con una densidad de plasma de la forma $N(r) = N_0 h r^{-h}$. Casos particulares	151
E. Ángulo de deflexión de partículas de pureza masivas y cargadas en el espaciotiempo de Reissner-Nordström: solución de la ecuación de la órbita	153
F. Ángulo de deflexión a tercer orden en el espaciotiempo de Kerr: integración de la ecuación de la órbita	157
Bibliografía	161

A mi familia ...

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las lentes gravitacionales es una herramienta crucial en el estudio de la dinámica, evolución y distribución de la materia en el Universo [1-4]. La respuesta de la radiación electromagnética a los campos gravitacionales ocurre en todas las escalas del Universo, desde agujeros negros [5] a clusters de galaxias [6].

Generalmente los efectos de lente gravitacional se estudian considerando únicamente el efecto de los campos gravitacionales sobre los rayos de luz, sin embargo tanto objetos compactos como galaxias y clusters de galaxias se encuentran inmersos en algún tipo de plasma. En el espectro visible, el efecto de estos plasmas en la desviación de la luz suelen ser despreciable aunque no se puede decir lo mismo si se consideran observaciones en el espectro de las radiofrecuencias donde el índice de refracción de estos plasmas causa efectos cromáticos realmente apreciables.

El efecto del plasma en la propagación de la luz ha sido estudiado al menos desde la década del sesenta. En 1966, Muhleman y Johnston estudiaron la influencia sobre el time delay debido a distribución de electrones de la corona solar en el régimen de radiofrecuencias en la vecindad del campo gravitacional de nuestro Sol [7], mientras que en 1970, Muhleman, Ekers y Fomalont calcularon por primera vez la deflexión de la luz debida al plasma de la corona solar en el régimen de campo gravitacional débil [8]. Una serie de estudios fue luego realizado sobre el viento solar y la distribución de electrones en la parte exterior de la corona solar, los cuales fueron usando en diversas misiones espaciales tales como Viking, Mariner 6 y 7, y la misión espacial Cassini [9, 10]. En la navegación de naves espaciales interplanetarias, la contribución del plasma en la desviación de la luz es una variable que se tiene en cuenta rutinariamente (ver Turyshev y Toth [11] para un review sobre este tema). Por otro lado, una derivación rigurosa del Hamiltoniano que describe la propagación de la luz en un plasma magnetizado sobre un fondo curvo fue llevada a cabo por Breuer y Ehlers en 1980 [12-14]. La deflexión de la luz en un plasma no-magnetizado fue calculada por primera vez sobre el espaciotiempo de Schwarzschild, y sobre el plano ecuatorial del espaciotiempo de Kerr, de forma exacta por Perlick en el año 2000 [15].

En la actualidad existen diversos radio-telescopios que operan en la banda de frecuencias donde los efectos del plasma son relevantes [16-20]. Por esta razón, en los últimos años el estudio de la influencia de los plasmas astrofísicos en la propagación de la luz ha sido un área de investigación muy activa [21-41].

Una de las cantidades principales asociada al estudio de las lentes gravitacionales es el ángulo de deflexión el cual caracteriza la desviación de la luz en presencia de una lente gravitacional. Su importancia se debe tanto al hecho de que en ciertas circunstancias, como pueden ser algunos experimentos en el sistema solar, el ángulo de deflexión puede ser escrito en términos de cantidades observables y por ende puede ser estimado de una manera muy directa. En otros escenarios, el ángulo de deflexión no es directamente un observable; sin embargo el mismo se encuentra íntimamente relacionado a otras cantidades observables como la convergencia, el shear,

la magnificación, los arcos gravitacionales, los anillos de Einstein, el time delay, por citar algunos.

En general, las expresiones para el ángulo de deflexión se encuentran expresadas en términos de derivadas de las componentes de la métrica que describen el campo gravitacional en la vecindad de la lente gravitacional. Sin embargo, en [42] Gallo y Moreschi introdujeron expresiones escritas en términos de escalares de curvatura sobre un espaciotiempo plano a orden lineal, y en términos de las componentes del tensor energía-momento para el caso de espaciotiempos esféricamente simétricos. La generalización al contexto cosmológico fue llevada a cabo en [43], mientras que expresiones a segundo orden sobre el espaciotiempo plano fueron abordadas en [44] por el autor del presente trabajo como parte de su trabajo final de licenciatura.

La forma usual de obtener el ángulo de deflexión en el caso de gravedad pura es a partir del estudio de las curvas geodésicas que siguen los rayos de luz. Recientemente, Gibbons y Werner han establecido un método alternativo para calcular el ángulo de deflexión en el caso de gravedad pura, el cual hace uso del teorema de Gauss-Bonnet [45]. Este nuevo método nos permite obtener una expresión muy sencilla y compacta para el ángulo de deflexión expresada en términos de la curvatura Gaussiana asociada a una métrica Riemanniana 2-dimensional la cual denominamos *métrica óptica* [46]. Vale la pena mencionar que tanto el concepto de métrica óptica como el principio de Fermat, asociado a medios dispersivos, para rayos de luz en relatividad general fue introducido por primera vez por Weyl en 1917 [47].

A partir del trabajo de Gibbons y Werner, se han producido una gran cantidad de trabajos científicos utilizando esta técnica para estudiar diferentes situaciones astrofísicas para el caso de gravedad pura [48-75].

En esta tesis doctoral mostramos cómo es posible extender este resultado al caso más general donde se tenga en cuenta el medio plasmático que generalmente rodea tanto a objetos compactos, como galaxias y cluster de galaxias [40]. La principal diferencia respecto del caso de gravedad pura cuando uno quiere tomar en cuenta el efecto del plasma en la propagación de la luz es que en este caso los rayos de luz no siguen en general curvas geodésicas, tal es el caso para plasmas inhomogéneos, y por otro lado dicha propagación depende fuertemente de la frecuencia de observación. Sin embargo, como mostramos en este trabajo, a partir de una cuidadosa elección de la métrica óptica que incluya el índice de refracción del medio en cuestión podemos extender los resultados de Gibbons y Werner teniendo en cuenta no sólo el efecto del campo gravitatorio de la lente sino también el efecto del medio que la rodea. Dicha extensión la llevamos a cabo para espaciotiempos estacionarios tanto esféricamente simétricos como axialmente simétricos.

Seguidamente, y teniendo siempre en cuenta la contribución del plasma, proponemos una nueva definición de ángulo de deflexión basado en el uso del teorema de Gauss-Bonnet, aplicable al caso donde ni el observador ni la fuente se encuentran “infinitamente” lejos de la lente. Si bien la aproximación donde éstos se encuentran suficientemente lejos de la fuente suele ser adecuada en muchas situaciones astrofísicas de interés, en otras es necesario considerar que efectivamente se encuentran a una distancia finita de la lente. En este contexto, estudiamos el efecto del campo gravitatorio de nuestro Sol junto con el efecto de la corona solar sobre el ángulo de deflexión utilizando nuestra definición alternativa y comparando el ángulo obtenido con resultados firmemente consolidados en la literatura relacionada a la astrometría de alta precisión, mostrando una coincidencia plena con los mismos, y descartando a su vez, otras definiciones del ángulo de deflexión propuestas por otros autores recientemente [59].

Por otro lado, es posible identificar el movimiento de fotones en un plasma homogéneo bajo la acción de un campo gravitatorio con el movimiento de partículas masivas en el caso de gravedad pura, a través de la identificación de la frecuencia del plasma con la masa de la partícula masiva, y la frecuencia de observación de los fotones en el plasma con la energía de la partícula con masa, ambas medidas por un observador en la región asintótica. De esta forma, nuestros resultados pueden ser fácilmente extendidos al estudio del movimiento de partículas masivas. Si bien esta identificación sólo se puede llevar a cabo para densidades homogéneas de plasma, en este trabajo introducimos por primera vez una identificación entre el movimiento de fotones en un plasma inhomogéneo bajo la acción de un campo gravitacional con el movimiento de partículas masivas y cargadas bajo la acción de un campo gravitatorio y un campo eléctrico. Los resultados obtenidos a partir de esta identificación son contrastados con resultados usuales en la literatura mostrando una concordancia exitosa.

En este trabajo también presentamos expresiones a primer orden para el ángulo de deflexión y para la convergencia y el shear en términos de las componentes del tensor energía-momento así como también en términos de la frecuencia de observación y de la densidad de electrones del plasma para espaciotiempos esféricamente simétricos generalizando de esta forma el trabajo original de Gallo y Moreschi [42]. Este estudio lo llevaremos a cabo utilizando tanto el enfoque introducido por Gallo y Moreschi originalmente como así también utilizando el método introducido por Gibbons y Werner llegando exactamente a los mismo resultados con ambos métodos. También incluimos el estudio de estas cantidades ópticas a segundo orden para el caso con plasma generalizando a su vez los resultados obtenidos en [44].

Estudiamos también expresiones para el ángulo de deflexión a orden superior más allá del primer y segundo orden en la masa y en el spin para el espaciotiempo de Kerr, y teniendo en cuenta el efecto del plasma. Se estudia además la magnitud de la contribución de los términos de orden superior para un agujero negro con parámetros similares al del agujero negro supermasivo del centro de nuestra galaxia, Sgr A*.

Finalmente, en este trabajo estudiamos otras cantidades más allá del ángulo de deflexión pero que están íntimamente relacionados a éste, y que resultan ser observables en la mayoría de las situaciones astrofísicas de interés como es el caso de la formación de imágenes, time delay, magnificación, shear, convergencia, entre otros. En este caso, estudiamos dichos observables a partir de resolver tanto perturbativa como numéricamente la ecuación de lente fuerte teniendo en cuenta el campo gravitatorio de la lente como el plasma que la rodea. Utilizamos para ello perfiles de densidad de masa comúnmente usados a la hora de modelar halos de materia oscura en galaxias teniendo en cuenta su elipticidad, así como también modelos de densidad electrónica frecuentemente utilizados para modelar el plasma en distintas regiones de la lente. También estudiamos otros perfiles de densidad electrónica que van más allá de los modelos con simetría esférica. Los resultados aportados en esta tesis se encuentran publicados en [40, 76-78]. El último capítulo de la misma es parte de un trabajo en desarrollo [79].

Capítulo 2

Influencia del plasma en espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos

En este capítulo introducimos un nuevo método para calcular el ángulo de deflexión de los rayos de luz propagándose a través de un plasma astrofísico en la vecindad de una lente gravitacional. Dicho método está basado a su vez en el método introducido recientemente por Gibbons y Werner [45] donde se estudia el ángulo de deflexión en el caso de gravedad pura, es decir, sin tener en cuenta la influencia del plasma. Nos estaremos restringiendo a lentes gravitacionales estáticas y esféricamente simétricas donde tanto el observador como la fuente se encuentran a una distancia suficientemente grande de la lente gravitacional. En cuanto al plasma estaremos considerando modelos tanto homogéneos como inhomogéneos que respetan la simetría esférica dejando para capítulos posteriores modelos de lente y de plasma más complejos.

Mostraremos cómo calcular el ángulo de deflexión utilizando este novedoso método para distintos espaciotiempos, y a partir del mismo calcularemos observables típicos de la teoría de lentes como la convergencia, shear y anillos de Einstein, a fin de estudiar la influencia del plasma en los mismos.

Finalmente, a partir de una correspondencia bien conocida entre el movimiento de fotones en un plasma homogéneo en presencia de un campo gravitacional y el de partículas masivas en gravedad pura, que resumimos en este capítulo, mostraremos cómo es posible encarar el estudio del movimiento de partículas masivas en gravedad pura utilizando este nuevo método.

2.1. Preliminares

2.1.1. Propagación de ondas electromagnéticas en plasmas

Revisemos brevemente la teoría covariante de propagación de campos electromagnéticos en plasmas fríos, isotrópicos y no magnetizados. Son muchos los autores que han estudiado formulaciones covariantes que describan la dinámica de campos electromagnéticos de plasma en espaciotiempos curvos. Entre ellos podemos citar [12, 15, 80, 81]. Aquí seguiremos brevemente a Broderick *et al*[81] mostrando solamente los resultados esenciales y refiriendo a dicho artículo para mayores detalles.

Recordemos que un plasma se puede caracterizar como un fluido conformado por partículas ionizadas y electrones libres. En muchas situaciones, el plasma se puede considerar cuasi-neutro, sin embargo ante una perturbación de origen electromagnético la dinámica de los electrones y los iones (mucho más masivos) no es

la misma, lográndose desplazamientos relativos a los iones y generándose en respuesta campos electromagnéticos que a su vez influyen sobre la propagación de los campos perturbadores iniciales.

Comencemos considerando las ecuaciones de Maxwell en un medio sobre el cual puede haber corrientes J^μ en un espaciotiempo arbitrario,

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\beta, \quad (2.1)$$

$$\nabla_\alpha {}^*F^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.2)$$

con ${}^*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$ el tensor dual al tensor electromagnético de Faraday $F^{\alpha\beta}$ y $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ el tensor de Levi-Civita.

Asumamos que el medio es un plasma moviéndose con 4-velocidad promedio u^α ($u^\alpha u_\alpha = -1$), entonces con respecto a un sistema de referencia localmente en reposo con respecto al plasma, los campos eléctricos E^μ y magnéticos B^μ asociados se definen por $E^\mu = F^{\mu\nu}u_\nu$, $B^\mu = {}^*F^{\mu\nu}u_\nu$. Éstos son 4-vectores tipo espacial ortogonales a u^μ . A su vez asumiremos que vale la ley de Ohm, la cual en su formulación covariante se puede escribir como $J^\mu = \sigma_\nu^\mu E^\nu = \sigma_\nu^\mu F^{\nu\gamma}u_\gamma$, con σ_ν^μ definiendo el *tensor covariante de conductividad*.

En términos de E^μ y B^μ los tensores de Maxwell se descomponen como,

$$F^{\mu\nu} = u^\mu E^\nu - u^\nu E^\mu + \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}u_\gamma B_\delta, \quad (2.3)$$

$${}^*F^{\mu\nu} = u^\mu B^\nu - u^\nu B^\mu + \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}u_\gamma E_\delta. \quad (2.4)$$

Asumamos ahora que introducimos una perturbación sobre dicho medio plasmático, y limitémonos al régimen de óptica geométrica, es decir asumiremos que la fase de los campos electromagnéticos perturbadores varía muy rápido en una cierta región de escala espacial característica del plasma L , i.e. los campos tienen una longitud de onda λ mucho menor que dicha escala. Entonces, aproximando el campo eléctrico como $E^\mu = E_0^\mu e^{i\frac{S}{\hbar}} + \mathcal{O}(\lambda/L)$ (con $S = p_\mu x^\mu$, $p^\mu = \hbar\nabla_\mu S = \hbar k^\mu$ donde k^μ es el 4-vector número de onda) y similarmente para el campo magnético, las ecuaciones de Maxwell se reducen, a este orden, de la siguiente forma,

$$k_\mu \left(E^\mu u^\nu - E^\nu u^\mu + \epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}u_\beta B_\gamma \right) = 4\pi i \sigma_\mu^\nu E_\nu, \quad (2.5)$$

$$k_\mu \left(B^\mu u^\nu - B^\nu u^\mu + \epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}u_\beta E_\gamma \right) = 0. \quad (2.6)$$

Notar que si contraemos la ecuación (2.6) con u_ν y usando el hecho de que $B^\nu u_\nu = 0$ concluimos que $k_\mu B^\mu = 0$. Por lo tanto, de la ecuación (2.6) se deduce que

$$(k_\mu u^\mu) B_\nu = \epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}u_\beta E_\gamma k_\nu, \quad (2.7)$$

con lo cual, debido a que $p_\mu u^\mu = -\hbar\omega$ es la frecuencia de la onda como medida en el sistema de referencia en reposo con respecto al plasma, y dicha frecuencia se asume distinta de cero, se concluye que

$$B_\nu = -\frac{1}{\omega} \epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}u_\beta E_\gamma k_\nu, \quad (2.8)$$

y que por lo tanto $E^\mu B_\mu = 0$, es decir, son ortogonales.

Finalmente, reemplazando (2.8) en la ecuación (2.5) y luego de un poco de álgebra, llegamos a una ecuación de la forma

$$\Omega_\nu^\mu E^\nu = 0, \quad (2.9)$$

donde Ω_ν^μ conocido como *tensor de dispersión* está dado por

$$\Omega_\nu^\mu = k^\alpha k_\alpha \delta_\nu^\mu - k^\mu k_\nu - 4\pi i \omega \sigma_\nu^\mu. \quad (2.10)$$

Notar que en general el tensor de conductividad σ_ν^μ puede depender de las coordenadas x^μ del evento donde se lo evalúe. Por lo tanto, para asegurar la existencia no trivial de soluciones a la ecuación (2.9) se debe cumplir que el determinante del tensor de dispersión se anule, es decir,

$$H(k_\mu, x^\mu) = \frac{1}{2} \det[\Omega_\nu^\mu] = 0, \quad (2.11)$$

conocida comúnmente como *relación de dispersión*. El factor 1/2 es por simple conveniencia posterior.

Si quisieramos conocer la dinámica de los rayos con vector de propagación k^μ ortogonales a las superficies de fase $S = \text{constante}$, podemos proceder como sigue. Teniendo en cuenta que $k_\mu = \nabla_\mu S$, la relación de dispersión puede ser pensada como una ecuación diferencial de primer orden para S , cuyas curvas características que siguen de la teoría general de PDEs de primer orden (ver por ejemplo Cap. 3 de [82]) y que asumiremos parametrizadas por un parámetro \tilde{s} , deben satisfacer lo siguiente,

$$\frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial k_\alpha}, \quad \frac{dk_\alpha}{d\tilde{s}} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \quad (2.12)$$

las cuales claramente cumplen que

$$\frac{dH}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial k_\mu} \frac{dk_\mu}{d\tilde{s}} + \frac{\partial H}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tilde{s}} = 0. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, las trayectorias de los rayos son obtenidas a partir de la solución de las ecuaciones (2.12) junto a la relación de dispersión $H = 0$.

Distintos modelos de plasmas son descritos a través de respectivos tensores de conductividad σ_ν^μ . En esta tesis estaremos interesados en modelos de plasma frío (esto es, con velocidades no relativistas y presiones despreciables), isotrópicos y no magnéticos. Para este tipo de plasma el tensor de conductividad está dado por $\sigma_\nu^\mu = -\frac{\omega_e^2}{4\pi i \omega} \delta_\nu^\mu$ [81], con ω_e la frecuencia del plasma,

$$\omega_e^2(x) = \frac{4\pi e^2}{m_e} N(x) = K_e N(x), \quad (2.14)$$

con e y m_e siendo la carga y la masa del electrón, respectivamente. $N(x)$ es la densidad de electrones en el plasma.

Por lo tanto el tensor de dispersión se reduce a

$$\Omega_\nu^\mu = (k^\alpha k_\alpha + \omega_e^2(x)) \delta_\nu^\mu - k^\mu k_\nu. \quad (2.15)$$

Aquí podemos considerar dos tipos de modos de propagación de onda: longitudinales (i.e. donde la dirección del campo eléctrico es la misma que la de la parte espacial del vector de onda y por lo tanto $E^\mu k_\mu \neq 0$) y transversales, para los cuales el campo

eléctrico es ortogonal a k^μ . Para el modo longitudinal, se sigue de (2.8) que $B_\mu = 0$. Estos modos son conocidos como ondas electrostáticas y no serán de interés en el resto de esta tesis. En cambio, para los modos transversales existe un campo magnético no trivial. En tal situación sólo el primer término del tensor de dispersión actúa no trivialmente sobre E^μ obteniéndose

$$\Omega_\nu^\mu E^\nu = [(k^\alpha k_\alpha + \omega_e^2(x))\delta_\nu^\mu] E^\nu = 0, \quad (2.16)$$

cuyo determinante nos da la relación de dispersión responsable de la dinámica (multiplicando por \hbar^2 para reescribirla en términos de p_α):

$$H(p_\alpha, x^\alpha) = \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \hbar^2 \omega_e^2(x)]. \quad (2.17)$$

Este será el tipo de modelo de plasma sobre el cual describiremos la propagación de rayos de luz. Para otros tensores de conductividad, correspondientes a plasmas cálidos, magnétoactivos, etc. y sus respectivas relaciones de dispersión, referimos a [81].

Alternativamente, se puede introducir un plasma frío como un caso particular de estudio de medios dispersivos donde se analizan trayectorias de rayos en la aproximación de óptica geométrica (ver Synge[83]). En el sistema localmente en reposo de un medio dispersivo arbitrario, el 4-vector de onda puede descomponerse como

$$p^\mu = \hbar\omega u^\mu + \hbar K^\mu, \quad (2.18)$$

con K^μ el vector de onda espacial ortogonal a u^α , i.e. $K^\mu u_\mu = 0$. A partir de ahora y en lo que sigue tomaremos $c = \hbar = 1$. Con respecto a este sistema de referencia, la velocidad de fase v_{ph} de un rayo está dada por

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\sqrt{K^\mu K_\mu}} = -\frac{p_\alpha u^\alpha}{\sqrt{K^\mu K_\mu}}, \quad (2.19)$$

con respectivo índice de refracción n (al cuadrado)

$$n^2 = \frac{1}{v_{ph}^2} = \frac{K^\mu K_\mu}{(p_\alpha u^\alpha)^2} = \frac{[p^\mu + (p_\alpha u^\alpha)u^\mu][p_\mu + (p_\alpha u^\alpha)u_\mu]}{(p_\alpha u^\alpha)^2} = \frac{[p^\mu p_\mu + (p_\alpha u^\alpha)^2]}{(p_\alpha u^\alpha)^2}, \quad (2.20)$$

la cual puede ser reescrita como

$$g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - (n^2 - 1)(p_\alpha u^\alpha)^2 = 0. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, dado un índice de refracción asociado a un medio (independientemente de si es de origen plasmático, dispersivo o no dispersivo), la expresión (2.21) define la relación de dispersión de dicho medio, por lo cual podemos definir al Hamiltoniano asociado por:

$$H(p_\alpha, x^\alpha) = \frac{1}{2} [g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - (n^2 - 1)(p_\alpha u^\alpha)^2]. \quad (2.22)$$

En el caso particular de un plasma frío no magnético el índice de refracción viene dado por [26, 27],

$$n^2(x, \omega(x)) = 1 - \frac{\omega_e^2(x)}{\omega^2(x)}, \quad (2.23)$$

donde $\omega(x)$ es la frecuencia de observación de los rayos de luz medida por un observador estático mientras que ω_e es la frecuencia del plasma dada por la ecuación (2.14). Es fácil chequear que esta expresión para el índice de refracción reduce el Hamiltoniano a la ecuación (2.17).

Notemos que sólo rayos de luz con $\omega(x) > \omega_e(x)$ se propagan a través del plasma. Por otro lado, si $\omega(x) < \omega_e(x)$, el índice de refracción se vuelve imaginario, y las ondas con tal frecuencia no se propagarán a través del plasma dando origen a ondas evanescentes. La razón de que la frecuencia del plasma establezca la escala física se puede entender como originada en la relación entre la corriente de conducción y la corriente de desplazamiento. En primer lugar, la corriente de conducción siempre se opone a la corriente de desplazamiento. Por otro lado, si la frecuencia de la onda electromagnética es más grande que la frecuencia del plasma, entonces la corriente de conducción será menor que la corriente de desplazamiento y entonces la propagación de la onda electromagnética ocurrirá. Sin embargo, para una onda con la frecuencia del plasma la densidad de corriente cancelará exactamente la corriente de desplazamiento, y para frecuencias más bajas, la corriente de conducción será más grande que la de desplazamiento y por lo tanto la corriente efectiva total (de conducción más la de desplazamiento) tendrá el signo contrario para permitir la propagación. En lo que sigue no consideraremos este tipo de situaciones, sin embargo nos referimos a [84] para un estudio de la propagación de las ondas electromagnéticas en medios no dispersivos con índice de refracción complejo en espaciotiempos curvos usando una métrica efectiva que incluye la absorción.

Notemos además que dado el índice de refracción (2.23), los fotones se desvían de las geodésicas nulas del espaciotiempo de manera que sus trayectorias dependen de su frecuencia. Más aún, incluso en la presencia de un plasma homogéneo, es decir, para $\omega_e(x) = \text{constante}$, si el espaciotiempo produce un redshift gravitacional no trivial, esto es, la frecuencia de los fotones ω cambia a lo largo de la trayectoria, se producirá una dispersión no trivial a través de (2.23) y por lo tanto permitirá de nuevo una desviación de los rayos de luz respecto de las trayectorias geodésicas nulas. Por supuesto, este último efecto no está presente en un espaciotiempo plano.

En síntesis, en este contexto la propagación de los rayos de luz en un plasma frío no magnetizado se describirá a través del siguiente Hamiltoniano [26] (ver también [15] para una discusión completa y detallada),

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\beta}(x) p_\alpha p_\beta + \omega_e^2(x) \right), \quad (2.24)$$

donde los rayos de luz son soluciones de las ecuaciones de Hamilton,

$$\ell^\alpha := \frac{dx^\alpha}{d\tilde{s}} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{d\tilde{s}} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}; \quad (2.25)$$

junto a la relación de dispersión,

$$H(x, p) = 0, \quad (2.26)$$

mientras que \tilde{s} es un parámetro a lo largo de los mismos.

2.1.2. Métrica óptica asociada a un medio plasmático en un campo gravitacional externo

A partir de la ecuación (2.26) podemos ver que en general, los rayos de luz en vez de seguir geodésicas temporales o nulas con respecto a la métrica $g_{\alpha\beta}$, siguen siempre curvas temporales, no necesariamente geodésicas excepto para el caso de rayos de luz propagándose en un plasma homogéneo. Esto puede ser entendido heurísticamente notando que incluso para un espaciotiempo plano lleno por un plasma homogéneo, se sigue de (2.23) y de $n = c|\mathbf{k}|/\omega$, con $|\mathbf{k}|$ siendo la norma del vector número de onda, que la relación de dispersión viene dada por $\omega^2 = c^2|\mathbf{k}|^2 + \omega_e^2$, y por lo tanto los fotones se comportan como si tuvieran una masa inercial efectiva $m_{\text{eff}} = \hbar\omega_e$. Por otro lado, en un campo gravitacional, y usando el principio de equivalencia, esta masa efectiva coincide con la masa gravitacional permitiendo a los fotones seguir geodésicas temporales. Estas consideraciones heurísticas fueron plasmadas con rigor matemático por Kulsrud y Loeb en [80]. Ver también referencia [81], en la cual relaciones de dispersión más generales fueron estudiadas para una vasta variedad de modelos de plasma en forma covariante.

En el caso general, incluso cuando el hecho de que los rayos de luz no sigan geodésicas no represente ninguna restricción para el estudio de su propagación en el plasma, usualmente se suele realizar una transformación conforme de la métrica de forma que los rayos de luz sigan geodésicas temporales respecto de la nueva métrica (ver por ejemplo [28, 85]).

Notemos que definiendo el tensor

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + (1 - n^2(x, \omega(x)))u^\alpha u^\beta, \quad (2.27)$$

el Hamiltoniano (2.24) toma la forma,

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\beta}(x, \omega(x))p_\alpha p_\beta, \quad (2.28)$$

con inversa $\tilde{g}_{\alpha\gamma}$ (definida por $\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta$),

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \left(1 - \frac{1}{n^2(x, \omega(x))}\right)u_\alpha u_\beta. \quad (2.29)$$

En todas estas expresiones, usamos la frecuencia medida del fotón por un observador estático en reposo respecto del plasma con 4-velocidad u^α con respecto a $g_{\alpha\beta}$ dada por,

$$\omega(x) = -p_\alpha u^\alpha, \quad (2.30)$$

y la expresión (2.23) para el índice de refracción.

Como se explica en el texto de referencia [86], el tensor $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ no es en general una métrica debido a su dependencia en los 4-momentos p_α . Sin embargo, para medios no dispersivos, sí es efectivamente una métrica y los rayos de luz siguen geodésicas nulas respecto a él (ver [86] para más detalles). En tales situaciones el tensor (2.29) se denomina *métrica de Gordon* [87]. Retornaremos a ella en el capítulo 4.

Por otro lado, para el caso de espaciotiempos estáticos, incluso considerando medios dispersivos existe un principio de Fermat (ver [86]) el cual establece que las proyecciones espaciales de los rayos de luz, que son solución de las ecuaciones de Hamilton en las hipersuperficies $t = \text{constante}$ son también geodésicas de la

siguiente métrica Riemanniana 3-dimensional denominada *métrica óptica*,

$$g_{ij}^{\text{opt}} = -\frac{n^2}{g_{00}}g_{ij}, \quad (2.31)$$

siendo g_{ij} la métrica inducida en la hipersuperficie $t = \text{constante}$ y g_{00} la componente temporal de la métrica física.

En lo que sigue, daremos por sentado este resultado conocido. Sin embargo, en el capítulo 4 presentaremos una prueba válida para espaciotiempos estáticos arbitrarios y en el capítulo 5 para espaciotiempos estacionarios y axisimétricos.

A partir de ahora nos concentraremos en espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos llenos por un plasma frío no-magnetizado también con las mismas simetrías que el espaciotiempo, esto es, el espaciotiempo físico viene descrito por una métrica de la forma,

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (2.32)$$

y sólo con dependencia radial en la frecuencia del plasma, $\omega_e = \omega_e(r)$. Por supuesto, pudimos elegir un sistema de coordenadas adecuado para el cual el espaciotiempo sea caracterizado sólo por dos funciones métricas A y B , sin embargo mantenemos la forma (2.32) debido a que nos gustaría escribir expresiones generales que se mantengan válidas para una vasta familia de sistemas de coordenadas. Notemos también que estamos despreciando la auto-gravitación del plasma debido a que este efecto es sumamente despreciable en cuanto a la propagación de los rayos de luz se refiere. Asumimos también que el espaciotiempo es asintóticamente plano y que el plasma es estático respecto a observadores que siguen las curvas integrales del campo de Killing temporal $\zeta^\alpha = (\frac{\partial}{\partial t})^\alpha$. Por consiguiente, podemos tomar u^α como,

$$u^\alpha = \frac{\delta_t^\alpha}{\sqrt{A(r)}}. \quad (2.33)$$

Debido al redshift gravitacional, la frecuencia de los fotones en una dada posición radial r está dada por,

$$\omega(r) = \frac{\omega_\infty}{\sqrt{A(r)}}, \quad (2.34)$$

donde ω_∞ es la frecuencia de los fotones medida por un observador estático en el infinito. Esto implica que el índice de refracción sólo tendrá una dependencia radial. Sin pérdida de generalidad debido a la simetría esférica tanto del plasma como del espaciotiempo podemos restringirnos a rayos propagándose en el plano $\vartheta = \pi/2$. Por otro lado, como estamos interesados en la aplicación del teorema de Gauss-Bonnet para determinar el ángulo de deflexión siguiendo el procedimiento introducido por Gibbons y Werner en [46], haremos uso de la variedad 2-dimensional Riemanniana asociada $(\mathcal{M}^{\text{opt}}, g_{ij}^{\text{opt}})$ donde variedad óptica \mathcal{M}^{opt} está caracterizada por $t = \text{constante}$ y $\vartheta = \pi/2$, mientras que la métrica óptica g_{ij}^{opt} teniendo en cuenta (2.31) viene dada por,

$$d\sigma^2 = g_{ij}^{\text{opt}}dx^i dx^j = \frac{n^2(r)}{A(r)}\left(B(r)dr^2 + C(r)d\varphi^2\right). \quad (2.35)$$

Como vemos esta métrica está conformemente relacionada a la métrica inducida en la subvariedad $t = \text{constante}$, $\vartheta = \pi/2$ del espaciotiempo físico y por lo tanto

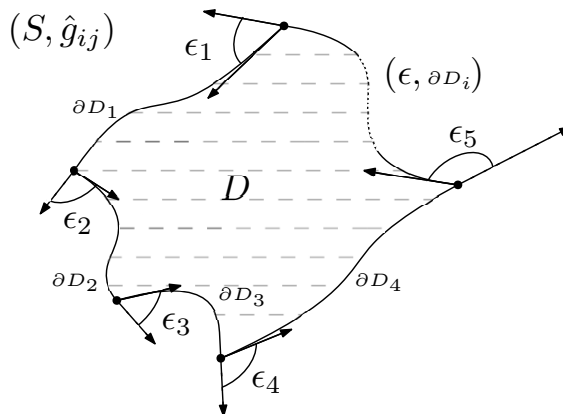


FIGURA 2.1: Región D con borde $\partial D = \cup_i \partial D_i$. En cada vértice hemos definido el ángulo exterior en sentido positivo.

preserva ángulos formados por dos curvas en un mismo punto.

2.2. Ángulo de deflexión utilizando el teorema de Gauss-Bonnet

Haremos un breve repaso del teorema de Gauss-Bonnet en variedades Riemannianas 2-dimensionales y cómo podemos utilizar el mismo para calcular el ángulo de deflexión en espaciotiempos estáticos.

El teorema de Gauss-Bonnet conecta la curvatura intrínseca de una superficie dada por la integral de la curvatura Gaussiana, con su topología caracterizada por el número característico de Euler. De forma precisa lo podemos enunciar de la siguiente manera: sea $D \subset S$ un dominio regular de una superficie 2-dimensional S orientada equipada con un métrica Riemanniana \hat{g}_{ij} cuyo borde $\partial D : \mathbb{R} \supset I \rightarrow D$ es una curva regular, orientada, simple y cerrada, entonces

$$\int \int_D \mathcal{K} dS + \int_{\partial D} k_g d\sigma + \sum_i \epsilon_i = 2\pi\chi(D), \quad \sigma \in I, \quad (2.36)$$

donde $\chi(D)$ y \mathcal{K} son el número característico de Euler y la curvatura Gaussiana de la región D respectivamente, k_g es la curvatura geodésica de ∂D , y ϵ_i es el ángulo exterior definido en el i -ésimo vértice, en sentido positivo, como se muestra en la figura 2.1. Por otro lado resulta importante señalar que dada una curva γ con vector tangente normalizado $\hat{\gamma}$ y vector aceleración $\ddot{\gamma}$, su curvatura geodésica puede calcularse de la siguiente forma,

$$k_g = \hat{g}(\nabla_{\hat{\gamma}} \hat{\gamma}, \ddot{\gamma}), \quad (2.37)$$

la cual es cero si y sólo si la curva γ es geodésica.

Siguiendo el trabajo de Gibbons y Werner [45] aplicaremos el teorema de Gauss-Bonnet a un dominio específico equipado con la métrica óptica g_{ij}^{opt} a fin de calcular el ángulo de deflexión en un medio plasmático. Para hacer esto consideremos un dominio simplemente conexo D_R como se muestra en la figura 2.2 cuyo borde consiste de la curva espacial geodésica respecto de g_{ij}^{opt} la cual codifica la información de un rayo de luz que viaja desde la fuente hasta el observador, y una curva semicircular C_R dada por $r(\varphi) = R = \text{constante}$. Al tomar el límite del radio R de esta curva

yendo a infinito, y usando el hecho de que en este límite la suma de los ángulos exteriores debe ser igual a π y que en la situación bajo consideración $\chi(D_R) = 1$, el ángulo de deflexión α resultante puede ser obtenido a partir de la siguiente expresión (ver figura 2.2 para más detalles),

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi+\alpha} \left[k_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \right] \Big|_{C_R} d\varphi = \pi - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{D_R} \mathcal{K} dS, \quad (2.38)$$

donde la curvatura Gaussiana puede ser calculada en términos de la única componente linealmente independiente del tensor de Riemann asociada a la métrica óptica,

$$\mathcal{K} = \frac{R_{r\varphi r\varphi}(g^{\text{opt}})}{\det(g^{\text{opt}})}. \quad (2.39)$$

Notemos además que, a partir de (2.35) se sigue que,

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} \Big|_{C_R} = n(R) \left(\frac{C(R)}{A(R)} \right)^{1/2}. \quad (2.40)$$

En general, es posible corroborar que si el espaciotiempo ambiente es asintóticamente plano entonces,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[k_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \right] \Big|_{C_R} = 1, \quad (2.41)$$

y por lo tanto la ecuación 2.38 se simplifica sustancialmente,

$$\alpha = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{D_R} \mathcal{K} dS. \quad (2.42)$$

A diferencia de las expresiones usuales para el ángulo de deflexión, las cuales en general se encuentran escritas en un dado sistema de coordenadas, vemos que la expresión (2.42) sólo depende de la curvatura Gaussiana y de la región de integración D_R . Como veremos en el presente y próximos capítulos, expresiones como (2.42) no sólo permiten obtener ángulos de deflexión en gravedad linearizada sino también expresiones de alto orden, y también incluyendo correcciones a distancia finita. A su vez, expresiones de este estilo serán útiles para describir el comportamiento no geodésico de partículas masivas y cargadas en campos de Einstein-Maxwell, es decir, su aplicación no sólo se reduce al estudio de rayos de luz en medios dispersivos.

2.3. Ejemplos con plasmas homogéneos

En esta sección consideraremos una lente gravitacional rodeada por un plasma homogéneo, es decir con una densidad electrónica constante $N(r) = \text{constante}$. Sin embargo esto no implica que el índice de refracción deba ser constante lo cual no produciría efecto de lente gravitacional alguno, sino que por el contrario debido al redshift gravitacional en general el índice de refracción no será constante incluso para este tipo plasmas. Recordemos que los plasmas homogéneos no sólo son interesantes de por sí (ya que pueden modelar regiones del medio interestelar, por ejemplo) sino que también a través del diccionario con las trayectorias geodésicas de partículas masivas, permite en simultáneo describir las órbitas de las mismas. Por ejemplo de neutrinos provenientes de distintas fuentes astrofísicas.

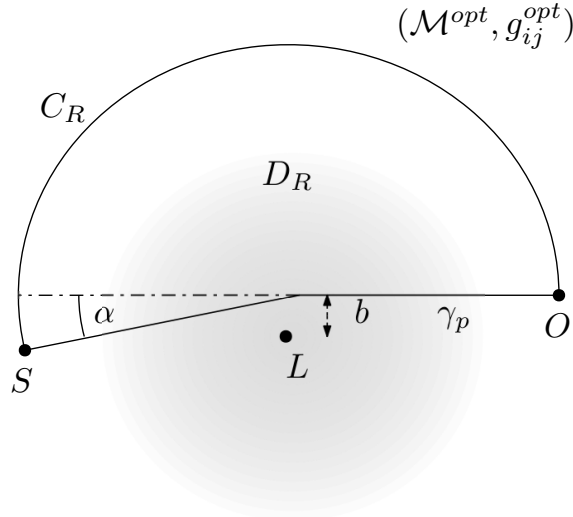


FIGURA 2.2: $\partial D_R = C_R \cup \gamma_p$. En este diagrama, el punto S representa la posición de la fuente mientras que la del observador está identificada con el punto O . γ_p representa un rayo de luz emitido desde la fuente hasta el observador. b es el parámetro de impacto. La región sombreada en escala de grises representa el plasma en cuestión mientras que el punto L indica la posición de la lente gravitacional. C_R es una curva semicircular definida por $r(\varphi) = R = \text{constante}$. Esta región pertenece a la variedad óptica dos dimensional $(\mathcal{M}^{\text{opt}}, g_{ij}^{\text{opt}})$, y por lo tanto la información del plasma se encuentra codificada en la métrica óptica g_{ij}^{opt} .

2.3.1. Schwarzschild

Como primer ejemplo calcularemos el ángulo de deflexión producido por una lente esféricamente simétrica cuyo campo gravitacional está dado por la métrica de Schwarzschild en este medio homogéneo, la cual viene caracterizada por las funciones coordenadas

$$A(r) = 1 - \frac{2m}{r}, \quad B(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}, \quad C(r) = r^2, \quad (2.43)$$

para $r > 2m$. Si bien este espaciotiempo es asintóticamente plano y el ángulo de deflexión puede ser calculado utilizando la expresión (2.42), calcularemos también la cantidad $k_g \frac{d\sigma}{d\varphi}$ a fin de corroborar la relación (2.41).

El índice de refracción en este caso es,

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \quad (2.44)$$

Por otro lado la métrica óptica viene dada por lo siguiente,

$$d\sigma^2 = \frac{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{1 - \frac{2m}{r}} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\varphi^2 \right), \quad (2.45)$$

con determinante

$$\det(g^{\text{opt}}) = \frac{r^3 (\omega_\infty^2 r - \omega_e^2 r + 2\omega_e^2 m)^2}{(r - 2m)^3 \omega_\infty^4}, \quad (2.46)$$

y curvatura Gaussiana,

$$\mathcal{K} = \frac{\omega_\infty^2 m}{r^3 (\omega_\infty^2 r - \omega_e^2 r + 2\omega_e^2 m)^3} [(3\omega_e^2 \omega_\infty^2 - 2\omega_\infty^4 - \omega_e^4) r^3 + (3\omega_\infty^4 - 9\omega_\infty^2 \omega_e^2 + 6\omega_e^4) r^2 m + (6\omega_\infty^2 \omega_e^2 - 12\omega_e^4) r m^2 + 8\omega_e^4 m^3]. \quad (2.47)$$

La curvatura geodésica de la curva C_R en este caso viene dada por lo siguiente,

$$\kappa_g = \frac{\omega_\infty |\omega_e^2 R^2 - \omega_\infty^2 R^2 - 4R\omega_e^2 m + 3m\omega_\infty^2 R + 4\omega_e^2 m^2|}{R^{3/2} (\omega_\infty^2 R - \omega_e^2 R + 2\omega_e^2 m)^{3/2}}, \quad (2.48)$$

mientras que la cantidad $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ a lo largo de la curva C_R esta dada por,

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|_{C_R} = \frac{R}{\omega_\infty} \sqrt{\frac{R(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) + 2m\omega_e^2}{R - 2m}}. \quad (2.49)$$

Utilizando (2.48) y (2.49) podemos chequear que se satisface la relación (2.41) y por lo tanto el ángulo de deflexión viene dado por la expresión (2.42).

Por otro lado, como en este ejemplo sólo buscamos obtener el ángulo de deflexión a primer orden en la masa bastará trabajar con la cantidad $\mathcal{K}dS$ a primer orden en la masa

$$\mathcal{K}dS = -\frac{2\omega_\infty^2 - \omega_e^2}{r^2 (\omega_\infty^2 - \omega_e^2)} m dr d\varphi + \mathcal{O}(m^2). \quad (2.50)$$

y sólo necesitaremos aproximar la curva geodésica γ_p a orden cero parametrizada por $r = b/\sin\varphi$, donde b representa el parámetro de impacto. Si consideráramos correcciones de orden m en la curva γ_p , estos nuevos términos contribuirían a segundo orden en m en la expresión final del ángulo de deflexión; por tal motivo no es necesario considerar los términos de orden m en la curva γ_p .

Por lo tanto el ángulo de deflexión está dado por la siguiente integral de área,

$$\alpha = -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \int_{\frac{b}{\sin\varphi}}^R \mathcal{K}dS. \quad (2.51)$$

Obteniendo finalmente,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{1 - (\omega_e/\omega_\infty)^2} \right) + \mathcal{O}(m^2), \quad (2.52)$$

la cual coincide con trabajos previos donde el ángulo de deflexión fue obtenido por otros medios [22]. En particular, en el caso sin plasma ($\omega_e = 0$) o en el caso donde la frecuencia del plasma es despreciable respecto de la frecuencia del fotón ($\omega_e/\omega_\infty \rightarrow 0$), recuperamos la expresión conocida para el ángulo de deflexión en el espaciotiempo de Schwarzschild en gravedad pura, $\alpha = \frac{4m}{b}$.

2.3.2. Un ejemplo más general

Ahora consideraremos una familia de soluciones esféricamente simétricas más generales que han sido estudiadas con anterioridad [88, 89] donde las funciones

coordenadas vienen dadas por,

$$A(r) = 1 - \frac{\mu}{r^q} + \mathcal{O}(r^{-(q+1)}), \quad (2.53)$$

$$B(r) = 1 + \frac{\gamma}{r^q} + \mathcal{O}(r^{-(q+1)}), \quad (2.54)$$

$$C(r) = r^2 \left(1 + \frac{\beta}{r^q} \right) + \mathcal{O}(r^{-(q-1)}), \quad (2.55)$$

donde $q \geq 0$. Como se explica en [88] se puede realizar un cambio de coordenadas de tal forma que las componentes de la métrica conserven la forma de las ecuaciones (2.53), (2.54) y (2.55) pero con $\beta = 0$ (coordenadas tipo Schwarzschild) o bien con $\beta = \gamma$ (coordenadas isotrópicas). Por el momento mantendremos esta libertad a la hora de elegir el parámetro β . Además esta familia de métricas contiene como caso particular el límite asintótico de la métrica de Schwarzschild (tomando $\mu = \gamma = 2m$, $\beta = 0$ y $q = 1$) y el agujero de gusano de Ellis (tomando $\mu = \gamma = 0$, $\beta = a^2$ y $q = 2$).

El índice de refracción para esta familia de métricas es,

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2} \left(1 - \frac{\mu}{r^q} \right)}. \quad (2.56)$$

Conservando sólo términos lineales en los parámetros μ , γ y β , la métrica óptica es de la forma,

$$d\sigma^2 = \frac{\omega_\infty^2 [(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)r^q + (\gamma - \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2]}{(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)^2 r^q} dr^2 + \frac{\omega_\infty^2 [(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)r^q + (\beta - \mu)\omega_\infty^2 - \beta\omega_e^2]}{(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)^2 r^q} r^2 d\varphi^2, \quad (2.57)$$

con determinante,

$$\det(g^{\text{opt}}) = \frac{(r^q + \gamma)(r^2 + \beta r^{2-q})[r^q(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) + \mu\omega_e^2]^2}{r^q(r^q - \mu)^2\omega_\infty^4}. \quad (2.58)$$

Por otro lado y a primer orden en los mismo parámetros tenemos,

$$\mathcal{K}dS = -\frac{[(\gamma - \beta) + q(\mu + \beta)]\omega_\infty^2 - [(q - 1)\beta + \gamma]\omega_e^2}{2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)r^{q+1}} drd\varphi, \quad (2.59)$$

mientras que la expresión asintótica para $\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi}$ a lo largo de la curva C_R es,

$$\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \Big|_{C_R} = 1 - \frac{q\omega_\infty^2\mu}{(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)R^q} - \frac{\gamma}{2R^q} + \frac{(1 - q)\beta}{2R^q} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^{q+1}}\right), \quad (2.60)$$

y como podemos corroborar para $R \rightarrow \infty$, se verifica la condición (2.41) ya que esta familia de soluciones es asintóticamente plana.

Similar a como ocurrió en el ejemplo anterior, debido a que queremos obtener el ángulo de deflexión a primer orden en los parámetros μ , γ y β , y la cantidad $\mathcal{K}dS$ es al menos lineal en esos parámetros, bastará aproximar la curva geodésica γ_p a orden cero en estos parámetros quedando parametrizada por $r = b/\sin\varphi$.

Finalmente, el ángulo de deflexión nos queda,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}) [(q-1)\beta + \gamma + q\mu]\omega_\infty^2 - [(q-1)\beta + \gamma]\omega_e^2}{2b^q\Gamma(1 + \frac{q}{2}) (\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.61)$$

donde

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty v^{u-1} e^{-v} dv, \quad (2.62)$$

es la función Gamma. Esta expresión para el ángulo de deflexión generaliza otras que se pueden encontrar en la literatura pero sin la presencia del plasma.

En coordenadas isotrópicas ($\beta = \gamma$) la expresión (2.61) se reduce a lo siguiente,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2})q (\gamma + \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2}{2b^q\Gamma(1 + \frac{q}{2}) (\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.63)$$

mientras que en coordenadas tipo Schwarzschild-like ($\beta = 0$) tenemos,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}) (\gamma + q\mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2}{2b^q\Gamma(1 + \frac{q}{2}) (\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}. \quad (2.64)$$

En ausencia de plasma, estas expresiones concuerdan con otras habidas en la literatura donde el ángulo de deflexión ha sido calculado con métodos completamente diferentes [88, 89]. En particular, para la elección de parámetros $\mu = \gamma = 2m$ y $q = 1$, las ecuaciones (2.63) y (2.64) reproducen el ángulo de deflexión para el espaciotiempo de Schwarzschild; mientras que para la elección $\mu = \gamma = 0$, $\beta = a^2$ y $q = 2$, usando (2.61), obtenemos $\alpha = \frac{\pi a^2}{4b^2}$, lo cual es la expresión conocida para el ángulo de deflexión a primer orden en a^2 en el espaciotiempo de Ellis bajo la aproximación de campo débil.

Analizemos un poco más en detalle esta familia de soluciones. Debido a la simetría esférica existen relaciones simples entre el ángulo de deflexión y otros escalares que son de interés en la teoría de lentes gravitacionales como ser el módulo del shear $\tilde{\gamma}$ y la convergencia $\tilde{\kappa}$ (para detalles de estas relaciones ver [90, 91]). A partir de la expresión del ángulo de deflexión en coordenadas isotrópicas (2.63), el shear y la convergencia están dados por las siguientes expresiones,

$$\tilde{\gamma}(b) = -\Delta \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q+3}{2})[(\gamma + \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2]}{b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.65)$$

$$\tilde{\kappa}(b) = -\Delta \frac{\sqrt{\pi}(q-1)\Gamma(\frac{q+1}{2})[(\gamma + \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2]}{2b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.66)$$

donde $\Delta = \frac{d_l d_{ls}}{d_s}$ es un factor de escala que depende de las distancias diámetro-angulares d_l , d_s y d_{ls} . En lo que sigue omitiremos este factor. En la siguiente clasificación hay algunas familias que están solapadas.

Familia I: distribuciones de polvo extendidas

Esta familia de soluciones se obtiene estableciendo $\mu = \gamma$. En este caso la métrica que estamos considerando puede ser interpretada como aquella que resulta de las ecuaciones de Einstein considerando un tensor energía-momento efectivo de un fluido perfecto con presión cero. Para esta familia el ángulo de deflexión, shear y

convergencia están dados por lo siguiente,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2})q\mu}{2b^q\Gamma(1 + \frac{q}{2})} \frac{2\omega_\infty^2 - \omega_e^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2}, \quad (2.67)$$

$$\tilde{\gamma}(b) = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q+3}{2})\mu}{b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{2\omega_\infty^2 - \omega_e^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2}, \quad (2.68)$$

$$\tilde{\kappa}(b) = \frac{\sqrt{\pi}(1-q)\Gamma(\frac{q+1}{2})\mu}{2b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})} \frac{2\omega_\infty^2 - \omega_e^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2}. \quad (2.69)$$

La métrica de Schwarzschild es un caso particular de esta familia con $q = 1$ y $\mu = 2m$. Notemos en particular que para este caso la convergencia es cero (cuestión que sabíamos era así para el caso de gravedad pura a primer orden puesto que este escalar depende solamente del tensor del Ricci) pero que ahora vemos que dicha situación se mantiene cuando incorporamos el plasma. Además, como se explica en Bozza [88] para $0 < q < 1$ y $\mu > 0$, la densidad de energía es positiva mientras que para $q > 1$ la convergencia es negativa y la misma es producida por una lente exótica con una densidad de masa negativa.

Familia II: distribución de presión anisotrópica pura

Esta familia está caracterizada por $q = 1$ y la métrica puede ser interpretada como aquella que resulta de considerar un tensor energía-momento con densidad de energía cero y presión anisotrópica en las ecuaciones de Einstein. El ángulo y los escalares ópticos son,

$$\alpha = \frac{(\gamma + \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2}{b(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.70)$$

$$\tilde{\gamma}(b) = -\frac{(\gamma + \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2}{b^2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.71)$$

$$\tilde{\kappa}(b) = 0. \quad (2.72)$$

Si $\gamma = \mu = 2m$, entonces recuperamos la solución de Schwarzschild. Si $\mu = 0$ entonces el plasma no tiene influencia ni en el ángulo de deflexión ni en los escalares ópticos. El caso particular $\mu = -\gamma$ lo analizaremos más adelante.

Familia III: función lapse constante

En la familia anterior vimos que si $\mu = 0$ entonces el plasma no tiene influencia ni en el ángulo ni en los escalares ópticos y esto se debe a que para este caso la función lapse es constante y por lo tanto no tenemos un redshift gravitacional. Debido a esto el plasma homogéneo no influye en la desviación de la luz resultando,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2})q\gamma}{2b^q\Gamma(1 + \frac{q}{2})}, \quad (2.73)$$

$$\tilde{\gamma}(b) = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q+3}{2})\gamma}{b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})}, \quad (2.74)$$

$$\tilde{\kappa}(b) = -\frac{\sqrt{\pi}(q-1)\Gamma(\frac{q+1}{2})\gamma}{2b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})}, \quad (2.75)$$

las cuales son independientes del plasma.

Familia IV: nulo efecto de lente gravitacional en gravedad pura

La familia $\mu = -\gamma$ está caracterizada por no presentar efectos de lente en el caso de gravedad pura. Sin embargo, para un plasma homogéneo el ángulo de deflexión y los escalares ópticos no son nulos y esto se debe al hecho de que en este caso el redshift gravitacional no es trivial. En este caso tenemos lo siguiente,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2})}{2b^q\Gamma(1 + \frac{q}{2})} \frac{q\mu\omega_e^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2}, \quad (2.76)$$

$$\tilde{\gamma}(b) = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q+3}{2})\mu\omega_e^2}{b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}, \quad (2.77)$$

$$\tilde{\kappa}(b) = \frac{\sqrt{\pi}(1-q)\Gamma(\frac{q+1}{2})\mu\omega_e^2}{2b^{q+1}\Gamma(\frac{q}{2})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}. \quad (2.78)$$

Familia V: curvatura espacial nula

Esta familia está caracterizada por $\gamma = 0$, para la cual las hipersuperficies $t = \text{constante}$ son planas. Curiosamente para esta familia tanto el ángulo de deflexión como los escalares ópticos adoptan la misma forma que en la familia anterior.

2.3.2.1. Anillo de Einstein en presencia de plasma homogéneo

Por último analicemos como cambia la posición angular de los anillos de Einstein en la presencia de plasma para estas familias de soluciones. Consideremos que los parámetros μ y γ son positivos; entonces a partir de la ecuación de lente (que analizaremos en detalle en el capítulo 6) y de la expresión del ángulo de deflexión en coordenadas isotrópicas tenemos que el radio angular del anillo de Einstein en presencia de plasma θ_{pl} esta dado por,

$$\theta_{pl} = \left(\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{q}{2} + \frac{1}{2})q}{2\Gamma(1 + \frac{q}{2})} \frac{(\gamma + \mu)\omega_\infty^2 - \gamma\omega_e^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \frac{d_{ls}}{d_s d_l^q} \right)^{\frac{1}{q+1}}. \quad (2.79)$$

El cambio relativo en el radio de Einstein debido a la presencia de plasma respecto del radio de gravedad pura θ_0 esta dado por la expresión,

$$\frac{\Delta\theta_0}{\theta_0} = \frac{\theta_{pl} - \theta_0}{\theta_0} = \left(\frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma + \mu} \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2}}{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2}} \right)^{\frac{1}{q+1}} - 1, \quad (2.80)$$

que bajo la aproximación $\omega_e^2/\omega_\infty^2 \ll 1$, la cual es cierta en muchas situaciones físicas de interés, se reduce a lo siguiente,

$$\frac{\Delta\theta_0}{\theta_0} \approx \frac{\mu}{(1+q)(\mu + \gamma)} \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2}. \quad (2.81)$$

En la figura 2.3 graficamos las curvas de nivel de la ecuación (2.81) para $\omega_e/\omega_\infty = 6 \times 10^{-3}$. Para este particular valor podemos ver que si el radio del anillo de Einstein para el caso sin plasma es de 1 arcsec entonces la presencia del plasma corrige este valor entre un 10^{-6} arcsec y 10^{-5} arcsec.

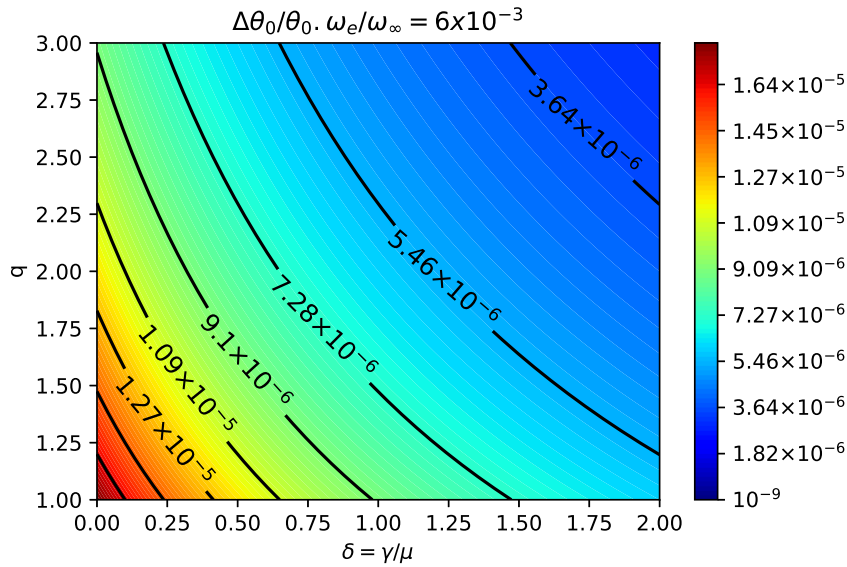


FIGURA 2.3: Curvas de nivel del cambio relativo en la posición de los anillos de Einstein $\Delta\theta_0/\theta_0$ para la clase de métricas dadas por (2.53)-(2.55). Como esperábamos, para un valor fijo del cociente $\delta = \gamma/\mu$, la diferencia relativa se hace cada vez más chica para valores cada vez más grande de q . La curva de nivel que tiene el valor 9×10^{-6} contiene el punto particular ($q = 1, \delta = 1$) correspondiente al cambio en la posición relativa de los anillos de Einstein asociados a la métrica de Schwarzschild para el mencionado ratio de frecuencia.

En el capítulo 6, haremos un estudio más exhaustivo de situaciones en el régimen de lente gravitacional fuerte, y veremos cómo para distintos modelos no homogéneos de plasma en entornos galácticos las correcciones en el corrimiento de las imágenes pueden llegar a ser del orden de subarcsecs y que la multiplicidad de las mismas también es función de la distribución electrónica del plasma.

2.4. Plasma inhomogéneo

Ahora consideraremos una lente gravitacional rodeada por un plasma inhomogéneo, esto es, donde la distribución electrónica $N(x^a)$ varía de un punto del plasma a otro. Por simplicidad asumiremos que esta variación sólo ocurre en la dirección radial desde el centro de la lente y que la derivada radial de la densidad electrónica $N'(r)$ es una función decreciente y menor que $N(r)/r$.

En coordenadas isotrópicas, el campo gravitacional producido por la lente está codificado en las componentes de la métrica de la siguiente forma,

$$A(r) = 1 - \mu h_{00}(r), \quad B(r) = 1 + \gamma h_{rr}(r), \quad C(r) = r^2 B(r). \quad (2.82)$$

Por otro lado, el índice de refracción se lee,

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2(1 - \mu h_{00}(r))}{\omega_\infty^2}}. \quad (2.83)$$

y por lo tanto la métrica óptica asociada resulta

$$d\sigma^2 = \left(\frac{(1 + \gamma h_{rr})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2 + \mu\omega_e^2 h_{00})}{\omega_\infty^2(1 - \mu h_{00})} \right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad (2.84)$$

donde el determinante $\det(g^{\text{opt}})$ viene dado de la siguiente forma

$$\det(g^{\text{opt}}) = \left(\frac{(1 + \gamma h_{rr})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2 + \mu\omega_e^2 h_{00})}{\omega_\infty^2(1 - \mu h_{00})} \right)^2 r^2. \quad (2.85)$$

Como sólo estamos interesados en expresiones lineales en μ y γ , escribimos la curvatura Gaussiana a primer orden en esos parámetros,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{pl} + \mu\mathcal{K}_\mu + \gamma\mathcal{K}_\gamma, \quad (2.86)$$

con

$$\mathcal{K}_{pl} = \frac{\omega_\infty^2}{2r(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)^3} \times \left[K_e(rN')'(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) + rK_e^2 N'^2 \right], \quad (2.87)$$

$$\mathcal{K}_\mu = -\frac{\omega_\infty^4}{2r(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)^2} \times \left[(rh_{00}')' + \mathcal{F}_\mu(h_{00}N', h_{00}N'', h_{00}'N') \right], \quad (2.88)$$

$$\mathcal{K}_\gamma = -\frac{\omega^2}{2r(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)} \times \left[(rh_{rr}')' + \mathcal{F}_\gamma(h_{rr}N', h_{rr}N'', h_{rr}'N') \right], \quad (2.89)$$

y donde las funciones \mathcal{F}_μ y \mathcal{F}_γ están definidas como,

$$\mathcal{F}_\mu(h_{00}N', h_{00}N'', h_{00}'N') = 2K_e(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)[h_{00}(rN')' + rN'h_{00}'] + 3h_{00}rK_e^2 N'^2, \quad (2.90)$$

$$\mathcal{F}_\gamma(h_{rr}N', h_{rr}N'', h_{rr}'N') = K_e h_{rr} [r(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)N'' + N'(\omega_\infty^2 - \omega_e^2 + K_e rN')]. \quad (2.91)$$

En esta notación, \mathcal{K}_{pl} representa la contribución del plasma a la curvatura Gaussiana la cual está presente aún si el espaciotiempo fuera plano. Por otro lado, \mathcal{K}_μ y \mathcal{K}_γ no sólo tienen información acerca del campo gravitacional sino también de la interacción de éste con el plasma. En principio uno podría utilizar esta expresión de la curvatura Gaussiana para calcular el ángulo de deflexión. Sin embargo, debido a que la influencia del plasma en general es pequeña en comparación con los efectos de lente puramente gravitacionales, asumiremos al igual que en [22] que el ángulo de deflexión es pequeño y por lo tanto a primera aproximación consideraremos la geodésica γ_p como una línea recta en el espacio Euclídeo desde el observador a la fuente. Por otro lado, despreciaremos todos los términos de orden alto de la forma $\mathcal{O}(N'^2, \mu N', \mu N'', \gamma N'^2, \gamma N'')$. Por lo tanto, descartaremos el último término en \mathcal{K}_{pl} así como también los términos \mathcal{F}_μ and \mathcal{F}_γ . Finalmente, teniendo en cuenta estas consideraciones la 2-forma $\mathcal{K}dS$ se lee,

$$\mathcal{K}dS = \frac{1}{2} \left[\frac{K_e(rN')'}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_\infty^2 (rh_{00}')'}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \mu - (rh_{rr}')' \gamma \right] dr d\varphi. \quad (2.92)$$

Debido a que el espaciotiempo es asintóticamente plano se puede verificar que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \Big|_{C_R} = 1. \quad (2.93)$$

y por lo tanto el ángulo de deflexión está dado simplemente por (2.42). Explícitamente obtenemos,

$$\alpha = - \int_0^\pi \int_{b/\sin\varphi}^\infty \frac{1}{2} \left[\frac{K_e(rN')'}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_\infty^2 (rh_{00}')'}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \mu - (rh_{rr}')' \gamma \right] dr d\varphi. \quad (2.94)$$

Integrando por partes y despreciando términos de orden $\mathcal{O}(N'^2, h_{00}N')$ podemos reducir esta última expresión de la siguiente forma,

$$\alpha = \int_0^\pi \frac{1}{2} \left[\frac{K_e(rN')}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_\infty^2 (rh_{00}')}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \mu - (rh_{rr}') \gamma \right] \Big|_{r_\varphi} d\varphi, \quad (2.95)$$

donde ahora el ángulo de deflexión está dado por una integral de línea en vez de una integral de área. El integrando está evaluado en $r_\varphi = b/\sin\varphi$.

Finalmente, si realizamos el cambio de coordenadas dado por $z = \sqrt{r^2 - b^2}$ donde además se tiene que $\tan\varphi = b/z$, podemos escribir (2.95) como,

$$\alpha = \int_{-\infty}^\infty \frac{b}{2r} \left[\frac{K_e N'}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_\infty^2 h_{00}'}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \mu - (h_{rr}') \gamma \right] \Big|_{r_z} dz, \quad (2.96)$$

donde el integrando está evaluado en $r_z = \sqrt{b^2 + z^2}$. Esta expresión coincide completamente con la expresión (30) derivada por Bisnovatyi-Kogan y Tsupko en [22]. Por completitud, el ángulo de deflexión para dos perfiles de densidad electrónicos, uno con decaimiento polinomial y otro exponencial, es calculado en el apéndice A.

2.5. Deflexión de partículas masivas

Como ha sido señalado por otros autores en el pasado [22, 23], existe una correspondencia entre la dinámica de rayos de luz a una dada frecuencia ω_∞ propagándose bajo la acción de un campo gravitacional bajo la influencia de un plasma homogéneo con frecuencia electrónica ω_e , y la dinámica de partículas de prueba con masa μ y frecuencia medida por un observador en infinito E_∞ propagándose en el mismo campo gravitacional pero sin la influencia del plasma. Específicamente, si llevamos a cabo las identificaciones $\omega_e \rightarrow \mu = \text{constante}$, y $\omega_\infty \rightarrow E_\infty$, se sigue que la dinámica de las partículas masivas está gobernada por las ecuaciones de Hamilton asociadas al Hamiltoniano (2.24).

De esta forma, para cualquier espaciotiempos estático descrito por la métrica,

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -A(x^i) dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.97)$$

tenemos una métrica óptica asociada para cada partícula de masa μ y energía E_∞ . Notemos que la energía local $E(x^a)$ medida por un observador estático está relacionada a la energía medida por un observador en infinito E_∞ por $E(x^i) = E_\infty / \sqrt{A(x^i)}$. Por lo tanto, la métrica óptica para cada partícula masiva es de la forma,

$$g_{ij}^{\text{opt}} = \frac{n^2}{A(x^i)} g_{ij} = \left(1 - \frac{\mu^2}{E_\infty^2} A(x^i) \right) \frac{g_{ij}}{A(r)}. \quad (2.98)$$

Esta métrica está implícita en el trabajo de Synge sobre óptica geométrica en medios dispersivos y no dispersivos (ver el capítulo XI de [86]); y también fue reintroducida recientemente (a menos de un factor E_∞^2) por Gibbons bajo el nombre de métrica de

Jacobi [92]. Nos referimos a este último trabajo para una derivación elegante de la misma y discusión sobre sus propiedades.

Concentrémonos ahora en el movimiento geodésico de partículas masivas en un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico. En particular estamos interesados en la descripción del movimiento de partículas que dejan la fuente situada en la región asintóticamente plana del espaciotiempo, y que se acercan a una distancia mínima r_0 de la fuente para continuar su camino hasta el observador también situado en una región asintóticamente plana del espaciotiempo. Se asume que la partícula arriba al observador asintótico con una velocidad v y por lo tanto con energía

$$E_\infty = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (2.99)$$

y momento angular

$$J = \frac{\mu v b}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (2.100)$$

La métrica óptica es entonces

$$d\sigma^2 = \frac{n^2(r)}{A(r)} \left(B(r) dr^2 + C(r) d\varphi^2 \right), \quad (2.101)$$

con

$$n^2(r) = 1 - \frac{\mu^2}{E_\infty^2} A(r) = 1 - (1-v^2)A(r). \quad (2.102)$$

Estudiemos ahora las geodésicas espaciales de la métrica (2.101). Notemos que lo que sigue es general para cualquier índice de refracción y no necesariamente sólo para partículas masivas. En particular, el movimiento geodésico sigue del Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{n^2(r)}{A(r)} \left(B(r) \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + C(r) \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right) \right], \quad (2.103)$$

con el vínculo

$$\frac{n^2(r)}{A(r)} \left[B(r) \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + C(r) \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] = 1. \quad (2.104)$$

De la ecuación (2.103) se sigue que

$$\frac{n^2 C}{A} \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{J}{E_\infty}. \quad (2.105)$$

Nos referimos a [92] para una justificación de la identificación entre la constante asociada a esta cantidad conservada y J/E_∞ , donde uno debe también tomar en cuenta que la métrica óptica definida en (2.98) está relacionada a la métrica ds^2 utilizada por Gibbons de la forma $ds^2 = E_\infty^2 d\sigma^2$. De esta relación y de las expresiones (2.104) y (2.105) se sigue que

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{C}{B} \left(\frac{E_\infty^2 C n^2}{J^2 A} - 1 \right). \quad (2.106)$$

Esta última expresión para la ecuación de la órbita también puede ser encontrada en [23, 26] donde fue derivada en el formalismo Hamiltoniano.

Usando la métrica (2.101) con $n(r)$ dado por (2.102) podemos aplicar el teorema de Gauss-Bonnet al estudio de la desviación de partículas masivas en cualquier campo gravitacional esféricamente simétrico. Por supuesto, si uno quisiera estudiar esta

desviación a primer orden en la masa de la lente utilizando el teorema de Gauss-Bonnet, bastará con aproximar la geodésica que sigue la partícula por su trayectoria plana; sin embargo la motivación principal de escribir explícitamente (2.106) es que aplicaremos por primera vez en la literatura el método de Gibbons-Werner al estudio de la deflexión de partículas masivas a segundo orden en la masa de la lente, y para ello necesitamos conocer la expresión para la curva geodésica al menos a primer orden.

2.5.1. Ángulo de deflexión a segundo orden en el espaciotiempo de Schwarzschild

A modo de ejemplo calcularemos el ángulo de deflexión asociado a una partícula masiva moviéndose en el espaciotiempo de Schwarzschild de masa m con $A(r)$, $B(r)$ y $C(r)$ dado por (2.43). Usando la variable $u = 1/r$, la ecuación (2.106) se lee,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -u^2 + 2mu^3 + \frac{2m(1-v^2)}{b^2v^2}u + \frac{1}{b^2}. \quad (2.107)$$

Para $v = 1$ recuperamos la ecuación de la órbita asociada a partículas sin masa.

Estamos interesados en encontrar soluciones de esta ecuación bajo la condición de que la partícula alcance la mínima distancia a la lente en $\varphi = \pi/2$. Para ello asumimos que la solución puede ser expresada en potencias de m como,

$$u = \frac{1}{b} \left(\sin(\varphi) + mu_1(\varphi) + m^2u_2(\varphi) \right) + \mathcal{O}(m^3). \quad (2.108)$$

Luego, bajo la condición de mínimo acercamiento que hemos impuesto obtenemos

$$u(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{b} + \frac{v^2 \cos 2\varphi + v^2 + 2}{2b^2v^2}m + \frac{m^2}{16b^3} \left[\frac{(8 + 32v^2 - 3v^4)}{v^4} \sin \varphi + \frac{6(4 + v^2)(\pi - 2\varphi)}{v^2} \cos \varphi - 3 \sin 3\varphi \right] + \mathcal{O}(m^3). \quad (2.109)$$

Ahora utilizamos el método de Gibbons-Werner basado en el teorema de Gauss-Bonnet para obtener el ángulo de deflexión a segundo orden en m .

A partir de la métrica óptica para partículas masivas (2.101) calculamos el determinante de la misma y la curvatura Gaussiana

$$\det(g^{\text{opt}}) = \frac{[2(1-v^2)m + v^2r]^2r^3}{(r-2m)^3} \quad (2.110)$$

$$\mathcal{K} = \frac{m[8(1-v^2)^2m^3 + 6rm^2(1-v^2)(2v^2-1) - 3v^2(1-2v^2)mr^2 - v^2(1+v^2)r^3]}{[2m(1-v^2) + v^2r]^3r^3}. \quad (2.111)$$

La 2-forma $\mathcal{K}dS$ a segundo orden en la masa de la lente viene dada por,

$$\mathcal{K}dS = \left(-\frac{1+v^2}{v^2r^2}m - \frac{v^4+6v^2-4}{v^4r^3}m^2 \right) drd\varphi + \mathcal{O}(m^3). \quad (2.112)$$

Dado que el espaciotiempo es asintóticamente plano el ángulo de deflexión viene dado simplemente por (2.42) donde ahora debemos considerar la geodésica calculada a segundo orden en m con $r_\gamma = u_\gamma^{-1}(\varphi)$ y $u_\gamma(\varphi)$ dado por (2.109). Luego de

realizar las integrales obtenemos

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{3\pi}{4b^2} \left(1 + \frac{4}{v^2}\right) m^2 + \mathcal{O}(m^3). \quad (2.113)$$

Podemos ver que para $v = 1$ recuperamos la expresión del ángulo de deflexión a segundo orden para partículas sin masa. Para partículas masivas existen en la literatura dos expresiones diferentes. La primera obtenida por Accioly y Ragusa [93], y la segunda por Bhadra, Sarkar y Nandi [94]. En un tercer trabajo de He and Lin [95] se computa numéricamente el ángulo de deflexión verificando los resultados de Accioly y Ragusa. Nuestros resultados también coinciden con estos resultados.

Para cerrar esta sección notemos que vía la identificación $v^2 \leftrightarrow 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2}$ la ecuación (2.113) se reduce a la expresión para el ángulo de deflexión a segundo orden asociada a rayos de luz propagándose en un plasma homogéneo,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_\infty^2}\right) + \frac{3\pi}{4b^2} \left(1 + \frac{4}{1 - \omega_e^2/\omega_\infty^2}\right) m^2 + \mathcal{O}(m^3), \quad (2.114)$$

la cual generaliza a segundo orden la ecuación (2.52).

2.6. Resumen del capítulo

En este capítulo hemos mostrado cómo extender el método introducido por Gibbons y Werner en [45] basado en el uso del teorema de Gauss-Bonnet para calcular el ángulo de deflexión de rayos de luz propagándose únicamente bajo la acción de un campo gravitatorio a situaciones donde se tenga en cuenta además la propagación de los mismos a través de un medio plasmático. Nos hemos restringido a la propagación de los rayos de luz sobre espaciotiempos estáticos (con campo de Killing temporal ζ^a), esféricamente simétricos y asintóticamente planos en el régimen de campo gravitacional débil. Por otro lado, hemos considerado un plasma frío, no magnetizado, esféricamente simétrico y en reposo respecto de las órbitas temporales de ζ^a . Finalmente, utilizando una métrica óptica Riemanniana apropiada la cual satisface el teorema de Fermat para medios dispersivos y que es conforme a la métrica inducida en la hipersuperficie Σ_t (ortogonal a ζ^a) pudimos obtener una expresión para el ángulo de deflexión en el caso con plasma en términos de cantidades geométricas y topológicas distinguiéndose de esta forma de las expresiones usuales escritas en términos de las componentes de la métrica física.

Más aún, utilizando una correspondencia entre el movimiento de partículas masivas en gravedad pura y el movimiento de fotones a través de un plasma homogéneo bajo el mismo campo gravitatorio, hemos podido extender exitosamente el método de Gibbons y Werner al estudio del ángulo de deflexión asociado a partículas masivas. A lo largo del capítulo aplicamos nuestros resultados a diferentes espaciotiempos y diferentes perfiles de plasma tanto homogéneos como inhomogéneos obteniendo en todos ellos expresiones a orden dominante del ángulo de deflexión. En el caso de partículas masivas obtuvimos también expresiones del ángulo de deflexión a segundo orden en la masa para el espaciotiempo de Schwarzschild.

La extensión de este método a situaciones donde tanto el observador como la fuente se encuentran a una distancia finita de la lente se verá en el capítulo 3 mientras que su aplicación a espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos será abordada en el capítulo 5.

Capítulo 3

Corrección por distancias finitas

En este capítulo abordaremos el problema de calcular el ángulo de deflexión que experimentan los rayos de luz que se propagan en la vecindad de una lente gravitacional a través de un plasma astrofísico en la situación donde tanto el observador como la fuente se encuentran a una distancia finita de la lente. Como veremos dichas correcciones son rutinariamente tenidas en cuenta en astrometría de alta precisión y nuestra intención es presentar fórmulas que contengan tanto estas correcciones como la información del plasma, a fin de que puedan ser utilizadas en el futuro cercano. Para ello extenderemos el procedimiento usual para medir ángulos de deflexión en gravedad pura al caso de plasma y estudiaremos en detalle un modelo de plasma para la parte más externa de la corona solar considerando la distancia finita que hay desde el Sol a un observador situado en la Tierra.

La definición de ángulo de deflexión no es una cantidad que goze de un consenso unificado en el caso de distancias finitas o en general cuando se aborda la cuestión en espaciotiempos no asintóticamente planos. En este sentido el método basado en el uso del teorema de Gauss-Bonnet ha mostrado ser una herramienta propicia para encarar diferentes definiciones del ángulo de deflexión [59-61, 68, 75]. Sin embargo, dichas definiciones no siempre coinciden unas con otras e incluso algunas no recuperan expresiones bien conocidas y discutidas en textos clásicos y que son utilizadas en la actualidad. En este sentido, comentaremos acerca de esta discrepancia entre las diferentes definiciones y presentaremos una definición propia del ángulo de deflexión que además puede ser utilizada en el caso de plasma y que recupera los resultados clásicos y bien conocidos.

Aplicaremos nuestra definición para diferentes perfiles de plasma tanto homogéneos como inhomogéneos y discutiremos el procedimiento de Eddington para medir el ángulo de deflexión a escala del sistema solar teniendo en cuenta el efecto del plasma. En particular, calcularemos el ángulo de deflexión producido por el Sol como lente gravitacional, modelado por una lente de Schwarzschild y un modelo polinomial para la distribución de electrones en la parte más externa de la corona solar.

Debido a la conexión profunda que existe entre la geometría y la topología de un determinado dominio en la llamada variedad óptica que expone el método de Gibbons y Werner en el estudio del ángulo de deflexión, varios grupos de autores han propuesto extensiones alternativas de este método a situaciones donde se considera la distancia finita que existe entre la fuente y la lente, y el observador y la lente. La primer alternativa fue presentada por Ishihara *et al* [60, 61, 68, 75] y la segunda por Arakida [59]. Incluso cuando ambas propuestas están basadas en el método de Gauss-Bonnet, no coinciden unas con otras en sus predicciones. Podemos por ejemplo comparar el ángulo de deflexión obtenido a partir de ambas definiciones para el espaciotiempo de Schwarzschild para el caso de distancias finitas. Incluso cuando

ambos autores utilizan los mismo sistemas de coordenadas (coordenadas tipo Schwarzschild usuales), Arakida obtiene términos adicionales en el ángulo de deflexión a primer orden en la masa que no aparecen si se utiliza la definición de Ishihara *et al* (ver ecuación (54) de [59] y el caso particular de la ecuación (A.3) con $a = 0$ de [75])¹.

Antes de continuar, es importante tener en cuenta la siguiente advertencia. Los dos grupos separados de autores mencionados anteriormente han considerado el interesante efecto de la constante cosmológica en el ángulo de deflexión. Cuando se incluye una constante cosmológica, estos grupos también obtienen diferentes expresiones para el ángulo de deflexión.

Volviendo a la discusión para espaciotiempos asintóticamente planos, ya que las dos definiciones que hemos mencionado utilizan regiones de integración D y D' distintas para la integración de la curvatura Gaussiana, es difícil ver de donde viene la discrepancia entre ambas definiciones. En particular, incluso cuando ambos grupos de autores usan regiones cuadriláteras, en el caso de Arakida la misma es una región finita mientras que en el caso de Ishihara *et al* la misma no está acotada. Veremos cómo dicha discrepancia para el caso de espaciotiempos planos puede ser fácilmente entendida a partir de presentar una región de integración diferente en la definición de Ishihara *et al*. Segundo, incluso cuando las correcciones por distancias finitas al ángulo de deflexión se derivan de estas dos definiciones alternativas, los autores de [59-61, 68, 75] o [59] no intentan comparar sus resultados con expresiones habidas en la literatura y obtenidas utilizando diferentes técnicas [96-104], las cuales han sido testeadas por observaciones desde hace varias décadas [105-112]. Dada la incompatibilidad entre estas dos definiciones que estamos discutiendo, que como mencionamos no coinciden siquiera a primer orden en la masa para el espaciotiempo de Schwarzschild, la comparación entre sus predicciones y cantidades conocidas y testeadas durante años es un excelente test para ver la validez de sus definiciones de ángulo de deflexión. En este capítulo llevaremos a cabo dichas comparaciones mostrando que la definición propuesta por Ishihara *et al* coincide plenamente con las expresiones ya conocidas previamente, y descartando de esta forma la validez de la definición introducida por Arakida en [59].

Además de tratar las cuestiones técnicas en torno al cálculo del ángulo de deflexión, la principal motivación en este capítulo es estudiar cómo la consideración de distancias finitas entre la fuente, la lente y el observador puede afectar la expresión del ángulo de deflexión en situaciones astrofísicas donde un plasma astrofísico está presente. La forma habitual de estudiar la desviación de los rayos de luz debido al plasma y teniendo en cuenta el efecto gravitatorio de la lente es a través de las ecuaciones Hamilton para las curvas temporales seguidas por los rayos de luz en el plasma. Por otro lado, como hemos discutido en el capítulo anterior, hemos presentado una formulación geométrica del problema utilizando el método de Gibbons-Werner [40]. Por lo tanto, es natural intentar utilizar esta nueva técnica para estudiar las correcciones por distancias finitas en las expresiones conocidas del ángulo de deflexión en entornos plasmáticos.

Motivados por estas cuestiones, proponemos una serie de puntos para contribuir a la discusión de este tema: por un lado, presentamos una formulación alternativa

¹A orden lineal en la masa, dichos términos extras están dados por

$$\delta\alpha = -\frac{m}{b}(\sin^2(\hat{\varphi}_R)\cos(\hat{\varphi}_R) - \sin^2(\hat{\varphi}_S)\cos(\hat{\varphi}_S)) \quad (3.1)$$

donde $\hat{\varphi}_S$, y $\hat{\varphi}_R$ representan las coordenadas angulares de la fuente y del observador respectivamente, mientras que $\delta\alpha$ es la diferencia entre las expresiones dadas por Arakida e Ishihara *et al*

de la definición dada en [60] para el ángulo de deflexión a distancias finitas para espaciotiempos estáticos, esféricamente simétricos y asintóticamente planos². Nuestro enfoque está basado en la integración de la curvatura Gaussiana sobre una región finita que permite la comparación con la expresión dada por Arakida en [59]. Por otro lado, además, en este capítulo llenamos el vacío en la comparación con expresiones conocidas para el ángulo de deflexión a distancias finitas y los resultados obtenidos por la definición dada por Ishihara *et al* en [60]. Esta comparación provee confianza sobre la región de integración que vamos a considerar en este capítulo.

Finalmente, y como parte central de este capítulo, aplicaremos el método de Gibbons-Werner a fin de calcular el ángulo de deflexión en el régimen de campo gravitacional débil teniendo en cuenta la corrección por distancias finitas así como también el efecto del plasma. En particular, para el caso de plasma homogéneo estudiamos la corrección por distancias finitas para rayos de luz propagándose en la vecindad de objetos astrofísicos descritos por una métrica PPN (*Parametrized-Post-Newtonian*) que tiene en cuenta la masa del objeto así como un posible momento cuadrupolar. Incluso cuando nos concentramos en correcciones por distancias finitas al ángulo de deflexión también obtenemos como casos particulares de nuestras expresiones nuevas fórmulas que son válidas para el caso particular de distancias infinitas entre el observador, la lente y la fuente.

3.1. Ángulo de deflexión para distancias finitas

3.1.1. Aspectos generales

Consideremos un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico con elemento de línea³,

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.2)$$

y un rayo de luz propagándose desde la fuente S hasta el observador R a lo largo de una geodésica nula, la cual podemos considerar que se encuentra sobre el plano $\theta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad. Esta geodésica puede ser puesta en correspondencia uno a uno con la geodésica espacial de la métrica óptica asociada[46, 47, 86],

$$d\sigma^2 = \frac{B(r)}{A(r)}dr^2 + \frac{C(r)}{A(r)}d\varphi^2. \quad (3.3)$$

Ishihara *et al* [60] propusieron una nueva definición para el ángulo de deflexión a distancias finitas usando el teorema de Gauss-Bonnet que se puede escribir de la siguiente forma,

$$\alpha = - \int \int_{\infty_R \square_S^\infty} \mathcal{K} dS. \quad (3.4)$$

A fin de definir la región integración $\infty_R \square_S^\infty$ se comienza con una región D_r , acotada por la geodésica γ_ℓ con su origen en el punto S y terminando en R . Consideremos dos geodésicas radiales γ_S y γ_R , definidas por $\varphi_S = \text{constante}$ y $\varphi_R = \text{constante}$, pasando por los puntos S y R , respectivamente. Luego, el segmento de arco circular $r = r_C = \text{constante}$ cierra la región D_r . El segmento de arco se elige ortogonal a las geodésicas radiales γ_R y γ_S . La región $\infty_R \square_S^\infty$ se obtiene entonces como el límite de la región D_r para r_C tendiendo a infinito. Para una motivación de esta elección nos

²Como veremos, la definición puede también ser aplicada al plano ecuatorial para métricas estáticas más generales con simetría $SO(2)$.

³La restricción de simetría esférica no es del todo necesaria ya que la siguiente discusión puede ser aplicada al plano ecuatorial de un espaciotiempo estático con simetría $SO(2)$

referimos a los artículos originales [60, 61, 68, 75]. Ya que estamos interesado en la comparación de esta fórmula con la definición propuesta por Arakida la cual está basada en una región cuadrilátera finita diferente [59], daremos una presentación alternativa de (3.4) la cual hace uso de una región cuadrilátera finita también. Cuando hablamos de ángulo de deflexión estamos refiriéndonos a cómo la trayectoria de los rayos de luz se curvan respecto del espaciotiempo plano, y por lo tanto es natural relacionar el comportamiento de las geodésicas nulas en dos espaciotiempos.

Consideremos un espacio de dos dimensiones equipado con una métrica Euclídea escrita en coordenadas polares estándar $\{r, \varphi\}$. En este espacio, sea D_r una región delimitada por dos líneas rectas definidas por $\varphi = \varphi_S = \text{constante}$ y $\varphi = \varphi_R = \text{constante}$, tal que los extremos más alejados del origen están conectados por una curva semi-circular γ_C definida por $r = r_C = \text{constante}$, y los extremos más cercanos al origen están unidos por una línea recta γ_ℓ (ver figura (3.1)). Para toda la discusión que sigue la coordenada angular azimutal φ está medida desde un eje polar el cual es arbitrario por el momento, y es por esta razón que no hemos graficado ningún eje o coordenada angular azimutal en la figura (3.1). Luego introduciremos una coordenada azimutal en particular (ver apéndice C).

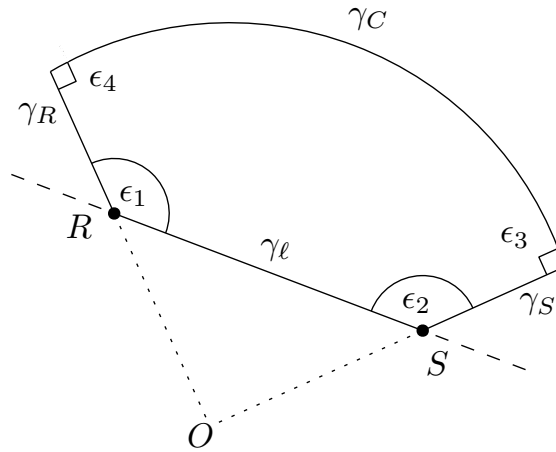


FIGURA 3.1: La región D_r descrita en el texto. La misma está acotada por cuatro curvas: una línea recta geodésica γ_ℓ que conecta la posición de la fuente S con la posición del observador R , dos curvas geodésicas radiales γ_R y γ_S , y una curva semi-circular γ_C que interseca ortogonalmente a γ_R y γ_S .

Si aplicamos el teorema de Gauss-Bonnet a esta región obtendremos la siguiente relación que involucra la sumatoria de los ángulos interiores ϵ_i de la región D_r , los cuales están relacionados a los ángulos exteriores Θ_i por $\Theta_i = \pi - \epsilon_i$,

$$\sum_i \epsilon_i = \int_{\gamma_C} \kappa d\sigma + 2\pi, \quad \sigma \in I, \quad (3.5)$$

donde

$$\int_{\gamma_C} \kappa d\sigma = \varphi_R - \varphi_S. \quad (3.6)$$

De forma similar, consideremos un espacio 2-dimensional definido en una región \mathcal{R}^2/B , donde B es un conjunto compacto, de tal forma que permite un grupo de simetría $SO(2)$ y es también asintóticamente plano. Este espacio viene equipado con una métrica Riemanniana que escribimos como $d\tilde{\sigma}^2 = a(\tilde{r})d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2b(\tilde{r})d\tilde{\varphi}^2$, con $a(\tilde{r})$ y $b(\tilde{r})$ yendo a 1 para \tilde{r} que va a infinito. Como esta métrica es asintóticamente

Euclídea y por lo tanto tiende a la métrica Euclídea $d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\tilde{\varphi}^2$ a medida que \tilde{r} va a infinito, podemos hacer la identificación de coordenadas $\{r, \varphi\}$ usadas en el sistema de coordenadas polares del espacio Euclídeo donde la región D_r fue definida y las nuevas coordenadas $\{\tilde{r}, \tilde{\varphi}\}$ de la variedad Riemanniana.

Consideremos ahora una región 2-dimensional \tilde{D}_r ligeramente diferente a la discutida anteriormente. Esta vez consideramos una región equipada con una métrica Riemanniana no plana con tres de sus lados definidos de forma similar a γ_R , γ_S y γ_C , pero con el lado restante dado por la geodésica $\tilde{\gamma}_\ell$ la cual coincide con la geodésica espacial asociada a la órbita espacial de la geodésica (nula o temporal) seguida por el rayo de luz que viaja de la fuente situada en S hasta el observador en R (ver la figura (3.2)).

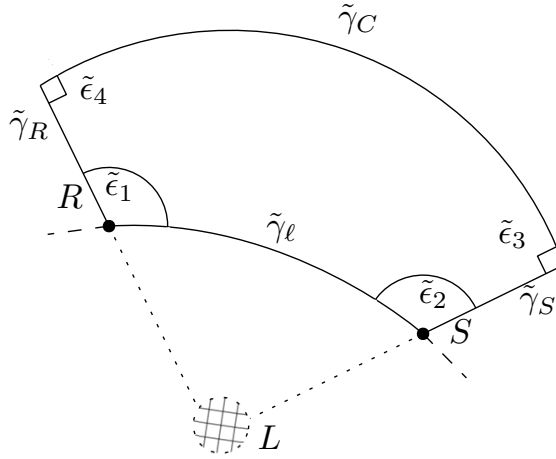


FIGURA 3.2: La región \tilde{D}_r descrita en el texto. La misma está acotada por cuatro curvas: una geodésica espacial $\tilde{\gamma}_\ell$ conectando los puntos S y R , y tres curvas $\tilde{\gamma}_R$, $\tilde{\gamma}_S$ y $\tilde{\gamma}_C$ identificadas con las respectivas curvas en el espacio Euclídeo. Por construcción la curva $\tilde{\gamma}_C$ también interseca ortogonalmente a las curvas $\tilde{\gamma}_R$ y $\tilde{\gamma}_S$. La región circular con líneas reticulares en su interior representa la región donde se encuentra algún cuerpo astrofísico actuando como lente, como puede ser una galaxias, un agujero negro, etc. Esta región no está necesariamente cubierta por las coordenadas polares descritas en el texto.

Si aplicamos el teorema de Gauss-Bonnet a esta región obtenemos la siguiente relación,

$$\sum_i \tilde{\epsilon}_i = \int \int_{\tilde{D}_r} \mathcal{K} dS + \int_{\tilde{\gamma}_C} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} + 2\pi, \quad \tilde{\sigma} \in I. \quad (3.7)$$

Notemos que, por construcción la siguiente relación crucial se satisface, $\epsilon_3 = \tilde{\epsilon}_3 = \epsilon_4 = \tilde{\epsilon}_4 = \pi/2$, y por lo tanto la diferencia entre la suma de los ángulos interiores de las regiones D_r y \tilde{D}_r está solamente relacionada a la diferencia en los ángulos que las geodésica γ_ℓ y $\tilde{\gamma}_\ell$ formen con las geodésicas radiales γ_R y γ_S . Motivado por esto es que proponemos la siguiente definición para el ángulo de deflexión válida en particular para el caso donde el observador y la fuente se encuentran a una distancia finita de la lente,

$$\alpha := \sum_i (\epsilon_i - \tilde{\epsilon}_i). \quad (3.8)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.5) y (3.7) obtenemos expresión alternativa para el ángulo de deflexión,

$$\alpha = - \int \int_{\tilde{D}_r} \mathcal{K} dS - \int_{\tilde{\gamma}_{C(S \rightarrow R)}} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} + \int_{\gamma_{C(S \rightarrow R)}} \kappa d\sigma, \quad (3.9)$$

donde la notación $\tilde{\gamma}_{C(S \rightarrow R)}$ es para recordar que la integración debe realizarse sobre el semi-círculo γ_C y desde la fuente hasta el observador.

Alternativamente, como las otras tres curvas en el cuadrilátero son geodésicas, la ecuación (3.9) puede escribirse de esta manera

$$\alpha = - \int \int_{\tilde{D}_r} \mathcal{K} dS - \oint_{\partial \tilde{D}_r} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} + \oint_{\partial D_r} \kappa d\sigma, \quad (3.10)$$

donde las integrales de línea se realizan sobre los respectivos bordes $\partial \tilde{D}_r$ y ∂D_r de las regiones \tilde{D}_r y D_r en sentido anti-horario. Por construcción el lado derecho de la ecuación (3.9) da el mismo resultado para *cualquier* curva γ_C definida por $r_C = \text{constante}$. Esta definición es una presentación alternativa de la definición propuesta por Ishihara *et al* [60]. En particular, como se asume que la métrica es asintóticamente Euclídea, podemos tomar el límite de r_C yendo a infinito, y en tal caso $\int_{\tilde{\gamma}_C} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} \rightarrow \int_{\gamma_C} \kappa d\sigma$, resultando en una expresión para el ángulo de deflexión α que se reduce a la fórmula (3.4) introducida por Ishihara *et al* [60].

De hecho, podemos repetir el mismo procedimiento pero sin asumir que la curva $\tilde{\gamma}_\ell$ es geodésica. En este caso, incluso cuando la región D_r no cambia, a fin de evitar confusiones consideraremos otra región \tilde{D}_r^* similar a D_r pero recordando que ahora $\tilde{\gamma}_\ell$ no es geodésica; en ese caso el análogo a la ecuación (3.9) sería,

$$\begin{aligned} \alpha &= - \int \int_{\tilde{D}_r^*} \mathcal{K} dS - \int_{\tilde{\gamma}_\ell(R \rightarrow S)} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} - \int_{\tilde{\gamma}_{C(S \rightarrow R)}} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} + \int_{\gamma_{C(S \rightarrow R)}} \kappa d\sigma \\ &= - \int \int_{\tilde{D}_r^*} \mathcal{K} dS - \oint_{\partial \tilde{D}_r^*} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} + \oint_{\partial D_r} \kappa d\sigma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si asumimos una región $\tilde{D} \equiv \mathbb{R}^\infty \square_S^\infty$ obtenida a partir \tilde{D}_r^* en el límite de r_C yendo a infinito, es fácil ver que la relación (3.11) se reduce formalmente a la expresión encontrada en [75] para el ángulo de deflexión a distancias finitas válida para un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico general. Notar que en tales casos, como se explica en detalle en [75], se necesita una modificación de la métrica óptica.

Con la expresión (3.9) estamos en condiciones de comparar nuestra definición con la definición presentada en [59]. En dicha referencia el autor también considera una región cuadrilátera finita pero en vez de utilizar una curva circular γ_C , elige una nueva curva γ_Γ identificada con la geodésica espacial asociada a un rayo de luz conectando los puntos R y S si el espaciotiempo fuera plano, esto es, en el espacio Euclídeo dicha curva es una línea recta.

Manteniendo la definición (3.8) para el ángulo de deflexión con estas dos nuevas regiones, y notando que para un cuadrilátero en el espacio Euclídeo, la suma de los ángulos interiores siempre es igual a 2π , obtenemos un nuevo ángulo de deflexión,

$$\tilde{\alpha} = 2\pi - \sum_i \tilde{\epsilon}_i; \quad (3.12)$$

el cual coincide exactamente con la definición de Arakida [59] (en dicha referencia los ángulos interiores están denotados como β_i). Equivalentemente, para esta nueva elección de regiones, la integración a lo largo de la curva γ_Γ , que reemplaza la curva

γ_C , en el último término de (3.9) es exactamente cero debido a que está calculada en el espaciotiempo Euclídeo de fondo y γ_T es una geodésica en el espacio Euclídeo por construcción, y por lo tanto sólo el primer término en (3.9) sobrevive, y podemos arribar a una expresión con exactamente la misma forma que la obtenida en [59] (ver ecuación (35) de tal referencia). Por lo tanto, parece a primera vista que la definición (3.8) también contiene como caso particular la definición propuesta por Arakida. Sin embargo, notemos que en la motivación para la definición (3.8) la igualdad entre los ángulos interiores ϵ_3 y $\tilde{\epsilon}_3$, y entre ϵ_4 y $\tilde{\epsilon}_4$ era crucial. Notemos también que pudimos haber escrito el ángulo de deflexión directamente como la diferencia entre la suma de los ángulos ϵ_1 y ϵ_2 y sus versiones tildadas, enfatizando de esta manera que dicha definición sólo depende de los ángulos formados por la intersección de la geodésica nula que conecta los puntos S con R con las curvas radiales en el espacio curvo comparada con los ángulo similares en el espacio de fondo plano. Más precisamente, también pudimos haber escrito el ángulo de deflexión sin referencia alguna a una región cerrada,

$$\alpha = (\epsilon_1 - \tilde{\epsilon}_1) + (\epsilon_2 - \tilde{\epsilon}_2). \quad (3.13)$$

Ya que el ángulo de deflexión sólo depende de la diferencia entre los ángulos formados por la geodésica nula y las geodésicas radiales en ambos espacios, la nueva curva utilizada para cerrar la región debe ser elegida de tal forma que los ángulos entre la nueva curva y las direcciones radiales sean los mismos en ambos espacios, el curvo y el plano. Esto sólo se consigue si elegimos como nueva curva el segmento circular γ_C cuyo vector tangente en cada punto es el campo vectorial de Killing rotacional $\frac{\partial}{\partial \phi}$, y por lo tanto ortogonal siempre a las geodésicas radiales en ambos espacios. Sin embargo, este no es el caso si elegimos en vez de la curva γ_C , la curva γ_T como en el caso de Arakida. En tal situación, la curva γ_T forma diferentes ángulos internos con las direcciones radiales en ambos espacios, y por lo tanto el nuevo ángulo de deflexión dado por (3.12) no sólo tiene la información concerniente a la desviación de la luz que conecta la fuente con el observador sino también de la nueva curva introducida γ_T . Por lo tanto, el uso de la ecuación (3.12) parece no estar bien motivada. De hecho, como hemos mencionado, la comparación entre las expresiones presentadas en [60] y [59] para el ángulo de deflexión a distancias finitas en el espaciotiempo de Schwarzschild no coinciden incluso a primer orden en la masa. Para este ejemplo, podemos ver que el origen de la diferencia entre la expresión de Ishihara *et al* y la de Arakida se origina efectivamente en la diferencia entre los valores de los ángulos internos que la curva γ_T forma con las curvas radiales en ambos espacios: el Euclídeo y el curvo. Más precisamente, como sigue de la ecuación (44) de [59] a orden lineal en la masa, la diferencia entre ϵ_3 and $\tilde{\epsilon}_3$ es como sigue⁴,

$$\epsilon_3 - \tilde{\epsilon}_3 = \frac{m}{b} \sin^2(\hat{\phi}_S) \cos(\hat{\phi}_S). \quad (3.14)$$

Una expresión similar sigue de la diferencia entre los ángulos ϵ_4 y $\tilde{\epsilon}_4$. El ángulo $\hat{\phi}$ es para diferenciarlo de otra coordenada angular azimutal asociada a otro eje polar que será elegido luego. Este ángulo azimutal se elige de tal forma que el punto de mínima distancia del rayo de luz a la lente se encuentra en la posición $\hat{\phi} = \pi/2$. Esta es la elección hecha por Ishihara *et al* y Arakida en sus respectivos trabajos. Esta diferencia contribuirá al ángulo de deflexión incluso a primer orden en la masa. Por lo tanto, de las dos definiciones obtendremos dos expresiones diferentes para el ángulo de deflexión. En particular, utilizando la definición de [60], el ángulo de

⁴En la notación de Arakida nuestro ángulo interno ϵ_3 se denota β_2 , y en particular $\beta_2 = E$ en su definición. Ver ecuación (44) de [59]

deflexión a orden lineal en la masa, denotado por $\alpha_{[60]}$ se lee,

$$\alpha_{[60]} = \frac{2m}{b} \left(\cos(\hat{\varphi}_S) - \cos(\hat{\varphi}_R) \right). \quad (3.15)$$

En comparación, la expresión α_{Arakida} dada por Arakida es,

$$\alpha_{\text{Arakida}} = \alpha_{[60]} + \delta\alpha; \quad (3.16)$$

con

$$\delta\alpha = -\frac{m}{b} \left(\sin^2(\hat{\varphi}_R) \cos(\hat{\varphi}_R) - \sin^2(\hat{\varphi}_S) \cos(\hat{\varphi}_S) \right). \quad (3.17)$$

Como anticipamos, dichos términos extras se originan de las expresiones como (3.14) y su similar para $\epsilon_4 - \tilde{\epsilon}_4$.

Con respecto a las expresiones (3.15) y (3.16), necesitamos hacer algunas reflexiones. Primero, notemos que la discrepancia entre ambas expresiones es más que relevante en cuanto a la observabilidad de las correcciones por distancias finitas se refiere. Consideremos, por ejemplo, la deflexión producida por nuestro Sol cuando los rayos de luz de una fuente lejana pasan en su cercanía y llegan a la Tierra. Para tal situación podemos realizar la siguiente aproximación: $\hat{\varphi}_S = 0 + \mathcal{O}(m)^5$, $\hat{\varphi}_R = \pi - \delta\hat{\varphi}$, con $\delta\hat{\varphi} = \arcsin(b/r_o) \approx b/r_o \approx 4 \times 10^{-3}$, donde r_o es la distancia Sol-Tierra, y b es igual al radio solar. Entonces, la diferencia entre la expresión de distancia infinita y $\alpha_{[60]}$ es del orden de 10^{-5}arcsec . Más precisamente, haciendo una expansión de Taylor de (3.15) obtenemos,

$$\alpha_{[60]} \approx \frac{4m}{b} - \frac{m\delta\varphi^2}{b} - \frac{m\delta\varphi^4}{4b} + \mathcal{O}(\delta\varphi^5). \quad (3.18)$$

Por lo tanto, la primera corrección a la expresión de distancia infinita se puede aproximar por $\frac{m\delta\varphi^2}{b} \approx 10^{-5} \text{arcsec}$, lo cual está dentro de las capacidades observacionales actuales. Incluso cuando Arakida no hace una estimación numérica de las correcciones introducidas por su definición, podemos hacer el mismo ejercicio. Los nuevos términos contribuyen de la siguiente manera,

$$\delta\alpha \approx \frac{m\delta\varphi^2}{b} - \frac{m\delta\varphi^4}{2b} + \mathcal{O}(\delta\varphi^5). \quad (3.19)$$

Para nuestra sorpresa, como la expresión de Arakida se obtiene por la suma de (3.18) y (3.19), notamos que existe una cancelación entre los términos cuadráticos en $\delta\varphi$, resultando en una expresión final dada por,

$$\alpha_{\text{Arakida}} \approx \frac{4m}{b} - \frac{3m\delta\varphi^4}{4b}. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la corrección a la expresión usual de Schwarzschild es del orden de $10^{-5} \mu\text{sec}$, un valor indetectable con la capacidad actual de observación. Recordemos que el ángulo de deflexión a nivel del sistema solar es rutinariamente medido a través del procedimiento de Eddington en observaciones de la misma fuente en dos sesiones diferentes: una cuando el Sol está presente entre la fuente y el observador, y la otra cuando no. Más generalmente, el cambio en la posición angular de las imágenes es usualmente comparado con respecto a algún objeto de referencia usando

⁵Más precisamente, $\hat{\varphi}_S \rightarrow -\alpha_\infty/2$ donde α_∞ es el ángulo de deflexión total si tanto la fuente como el observador se encuentran suficientemente alejados de la lente

astrometría diferencial [101, 113]. Alternativamente, observaciones en una sola sesión son llevadas a cabo al observar el paso del Sol a través de la línea de visión de fuentes de radio [114]. Procedimiento similar es utilizado al estudiar la deflexión de la luz por planetas en nuestro sistema solar [115]. Más aún, como veremos más adelante, incluso considerando rayos de luz viniendo de fuentes sumamente alejadas cuyas imágenes forman un ángulo de elongación⁶ de $\theta_I = 45^\circ$ ($\hat{\phi}_R = 3\pi/4 + \mathcal{O}(m)$), la expresión de Arakida difiere de la de Ishihara *et al* por hasta 1mas (un milisegundo de arco). Por lo tanto, las ramificaciones de estas fórmulas, y de ambas definiciones en particular, no son sólo de interés académico sino también práctico.

Segundo, como mostraremos luego, tanto la expresión del ángulo de deflexión dada por Ishihara *et al* como la nuestra coinciden con otras expresiones bien conocidas utilizando técnicas post-newtonianas y que son aquellas que se utilizan en la actualidad en astrometría de alta precisión, incluyendo tanto momentos cuadrupolares de la lente como correcciones a segundo orden en la masa. De hecho, la expresión de Ishihara *et al* es un caso particular de expresiones bien conocidas obtenidas por Shapiro en 1967 [97] (ver también [116]),

$$\alpha = \frac{(1 + \gamma)m}{b} (1 + \cos(\theta_I)), \quad (3.21)$$

donde θ_I es el ángulo de elongación entre la lente, el observador y la imagen relacionado a $\hat{\phi}_R$ de la forma $\theta_I = \pi - \hat{\phi}_R + \mathcal{O}(m)$ ⁷. En esta expresión, γ es el parámetro post-newtoniano de Eddington. La expresión usual de distancias infinitas se recupera tomando $\theta_I \rightarrow 0$. La expresión (3.21) no sólo está extensamente discutida en muchos textos de referencia [100, 101, 117], sino también ha sido continuamente testada experimentalmente utilizando fuentes distantes cuyas imágenes forman diferentes ángulo de elongación con el Sol. Estos ángulos de elongación varían desde $\arcsin(R_\odot/r_o)$, siendo R_\odot el radio del Sol, hasta 180° . Incluso, dichas observaciones son utilizadas para estimar el valor de γ como test de gravedad modificada [106, 108-112]; testar el principio de equivalencia observando el corrimiento de las posiciones de los núcleos activos de galaxias (AGN) utilizando nuestra propia galaxia como lente; y medir la desviación de la luz producida por la Tierra [118].

En comparación con (3.21), la expresión de Arakida tiene un término extra obtenido de (3.17) tomando $\hat{\phi}_S = 0 + \mathcal{O}(m)$ y $\hat{\phi}_R = \pi - \theta_I + \mathcal{O}(m)$, dado por (ver apéndice C),

$$\delta\alpha = \frac{m}{b} \sin^2(\theta_I) \cos(\theta_I) = \frac{m}{2r_o} \sin(2\theta_I), \quad (3.22)$$

donde en la última igualdad hemos reemplazado $b = r_o \sin(\theta_I)$, con r_o siendo la distancia radial entre el observador y la lente. En la figura 3.3 hemos graficado la expresión de Shapiro (con $\gamma = 1$) junto con la de Arakida para $r_o = 1$ AU, y también su diferencia $\delta\alpha$ dada por (3.22). A un ángulo de elongación θ_I igual a 45° ó 135° , la diferencia es tan grade como 1mas (1 milisegundo de arco). Recordemos que instrumentos como GAIA son capaces de medir en la actualidad variaciones angulares en la posición de las estrellas con una resolución tan chica como $1\mu\text{as}$ para un ángulo de elongación entre $\theta_I \approx 45^\circ$ y 180° . Incluso para planetas como Júpiter, $1\mu\text{as}$ en la deflexión de la luz es alcanzada para ángulos de elongación de 90° y de 17° para Saturno [115, 119].

⁶Esto es, el ángulo entre el Sol, la Tierra y la imagen.

⁷Ver sección (3.1.2) y apéndice C. En términos de $\hat{\phi}_R$ y de la coordenada radial del observador r_o (relacionada a b por $b = r_o \sin(\hat{\phi}_R) + \mathcal{O}(m)$) la expresión (3.21) viene dada por $\alpha = \frac{(1+\gamma)m}{r_o} \tan(\frac{\hat{\phi}_R}{2})$.

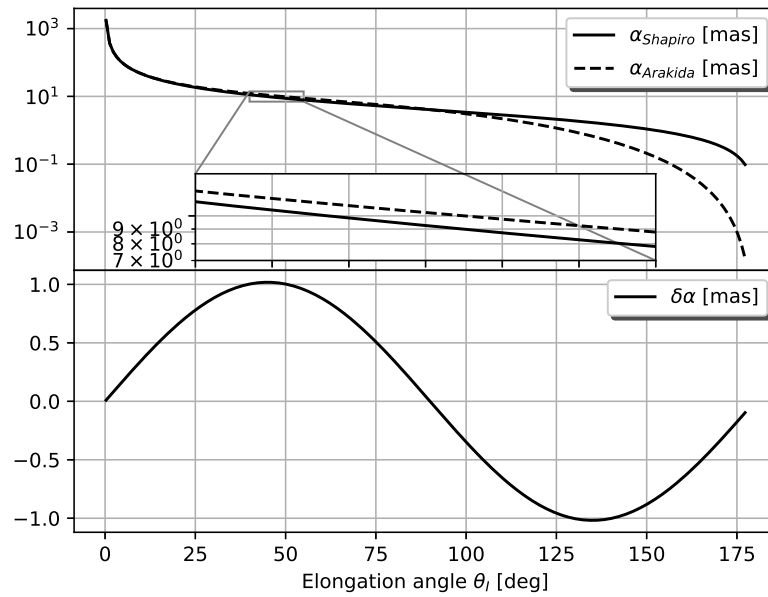


FIGURA 3.3: Comparación entre las expresiones de Shapiro y Arakida para el ángulo de deflexión en términos del ángulo de elongación θ_I para un observador situado a 1 AU de nuestro Sol ($\gamma = 1$). Alrededor de $\theta_I = 45^\circ$ y 135° la diferencia es tan grande como 1mas.

Veremos más adelante cómo la expresión (3.21) y otras expresiones más generales pueden ser recuperadas exitosamente de la definición de Ishihara *et al.* La discusión presentada en esta sección nos da confianza en la definición propuesta por Ishihara *et al.* en [60] y dada por (3.4) o sus versiones equivalentes (3.9) y (3.10). Notemos que incluso cuando (3.8) y (3.9) son equivalentes al trabajo original de Ishihara *et al.*, ellas no han sido presentadas en la literatura hasta ahora y en particular, (3.8) tiene un sentido geométrico claro. Como un test que puede resultar útil, en el apéndice B mostramos usando un ejemplo explícito cómo la versión original (3.4), o sus versiones equivalentes (3.8) y (3.9) dan el mismo resultado. Por supuesto, la ecuación (3.4) es más fácil de usar debido a que no necesitamos calcular las curvaturas geodésicas y por lo tanto, de ahora en adelante utilizaremos esa expresión.

3.1.2. Ángulo de deflexión desde un enfoque post-newtoniano

El ángulo de deflexión para el espaciotiempo de Schwarzschild y para el espaciotiempo de Kottler fueron calculados utilizando la ecuación (3.4) en [60], y utilizando la versión (3.12) en [59]. En particular, las posibilidades de medir estas correcciones para el caso de Schwarzschild fueron discutidas en [61, 75]. Como previamente mencionamos, el cálculo de las correcciones por distancias finitas para el ángulo de deflexión ha sido abordado por varios autores en situaciones más generales y discutidas en libros de texto desde hace muchos años. Por ejemplo, la ecuación (3.15) puede ser encontrada en [101]. El cálculo de estas correcciones generalmente se lleva a cabo utilizando métodos post-newtonianos resolviendo explícitamente la ecuación de geodésicas en espaciotiempos [96-104, 120]. De hecho, incluso cuando tales expresiones son rutinariamente utilizadas en astrometría de alta precisión [121-123] los autores de [61] y de [59] desafortunadamente no han tratado de validar sus resultados con estos resultados bien conocidos.

En esta sección mostraremos que el ángulo de deflexión que sigue de la definición de Ishihara *et al* (3.4) dada por (3.4) coincide completamente con expresiones bien conocidas del ángulo para el caso de distancias finitas incluso considerando efectos de segundo orden y métricas más generales que la de Schwarzschild. En particular, compararemos las expresiones de Ishihara *et al* con los resultados de Richter y Matzner para una métrica PPN (*parametrized post-newtonian metric*) [98]. Debido a la completa equivalencia entre ambos resultados que mostraremos a continuación, resulta contundente que la definición de Arakida no puede reproducir dichos resultados.

Una discusión en detalle de la métrica PPN requiere primero revisar algunos hechos básicos y supuestos. Recordemos la forma general de una métrica PPN que representa el campo gravitacional externo de un objeto compacto estático y axialmente simétrico con masa m y momentos multipolares J_n . Para este caso dicha métrica puede ser expresada como sigue,

$$\begin{aligned}\tilde{A}(r, \vartheta) &= 1 + 2\tilde{U}(r, \vartheta) + 2\beta\tilde{U}^2(r, \vartheta), \\ \tilde{B}(r, \vartheta) &= 1 - 2\gamma\tilde{U}(r, \vartheta) + \frac{3}{2}\nu\tilde{U}^2(r, \vartheta), \\ \tilde{C}(r, \vartheta) &= B(r, \vartheta)r^2,\end{aligned}\tag{3.23}$$

donde el potencial \tilde{U} se puede expresar como,

$$\tilde{U}(r, \vartheta) = -\frac{m}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n J_n P_n(\cos(\vartheta)) \right],\tag{3.24}$$

siendo $P_n(x)$ el polinomio de Legendre de orden n . Aquí, β , γ y ν son tres parámetros que toman el valor 1 en el caso de relatividad general. En este caso, si $J_n = 0$ esta métrica representa la versión a segundo orden en la masa de la métrica de Schwarzschild. En este caso asumiremos que además de la masa m el único multipolo no nulo es el momento cuadrupolar J_2 .

Obviamente esta métrica no es esféricamente simétrica. Sin embargo si restringimos nuestro estudio a la propagación de rayos de luz sobre el plano ecuatorial definido por $\vartheta = \pi/2$, la métrica PPN restringida a este plano tiene simetría SO(2) y las funciones de la métrica vendrán dadas por

$$A(r) = \tilde{A}(r, \pi/2) = 1 + 2U(r) + 2\beta U^2(r),\tag{3.25}$$

$$B(r) = \tilde{B}(r, \pi/2) = 1 - 2\gamma U(r) + \frac{3}{2}\nu U^2(r),\tag{3.26}$$

$$C(r) = \tilde{C}(r, \pi/2) = B(r)r^2,\tag{3.27}$$

con

$$U(r) = -\frac{m}{r} \left(1 + \frac{R^2 J_2}{2r^2} \right).\tag{3.28}$$

Consideremos una situación como se muestra en la figura (3.4) donde el campo gravitacional externo de la lente viene descrito por la métrica anterior. Por el momento también asumimos que la fuente S se encuentra suficientemente lejos de la lente L y elegimos la nueva coordenada angular azimutal φ tal que $\varphi_S = 0$. Más detalles entre esta coordenada y la previamente definida $\hat{\varphi}$ se pueden encontrar en (3.3.1.2). Sin embargo, el observador R se asume que está a una distancia finita de la lente. En este caso, la manera operacional estándar de definir el ángulo de deflexión

es através de la siguiente cantidad,

$$\delta\theta = \theta_I - \theta', \quad (3.29)$$

donde el ángulo de elongación θ_I es el ángulo entre la imagen de la fuente vista por el observador y el eje observador-lente, mientras que θ' es el valor que este ángulo debería tener si la lente no estuviera presente [98-101]. Si fuéramos a asumir que el observador se encuentra a una distancia infinita de la lente, entonces $\delta\theta$ debería coincidir el ángulo de deflexión asintótico α_∞ . Sin embargo, debido a la distancia finita entre el observador y la lente existe cierto desacuerdo entre ambos ángulos. Por supuesto, $\delta\theta$ no es directamente un observable si uno usa una sola observación; el mismo debe ser medido utilizando el procedimiento de Eddington en al menos dos sesiones de observación diferentes. Utilizaremos luego esta cantidad para introducir otra fórmula que tenga en cuenta la separación angular de la imagen de la fuente con respecto a un objeto de referencia que no necesariamente sea la lente. Otras cantidades observables que se pueden calcular a partir del ángulo de deflexión son los escalares ópticos como el shear y la convergencia (ver por ejemplo [101, 113, 117, 124] y referencias allí para más detalles).

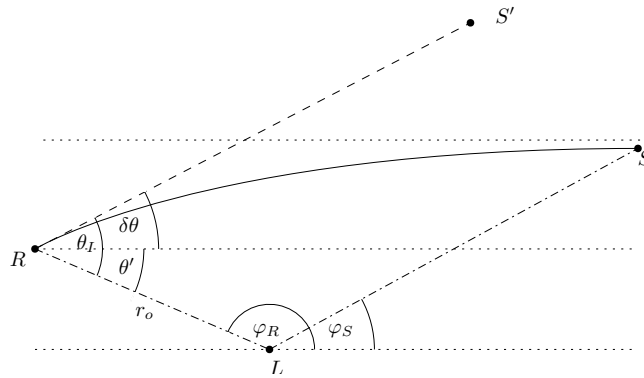


FIGURA 3.4: Los rayos de luz parten desde una fuente distante S hasta el observador R a través de una región donde se encuentra presente una lente gravitacional L . El ángulo θ_I está definido por el ángulo entre la lente, el observador y la posición angular de la imagen S' . El ángulo θ' es la posición angular de la fuente en el caso en que ésta se encontrara muy alejada de la lente. La diferencia entre estos ángulos está definida como $\delta\theta$.

Diferentes autores usando diferentes métodos han calculado el ángulo de deflexión $\delta\theta$ en términos de los parámetros de la lente y del ángulo observable θ_I . Dichas expresiones se pueden encontrar de dos forma diferentes: o bien en términos del parámetro de impacto b , que a distancia finita no es un observable, o bien en términos de la distancia radial r_o entre la lente y el observador. Si sólo consideramos el cálculo de $\delta\theta$ a primer orden en la masa m y en J_2 , la relación entre ambas viene dada simplemente por $b = r_o \sin(\varphi_R)$, la cual debe ser corregida para órdenes más altos.

Antes de continuar señalemos una cuestión de notación. Incluso cuando $\delta\theta$ es una notación comúnmente usada para el ángulo de deflexión a distancias finitas, continuaremos denotándola como α_{S_∞} , donde usamos el subfijo S_∞ en α para recordar que la fuente se asume estar posicionada a una distancia infinita de la lente. Por otro lado, en el caso de distancias infinitas, tanto del observador a la lente como de la fuente a la lente, el ángulo de deflexión se denotará como α_∞ .

Hace más de tres décadas Richter y Matzner mostraron en [98] que el ángulo de deflexión para las configuraciones previas de fuente, lente y observador en el campo gravitacional representado por la métrica PPN dada por (3.25), (3.26) y (3.27), puede ser escrito en términos del ángulo observable θ_I y del parámetro de impacto b como sigue,

$$\delta\theta \equiv \alpha_{S_\infty} = \alpha_{S_\infty}^{(1)} + \alpha_{S_\infty}^{(2)}, \quad (3.30)$$

donde $\alpha_{S_\infty}^{(1)}$ y $\alpha_{S_\infty}^{(2)}$ son los términos lineales y cuadráticos en la masa del ángulo de deflexión:

$$\alpha_{S_\infty}^{(1)}(b, \vartheta_I) = \frac{m}{b}(1 + \gamma)(1 + \cos(\theta_I)) \left[1 + \frac{J_2 R^2}{2b^2} \left(2 + \cos(\theta_I) - \cos^2(\theta_I) \right) \right] \quad (3.31)$$

$$\alpha_{S_\infty}^{(2)}(b, \vartheta_I) = \frac{m^2}{b^2} \left(2 - \beta + 2\gamma + \frac{3}{4}\nu \right) (\pi - \theta_I + \sin(\theta_I) \cos(\theta_I)). \quad (3.32)$$

De hecho, en [98] una métrica más general que admita rotación del objeto compacto que actúa como lente y distribuciones más generales de momento-energía también fueron estudiadas, aunque para nuestros propósitos es suficiente restringirnos al caso considerado.

Las ecuaciones (3.31) y (3.32) pueden también ser re-escritas en términos de la coordenada radial r_o relacionada a b por,

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_o \sin(\vartheta_I)} - (1 + \gamma) \frac{m}{r_o^2 \sin(\vartheta_I)} + \mathcal{O}(m^2, mJ_2). \quad (3.33)$$

En términos de r_o , las relaciones (3.31) y (3.32) se expresan de la siguiente manera [98],

$$\begin{aligned} \alpha_{S_\infty}^{(1)}(r_o, \vartheta_I) &= \frac{m}{r_o}(1 + \gamma) \left[\frac{(1 + \cos(\theta_I))}{\sin(\vartheta_I)} + \frac{J_2 R^2}{2r_o^2 \sin^3(\vartheta_I)} \right. \\ &\quad \left. \times \left(2 + 3 \cos(\theta_I) - \cos^3(\theta_I) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{S_\infty}^{(2)}(r_o, \vartheta_I) &= \frac{m^2}{r_o^2} \left[\left(2 - \beta + 2\gamma + \frac{3}{4}\nu \right) \frac{\pi - \theta_I + \sin(\theta_I) \cos(\theta_I)}{\sin^2(\vartheta_I)} \right. \\ &\quad \left. - (1 + \gamma)^2 \frac{1 + \cos(\vartheta_I)}{\sin(\vartheta_I)} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nos queda por abordar la cuestión de si estas expresiones para el ángulo de deflexión pueden ser recuperadas a partir de la definición introducida por Ishihara *et al* o por Arakida. Veremos en efecto que dichas relaciones pueden ser recuperadas a partir de la definición de Ishihara *et al*. Más aún, obtendremos este resultado para nada trivial en un contexto más general donde la presencia del plasma será tomada en cuenta.

3.2. Sobre la medición de la desviación de la luz en un entorno plasmático

A partir de ahora restringiremos nuestra atención a espaciotiempos estáticos y axialmente simétricos en presencia de un plasma frío no-magnetizado, con métrica,

$$ds^2 = -\tilde{A}(r, \vartheta)dt^2 + \tilde{B}(r, \vartheta)dr^2 + \tilde{C}(r, \vartheta)(\Theta(r, \vartheta)d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (3.36)$$

y con dependencia en las coordenadas r y ϑ para la frecuencia del plasma, $\omega_e = \omega_e(r, \vartheta)$. Notemos que estamos despreciando la autogravitación del plasma. También asumimos que el espaciotiempo es asintóticamente plano y que el plasma es estático con respecto a observadores que siguen las curvas integrales del campo de Killing temporal $\zeta^\alpha = (\frac{\partial}{\partial t})^\alpha$. Debido al redshift gravitacional, la frecuencia del fotón a una dada posición radial r está dada por

$$\omega(r, \vartheta) = \frac{\omega_\infty}{\sqrt{\tilde{A}(r, \vartheta)}}, \quad (3.37)$$

donde ω_∞ es la frecuencia del fotón medida por un observador en infinito. Nos restringiremos también a la propagación de rayos de luz en el plano definido por $\vartheta = \pi/2$. Si el espaciotiempo bajo consideración es esféricamente simétrico esta restricción no contribuye a ninguna pérdida de generalidad. Sin embargo, para el caso axialmente simétrico debemos tener en cuenta que los resultados obtenidos sólo serán válidos para rayos de luz propagándose en ese plano. Restringidos a $\vartheta = \pi/2$, todas las variables tendrán únicamente dependencia radial y las componentes de la métrica se escribirán sin el tilde como hicimos en (3.25), (3.26), (3.27).

Como estamos interesados en la aplicación del teorema de Gauss-Bonnet en la determinación del ángulo de deflexión, siguiendo nuestro trabajo previo [40] que a su vez hemos descrito en el capítulo anterior, haremos uso de la variedad Riemanniana 2-dimensional $(\mathcal{M}^{\text{opt}}, g_{ij}^{\text{opt}})$ equipada con la métrica óptica (2.35) (restringida al plano $\vartheta = \pi/2$), que para comodidad del lector, volvemos a reproducir aquí,

$$d\sigma^2 = g_{ij}^{\text{opt}} dx^i dx^j = \frac{n^2(r)}{A(r)} \left(B(r) dr^2 + C(r) d\varphi^2 \right). \quad (3.38)$$

Como hemos mencionado anteriormente, esta métrica es conforme a la métrica inducida en la subvariedad definida por $t = \text{constante}$, $\vartheta = \pi/2$, y por lo tanto preserva ángulos formados por dos curvas en un mismo punto.

El movimiento geodésico sigue del Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{n^2(r)}{A(r)} \left(B(r) \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + C(r) \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right) \right], \quad (3.39)$$

con la condición

$$\frac{n^2(r)}{A(r)} \left[B(r) \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + C(r) \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \right] = 1. \quad (3.40)$$

En el caso de una plasma homogéneo ($\omega_e = \text{constante}$), se sigue de (3.39) y (3.40) que la ecuación de la órbita viene dada por [40],

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C(r)}{B(r)} \left[\frac{C(r)n^2(r)}{A(r)n_0^2 b^2} - 1 \right], \quad (3.41)$$

donde $n_0^2 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_o^2 A(r_o)}$, y con ω_o siendo la frecuencia del rayo de luz medida por un observador situado en r_o (relacionado a ω_∞ por $\omega_\infty = \omega_o \sqrt{A(r_o)}$).

Definiendo $u = \frac{1}{r}$, la ecuación anterior se escribe como,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{u^4 C(u)}{B(u)} \left(\frac{C(u)n^2(u)}{n_0^2(u_0)b^2 A(u)} - 1 \right). \quad (3.42)$$

En términos del tensor de curvatura asociado con la métrica óptica, la curvatura Gaussiana \mathcal{K} se puede calcular como,

$$\mathcal{K} = \frac{R_{r\varphi r\varphi}(g^{\text{opt}})}{\det(g^{\text{opt}})}. \quad (3.43)$$

Un procedimiento estándar para medir el ángulo de deflexión cuando una lente está presente, consiste en observar cómo el ángulo relativo Θ entre dos fuentes situadas suficientemente lejos cambia cuando la lente (nuestro Sol, una estrella diferente o incluso un planeta) pasa cerca de la línea de visión de la fuente [124]. Una de ellas es la fuente S desde la cual emanan los rayos de luz, mientras que la otra S_r se toma como fuente de referencia. Por lo tanto, a fin de estudiar cómo la posición angular relativa entre estas dos fuentes cambia con las propiedades de la lente como su distribución de masa y su distribución electrónica, una expresión general que relacione el ángulo de deflexión α con el ángulo relativo Θ es necesaria.

Recientemente, en [125, 126] Lebedev y Lake derivaron una relación muy útil para el ángulo formado por dos curvas causales en la posición de un observador arbitrario, el cual citamos explícitamente a fin de hacer esta tesis lo más autocontenida posible. Sea U^α la 4-velocidad de un observador y sea K^α y W^α dos vectores causales futuros con proyecciones espaciales en el frame local del observador, \bar{K}^i , y \bar{W}^i . Entonces, el ángulo entre estos dos vectores espaciales en la posición del observador, el cual es una cantidad medible, esta dado por,

$$\cos(\Theta) = \frac{K_\alpha W^\alpha + (U_\alpha K^\alpha)(U_\beta W^\beta)}{\sqrt{K_\alpha K^\alpha + (U_\alpha K^\alpha)^2} \sqrt{W_\alpha W^\alpha + (U_\alpha W^\alpha)^2}}. \quad (3.44)$$

Notar que ésta es una cantidad explícitamente invariante de gauge.

Como consecuencia de este resultado probamos el siguiente teorema que nos será de gran utilidad.

Theorem 1. *Sea γ y γ' dos rayos de luz con 4-momento p^α y p'^α propagándose no necesariamente a la misma frecuencia en un plasma frío sobre un espaciotiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano. Entonces, en la posición de un observador con 4-velocidad U^α el ángulo (3.44) entre estos dos rayos de luz toma la forma,*

$$\cos(\Theta) = \frac{1}{n(p)n(p')} \left(1 + \frac{p_\alpha p'^\alpha}{(p_\beta U^\beta)(p'_\beta U^\beta)} \right), \quad (3.45)$$

donde $n(p)$ y $n(p')$ es el índice de refracción donde se propagan γ y γ' . En términos de la frecuencia observada en la posición del observador $n^2(p(\omega)) = 1 - \omega_c^2(r)/\omega^2(r)$ y $n^2(p'(\omega')) = 1 - \omega_c^2(r)/\omega'^2(r)$.

A pesar de ser ésta una fórmula muy simple, no tenemos conocimiento de que la misma se encuentre presente en la literatura hasta el momento. Notemos que esta fórmula se reduce a la expresión bien conocida para el caso de gravedad pura cuando $n(p) = n(p') = 1$ (ver por ejemplo [101]). Esta expresión nos permitirá relacionar el ángulo relativo Θ entre la posición de las dos fuentes y el ángulo de deflexión α teniendo en cuenta no sólo los efectos del campo gravitacional sino también aquellos inducidos por el plasma. Adicionalmente, esta expresión nos permitiría estudiar los efectos de aberración producido por el movimiento relativo entre el observador y la lente que están codificados en los factores $p_\beta U^\beta$ y $p'_\beta U^\beta$, los cuales dependen de U^α . Sin embargo, por simplicidad restringiremos nuestra atención al caso donde el observador está estático respecto de la lente.

Demostración: A partir del Hamiltoniano dado por (2.24) se sigue que los vectores tangentes a los rayos de luz son paralelos a los 4-momentos y por lo tanto uno puede calcular el ángulo relativo (3.44) identificando los vectores K y W con los 4-momentos p^α y p'^α . Por otro lado el índice de refracción correspondiente a la propagación de estos rayos de luz se lee [22, 86],

$$n^2(p) = 1 + \frac{p_\alpha p^\alpha}{(p_\beta U^\beta)^2} \quad \text{y} \quad n^2(p') = 1 + \frac{p'_\alpha p'^\alpha}{(p'_\beta U^\beta)^2} \quad (3.46)$$

el cual puede ser re-expresado como

$$\sqrt{p_\alpha p^\alpha + (p_\alpha U^\alpha)^2} = n(p)(p_\alpha U^\alpha) \quad (3.47)$$

$$\sqrt{p'_\beta p'^\beta + (p'_\beta U^\beta)^2} = n(p')(p'_\beta U^\beta). \quad (3.48)$$

Reemplazando estas últimas expresiones en (3.44) se obtiene (3.45).

Para un plasma estático, se puede ver a partir de las ecuaciones de Hamilton que

$$p^\alpha = \omega(x^i) \left(U^\alpha + n(x^i) \hat{e}^\alpha \right) \quad (3.49)$$

donde $\omega(x^j) = -p_\alpha U^\alpha$ y $n^2(x^i) = 1 - \frac{\omega_c^2(x^i)}{\omega^2(x^i)}$. Así mismo \hat{e}^α es un vector espacial normalizado y ortogonal a U^α y tangente a la hiper-superficie Σ_t definida por $t = \text{constante}$. La 4-velocidad también está normalizada de forma tal que $U^\alpha = \frac{t^\alpha}{\sqrt{-g^{(t^\alpha, t^\alpha)}}}$ donde $t^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Una expresión similar obtenemos para p'^α con frecuencia $\omega'(x^i)$.

A fin de construir una relación entre el ángulo de deflexión y el ángulo relativo Θ a partir de (3.45) que pueda ser fácilmente testada por observaciones y que además tenga en consideración los efectos cromáticos producidos por el plasma (así como también los efectos gravitatorios producidos por el campo gravitacional de la lente) seguiremos el procedimiento descrito por Poisson y Will en [117] (ver también [101]) el cual abarca solamente los efectos gravitacionales. Como estamos interesados en los cambios a primer orden del ángulo relativo Θ entre dos fuentes S y S_r , esta última actuando como fuente de referencia, en presencia de una lente y el ángulo relativo Θ' sin la presencia de la lente, debemos tener en cuenta que la dirección

espacial de los 4-momentos asociados a cada rayo de luz cambiará comparada con su valor en el espaciotiempo plano sin perturbar.

Consideremos un rayo de luz con 4-momento p^α partiendo de la posición de la fuente S , y otro con 4-momento p'^α emanando de la fuente de referencia S_{ref} ; ambas llegan a la posición de un observador estático en R (ver figura 3.5). Como se da en muchas situaciones astrofísicas de interés, consideremos que ambas fuentes se encuentran suficientemente lejos de la lente.

Consideremos que el campo gravitatorio en la vecindad de la lente puede ser descrito a primer orden en coordenadas isotrópicas por la métrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \epsilon h_{\alpha\beta}$ donde las únicas componentes no nulas de la perturbación son $h_{\alpha\beta} = (h_{00}, h_{rr}\delta_{ij})$. Las direcciones espaciales de los rayos de luz están dadas por \hat{k}^i para la fuente S y \hat{k}_r^i para la fuente de referencia S_{ref} , los cuales son versores respecto de la métrica Euclídea. Por lo tanto, a primer orden en el parámetro ϵ , el vector espacial $\hat{e}^\alpha = (0, \hat{e}^i)$ asociado al 4-momento p^α del rayo de luz que emana de la fuente S , y el respectivo vector espacial $\hat{e}'^\alpha = (0, \hat{e}'^i)$ asociado al 4-momento del rayo de luz proveniente de la fuente de referencia S_{ref} estarán dados por,

$$\hat{e}^i = (1 - \frac{\epsilon}{2}h_{rr})\hat{k}^i - \alpha_S \hat{b}_S^i + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.50)$$

$$\hat{e}'^i = (1 - \frac{\epsilon}{2}h_{rr})\hat{k}_r^i - \alpha_r \hat{b}_r^i + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.51)$$

donde estamos asumiendo que α_S y α_r son cantidades $\mathcal{O}(\epsilon)$ que representan los ángulos de deflexión de los rayos de luz provenientes de S y S_{ref} respectivamente, mientras que $\hat{b}_S^i = \frac{\vec{b}_S^i}{b_S}$ y $\hat{b}_r^i = \frac{\vec{b}_r^i}{b_r}$ son los versores (respecto de la métrica Euclídea) en la dirección de los respectivos vectores de parámetro de impacto.

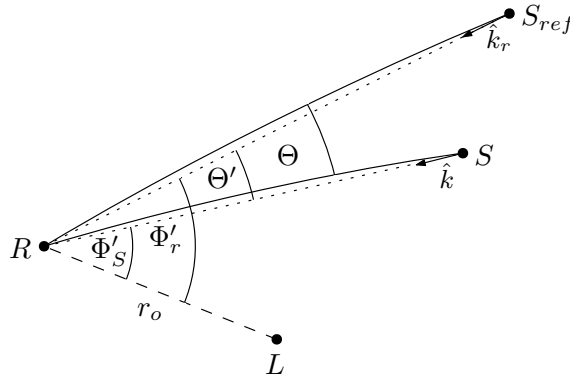


FIGURA 3.5: R , L , S y S_{ref} indican la posición del observador, la lente, la fuente y la fuente de referencia, respectivamente. Las líneas sólidas indican la trayectoria real de los fotones mientras que las líneas punteadas indican la trayectoria de los fotones en el espacio de fondo. Tanto las cantidades angulares como la posición lente-observador r_o son cantidades observables.

Calculemos ahora el ángulo Θ usando la fórmula (3.45) a primer orden en la perturbación de la métrica Euclídea. Arribamos al siguiente resultado

$$\cos(\Theta) = \hat{k} \cdot \hat{k}_r - \alpha_S (\hat{k}_r \cdot \hat{b}_S) - \alpha_r (\hat{k} \cdot \hat{b}_r) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.52)$$

donde el punto (" \cdot ") indica el producto escalar con respecto a la métrica plana. Notemos que esta expresión es formalmente la misma que la ecuación 10.74 de [117], la cual es un caso especial para $n(p) = n(p') = 1$. En este caso, la ecuación (3.52)

es válida para rayos de luz que siguen curvas causales y no sólo nulas. Los ángulos de deflexión α_S y α_r son aquellos debidos tanto al campo gravitatorio de la lente como a la distribución electrónica que rodea a la misma. Siguiendo [117], se puede re-escribir (3.52) de la forma

$$\cos(\Theta) = \cos(\Theta') - \alpha_S \left(\frac{\cos \Phi'_r - \cos \Phi'_S \cos \Theta'}{\sin \Phi'_S} \right) - \alpha_r \left(\frac{\cos \Phi'_S - \cos \Phi'_r \cos \Theta'}{\sin \Phi'_r} \right), \quad (3.53)$$

donde los ángulos Φ'_S y Φ'_r son los valores sin perturbar de los ángulos entre el observador, la lente y la fuente; y entre el observador, la lente y la fuente de referencia, respectivamente. Señalamos que, a pesar del escenario mostrado en la figura (3.5), el observador, la fuente, la lente y la fuente de referencia no se encuentra necesariamente en el mismo plano.

Para desviaciones pequeñas respecto de la trayectoria sin perturbar definimos,

$$\Delta\Theta := \Theta - \Theta' \ll 1, \quad (3.54)$$

y expandimos el lado izquierdo de (3.53) como,

$$\cos \Theta \approx \cos \Theta' - \sin \Theta' \Delta\Theta. \quad (3.55)$$

Luego, reemplazando esta expresión en (3.53) obtenemos,

$$\Delta\Theta = \alpha_S \left(\frac{\cos \Phi'_r - \cos \Phi'_S \cos \Theta'}{\sin \Phi'_S \sin \Theta'} \right) + \alpha_r \left(\frac{\cos \Phi'_S - \cos \Phi'_r \cos \Theta'}{\sin \Phi'_r \sin \Theta'} \right). \quad (3.56)$$

Más aún, debido a que estamos considerando correcciones a primer orden, podemos reemplazar los ángulos Φ'_S , Φ'_r y Θ' por sus respectivas posiciones angular observables θ_{IS} , θ_{Ir} y Θ (ver figura 3.6). Por lo tanto,

$$\Delta\Theta = \alpha_S \left(\frac{\cos \theta_{Ir} - \cos \theta_{IS} \cos \Theta}{\sin \theta_{IS} \sin \Theta} \right) + \alpha_r \left(\frac{\cos \theta_{IS} - \cos \theta_{Ir} \cos \Theta}{\sin \theta_{Ir} \sin \Theta} \right). \quad (3.57)$$

De esta forma hemos obtenido una relación entre cantidades observables y el ángulo de deflexión que nos permiten testear nuestras expresiones para distintos perfiles de plasma así como también para distintos campos gravitacionales.

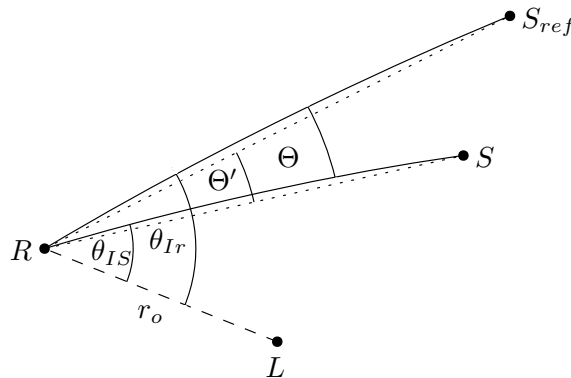


FIGURA 3.6: Desde la posición del observador es posible medir diferentes cantidades. Θ es el ángulo entre S_{ref} y S ; θ_{IS} es el ángulo entre S , R y L ; y θ_{Ir} es el ángulo entre S_{ref} , R y L .

Notemos que si la fuente de referencia se elige en la misma dirección que la lente, esto es, $\theta_{Ir} = 0$ y $\Theta = \theta_{IS}$, la ecuación (3.57) se reduce significativamente.

$$\Delta\Theta = \alpha_S. \quad (3.58)$$

Como las mediciones astronómicas desde la Tierra son realizadas en la esfera celeste, resulta conveniente expresar (3.57) en términos de los ángulos proyectados en el plano del cielo. Entonces, re-escribimos la ecuación (3.57) en términos de los ángulos proyectados A y B como,

$$\Delta\Theta = \alpha_S \cos(B) + \alpha_r \cos(A), \quad (3.59)$$

donde A es el ángulo entre las direcciones proyectadas en la esfera celeste $S_{ref} - S$ y $S_{ref} - L$, mientras que B es el ángulo entre las direcciones proyectadas $S_{ref} - S$ y $S - L$. La relación (3.59) sigue inmediatamente de las identidades trigonométricas esféricas [117],

$$\cos(\theta_{Ir}) = \cos(\theta_{IS}) \cos(\Theta) + \sin(\theta_{IS}) \sin(\Theta) \cos(B), \quad (3.60)$$

$$\cos(\theta_{IS}) = \cos(\theta_{Ir}) \cos(\Theta) + \sin(\theta_{Ir}) \sin(\Theta) \cos(A). \quad (3.61)$$

En particular, si tanto la lente, como el observador y ambas fuentes se encuentran en el mismo plano, con ambas fuentes en el mismo lado de la lente vistas por el observador, entonces $B = 0$ y $A = \pi$; y la variación en la separación de los ángulos se reduce a lo siguiente,

$$\Delta\Theta = \alpha_S - \alpha_r; \quad (3.62)$$

resultado que se sigue por simple inspección de la figura (3.6).

Relaciones como (3.59) con α_S y α_r dados por la fórmula de Shapiro, o el caso más general dado por las expresiones de Richter y Matzner (3.31) son de uso común en observaciones astronómicas del ángulo de deflexión no sólo producidos por el Sol sino también por planetas como Jupiter[119]. La aplicación más simple de (3.62) sigue de considerar el ángulo de deflexión producido por un campo gravitacional monopolar, en cuyo caso dichos ángulos α_S y α_r están dados por la fórmula de Shapiro, ecuación (3.21). En esta situación, la ecuación (3.62) nos da,

$$\Delta\Theta = (1 + \gamma) \frac{2m}{r_o} \frac{\sin(\frac{\theta_{IS} - \theta_{Ir}}{2})}{\sin \frac{\theta_{IS}}{2} \sin \frac{\theta_{Ir}}{2}}. \quad (3.63)$$

Esta expresión fue recientemente utilizada por Turyshev [113] a fin de estimar el ángulo de deflexión causado por el aspecto monopolar de los campos gravitacionales producidos por diferentes cuerpos celestes en el sistema solar y su posible observabilidad en misiones interferométricas futuras. En dicha referencia, también se realizó un estudio similar pero utilizando la fórmula de Richter y Matzner y una generalización de la misma a fin de estimar la observabilidad de la contribución cuadrupolar y octopolar del campo gravitacional en el corrimiento de las posiciones angulares de objetos muy lejanos.

Como hemos mostrado en esta sección, las expresiones (3.59), (3.57) y (3.62), pueden ser utilizadas para testear el ángulo de deflexión en situaciones más generales donde los rayos de luz se propagan en un medio con una dada distribución electrónica. Teniendo en cuenta que las expresiones para α_S y α_r deben ser aquellas que generalizan la expresión de Shapiro a fin de tener en cuenta la contribución del plasma y que son objeto de estudio en esta tesis.

En las siguientes secciones daremos expresiones para el ángulo de deflexión derivadas utilizando el teorema de Gauss-Bonnet que no sólo recuperan las expresiones de Shapiro y de Richter y Matzner, sino que además las generalizan a situaciones astrofísicas más generales donde la presencia del plasma en la vecindad de la lente es tenida en cuenta.

3.3. Plasma homogéneo

Consideremos una lente gravitacional rodeada por un plasma homogéneo con densidad electrónica,

$$N(r, \vartheta) = N_0 = \text{constante.} \quad (3.64)$$

En esta sección estudiaremos la desviación de la luz a segundo orden debido a la presencia de una lente gravitacional cuyo campo gravitacional externo viene caracterizado por la métrica PPN introducida en (3.23) restringida al plano $\vartheta = \pi/2$. En la notación de esta sección no usaremos las tildes sobre las componentes de la métrica.

Debido al redshift gravitacional y considerando que ambos la fuente y el observador se encuentran a una distancia finita de la lente, el índice de refracción se lee

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2 A(r)}{\omega_o^2 A(r_o)}}, \quad (3.65)$$

donde ω_o es la frecuencia del rayo de luz medida por un observador situado en la posición radial r_o respecto de la lente. Por lo tanto, la métrica óptica asociada en este caso viene dada por,

$$d\sigma^2 = \Omega^2(dr^2 + r^2d\varphi^2); \quad (3.66)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega^2 = & \frac{\omega_o^2 - \omega_e^2}{\omega_o^2} + \frac{m}{\omega_o^2 r^3 r_o^3} \left[(\gamma + 1) \omega_o^2 r_o^3 (J_2 R^2 + 2r^2) - \omega_e^2 \left(J_2 R^2 (\gamma r_o^3 + r^3) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2r^2 r_o^2 (\gamma r_o + r) \right) \right] + \frac{m^2}{2\omega_o^2 r^2 r_o^2} \left[\omega_o^2 r_o^2 (8\gamma - 4\beta + 3\nu + 8) \right. \\ & \left. + \omega_e^2 \left(4(\beta - 2)r^2 - 8\gamma r r_o - 3\nu r_o^2 \right) \right] + \mathcal{O}(m^3, m^2 \times J_2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

A fin de aplicar el método de Gauss-Bonnet para calcular el ángulo de deflexión a distancias finitas, necesitamos primero resolver la ecuación de la órbita hasta el orden necesario. Como estamos interesados en correcciones a segundo orden en m en el ángulo de deflexión, sólo necesitaremos resolver la ecuación de la órbita a primer orden en m , la cual se lee

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{b^2} - u^2 + \frac{m u}{b^2} (2 + J_2 R^2 u^2) \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2 / \omega_o^2} \right), \quad (3.68)$$

con la condición asintótica,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} u(\varphi) = 0. \quad (3.69)$$

Asumiendo una solución de la forma,

$$u(\varphi) = \frac{1}{b} [\sin(\varphi) + m u_1(\varphi)], \quad (3.70)$$

obtenemos a primer orden en m ,

$$u(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{b} + \frac{m(1 - \cos(\varphi))}{2b^4} \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) \left(2b^2 + J_2 R^2 (1 - \cos(\varphi)) \right). \quad (3.71)$$

Por completitud, en la ecuación (3.71) hemos escrito explícitamente términos de orden $\mathcal{O}(m \times J_2)$. Sin embargo, queremos enfatizar que debido a que la curvatura Gaussiana es orden $\mathcal{O}(m)$ (ver (3.72) más abajo), se sigue que términos de orden $\mathcal{O}(m \times J_2)$ en $u(\varphi)$ contribuirán con correcciones $\mathcal{O}(m^2 \times J_2)$ en el ángulo de deflexión las cuales son correcciones que no consideraremos en este ejemplo.

A fin de calcular el ángulo de deflexión debemos integrar la curvatura Gaussiana \mathcal{K} sobre el dominio ${}_{\mathcal{R}}\square_S^\infty$. La curvatura Gaussiana asociada a la métrica óptica a segundo orden en m y descartando términos de orden $\mathcal{O}(m^2 \times J_2)$ resulta ser,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{m(2r^2 + 9J_2 R^2)}{2r^5} \frac{\omega_o^2(\gamma\omega_e^2 - (\gamma+1)\omega_o^2)}{(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2} + \frac{m^2\omega_o^2}{r_o r^4 (\omega_o^2 - \omega_e^2)^3} \left\{ r_o \omega_o^4 \left[4\beta - 2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 4\gamma + 6\gamma^2 - 3\nu \right] - 2\omega_o^2\omega_e^2 \left[(2 + \gamma)r + 2r_o(\beta - 2 + \gamma + 3\gamma^2) - 3r_o\nu \right] \right. \\ & \left. + \omega_e^4 \left[2\gamma r + 6\gamma^2 r_o - 3\nu r_o \right] \right\} + \mathcal{O}(m^3, m^2 \times J_2); \end{aligned} \quad (3.72)$$

mientras que la 2-forma $\mathcal{K}dS$ se lee,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}dS = & \left\{ - \frac{m(9J_2 R^2 + 2r^2)(\omega_o^2(\gamma+1) - \gamma\omega_e^2)}{2r^4(\omega_o^2 - \omega_e^2)} + \frac{m^2}{r^3 r_o (\omega_o^2 - \omega_e^2)^2} \right. \\ & \times \left[\omega_o^4 r_o \left(4(\beta + \gamma^2 - 1) - 3\nu \right) - 2\omega_o^2\omega_e^2 \left(r_o(2\beta + 4\gamma^2 - 3\nu - 4) + r \right) \right. \\ & \left. \left. + r_o \omega_e^4 (4\gamma^2 - 3\nu) \right] \right\} drd\varphi + \mathcal{O}(m^3, m^2 \times J_2). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Finalmente el ángulo de deflexión obtenido esta dado por,

$$\alpha = - \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} \int_{r_{\gamma\ell}}^{\infty} \mathcal{K}dS = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}, \quad (3.74)$$

donde $r_{\gamma\ell} = \frac{1}{u(\varphi)}$ viene dado por,

$$r_{\gamma\ell} = \frac{b}{\sin(\varphi)} - \frac{1 - \cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) m + \mathcal{O}(m^2, m \times J_2). \quad (3.75)$$

El término lineal en m es,

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} = & \frac{m}{b} \left(\cos(\varphi_S) - \cos(\varphi_R) \right) \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) \left[1 + \frac{J_2 R^2}{4b^2} \left(4 - \cos(2\varphi_S) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos(\varphi_R - \varphi_S) - \cos(2\varphi_R) - \cos(\varphi_S + \varphi_R) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.76)$$

mientras que la corrección a segundo orden,

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} = & \frac{m^2}{4b^2(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2} \left\{ (\varphi_S - \varphi_R)(\omega_o^2 - \omega_e^2) \times \left(\omega_o^2(4\beta - 8 - 8\gamma - 3\nu) + 3\nu\omega_e^2 \right) \right. \\ & + 4(\omega_o^2(1 + \gamma) - \omega_e^2\gamma)^2 \left(\sin(\varphi_S) - \sin(\varphi_R) \right) + \frac{1}{2} \left[\omega_o^4 \left(4(\beta - 1 + \gamma^2) - 3\nu \right) \right. \\ & + \left. \left. \omega_e^4(4\gamma^2 - 3\nu) - 2\omega_o^2\omega_e^2(2\beta + 4\gamma^2 - 3\nu) \right] \left(\sin(2\varphi_R) - \sin(2\varphi_S) \right) \right. \\ & \left. + 8\omega_o^2\omega_e^2 \cos(\varphi_S) \left(\sin(\varphi_R) - \sin(\varphi_S) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

En (3.77) hemos usado la aproximación $r_o \approx b / \sin(\varphi_R)$ la cual puede ser usada sin problemas a este orden.

Las expresiones (3.76) y (3.77) generalizan resultados previos de varias maneras. En resumen, estas expresiones tienen en cuenta correcciones por distancias finitas para rayos de luz propagándose en un plasma frío así como también tienen en cuenta el efecto en la desviación de la luz debido a la masa m y al momento cuadrupolar J_2 . No tenemos conocimiento de expresiones similares en la literatura. A continuación estudiamos algunos casos especiales de estas expresiones.

3.3.1. Casos especiales de (3.76) y (3.77)

3.3.1.1. Caso I: PPN a distancias infinitas con plasma

Consideremos el caso límite donde tanto la fuente como el observador se encuentran muy lejos de la lente. En tal situación podemos tomar,

$$\varphi_R \rightarrow \pi + \alpha_\infty^{(1)} \text{ y } \varphi_S \rightarrow 0. \quad (3.78)$$

En principio deberíamos proceder como sigue: primero, como $\alpha_\infty^{(1)}$ es ya una cantidad de orden $\mathcal{O}(m)$, podríamos calcularla a partir de (3.76) tomando $\varphi_R = \pi$ y $\varphi_S = 0$. Luego de esto, en una segunda etapa, deberíamos reemplazar este valor obtenido para $\alpha_\infty^{(1)}$ en (3.78) a fin de utilizar la ecuación (3.76) de nuevo para obtener términos extras de orden $\mathcal{O}(m^2)$ que deben ser tenidos en cuenta en $\alpha_\infty^{(2)}$. Sin embargo en la práctica esto no es necesario debido a la siguiente relación: $\cos(n(x + \alpha_\infty^{(1)})) = \cos(nx) - n \sin(nx)\alpha_\infty^{(1)} + \mathcal{O}(m^2)$ siendo n un número entero. En particular, en nuestro caso tenemos términos de la forma $\cos(\varphi_R) = \cos(\pi + \alpha_\infty^{(1)}) = -1 + \mathcal{O}(m^2)$ en $\alpha^{(1)}$, y por lo tanto, las correcciones que se obtendrán serán de orden $\mathcal{O}(m^3)$, las cuales no estamos considerando en este caso.

De estas consideraciones vemos que al orden que estamos trabajando basta con reemplazar $\varphi_R = \pi$ y $\varphi_S = 0$ en (3.76) y (3.77) a fin de obtener el ángulo de deflexión en este caso de distancias infinitas.

$$\alpha = \frac{2m(b^2 + J_2 R^2)}{b^3} \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) + \frac{\pi m^2}{b^2} \left(\frac{2 - \beta + 2\gamma}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} + \frac{3}{4}\nu \right). \quad (3.79)$$

A pesar de la simplicidad de esta expresión no tenemos conocimientos de que la misma haya sido presentada previamente.

En particular, en la ausencia de plasma, $\omega_e = 0$, o bien en el caso en que la presencia del mismo es despreciable, $\omega_e/\omega_o \ll 1$, la expresión anterior se reduce a lo siguiente,

$$\alpha = 2(\gamma + 1)\frac{m}{b} + \pi(2 - \beta + 2\gamma + \frac{3}{4}\nu)\frac{m^2}{b^2}, \quad (3.80)$$

la cual coincide con expresiones que podemos encontrar en [44, 127].

Por otro lado, incluso considerando la presencia del plasma, si el objeto bajo estudio tiene una distribución de masa esféricamente simétrica, $J_2 = 0$ y el campo gravitacional respeta la teoría de la relatividad de Einstein, $\gamma = \nu = \beta = 1$, la expresión (3.79) se lee,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) + \frac{3\pi}{4} \left(1 + \frac{4}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) \frac{m^2}{b^2}. \quad (3.81)$$

El primer término coincide con el resultado obtenido por Bisnovaty-Kogan y Tsupko en [21, 22], y considerando el término a segundo orden recuperamos el resultado obtenido recientemente por nosotros en [40].

3.3.1.2. Caso II: Schwarzschild a distancias finitas

La contribución al ángulo de deflexión por distancias finitas para una lente de Schwarzschild en presencia de un plasma homogéneo se obtienen estableciendo $\gamma = \beta = \nu = 1$ y $J_2 = 0$ en las ecuaciones (3.76) y (3.77),

$$\alpha^{(1)} = \frac{m}{b} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2} \right) \left(\cos(\varphi_S) - \cos(\varphi_R) \right); \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(2)} = \frac{m^2}{8b^2(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2} & \left[6(\varphi_R - \varphi_S)(5\omega_o^4 - 6\omega_o^2\omega_e^2 + \omega_e^4) + 16\omega_o^2\omega_e^2 \cos(\varphi_S) \sin(\varphi_R) \right. \\ & - (\omega_o^2 + \omega_e^2)^2 \sin(2\varphi_S) + 8(\omega_e^2 - 2\omega_o^2)^2 \left(\sin(\varphi_S) - \sin(\varphi_R) \right) \\ & \left. + (\omega_o^4 - 6\omega_o^2\omega_e^2 + \omega_e^4) \sin(2\varphi_R) \right]. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Estas expresiones generalizan al caso con plasma los resultados obtenidos por Ishihara *et al* en [60, 75]. En ausencia de plasma o cuando la presencia del mismo puede ser despreciada, $\omega_e/\omega_o \ll 1$, recuperamos las expresiones de Ishihara *et al*,

$$\alpha_{\text{vac}}^{(1)} = \frac{2m}{b} \left(\cos(\varphi_S) - \cos(\varphi_R) \right); \quad (3.84)$$

$$\alpha_{\text{vac}}^{(2)} = \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\varphi_R - \varphi_S) + \sin(2\varphi_R) - \sin(2\varphi_S) + 32 \left(\sin(\varphi_S) - \sin(\varphi_R) \right) \right]. \quad (3.85)$$

Notar que incluso cuando nuestros resultados a primer orden (3.84) coinciden completamente con los resultados obtenidos en [60], pareciera haber cierta inconsistencia con nuestro resultado a segundo orden (3.85) y el obtenido en [75], el cual reproducimos a continuación con el nombre alternativo $\hat{\alpha}_{\text{vac}}^{(2)}$ y variable angular $\hat{\varphi}$ para

diferenciarla de la que estamos usando,

$$\hat{\alpha}_{\text{vac}}^{(2)} = \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\hat{\varphi}_R - \hat{\varphi}_S) + \sin(2\hat{\varphi}_R) - \sin(2\hat{\varphi}_S) \right]. \quad (3.86)$$

Pareciera haber cierta discrepancia entre las expresiones (3.86) y (3.85) debido a la presencia del término,

$$\delta = 32 \left(\sin(\varphi_S) - \sin(\varphi_R) \right); \quad (3.87)$$

en (3.85). La diferencia es sólo aparente y se debe a que la coordenada $\hat{\varphi}$ utilizada por los autores de [75] está relacionada con nuestra coordenada angular φ de la forma,

$$\hat{\varphi} = \varphi - \frac{\alpha_\infty}{2} \approx \varphi - \frac{2m}{b} + \mathcal{O}(m^2). \quad (3.88)$$

La transformación (3.88) sigue del hecho que nosotros hemos elegido el eje polar de tal forma que las órbitas seguidas por los rayos de luz en la región asintótica $r \rightarrow \infty$ (equivalentemente, $u \rightarrow 0$) tienen una coordenada angular que toma el límite $\varphi \rightarrow 0$ o bien $\varphi \rightarrow \pi + \alpha_\infty$ en esa región (como podemos ver de la ecuación (3.71) con $\gamma = 1$ y $\omega_e = 0$).

Por otro lado, los autores de [75] eligieron el eje polar de tal forma que la distancia más cercana entre los rayos de luz y la lente ocurre cuando su coordenada angular $\hat{\varphi}$ toma el valor $\hat{\varphi} = \pi/2$, resultando en órbitas que son simétricas con respecto a la dirección radial definida por $\hat{\varphi} = \pi/2$. Como el ángulo de deflexión total a distancias infinitas es α_∞ , los puntos asintóticos de las órbitas ocurren cuando $\hat{\varphi} \rightarrow -\alpha_\infty/2$ para la posición asintótica de la fuente, y cuando $\hat{\varphi} \rightarrow \pi + \alpha_\infty/2$ para la posición asintótica del observador. Notemos que la diferencia entre φ y $\hat{\varphi}$ es orden m , i.e., $\mathcal{O}(m)$, y por lo tanto $\alpha^{(2)}$ dado por la ecuación (3.85) preserva su forma en términos de $\hat{\varphi}$. Sin embargo, se sigue también de la relación (3.88) que a primer orden en m tenemos,

$$\cos(\varphi) \approx \cos(\hat{\varphi}) - \frac{2m}{b} \sin \hat{\varphi} + \mathcal{O}(m^2). \quad (3.89)$$

Por lo tanto si reemplazamos la ecuación (3.89) en (3.84), se puede ver que un nuevo término cuadrático en m aparece como función de la variable $\hat{\varphi}$ el cual cancela exactamente el término δ presente en $\alpha_{\text{vac}}^{(2)}$. Por lo tanto, cuando nuestras expresiones para el ángulo de deflexión se escriben en términos de la coordenada angular $\hat{\varphi}$ de Ono *et al* [75] la relación (3.86) se recupera.

3.3.2. Ángulo de deflexión en términos del observable θ_I y su comparación con expresiones previas conocidas

Comparemos entre nuestros resultados para distancias finitas y aquellos previamente ya conocidos en la literatura [98, 99]. A fin de llevar a cabo esta comparación asumiremos que la fuente se encuentra a una distancia suficientemente grande respecto de la lente, infinita a fines prácticos. En este límite los ángulos de deflexión $\alpha^{(1)}$

y $\alpha^{(2)}$ toman las siguientes expresiones,

$$\alpha_{S_\infty}^{(1)}(b, \varphi_R) := \lim_{\varphi_S \rightarrow 0} \alpha^{(1)} = \frac{m}{b} \left(1 - \cos(\varphi_R)\right) \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2}\right) \times \left[1 + \frac{J_2 R^2}{4b^2} \left(3 - 2\cos(\varphi_R) - \cos(2\varphi_R)\right)\right], \quad (3.90)$$

$$\alpha_{S_\infty}^{(2)}(b, \varphi_R) := \lim_{\varphi_S \rightarrow 0} \alpha^{(2)} = \frac{m^2}{4b^2(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2} \left\{ \varphi_R(\omega_e^2 - \omega_o^2) \left(\omega_o^2(4\beta - 8 - 8\gamma - 3\nu) + 3\nu\omega_e^2\right) - 4\sin(\varphi_R)(\omega_o^2(1 + \gamma) - \omega_e^2\gamma)^2 + \frac{1}{2} \left[\omega_o^4 \left(4(\beta - 1 + \gamma^2) - 3\nu\right) + \omega_e^4(4\gamma^2 - 3\nu) - 2\omega_o^2\omega_e^2(2\beta + 4\gamma^2 - 3\nu)\right] \sin(2\varphi_R) + 8\omega_o^2\omega_e^2 \sin(\varphi_R) \right\}. \quad (3.91)$$

Como se ve de la figura (3.4) tenemos la siguiente relación entre la posición angular del observador φ_R y los ángulos θ_I y $\delta\theta$,

$$\varphi_R = \pi - \theta_I + \delta\theta = \pi - \theta_I + \alpha_{S_\infty}^{(1)} + \mathcal{O}(m^2). \quad (3.92)$$

Finalmente, al reemplazar está relación en las ecuaciones (3.90) y (3.91) obtenemos,

$$\alpha_{S_\infty}^{(1)}(b, \theta_I) = \frac{m}{b} \left(1 + \cos(\theta_I)\right) \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2}\right) \left[1 + \frac{J_2 R^2}{2b^2} \left(2 + \cos(\theta_I) - \cos^2(\theta_I)\right)\right], \quad (3.93)$$

$$\alpha_{S_\infty}^{(2)}(b, \theta_I) = \frac{m^2}{8b^2(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2} \left[16\omega_o^2\omega_e^2 \sin(\theta_I) + (\omega_o^2 - \omega_e^2) \left(2(\pi - \theta_I) + \sin(2\theta_I)\right) \times \left(\omega_o^2(-4\beta + 8\gamma + 3\nu + 8) - 3\nu\omega_e^2 + 8\sin(2\theta_I)\omega_o^2\omega_e^2\right)\right]. \quad (3.94)$$

Las ecuaciones (3.93) y (3.94) son la generalización de las expresiones (3.31) y (3.32) respectivamente al caso de espaciotiempos PPN inmersos en un plasma homogéneo.

Alternativamente, si tomamos en cuenta la siguiente relación entre el parámetro de impacto b y la coordenada radial r_o que sigue de (3.71) y (3.92)

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r_o \sin(\theta_I)} - \frac{m}{r_o^2 \sin(\theta_I)} \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2}\right) + \mathcal{O}(m \times J_2, m^2), \quad (3.95)$$

entonces las ecuaciones (3.93) y (3.94) pueden ser reescritas como,

$$\alpha_{S_\infty}^{(1)}(r_o, \theta_I) = \frac{m}{r_o} \frac{1 + \cos(\theta_I)}{\sin(\theta_I)} \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2}\right) \left[1 + \frac{J_2 R^2}{2r_o^2} \frac{2 + \cos(\theta_I) - \cos^2(\theta_I)}{\sin^2(\theta_I)}\right], \quad (3.96)$$

$$\alpha_{S_\infty}^{(2)}(r_o, \theta_I) = \frac{m^2}{r_o^2} \left\{ \frac{1}{8(\omega_o^2 - \omega_e^2)^2 \sin^2(\theta_I)} \left[16\omega_o^2\omega_e^2 \sin(\theta_I) + (\omega_o^2 - \omega_e^2) \left(2(\pi - \theta_I) + \sin(2\theta_I)\right) \left(\omega_o^2(-4\beta + 8\gamma + 3\nu + 8) - 3\nu\omega_e^2 + 8\sin(2\theta_I)\omega_o^2\omega_e^2\right)\right] - \frac{1 + \cos(\theta_I)}{\sin(\theta_I)} \left(\gamma + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_o^2}\right)^2 \right\}. \quad (3.97)$$

En particular, podemos ver que en ausencia de plasma $\omega_e = 0$, o alternativamente

cuando la frecuencia del plasma es despreciable respecto de la frecuencia de observación $\omega_e/\omega_0 \ll 1$, las ecuaciones (3.93) y (3.94), o bien sus versiones alternativas (3.96), (3.97), se reducen a las expresiones (3.31), (3.32) introducidas por Richter y Matzner en [98].

Resulta interesante el hecho de partir de una expresión compacta y geométrica para el ángulo de deflexión dado por la ecuación (3.4) y poder luego recuperar fórmulas como (3.31) y (3.32). Esto no sólo demuestra el éxito de este método basado en el uso del teorema de Gauss-Bonnet para recuperar resultados ya conocidos, lo cual nos da aún más confianza en nuestra definición de ángulo de deflexión, sino que además prueba que este método resulta ser extremadamente útil para obtener generalizaciones a situaciones astrofísicas más generales. En particular, a partir de (3.96), vemos que la corrección producida por la presencia de un plasma homogéneo, incluso considerando distancias finitas, está dado por un factor global, $\gamma + \frac{1}{1-\omega_e^2/\omega_0^2}$. Esta característica peculiar no permanece válida si consideramos términos a segundo orden donde la contribución del plasma es mucho más complicada. En particular, despreciando los momentos cuadrupolares y considerando la validez de las ecuaciones de Einstein obtenemos que el ángulo de deflexión a primer orden $\alpha_{S_\infty}^{(1)}(r_o, \theta_I)$ se reduce de la siguiente forma,

$$\alpha_{S_\infty}^{(1)}(r_o, \theta_I) = \frac{m}{r_o} \frac{1 + \cos(\theta_I)}{\sin(\theta_I)} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_0^2} \right). \quad (3.98)$$

Esta expresión puede ser comparada con la expresión a primer orden introducida por primera vez por Bisnovaty-Kogan y Tsupko [21, 22],

$$\alpha^{(1)} = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2/\omega_0^2} \right). \quad (3.99)$$

La fórmula (3.99) fue obtenida bajo el supuesto de distancias infinitas. La ventaja de (3.98) es que ésta se encuentra expresada en términos de la cantidad observable θ_I y la distancia coordenada r_o .

3.4. Plasma inhomogéneo

En esta sección estudiaremos las correcciones por distancias finitas sobre el ángulo de deflexión para rayos de luz propagándose en un plasma inhomogéneo.

Consideremos una lente gravitacional esféricamente simétrica inmersa en un plasma inhomogéneo cuya densidad electrónica $N(r)$ es una función decreciente respecto de la coordenada radial r . Asumiremos también que su derivada radial $N'(r)$ es también decreciente y menor que $N(r)/r$.

En coordenadas isotrópicas las componentes de la métrica en el espaciotiempo físico están codificadas en las siguientes expresiones,

$$A(r) = 1 - \mu h_{00}(r), \quad B(r) = 1 + \epsilon h_{rr}(r), \quad C(r) = r^2 B(r). \quad (3.100)$$

Por otro lado el índice de refracción viene dado por lo siguiente,

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2(1 - \mu h_{00}(r))}{\omega_\infty^2}}, \quad (3.101)$$

donde $\omega_\infty = \omega_o \sqrt{A(r_o)}$.

La métrica óptica asociada con este espaciotiempo es entonces,

$$d\sigma^2 = \left(\frac{(1 + \epsilon h_{rr})(\omega_\infty^2 - \omega_e^2 + \mu\omega_e^2 h_{00})}{\omega_\infty^2(1 - \mu h_{00})} \right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (3.102)$$

En general, la desviación de los rayos de luz debido a la presencia de un plasma ya sea con una distribución electrónica uniforme o no, es sensiblemente menor a la desviación puramente gravitacional. Por ello asumiremos despreciables los términos de orden superior $\mathcal{O}(N'^2, \mu N', \mu N'', \epsilon N'^2, \epsilon N'')$ y consideraremos que los rayos de luz a orden dominante se propagan a lo largo de una línea recta geodésica en el espacio plano euclídeo.

Por lo tanto, a orden lineal en μ y ϵ obtenemos lo siguiente para la 2-forma $\mathcal{K}dS$,

$$\mathcal{K}dS = \frac{1}{2} \left[\frac{K_e(rN')'}{\omega_o^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_o^2(rh_{00}')'}{\omega_o^2 - \omega_e^2} \mu - (rh_{rr}')' \epsilon \right] dr d\varphi. \quad (3.103)$$

Notemos que esta expresión se encuentra escrita en términos de la frecuencia ω_o observada por un observador en r_o . Insertando esta expresión en (3.4), obtenemos el ángulo de deflexión,

$$\alpha \approx - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{D_r} \mathcal{K}dS = - \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} \int_{b/\sin\varphi}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{K_e(rN')'}{\omega_o^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_o^2(rh_{00}')'}{\omega_o^2 - \omega_e^2} \mu - (rh_{rr}')' \epsilon \right] dr d\varphi. \quad (3.104)$$

Aplicando integración por partes en los primeros dos términos de la integral radial y despreciando una vez más términos $\mathcal{O}(N'^2, \mu N')$ podemos escribir el ángulo de deflexión para un plasma inhomogéneo como una integral de línea,

$$\alpha \approx \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} \frac{1}{2} \left[\frac{K_e(rN')}{\omega_o^2 - \omega_e^2} - \frac{\omega_o^2(rh_{00}')}{\omega_o^2 - \omega_e^2} \mu - (rh_{rr}') \epsilon \right] \Big|_{r_\varphi} d\varphi, \quad (3.105)$$

donde $r_\varphi = b/\sin\varphi$. Esta ecuación nos da una fórmula general para calcular el ángulo de deflexión en un espaciotiempo esféricamente simétrico en presencia de un plasma inhomogéneo y teniendo en consideración la corrección por distancias finitas tanto de la fuente como del observador. Esta expresión también puede ser derivada con la técnica usada por Bisnovatyi-Kogan y Tsupko en [22], donde ellos han obtenido una expresión similar para el caso de distancias infinitas resolviendo las ecuaciones de Hamilton perturbativamente para un espaciotiempo descrito por una métrica no necesariamente esféricamente simétrica de la forma $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$.

Ahora bien, en numerosas situaciones astrofísicas de interés la frecuencia del plasma suele ser despreciable respecto de la frecuencia de observación, lo que justifica el uso de la siguiente aproximación $\omega_e/\omega_o \ll 1$. Por lo tanto, en esta aproximación, la expresión (3.105) se puede descomponer de la siguiente manera,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad (3.106)$$

donde,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} r_\varphi \left(h'_{rr}(r_\varphi) \epsilon + h'_{00}(r_\varphi) \mu \right) d\varphi, \quad (3.107)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\mu}{2\omega_0^2} \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} r_\varphi h'_{00}(r_\varphi) \omega_e^2(r_\varphi) d\varphi, \quad (3.108)$$

$$\alpha_3 = \frac{K_e}{2\omega_0^2} \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} r_\varphi N'(r_\varphi) d\varphi, \quad (3.109)$$

$$\alpha_4 = \frac{K_e}{2\omega_0^4} \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} r_\varphi N'(r_\varphi) \omega_e^2(r_\varphi) d\varphi. \quad (3.110)$$

Estas expresiones son la generalización a distancias finitas de los resultados obtenidos en [22]. En particular, el primer término α_1 es la contribución puramente gravitacional al ángulo de deflexión mientras que el segundo término α_2 es la corrección al primer término debido a la presencia del plasma, el cual está presente incluso para plasmas homogéneos. El tercer término α_3 es una contribución puramente refractiva al ángulo de deflexión, la cual está presente incluso sin la presencia de un campo gravitacional. El último término α_4 es una corrección al tercer término. Como se discute en [22] por Bisnovatyi-Kogan y Tsupko, en numerosas situaciones físicas de interés la contribución más importante al ángulo de deflexión viene dada por los términos α_1 y α_3 , y en general $\alpha_3 < \alpha_1$.

3.4.1. Espaciotiempo de Schwarzschild con un perfil de densidad electrónica de la forma $N(r) = N_0 r^{-h}$

Apliquemos este resultado al caso de un spaciotiempo de Schwarzschild con un perfil de plasma de la siguiente forma,

$$N(r) = N_0 r^{-h}, \quad h > 0. \quad (3.111)$$

Para este caso, necesitamos hacer la siguiente identificación,

$$\epsilon = \mu = m, \quad h_{00} = h_{rr} = \frac{2}{r}. \quad (3.112)$$

Por completitud escribimos las expresiones para cada término individual (3.107), (3.108), (3.109), (3.110), aunque como comentamos previamente, la contribución principal al ángulo de deflexión está dado por α_1 y α_3 . Explícitamente,

$$\alpha_1 = \frac{2m}{b} \left(\cos(\varphi_S) - \cos(\varphi_R) \right), \quad (3.113)$$

$$\alpha_2 = \frac{mK_e N_0}{\omega_0^2 b^{h+1}} \left[\cos(\varphi_S) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{h}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2(\varphi_S) \right) - \cos(\varphi_R) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, -\frac{h}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2(\varphi_R) \right) \right], \quad (3.114)$$

$$\alpha_3 = -\frac{K_e N_0 h}{2\omega_0^2 b^h} \left[\cos(\varphi_S) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1-h}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2(\varphi_S) \right) - \cos(\varphi_R) {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1-h}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2(\varphi_R) \right) \right], \quad (3.115)$$

$$\alpha_4 = -\frac{K_e^2 N_o^2 h}{2\omega_o^4 b^{2h}} \left[\cos(\varphi_S) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-2h}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2(\varphi_S)\right) - \cos(\varphi_R) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1-2h}{2}; \frac{3}{2}; \cos^2(\varphi_R)\right) \right], \quad (3.116)$$

donde ${}_2F_1(a, b; c; x)$ son funciones hipergeométricas ordinarias[128].

Estas expresiones cerradas generalizan sus equivalentes para el caso de distancias infinitas. En particular para recuperar este caso necesitamos tomar únicamente los límites $\varphi_S \rightarrow 0$ y $\varphi_R \rightarrow \pi + \mathcal{O}(m)$. Explícitamente,

$$a_1^\infty = \frac{4m}{b}, \quad (3.117)$$

$$\alpha_2^\infty = \frac{\sqrt{\pi} m K_e N_o \Gamma\left(\frac{h}{2} + 1\right)}{b^{h+1} \omega_o^2 \Gamma\left(\frac{h+3}{2}\right)}, \quad (3.118)$$

$$\alpha_3^\infty = -\frac{\sqrt{\pi} K_e N_o \Gamma\left(\frac{h+1}{2}\right)}{b^h \omega_o^2 \Gamma\left(\frac{h}{2}\right)}, \quad (3.119)$$

$$\alpha_4^\infty = -\frac{\sqrt{\pi} K_e^2 N_o^2 b^{-2h} \Gamma\left(h + \frac{1}{2}\right)}{2\omega_o^4 \Gamma(h)}, \quad (3.120)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma. La fórmula (3.119) fue obtenida primeramente por Giampieri[129] y re-derivada por Bisnovatyi-Kogan and Tsupko in [22].

Comparando los signos en las expresiones (3.117) y (3.119), podemos ver claramente el efecto que tiene la presencia del plasma en la desviación de la luz. Mientras el término puramente gravitacional desvía los rayos de luz *hacia* la lente gravitacional (efecto de convergencia) el término de plasma, sensiblemente inferior al término gravitacional en situaciones astrofísicas realistas, tiende a desviar los rayos de luz *hacia afuera* de la lente (efecto de divergencia). Como consecuencia la presencia del plasma produce un desvío neto menor al que tuvieran los rayos de luz si el plasma no estuviera.

Como aplicación práctica, estudiaremos en la próxima subsección un perfil de plasma particular que describe suficientemente bien la distribución electrónica en la parte más externa de la corona solar y estudiaremos cómo este plasma altera la desviación de los rayos de luz en su vecindad.

3.4.1.1. Un modelo de plasma para la parte más externa de la corona solar

Consideremos el siguiente perfil de densidad electrónica el cual ha sido estudiado y contrastado con diferentes observaciones en el estudio de la corona solar despreciando variaciones angulares[10, 129-131],

$$N(r) = \left[C_2 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2 + C_6 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^6 + C_{16} \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^{16} \right] \text{cm}^{-3}, \quad (3.121)$$

con

$$C_2 = 3,44 \times 10^5, \quad (3.122)$$

$$C_6 = 1,55 \times 10^8, \quad (3.123)$$

$$C_{16} = 2,99 \times 10^8, \quad (3.124)$$

y $r \geq R_\odot$, donde R_\odot es el radio de nuestro Sol. El valor de los coeficientes C_i han sido determinados empíricamente en el pasado a partir del estudio de la corona solar. Consideremos únicamente la contribución principal del plasma dada por α_3 . En este caso resulta apropiado situar la fuente en la región asintótica donde la aproximación de distancia infinita es adecuada, mientras que la posición angular del observador esta dada en términos del observable θ_I de la siguiente manera $\varphi_R = \pi - \theta_I$. Por lo tanto, la contribución principal del plasma viene dada como sigue,

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & - \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 \left[\frac{\tilde{C}_2}{2} \left(\frac{R_\odot}{r_o} \right)^2 \frac{\pi - \theta_I + \cos(\theta_I) \sin(\theta_I)}{\sin^2(\theta_I)} + \frac{\tilde{C}_6}{64} \left(\frac{R_\odot}{r_o} \right)^6 \right. \\ & \times \left(60(\pi - \theta_I) + 45 \sin(2\theta_I) - 9 \sin(4\theta_I) + \sin(6\theta_I) \right) \frac{1}{\sin^6(\theta_I)} \\ & + \frac{\tilde{C}_{16}}{458752} \left(\frac{R_\odot}{r_o} \right)^{16} \left(720720(\pi - \theta_I) + 640640 \sin(2\theta_I) - 224224 \sin(4\theta_I) \right. \\ & + 81536 \sin(6\theta_I) - 25480 \sin(8\theta_I) + 6272 \sin(10\theta_I) - 1120 \sin(12\theta_I) \\ & \left. \left. + 128 \sin(14\theta_I) - 7 \sin(16\theta_I) \right) \times \frac{1}{\sin^{16}(\theta_I)} \right], \end{aligned} \quad (3.125)$$

donde

$$\tilde{C}_2 = (5,64 \times 10^4)^2 C_2 = 1,09 \times 10^{15}, \quad (3.126)$$

$$\tilde{C}_6 = (5,64 \times 10^4)^2 C_6 = 4,93 \times 10^{17}, \quad (3.127)$$

$$\tilde{C}_{16} = (5,64 \times 10^4)^2 C_{16} = 9,51 \times 10^{17}. \quad (3.128)$$

De esta forma la contribución principal del plasma dada por (3.125) queda expresada sólo en término de cantidades observables: el ángulo de elongación θ_I y la distancia Sol-Tierra r_o . Es posible ver que si uno considera observaciones desde la Tierra a parámetros de impacto pequeños del orden de algunos radios solares, lo cual implicaría $\Theta_I \approx 0$ y por ende que la aproximación de distancia infinita resultaría adecuada, la fórmula (3.125) se reduce a la expresión dada por Giampieri[129] (ver también [130]) y recientemente re-derivada por Turyshev y Toth en [132] utilizando las ecuaciones de Maxwell. Finalmente, para este caso y por completitud, reescribimos α_3 en términos de la longitud de onda $\lambda = c/f$ y del parámetro de impacto $b = r_o \sin \theta_I$,

$$\begin{aligned} \alpha_{3\infty} = & - \left(\frac{1\text{Hz}}{f} \right)^2 \left[\frac{\tilde{C}_2}{8\pi} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^2 + \frac{15\tilde{C}_6}{64\pi} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^6 + \frac{6435\tilde{C}_{16}}{16384\pi} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^{16} \right] \\ = & - \left(\frac{\lambda}{1\mu\text{m}} \right)^2 \frac{1}{(2,99792458 \times 10^{14})^2} \left[\frac{\tilde{C}_2}{8\pi} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^2 + \frac{15\tilde{C}_6}{64\pi} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^6 \right. \\ & \left. + \frac{6435\tilde{C}_{16}}{16384\pi} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^{16} \right] \quad (3.129) \\ = & - \left(\frac{\lambda}{1\mu\text{m}} \right)^2 \left[4,82 \times 10^{-16} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^2 + 4,09 \times 10^{-13} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^6 \right. \\ & \left. + 1,32 \times 10^{-12} \left(\frac{R_\odot}{b} \right)^{16} \right], \end{aligned}$$

Volviendo a la expresión (3.125), en la figura (3.7) graficamos su contribución (con signo opuesto) así como también la contribución debido al término puramente

gravitacional α_1 para varias frecuencias. Dependiendo de la banda de frecuencias de observación la contribución del plasma puede llegar a ser del orden de $1\mu\text{as}$ incluso para ángulos de elongación grandes, y del orden de 1mas para frecuencias en el banda S hasta ángulos de elongación de 25° . Por supuesto a frecuencias cada vez menores la contribución del plasma es cada vez más significativa.

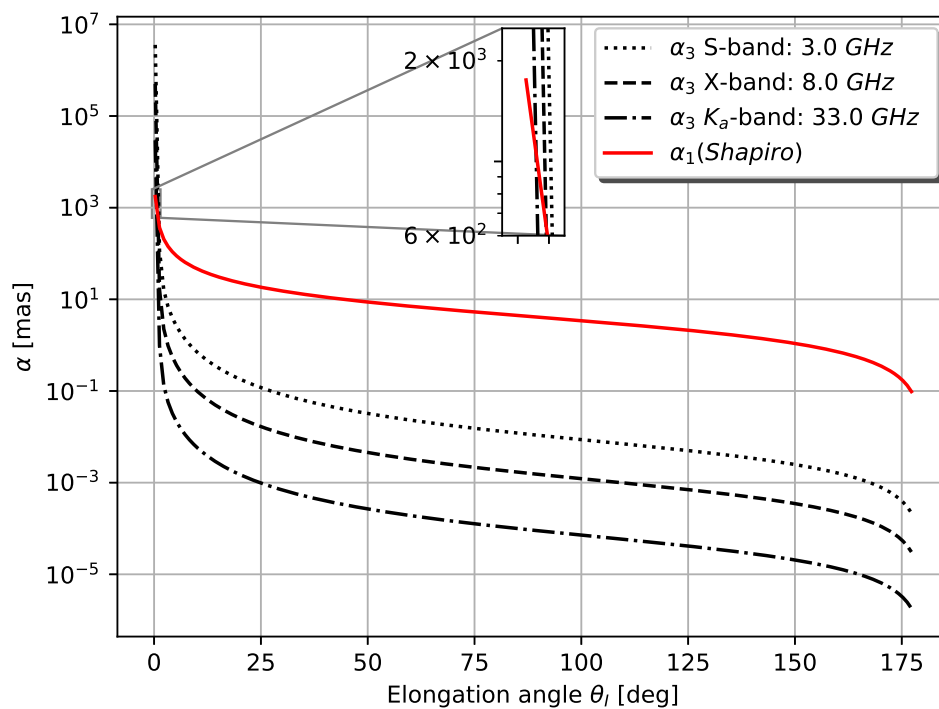


FIGURA 3.7: Contribución del plasma al ángulo de deflexión (graficado con signo opuesto) como función del ángulo de elongación θ_l para tres frecuencias diferentes en diferentes bandas. Por completitud se muestra también la contribución del término de Shapiro para gravedad pura con parámetro de Eddington $\gamma = 1$. En la región aumentada se muestran los valores del ángulo de deflexión en la vecindad de la superficie del Sol.

3.5. Resumen del capítulo

En este capítulo abordamos el estudio del ángulo de deflexión asociado a rayos de luz propagándose a través de un plasma frío no-magnetizado y bajo la acción de un campo gravitatorio para el caso en que tanto el observador como la fuente se encuentran a una distancia finita de la lente gravitacional. Dicho estudio lo llevamos a cabo utilizando el teorema de Gauss-Bonnet. En este contexto presentamos una definición alternativa del ángulo de deflexión y discutimos otras definiciones habidas en la literatura basadas en el mismo método para el caso de gravedad pura. Hicimos especial hincapié en obtener expresiones en términos de cantidades observables como ser el ángulo de elongación y dedicamos una sección a discutir cómo llevar a cabo el procedimiento de Eddington para medir el ángulo de deflexión en el sistema solar teniendo en cuenta la influencia del plasma. Comparamos nuestros resultados

con expresiones clásicas del ángulo de deflexión para distancias finitas coincidiendo plenamente con las mismas y dando de este modo validez a nuestra definición. En cuanto al plasma, estudiamos modelos de distribución electrónica tanto homogéneos como inhomogéneos. A modo de aplicación estudiamos un perfil de plasma polinomial para describir la densidad de electrones en la parte más externa de la corona solar y de este modo estudiar cómo influye la misma en la propagación de los rayos la luz teniendo en cuenta la distancia finita entre el Sol y un observador situado en la Tierra.

Capítulo 4

Desviación en términos de la distribución de energía-momento y correspondencia con partículas masivas y cargadas

Como hemos mencionado a lo largo de esta tesis una de las cantidades cruciales en el estudio de las lentes gravitacionales es el ángulo de deflexión. En general las expresiones para el ángulo de deflexión están presentadas en términos de derivadas de las componentes de la métrica. Sin embargo, en [90], Gallo y Moreschi introdujeron una expresión para el ángulo de deflexión en el régimen de lente débil escrita en términos de escalares de curvatura utilizando un formalismo basado en tetradas nulas. Más precisamente, en el caso de un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico, mostraron que el ángulo de deflexión α en el régimen de campo débil puede ser escrito a primer orden en términos del parámetro de impacto b , los escalares de Ricci y de Weyl proyectados $\hat{\Phi}_{00}$ y $\hat{\Psi}_0 = -\hat{\psi}_0 e^{2i\theta}$ (nos referimos a [90] para más detalles) en una forma muy compacta que reproducimos aquí,

$$\alpha(b) = b(\hat{\Phi}_{00}(b) + \hat{\psi}_0(b)). \quad (4.1)$$

La ventaja de (4.1) es que está escrita en términos de cantidades geométricas con un claro sentido físico en vez de las tradicionales expresiones dependiente de las coordenadas y escritas en términos de las componentes de la métrica. Recientemente este resultado fue extendido al contexto cosmológico por Boero y Moreschi [43], y por Crisnejo y Gallo a segundo orden sobre un fondo plano [44]. Además, este enfoque fue también utilizado en el estudio del fenómeno de materia oscura y alternativas a la métrica de Schwarzschild [88, 133].

Por lo tanto, para el caso de gravedad pura tenemos al menos dos métodos alternativos para calcular el ángulo de deflexión y cantidades ópticas relacionadas en términos de cantidades que no dependen de las coordenadas utilizadas, a saber: por un lado el enfoque basado en tetradas nulas [44, 90], y por el otro el enfoque introducido por Gibbons y Werner [45]. Notemos que incluso cuando ambos métodos son geométricos, las cantidades geométricas asociadas se refieren a dos variedades diferentes: una variedad 4-dimensional Lorentziana en el caso de [90], y una variedad 2-dimensional Riemanniana en el caso de [45]. Como hemos visto a lo largo de este trabajo, hemos recientemente extendido el uso del método de Gibbons-Werner a situaciones más generales donde la presencia de un medio dispersivo como el plasma es tenida en cuenta. Por lo tanto, surge una pregunta natural: ¿Se puede extender también el método basado en tetradas nulas para estudiar la desviación de los rayos

de luz propagándose a través del plasma? En este capítulo responderemos de manera positiva a esa pregunta para espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos.

Más aún, mostraremos que para esta clase de espaciotiempos es posible escribir el ángulo de deflexión, el shear y la convergencia en términos de las diferentes componentes del tensor energía-momento y de los parámetros que caracterizan el plasma. Estas nuevas expresiones presentan una ventaja clara con respecto a las expresiones usuales basadas en derivadas e integrales de las componentes de la métrica debido a que en este último caso no es fácil ver cómo las diferentes componentes del tensor energía-momento contribuyen a los escalares ópticos. En particular, en [90] se probó que el ángulo de deflexión puede ser escrito de la siguiente manera,

$$\alpha = b \int_{-\lambda_l}^{\lambda_s} \left[4\pi \left(\rho + P_r \right) + \frac{b^2}{r^2} \left(\frac{3M}{r^3} - 4\pi\rho \right) \right] dy, \quad (4.2)$$

donde b es el parámetro de impacto, ρ , P_r y M son la densidad de masa, presión radial y función de masa respectivamente; r está definido por $r = \sqrt{b^2 + y^2}$ mientras que $-\lambda_l$ y λ_s representan el valor de la coordenada y del observador y de la fuente respectivamente. La lente se asume situada en $r = 0$. En este capítulo veremos cómo extender este resultado al caso con plasma así como también hacerlo para expresiones similares para la convergencia y el shear que fueron obtenidas en [90] y que se pueden obtener a partir de (4.2).

Un punto crucial en [90] que permitió llegar a la ecuación (4.2) y que es fundamental en dicho trabajo fue el uso de la ecuación de desviación de geodésicas la cual nos da información de cómo una familia de geodésicas nulas se desvían unas de otras. El primer problema que surge cuando uno trata de extender este enfoque al estudio de la propagación de rayos de luz en el plasma es que los fotones en general no siguen geodésicas nulas. Por ejemplo, para una distribución inhomogénea de plasma los fotones siguen curvas temporales no-geodésicas. Una discusión detallada y formulación para este problema usando la ecuación de desviación de geodésicas fue recientemente presentada en [85]. Sin embargo, queremos presentar aquí una elección más práctica que hace uso de una métrica óptica 4-dimensional y donde el cálculo de los diferentes escalares ópticos sigue del estudio de las proyecciones espaciales de geodésicas nulas en este espaciotiempo *óptico*.

Una idea esencial para incorporar el efecto del plasma en este enfoque es la métrica de Gordon, introducida por Gordon en 1923 [87]. Como es sabido, esta métrica es una métrica Lorentziana 4-dimensional efectiva cuyas geodésicas nulas están en correspondencia uno a uno con las curvas temporales respecto de la métrica del espaciotiempo seguidas por los rayos de luz en un medio no-dispersivo. Sin embargo, incluso cuando esta propiedad no permanece válida para medios dispersivos, como es el caso del plasma que estamos considerando, veremos que en el caso de espaciotiempos estáticos, y teniendo en cuenta el plasma, las órbitas espaciales de los rayos de luz derivadas del estudio de las geodésicas nulas de una métrica modifica de tipo Gordon coinciden con las órbitas espaciales obtenidas a partir del enfoque usual de estudiar la propagación de los rayos de luz partiendo del Hamiltoniano. Esta característica será precisamente la que nos permitirá extender el enfoque presentado por Gallo y Moreschi en [90] a la descripción del movimiento de fotones en un medio dispersivo como el plasma.

Por otro lado, existe una conocida correspondencia entre la propagación de fotones en un plasma homogéneo y partículas masivas de prueba en gravedad pura [80]. En este capítulo también extenderemos esta correspondencia a casos más generales. En particular, estableceremos por primera vez una correspondencia entre el

movimiento de rayos de luz en un plasma inhomogéneo y las órbitas de partículas masivas y cargadas de prueba en presencia de un campo eléctrico externo y el campo gravitacional. Esta correspondencia es posible debido a la existencia de una métrica Riemanniana, conocida como métrica de Jacobi, introducida por Gibbons y colaboradores en [92] y exhaustivamente estudiada en trabajos posteriores [134-137]. De esta forma, mostraremos que el método de Gibbons-Werner originalmente concebido para estudiar geodésicas nulas, y extendido por nosotros al caso de plasma, puede también ser utilizado para estudiar el movimiento no geodésico de partículas masivas y cargadas de prueba que no sólo interactúan gravitatoriamente sino también a través de la presencia de un campo externo de origen no gravitacional.

4.1. Órbitas espaciales asociadas a una métrica de tipo Gordon

En esta sección consideraremos medios dispersivos generales. Por otro lado, a fin de hacer conexión con la formulación basada en tetradas nulas, cambiaremos la signatura de la métrica a -2 . Es por este cambio, que en lo que sigue, volveremos a escribir las ecuaciones que describen la dinámica Hamiltoniana de rayos de luz en medios dispersivos, ya que las mismas tienen diferencia de signo en algunos términos con respecto a las presentadas en el capítulo 2. Consideremos un rayo de luz con 4-momento p_α propagándose en un medio dispersivo que se desplaza con 4-velocidad u^α en un espaciotiempo $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$. En este espaciotiempo la frecuencia de los fotones observada por un observador en reposo con el medio viene dada por $\omega(x^\alpha) = p_\alpha u^\alpha$. El medio dispersivo, por otro lado, viene caracterizado a su vez mediante su índice de refracción $\tilde{n}(x^\alpha, \omega(x^\alpha))$ que depende tanto de las coordenadas como de la frecuencia de observación, y que satisface la siguiente relación [86]¹,

$$\tilde{n}^2 = 1 - \frac{p_\alpha p^\alpha}{(p_\beta u^\beta)^2}. \quad (4.3)$$

El Hamiltoniano que gobierna la dinámica de los fotones es el siguiente,

$$H(x, p) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} + (\tilde{n}^2 - 1)u^\alpha u^\beta)p_\alpha p_\beta, \quad (4.4)$$

y por ende, la trayectorias de los rayos de luz se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}; \quad (4.5)$$

mientras que la relación de dispersión viene dada por

$$H(x, p) = 0. \quad (4.6)$$

En 1923 Gordon introdujo por primera vez un tensor simétrico no-degenerado $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ con respecto al cual es posible describir la propagación de los rayos de luz en un medio caracterizado por un índice de refracción $\tilde{n}(x^\alpha, \omega)$ [87]. Dicho tensor se puede escribir como,

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}(x, p) = g^{\alpha\beta} + (\tilde{n}^2 - 1)u^\alpha u^\beta, \quad (4.7)$$

¹Comparar con la relación que se deduce para n en la ecuación (2.21). La diferencia en el signo del segundo término se debe al cambio de signatura.

con inversa $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, definida como $\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta}$,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x, p) = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\tilde{n}^2}\right) u_{\alpha} u_{\beta}. \quad (4.8)$$

En términos de este tensor el Hamiltoniano (4.4) se puede reescribir como sigue,

$$\tilde{H}(x, p) = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta}(x, p) p_{\alpha} p_{\beta}. \quad (4.9)$$

En general este tensor no es una métrica debido a que depende del 4-momento p_{α} a través de la frecuencia de observación ω . A partir de (4.9) y (4.7) se sigue que las ecuaciones de movimiento se pueden escribir explícitamente como,

$$\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = \tilde{g}^{\alpha\beta} p_{\beta} + \frac{\partial \tilde{n}^2}{\partial \omega} \omega^2 u^{\alpha}, \quad (4.10)$$

$$\frac{dp_{\alpha}}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} p_{\beta} p_{\gamma}. \quad (4.11)$$

Notemos que en el caso en que el medio sea no-dispersivo, es decir, donde el índice de refracción no depende de la frecuencia de observación,

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \omega} = 0, \quad (4.12)$$

el tensor $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ sólo dependerá de las coordenadas x^{α} y por lo tanto será una métrica Lorentziana, conocida como *métrica óptica de Gordon* [86]. Más aún, en tal caso el segundo término en la ecuación (4.10) desaparece y los rayos de luz siguen geodésicas nulas respecto de la métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. La situación cambia radicalmente para medios dispersivos.

A lo largo de este capítulo estaremos considerando un espaciotiempo estático con vector de Killing temporal $\zeta^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha}$ cuya métrica la escribimos de la siguiente manera,

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.13)$$

Asumimos que los rayos de luz se propagan a través de un medio dispersivo también estático, esto es, las componentes espaciales de la 4-velocidad u^{α} del medio con respecto al sistema de coordenadas $\{t, x^i\}$ son nulas. De esta forma el resultante tensor introducido por Gordon depende únicamente de las coordenadas x^i , posiblemente también de N parámetros físicos s_N caracterizando la geometría del espaciotiempo, y del 4-momento p_{α} a través de la frecuencia de observación $\omega = p_{\alpha} u^{\alpha} = p_0 u^0$. Las ecuaciones correspondientes que describen la trayectoria de los rayos de luz se reducen a lo siguiente,

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = \tilde{g}^{00} p_0 + \frac{\partial \tilde{n}^2}{\partial \omega} \omega^2 u^0, \quad (4.14)$$

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = \tilde{g}^{ij} p_j, \quad (4.15)$$

$$\frac{dp_0}{d\lambda} = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\beta\gamma}{}_{,i} p_{\beta} p_{\gamma}, \quad (4.17)$$

junto con el vínculo (4.6).

Motivado por estas ecuaciones de movimiento, nos gustaría construir una métrica similar al tensor de Gordon pero que sea efectivamente una métrica para medios dispersivos, es decir, que no dependa del 4-momento p_α , y que además, si bien sus geodésicas nulas no necesariamente estén en correspondencia uno a uno con las curvas determinadas por las ecuaciones (4.14)-(4.17) en el espaciotiempo, sus órbitas espaciales sí coincidan. Notemos que en el caso estático tenemos $\omega = p_0 u^0$, y por lo tanto, el índice de refracción \tilde{n} para un medio dispersivo sólo dependerá de la componente temporal del 4-momento, p_0 . En particular, $\frac{\partial n}{\partial p_0} = \frac{\partial n}{\partial \omega} u^0 \neq 0$. A fin de construir una métrica que evite esta dependencia introducimos la cantidad $\hat{\omega} = \hat{p}_0 u^0$, donde \hat{p}_0 es un nuevo parámetro que por el momento no tiene ninguna relación con la componente temporal p_0 del 4-momento p_α .

Consideremos ahora una nueva métrica (estática) $\hat{g}_{\alpha\beta}(x)$ de la misma forma que en (4.8) pero donde el índice de refracción es reemplazado por una función que sólo depende de las coordenadas espaciales de la siguiente forma $n = n(x^i) = \tilde{n}(x^i, \hat{\omega}(x^i))$. Esto es, hemos reemplazado ω (la cual depende de p_α) por $\hat{\omega}$ que no comparte esta dependencia. Reemplazando esta expresión para el índice de refracción en la ecuación (4.8) obtenemos la siguiente métrica óptica, similar a la métrica de Gordon,

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x, s_N, \hat{p}_0) = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta, \quad (4.18)$$

donde hemos hecho explícita la dependencia de la métrica $\hat{g}_{\alpha\beta}(x, s_N, \hat{p}_0)$ respecto de los N parámetros físicos s_N describiendo la métrica física y también del nuevo parámetros $s_{N+1} = \hat{p}_0$. Las geodésicas nulas de $\hat{g}_{\alpha\beta}$ siguen del Hamiltoniano,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta}(x, s_N, \hat{p}_0) p_\alpha p_\beta \quad (4.19)$$

el cual es una función homogénea de p_α y del vínculo $\hat{H} = 0$. Explícitamente, las ecuaciones de evolución nos quedan de la siguiente manera,

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = \hat{g}^{00}(x, s_N, \hat{p}_0) p_0, \quad (4.20)$$

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = \hat{g}^{ij}(x, s_N, \hat{p}_0) p_j, \quad (4.21)$$

$$\frac{dp_0}{d\lambda} = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{1}{2} \hat{g}^{\beta\gamma}{}_{,i}(x, s_N, \hat{p}_0) p_\beta p_\gamma. \quad (4.23)$$

Asumamos ahora que resolvemos las ecuaciones de movimiento eligiendo el nuevo parámetro \hat{p}_0 de forma que coincida con el valor de p_0 , el cual debe ser constante a lo largo de la trayectoria de los rayos de luz debido a la ecuación (4.22). En esta situación vemos que, con excepción de la primera ecuación, todas las demás coinciden exactamente con las ecuaciones (4.14)-(4.17), y en particular las órbitas espaciales serán exactamente las mismas. Esto es, las órbitas espaciales de las curvas temporales seguidas por los rayos de luz en un medio dispersivo respecto de la métrica física $g_{\alpha\beta}$ son las mismas que salen del estudio de las geodésicas nulas de la nueva métrica $\hat{g}_{\alpha\beta}$ satisfaciendo las ecuaciones (4.20)-(4.23) luego de elegir el valor del parámetro \hat{p}_0 igual al de la componente temporal del 4-momento, p_0 .

Hasta ahora hemos hecho consideraciones generales sobre el medio dispersivo. En lo que sigue nos concentraremos específicamente en un plasma frío como medio

dispersivo.

Por lo tanto, consideremos un espaciotiempo estático $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ y un plasma frío caracterizado por el índice de refracción,

$$\tilde{n}^2(x, \omega(x)) = 1 - \frac{\omega_e^2(x)}{\omega^2(x)}. \quad (4.24)$$

Nuevamente, $\omega(x)$ es la frecuencia del fotón medida por un observador estático mientras que $\omega_e(x)$ es la frecuencia del plasma. En este tipo de plasmas que estamos considerando el Hamiltoniano que gobierna la trayectoria de los fotones y que viene dado por (4.4) se reduce de la siguiente manera [15]²,

$$H(x, p) = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - \omega_e^2(x)), \quad (4.25)$$

donde la trayectoria de los rayos de luz son obtenidas como solución de las ecuaciones de Hamilton (4.5) junto a la relación de dispersión (4.6).

Si consideramos un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico con métrica,

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r) d\Omega^2, \quad (4.26)$$

donde $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ es la métrica inducida en la esfera unidad y también consideramos un perfil de plasma con las mismas simetrías que el espaciotiempo, esto es, $\omega_e^2(x) = \omega_e^2(r)$, se puede ver a partir de (4.5) que las órbitas espaciales están descritas por la ecuación [15],

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C(r)}{B(r)} \left(\frac{p_t^2 C(r) \tilde{n}^2(r)}{p_\varphi^2 A(r)} - 1\right), \quad (4.27)$$

con $p_t \equiv p_0$ y p_φ siendo las constantes de movimiento asociadas a la conservación de la energía y del momento angular, respectivamente.

Como hemos mencionado a lo largo de este capítulo, si el medio es dispersivo, como es el caso del plasma frío que estamos considerando, las soluciones de las ecuaciones de Hamilton asociadas con (4.19) no coincidirán con aquellas asociadas a (4.25) y entonces el Hamiltoniano \hat{H} no describirá la trayectoria real de los fotones en el espaciotiempo. A pesar de esta limitación, las órbitas espaciales sí coinciden.

Veamos este caso particular en más detalle. Asumamos además que el plasma es estático respecto de observadores siguiendo las curvas integrales del vector de Killing temporal $\frac{\partial}{\partial t}$, entonces

$$u^\alpha = \frac{\delta_0^\alpha}{\sqrt{A(r)}}. \quad (4.28)$$

En este caso, la métrica construida anteriormente $\hat{g}_{\alpha\beta}$, similar a la métrica de Gordon, está dada por lo siguiente

$$\hat{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{A(r)}{n^2(r)} dt^2 - B(r) dr^2 - C(r) d\Omega^2, \quad (4.29)$$

con

$$n^2(r) = 1 - \frac{\omega_e^2(r)}{\hat{\omega}(r)} = 1 - \frac{\omega_e^2(r) A(r)}{\omega_\infty^2}, \quad (4.30)$$

²Notar nuevamente, la diferencia de signo en el segundo término proveniente del cambio de signatura de la métrica.

donde hemos utilizado que $\hat{\omega}(r) = \hat{p}_0 u^0 = \omega_\infty / \sqrt{A(r)}$ y hemos identificado \hat{p}_0 con el valor numérico que será luego la frecuencia observada por el observador en la región asintótica, ω_∞ .

Consideraremos además que tanto el espaciotiempo como la distribución de electrones en el plasma tienen simetría esférica, de tal forma que podemos restringir la propagación de los rayos de luz al plano $\vartheta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad. Luego a partir del Hamiltoniano $\hat{H}(x, p) = \frac{1}{2} \hat{g}^{\alpha\beta}(x) p_\alpha p_\beta$ y de la relación de dispersión $\hat{H}(x, p) = 0$ obtenemos que las geodésicas nulas deben satisfacer lo siguiente,

$$\frac{p_t^2 n^2(r)}{A(r)} - \frac{p_r^2}{B(r)} - \frac{p_\varphi^2}{C(r)} = 0; \quad (4.31)$$

donde hemos renombrado p_0 como p_t . A partir de las ecuaciones de Hamilton asociadas al Hamiltoniano \hat{H} obtenemos,

$$\frac{dr}{d\lambda} = -\frac{p_r}{B(r)}, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = -\frac{p_\varphi}{C(r)}; \quad (4.32)$$

y además que tanto p_t como p_φ son cantidades conservadas asociadas a los campos vectoriales de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación de la órbita espacial viene dada por,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{C(r)}{B(r)} \frac{p_r}{p_\varphi}. \quad (4.33)$$

Finalmente, luego de substituir p_r de la ecuación (4.31) obtenemos la ecuación,

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{C(r)}{B(r)} \left(\frac{p_t^2 C(r) n^2(r)}{p_\varphi^2 A(r)} - 1 \right), \quad (4.34)$$

la cual coincide exactamente con la ecuación para la órbita espacial descrita por la métrica física (4.26).

Es importante señalar una vez más que la condición necesaria para obtener esta equivalencia entre las órbitas espaciales es considerar un medio dispersivo en reposo respecto de observadores estáticos. En general, si consideramos una 4-velocidad cuya parte espacial es distinta de cero ($u^i \neq 0$), tendremos términos de la forma $\frac{\partial n^2}{\partial \omega} \omega^2 u^i$ en la ecuación de movimiento asociada a la métrica de tipo Gordon y esto hará que sus órbitas espaciales no coincidan con aquellas asociadas a la métrica del espaciotiempo.

4.2. Métrica tipo Gordon aplicada al estudio de lentes gravitacionales usando el enfoque basado en tetradas nulas

Debido a que las órbitas espaciales de los rayos de luz en un plasma frío en particular coinciden con aquellas que vienen de estudiar las geodésicas nulas asociadas a la métrica del tipo Gordon descrita en la sección anterior, es posible aplicar el formalismo de tetradas nulas al estudio de la propagación de rayos de luz en este tipo de plasmas.

4.2.1. Revisión del formalismo basado en tetradas nulas para el estudio de lentes gravitacionales

En lo que sigue revisaremos el formalismo introducido en [90] y que generalizamos a segundo orden en [44].

Consideremos una congruencia de geodésicas nulas orientada hacia el pasado de tal forma que comienza en la posición del observador en O y finaliza en la posición de la fuente en S . El vector tangente a la geodésica nula fiducial de esta congruencia está dado por $\ell = \frac{\partial}{\partial \lambda}$. Asumimos que el observador se encuentra en $\lambda = 0$ y la fuente en $\lambda = \lambda_s$. Completamos una tetrada nula en la posición del observador $\{\ell^\alpha, n^\alpha, m^\alpha, \bar{m}^\alpha\}$, donde m^α y \bar{m}^α son ortogonales a la 4-velocidad u^α del mismo. Luego realizamos el transporte paralelo de la tetrada a lo largo de la congruencia hasta la posición de la fuente.

El vector de desviación, con derivada de Lie nula a lo largo de la congruencia, se puede escribir como,

$$\zeta^\alpha = \zeta \bar{m}^\alpha + \bar{\zeta} m^\alpha + \zeta_\ell \ell^\alpha. \quad (4.35)$$

Como ha sido discutido extensamente en el pasado (ver por ejemplo [138-140]), la ecuación de desviación de geodésicas que describe el vector de desviación a lo largo de la congruencia se puede escribir de la siguiente manera,

$$\ell(\ell(\mathcal{X})) = -Q\mathcal{X}, \quad (4.36)$$

donde

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Psi_0 \\ \bar{\Psi}_0 & \bar{\Phi}_{00} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

y

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}\ell^\alpha\ell^\beta, \quad \Psi_0 = C_{\alpha\beta\gamma\delta}\ell^\alpha m^\beta \ell^\gamma m^\delta, \quad (4.38)$$

siendo $R_{\alpha\beta}$ y $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ los tensores de Ricci y de Weyl, respectivamente. Aunque la ecuación (4.36) no determina la evolución de la componente ζ_ℓ , la misma es suficiente para obtener expresiones de los escalares ópticos y del ángulo de deflexión de la aproximación de campo débil [44, 90]. A fin de usar este enfoque sólo necesitamos conocer cómo cambia el vector de desviación en el plano expandido por m^α y \bar{m}^α .

Asumamos que una lente delgada está situada en $\lambda = \lambda_l$ y definamos $\lambda_{ls} = \lambda_s - \lambda_l$. Como se explica en [44], en este enfoque la convergencia y el shear normalizados a segundo orden definidos como,

$$\tilde{\kappa} = \frac{\lambda_s}{\lambda_{ls}\lambda_l}\kappa, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\lambda_s}{\lambda_{ls}\lambda_l}\gamma, \quad (4.39)$$

están dados por las expresiones,

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_{\Phi^{(1)}} + \tilde{\kappa}_{\Phi^{(2)}} + \tilde{\kappa}_{\delta\Phi} + \tilde{\kappa}_{\Phi\Phi} + \tilde{\kappa}_{\Psi\Psi}, \quad (4.40)$$

donde

$$\tilde{\kappa}_{\Phi^{(i)}} = \int_0^{\lambda_s} \Phi_{00}^{(i)} d\lambda, \quad i = 1, 2, \quad (4.41)$$

$$\tilde{\kappa}_{\delta\Phi} = \int_0^{\lambda_s} \delta x^{(1)\alpha}(\lambda) \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^{(0)}(\lambda)} d\lambda, \quad (4.42)$$

$$\tilde{\kappa}_{\Phi\Phi} = -\frac{1}{\lambda_l \lambda_{l_s}} \int_0^{\lambda_s} \int_0^\lambda \lambda' (\lambda_s - \lambda) (\lambda - \lambda') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda) d\lambda' d\lambda, \quad (4.43)$$

$$\tilde{\kappa}_{\Psi\Psi} = -\frac{1}{\lambda_l \lambda_{l_s}} \int_0^{\lambda_s} \int_0^\lambda \lambda' (\lambda_s - \lambda) (\lambda - \lambda') \Psi_0^{(1)}(\lambda') \Psi_0^{(1)}(\lambda) d\lambda' d\lambda; \quad (4.44)$$

y

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\Psi^{(1)}} + \tilde{\gamma}_{\Psi^{(2)}} + \tilde{\gamma}_{\delta\Psi} + \tilde{\gamma}_{\Phi\Psi} + \tilde{\gamma}_{\Psi\Phi}, \quad (4.45)$$

con

$$\tilde{\gamma}_{\Psi^{(i)}} = \int_0^{\lambda_s} \Psi_0^{(i)} d\lambda, \quad i = 1, 2, \quad (4.46)$$

$$\tilde{\gamma}_{\delta\Psi} = \int_0^{\lambda_s} \delta x^{(1)\alpha}(\lambda) \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^{(0)}(\lambda)} d\lambda, \quad (4.47)$$

$$\tilde{\gamma}_{\Phi\Psi} = -\frac{1}{\lambda_l \lambda_{l_s}} \int_0^{\lambda_s} \int_0^\lambda \lambda' (\lambda_s - \lambda) (\lambda - \lambda') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda') \Psi_0^{(1)}(\lambda) d\lambda' d\lambda, \quad (4.48)$$

$$\tilde{\gamma}_{\Psi\Phi} = -\frac{1}{\lambda_l \lambda_{l_s}} \int_0^{\lambda_s} \int_0^\lambda \lambda' (\lambda_s - \lambda) (\lambda - \lambda') \Psi_0^{(1)}(\lambda') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda) d\lambda' d\lambda. \quad (4.49)$$

La notación debe ser entendida como sigue. Los términos $\tilde{\kappa}_{\Phi^{(i)}}$ indican la contribución a la convergencia debido al escalar Φ_{00} a orden i , mientras que el término $\tilde{\kappa}_{\delta\Phi}$ indica que la corrección a primer orden de la trayectoria de los rayos de luz $\delta x^{(1)\alpha}$ está incluida vía el término $\delta x^{(1)\alpha} \partial_\alpha \Phi_{00}^{(1)}$. La cantidad $\Phi_{00}^{(1)}$ indica el escalar Φ_{00} a primer orden. Los últimos dos términos en (4.40) indican la contribución debida a $\Phi_{00}^{(1)}(\lambda) \Phi_{00}^{(1)}(\lambda')$ y $\Psi_0^{(1)}(\lambda) \Psi_0^{(1)}(\lambda')$, respectivamente. Interpretación similar corresponde para cada término en (4.45). Además en [44] se puede consultar una expresión del escalar óptico asociado a la rotación el cual es una cantidad de segundo orden que para espaciotiempos esféricamente simétricos es cero. Finalmente, el ángulo de deflexión se puede expresar en términos de $\tilde{\kappa}$ y $\tilde{\gamma}$,

$$\alpha = b(\tilde{\kappa} + \tilde{\gamma}), \quad (4.50)$$

donde b es el parámetro de impacto.

Notemos además que a primer orden los únicos términos que sobreviven son (4.41) y (4.46), y por lo tanto a este orden se obtienen expresiones muy compactas y fáciles de calcular tanto para los escalares ópticos como para el ángulo de deflexión [90].

La ventaja de este enfoque radica en que se puede estudiar de forma separada la contribución a los escalares ópticos y al ángulo de deflexión debido a la distribución de energía-momento a través del tensor de Ricci y de las ecuaciones de Einstein; y debido a la curvatura a través del tensor de Weyl.

Como mostramos en la sección anterior, los rayos de luz siguen exactamente las mismas órbitas espaciales asociadas a la métrica física como aquellas asociadas a la métrica de tipo Gordon. Por lo tanto, ya que las métricas inducidas en las secciones espaciales $t = \text{constante}$ son iguales, ambas miden exactamente los mismos ángulos.

En particular, esto aplica al ángulo de deflexión de los rayos de luz, lo cual implica que podemos usar la misma maquinaria originalmente adaptada sólo para el caso de gravedad pura para estudiar también la deflexión de los rayos de luz en un campo gravitacional y en presencia de un medio dispersivo, como ser un plasma frío.

4.2.2. Lentes gravitacionales rodeadas por un plasma homogéneo

En esta subsección usaremos dos ejemplos simples para demostrar el uso del formalismo previamente presentado para calcular los escalares ópticos y el ángulo de deflexión en presencia de un plasma homogéneo ($\omega_e = \text{constante}$). Examinemos primero una lente de Schwarzschild a orden lineal en la masa, y luego un modelo de lente descrito por la métrica PPN (*parametrized-post-Newtonian*) a segundo orden en la masa.

4.2.2.1. Lente de Schwarzschild

Calculemos a primer orden las contribuciones al ángulo de deflexión y a los escalares ópticos en un espaciotiempo descrito por la métrica de Schwarzschild. En coordenadas isotrópicas,

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{m}{2r})^2}{(1 + \frac{m}{2r})^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 d\vec{x}^2, \quad (4.51)$$

donde $d\vec{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Consideremos el caso en que la lente se encuentra rodeada por un plasma homogéneo ($\omega_e = \text{constante}$) con índice de refracción,

$$n^2(r) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2(r)} = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2} \frac{(1 - \frac{m}{2r})^2}{(1 + \frac{m}{2r})^2}, \quad (4.52)$$

donde hemos ya tenido en cuenta el redshift gravitacional, esto es, $\omega(r) = \omega_\infty / \sqrt{A(r)}$ con ω_∞ siendo la frecuencia medida por un observador asintótico. Dicha frecuencia está relacionada con la frecuencia medida por un observador situado a una distancia radial r_o desde la lente por $\omega_\infty = \omega_o \sqrt{A(r_o)}$. En este capítulo estaremos considerando situaciones donde el observador se encuentra suficientemente lejos de la fuente de tal forma que podemos aproximar $\omega_\infty \approx \omega_o$.

La métrica de tipo Gordon asociada a la métrica física (4.51) esta dada por lo siguiente,

$$d\hat{s}^2 = \frac{1}{n^2(r)} \frac{(1 - \frac{m}{2r})^2}{(1 + \frac{m}{2r})^2} dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 d\vec{x}^2. \quad (4.53)$$

Haciendo el cambio de variable,

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2}}}, \quad (4.54)$$

y expandiendo a primer orden en el parámetro de masa, obtenemos la siguiente expresión para la métrica de tipo Gordon,

$$d\hat{s}^2 \approx \left(1 - \frac{2m}{rn_o^2}\right) d\tilde{t}^2 - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) d\vec{x}^2, \quad (4.55)$$

donde hemos definido,

$$n_o = \sqrt{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_\infty^2}}. \quad (4.56)$$

A fin de calcular el ángulo de deflexión y los escalares ópticos usando el formalismo descrito en esta sección, tenemos que integrar los escalares ópticos Φ_{00} y Ψ_0 a lo largo de la curva nula real que siguen los rayos de luz respecto de la métrica de tipo Gordon desde la fuente al observador. En el régimen de lente gravitacional débil la trayectoria real de los rayos de luz puede ser pensado como una geodésica nula en el espaciotiempo plano de fondo más correcciones de orden superior. Ya que los escalares de curvatura son al menos cantidades de primer orden, es decir, valen cero en el espaciotiempo plano de fondo que estamos considerando, a fin de calcular los escalares ópticos y el ángulo de deflexión a primer orden es suficiente aproximar la trayectoria de los rayos de luz por la geodésicas nulas en el espaciotiempo sin perturbar. Esto se conoce como aproximación de Born.

Elegimos un sistema de coordenadas cartesianas con respecto al cual los rayos de luz se propagan en la dirección y negativa. Realizaremos la integral hacia el pasado desde la posición del observador a la posición de la fuente. Por lo tanto la tetrada nula adaptada a esta curva en el espaciotiempo sin perturbar se puede elegir como sigue,

$$\begin{aligned} l^a &= (-1, 0, 1, 0), \quad m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, i, 0, 1), \\ \bar{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -i, 0, 1), \quad n^a = \frac{1}{2}(-1, 0, -1, 0). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Resulta conveniente introducir las coordenadas b y ϑ representando el parámetro de impacto y el ángulo polar medido desde la coordenada cartesiana z ,

$$\begin{aligned} z &= b \cos(\vartheta), \\ x &= b \sin(\vartheta). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Debido a la simetría esférica tanto del espaciotiempo como del plasma podemos trabajar en el plano $\vartheta = \pi/2$ sin perder generalidad. De esta forma nos queda que $z = 0$ y $x = b$.

Elegimos el origen del sistema de coordenadas en la posición de la lente λ_l y parametrizamos la geodésica por,

$$\begin{aligned} (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)) &= (x, y - \lambda_l, z) \\ &= (b, y - \lambda_l, 0). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Los escalares de curvatura Φ_{00} y Ψ_0 a primer orden en la masa vienen dados por,

$$\Phi_{00} = \frac{m}{2} \frac{b^2 - 2\lambda^2 + 4\lambda\lambda_l - 2\lambda_l^2}{(b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2)^{5/2}} \left(1 - \frac{1}{n_o^2}\right), \quad (4.60)$$

$$\Psi_0 = -\frac{3m}{2} \frac{b^2}{(b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{1}{n_o^2}\right). \quad (4.61)$$

En particular, vemos que para el caso de gravedad pura ($n_o^2 = 1$) tenemos que $\Phi_{00} = 0$ y por lo tanto la convergencia es cero.

Usando las relaciones (4.40) y (4.45) a primer orden obtenemos las siguientes expresiones para los escalares ópticos,

$$\begin{aligned} \kappa &= 0, \\ \gamma &= \frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} \frac{2m}{b^2} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2 / \omega_\infty^2} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Notemos que incluso cuando la métrica de tipo Gordon no satisface las ecuaciones de Einstein, la convergencia coincide con el valor que tendría en el caso de gravedad pura ($\kappa = 0$ en gravedad pura). Esto es, a primer orden el plasma homogéneo no tiene influencia alguna en la convergencia.

Finalmente, a partir de (4.50) obtenemos el ángulo de deflexión,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{1 - \omega_e^2 / \omega_\infty^2} \right), \quad (4.63)$$

el cual coincide completamente con la expresión encontrada en [22] por otros autores utilizando métodos estándar y dependientes de las coordenadas utilizadas. Si bien llevamos a cabo las cuentas en coordenadas isotrópicas, las expresiones obtenidas tanto para los escalares ópticos como para el ángulo de deflexión no dependen de esta elección.

4.2.2.2. Lente PPN (*Parametrized-post-Newtonian*)

Como ejemplo de como proceder con este método a segundo orden consideraremos un modelo de lente más general descrito por la métrica PPN (*parametrized-post-Newtonian*) cuyo elemento de línea a segundo orden se puede escribir como,

$$ds = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{2\beta m^2}{r^2} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2\mu m}{r} + \frac{3\nu m^2}{2r^2} \right) d\vec{x}^2, \quad (4.64)$$

Haciendo el cambio de variable $\tilde{t} = \frac{t}{n_o}$, la métrica de tipo Gordon asociada a la métrica PPN viene dada por

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 - \frac{2m}{n_o^2 r} + \frac{2m^2}{n_o^4 r^2} (\beta n_o^2 + 2(1 - n_o^2)) \right) d\tilde{t}^2 - \left(1 + \frac{2\mu m}{r} + \frac{3\nu m^2}{2r^2} \right) d\vec{x}^2. \quad (4.65)$$

A fin de calcular el ángulo de deflexión y los escalares ópticos necesitamos realizar el transporte paralelo de la tetrad nula (4.57) a primer orden a lo largo del vector tangente ℓ^a . Obtenemos lo siguiente,

$$\ell^t = -1 + \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} - \frac{2}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}} \right) \frac{m}{n_o^2} \quad (4.66)$$

$$\ell^x = \frac{(1 + n_o^2 \mu)}{b} \left(\frac{\lambda_l - \lambda}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}} - \frac{\lambda_l}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right) \frac{m}{n_o^2}, \quad (4.67)$$

$$\ell^y = 1 - \left(\frac{n_o^2 \mu - 1}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right) \frac{m}{n_o^2}, \quad (4.68)$$

$$\ell^z = 0; \quad (4.69)$$

$$m^t = \frac{i}{b\sqrt{2}} \left(\frac{\lambda - \lambda_l}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}} + \frac{\lambda_l}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right) \frac{m}{n_o^2}, \quad (4.70)$$

$$m^x = \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i\mu}{\sqrt{2}} \frac{m}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}}, \quad (4.71)$$

$$m^y = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{i}{J} \left(\frac{\lambda - \lambda_l}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}} + \frac{\lambda_l}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right) m, \quad (4.72)$$

$$m^z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{m}{\sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2}}; \quad (4.73)$$

El transporte paralelo de \bar{m}^a es trivial a partir del transporte de m^a y no necesitamos realizar el transporte de n^a para nuestro propósito.

La corrección a la geodésica nula de fondo, que sigue de integrar las componentes de ℓ^a a primer orden nos queda como sigue,

$$\delta x^t = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} - 2 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda - \lambda_l}{b}\right) - 2 \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda_l}{b}\right) \right) \frac{m}{n_o^2}, \quad (4.74)$$

$$\delta x^x = \frac{(n_o^2\mu + 1)}{b} \left(\sqrt{b^2 + \lambda_l^2} - \sqrt{b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2} - \frac{\lambda\lambda_l}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right) \frac{m}{n_o^2}, \quad (4.75)$$

$$\delta x^y = \left[(1 - n_o^2\mu) \left(\operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda - \lambda_l}{b}\right) + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\lambda_l}{b}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right) - \frac{\mu\lambda}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right] \frac{m}{n_o^2}, \quad (4.76)$$

$$\delta x^z = 0. \quad (4.77)$$

CUADRO 4.1: Convergencia. Mostramos las expresiones de cada término en (4.40) para la métrica PPN

	PPN
$\tilde{\kappa}_{\Phi^{(1)}}$	0
$\tilde{\kappa}_{\Phi^{(2)}}$	$\frac{\pi m^2}{16n_o^2 b^3} \left(\frac{3}{n_o^2} - 16 - 6\nu n_o^2 + 2\mu + 9n_o^2\mu^2 + 8\beta \right)$
$\tilde{\kappa}_{\delta\Phi}$	$-\frac{\pi m^2}{8n_o^4 b^3} (-2 + n_o^2\mu + n_o^4\mu^2)$
$\tilde{\kappa}_{\Phi\Phi}$	$\frac{\pi m^2}{32n_o^4 b^3} (1 - 2n_o^2\mu + n_o^4\mu^2)$
$\tilde{\kappa}_{\Psi\Psi}$	$-\frac{15\pi m^2}{32n_o^4 b^3} (1 + 2n_o^2\mu + n_o^4\mu^2)$

Los correspondientes escalares de curvatura vienen dados por,

$$\Phi_{00} = \Phi_{00}^{(1)} + \Phi_{00}^{(2)}, \quad (4.78)$$

$$\Psi_0 = \Psi_0^{(1)} + \Psi_0^{(2)}, \quad (4.79)$$

donde las expresiones para los términos lineales son,

$$\Phi_{00}^{(1)} = \frac{m}{2} \frac{b^2 - 2\lambda^2 + 4\lambda\lambda_l - 2\lambda_l^2}{(b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2)^{5/2}} \left(\mu - \frac{1}{n_o^2} \right), \quad (4.80)$$

CUADRO 4.2: Shear. Mostramos las expresiones de cada término en (4.45) para la métrica PPN

	PPN
$\tilde{\gamma}_{\Psi^{(1)}}$	$\frac{2m}{b^2}(\mu + \frac{1}{n_0^2})$
$\tilde{\gamma}_{\Psi^{(2)}}$	$\frac{\pi m^2}{16n_0^2 b^3}(48 - \frac{3}{n_0^2} - 24\beta + 18n_0^2\nu + 6\mu - 39n_0^2\mu^2)$
$\tilde{\gamma}_{\delta\Psi}$	$\frac{3\pi m^2}{8n_0^4 b^3}(2 + 7n_0^2\mu + 5n_0^4\mu^2)$
$\tilde{\gamma}_{\Phi\Psi}$	$\frac{9\pi m^2}{32n_0^4 b^3}(n_0^4\mu^2 - 1)$
$\tilde{\gamma}_{\Psi\Phi}$	$\frac{9\pi m^2}{32n_0^4 b^3}(n_0^4\mu^2 - 1)$

$$\Psi_0^{(1)} = -\frac{3m}{2} \frac{b^2}{(b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2)^{5/2}} \left(\mu + \frac{1}{n_0^2} \right); \quad (4.81)$$

mientras que para los términos a segundo orden tenemos,

$$\Psi_0^{(2)} = \frac{m^2}{[b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2]^{5/2} (\omega_\infty^2 - \omega_e^2)^2} \times \left\{ -\frac{3[\mu(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) + \omega_\infty^2]^2 (2b^2 + \lambda_l^2 + \lambda\lambda_l)}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2}} \right. \\ \left. + \frac{(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)}{2[b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2]^{1/2}} \left[b^2 [2\omega_\infty^2(4\beta + \mu) + (\omega_\infty^2 - \omega_e^2)(15\mu^2 - 6\nu)] \right. \right. \\ \left. - 6(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)(\lambda - \lambda_l)^2 \mu^2 - 12\omega_\infty^2(\lambda - \lambda_l)^2 \mu \right. \\ \left. - \frac{13\omega_\infty^2(\omega_\infty^2 - 2\omega_e^2)b^2 + 6\omega_\infty^4(\lambda - \lambda_l)^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \right] \left. \right\}, \quad (4.82)$$

$$\Phi_{00}^{(2)} = \frac{m^2}{2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)} \left\{ \frac{1}{(b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2)^3} \left[b^2 \left(4\beta\omega_\infty^2 - 3\mu^2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) + 4\mu\omega_\infty^2 \right) \right. \right. \\ \left. - \frac{b^2\omega_\infty^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} (5\omega_\infty^2 - 8\omega_e^2) + (\lambda - \lambda_l)^2 \left(18\mu^2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) - 4\beta\omega_\infty^2 - 10\mu\omega_\infty^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 6\nu(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) + 2\omega_\infty^2 \frac{\omega_\infty^2 - 4\omega_e^2}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \right) \right] + \frac{1}{\sqrt{b^2 + \lambda_l^2} (b^2 + (\lambda - \lambda_l)^2)^{7/2}} \\ \times \left[2b^4 \left(\mu^2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) - 2\mu\omega_\infty^2 \right) + 2b^4 \frac{\omega_\infty^4}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} + 8\mu\omega_\infty^2(\lambda - \lambda_l)^4 \right. \\ \left. + 2b^2(\lambda - \lambda_l) \left(2\mu\omega_\infty^2(\lambda - \lambda_l) - \mu^2(\lambda - 4\lambda_l)(\omega_\infty^2 - \omega_e^2) \right) \right. \\ \left. - 2b^2(\lambda - \lambda_l)(\lambda + 2\lambda_l) \frac{\omega_\infty^4}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} - 2\mu^2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2)(2\lambda - 5\lambda_l)(\lambda - \lambda_l)^3 \right. \\ \left. - 2(2\lambda + \lambda_l)(\lambda - \lambda_l)^3 \frac{\omega_\infty^4}{\omega_\infty^2 - \omega_e^2} \right] \left. \right\}. \quad (4.83)$$

Al reemplazar estas expresiones en las ecuaciones (4.40) y (4.45), y tomando los límites $\lambda_l \rightarrow \infty$ y $\lambda_{ls} \rightarrow \infty$, obtenemos los escalares ópticos,

$$\tilde{\kappa} = \frac{\pi m^2}{8n_0^2 b^3} (-8 + 4\beta - 3n_0^2\nu - 8\mu), \quad (4.84)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{2m}{b^2} \left(\mu + \frac{1}{n_0^2} \right) + \frac{3}{8} \frac{\pi m^2}{n_0^2 b^3} (8 - 4\beta + 3n_0^2 \nu + 8\mu). \quad (4.85)$$

Estas expresiones generalizan aquellas halladas en [44] para el caso de considerar la presencia de un plasma homogéneo.

En las tablas 4.1 y 4.2, podemos ver la contribución de cada término a la convergencia y al shear, respectivamente. Excepto por el término $\tilde{\kappa}_{\Phi^{(1)}}$, que permanece igual a cero como en el caso de gravedad pura, cada término está modificado por la presencia del plasma. En particular, si sólo consideramos correcciones a primer orden en el parámetro de masa, la presencia del plasma contribuirá al shear pero no a la convergencia.

Finalmente, a partir de la relación (4.50) obtenemos el ángulo de deflexión a segundo orden en la masa,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(\mu + \frac{1}{n_0^2} \right) + \frac{\pi m^2}{b^2} \left(\frac{2 - \beta + 2\mu}{n_0^2} + \frac{3}{4} \nu \right), \quad (4.86)$$

recuperando de esta forma el resultado previamente obtenido en [76] utilizando el teorema de Gauss-Bonnet.

4.3. Ángulo de deflexión y escalares ópticos en término de la distribución de energía-momento

En [90] Gallo y Moreschi probaron que para espaciotiempos esféricamente simétricos, las expresiones para el ángulo de deflexión y los escalares ópticos podían ser escritas en términos de la distribución de energía-momento para el caso de gravedad pura. El método utilizado en dicho trabajo se basó principalmente en el uso de una tetrada nula adaptada a la distribución de materia y cómo la misma se relacionaba con una tetrada nula adaptada a la trayectoria de los rayos de luz a primer orden. Por otro lado, recientemente De Leon y Vega obtuvieron expresiones similares para el ángulo de deflexión utilizando el método basado en el teorema de Gauss-Bonnet [141]. En esta sección veremos cómo extender estos resultados al caso más general donde se tiene en cuenta la presencia de un plasma frío rodeando la lente. Para ello emplearemos los dos métodos descritos previamente. Probando de esta forma una vez más el extraordinario alcance que tiene el método basado en el teorema de Gauss-Bonnet a la hora de describir fenómenos de lentes gravitacionales.

4.3.1. Enfoque basado en tetradas nulas

Consideremos un espaciotiempo $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano con elemento de línea,

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.87)$$

donde

$$A(r) = e^{2\Phi(r)}, \quad B(r) = \frac{1}{1 - \frac{2M(r)}{r}}. \quad (4.88)$$

La distribución de energía-momento más general compatible con simetría esférica es descrita por el tensor de energía-momento,

$$T_{tt} = \rho e^{2\Phi(r)}; \quad (4.89)$$

$$T_{rr} = \frac{P_r}{\left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)}; \quad (4.90)$$

$$T_{\theta\theta} = P_t r^2; \quad (4.91)$$

$$T_{\varphi\varphi} = P_t r^2 \sin^2(\theta); \quad (4.92)$$

donde hemos introducido la noción de componente radial P_r y tangencial P_t de la presión

Las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (4.93)$$

en términos de las variables previas vienen dadas por lo siguiente [90],

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (4.94)$$

$$r^2 \frac{d\Phi}{dr} = \frac{M + 4\pi r^3 P_r}{1 - \frac{2M(r)}{r}}, \quad (4.95)$$

$$r^3 \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) + r^2 \frac{d\Phi}{dr} \left(1 - \frac{M}{r} - \frac{dM}{dr} \right) - r \frac{dM}{dr} + M = 8\pi r^3 P_t; \quad (4.96)$$

mientras que la ecuación de conservación nos queda,

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r) \frac{d\Phi}{dr} - \frac{2}{r}(P_r - P_t). \quad (4.97)$$

4.3.1.1. Métrica tipo Gordon

En la sección 4.1 hemos probado que las órbitas espaciales seguidas por los rayos de luz en un plasma frío son las mismas tanto respecto de la métrica física $g_{\alpha\beta}$ como de una métrica óptica efectiva $\hat{g}_{\alpha\beta}$ dada por (4.29), donde para un plasma frío esféricamente simétrico el índice de refracción esta dado como sigue,

$$n^2(r) = 1 - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega_\infty^2} A(r). \quad (4.98)$$

Como antes, ω_∞ es la frecuencia de observación medida por un observador asintótico.

Como estamos interesados en pequeñas desviaciones respecto del espaciotiempo plano de fondo, es adecuado hacer las siguientes aproximaciones en las componentes de la métrica,

$$A(r) \approx 1 + 2\Phi(r), \quad (4.99)$$

$$B(r) \approx 1 + \frac{2M(r)}{r} =: \tilde{B}(r). \quad (4.100)$$

Por otro lado, vamos a considerar una frecuencia de plasma de la siguiente forma,

$$\omega_e^2(r) \approx \omega_{e0}^2 + K_e N_1(r), \quad (4.101)$$

donde $K_e = \frac{4\pi e^2}{m_e}$, siendo e y m_e la carga y masa del electrón, respectivamente. En este caso estamos asumiendo además que $\omega_{e0}^2 = \text{constante}$ y que,

$$\frac{K_e N_1(r)}{\omega_{e0}^2} \ll 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} N_1(r) = 0. \quad (4.102)$$

Introducimos la siguiente definición,

$$\tilde{n}_o = \sqrt{1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega_\infty^2}}, \quad (4.103)$$

y hacemos el cambio de variable,

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tilde{n}_o}. \quad (4.104)$$

De esta forma, la métrica de tipo Gordon se puede expresar como sigue,

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{A}(r)d\tilde{t}^2 - \tilde{B}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (4.105)$$

donde

$$\tilde{A}(r) = 1 + \frac{2\Phi(r)}{\tilde{n}_o^2} + \frac{K_e N_1(r)}{\omega_\infty^2 \tilde{n}_o^2}, \quad (4.106)$$

y $\tilde{B}(r)$ está dado por (4.100).

4.3.1.2. Tetrada nula adaptada a la geometría de la distribución de materia y componentes de la curvatura

A fin de incluir los efectos del plasma utilizando el enfoque de las tetradas nulas podemos repetir el mismo procedimiento utilizado en [90] para obtener una tetrada nula principal $\{\tilde{\ell}_p^a, \tilde{n}_p^a, \tilde{m}_p^a, \tilde{\bar{m}}_p^a\}$ adaptada a la métrica de tipo Gordon (4.105) en términos de las componentes $\tilde{A}(r)$ y $\tilde{B}(r)$. Explícitamente,

$$\tilde{\ell}_p^a = \frac{1}{\tilde{A}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^a + \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}\tilde{B}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a, \quad (4.107)$$

$$\tilde{n}_p^a = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^a - \sqrt{\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a \right], \quad (4.108)$$

$$\tilde{m}_p^a = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2r}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a - \frac{i}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^a \right], \quad (4.109)$$

donde los coeficientes $\tilde{A}(r)$ y $\tilde{B}(r)$ están dados por (4.106) y (4.100), respectivamente. Sin embargo, notemos que a fin de calcular las contribuciones a orden lineal de los escalares de curvatura sólo necesitamos considerar la tetrada nula principal a orden cero, esto es, podemos aproximar $\tilde{A} = \tilde{B} = 1$.

Como se muestra en [90], a orden lineal, la transformación entre la tetrada nula $\{\ell^a, m^a, \bar{m}^a, n^a\}$ adaptada a la trayectoria de los rayos de luz y la tetrada nula principal adaptada a la distribución de energía-momento induce la siguiente transformación en los escalares de curvatura Φ_{00} y Ψ_0 ,

$$\Psi_0 = 3 \frac{b^2}{r^2} \tilde{\Psi}_2(r) e^{2i\theta}, \quad (4.110)$$

$$\Phi_{00} = \frac{2b^2}{r^2} (\tilde{\Phi}_{11} - \frac{1}{4}\tilde{\Phi}_{00}) + \tilde{\Phi}_{00}, \quad (4.111)$$

donde $\tilde{\Psi}_2$, $\tilde{\Phi}_{00}$ y $\tilde{\Phi}_{11}$ son los escalares de curvatura calculados a partir de la métrica de tipo Gordon (4.105) y usando la tetraada principal a primer orden. Explícitamente, están dados por lo siguiente,

$$\tilde{\Phi}_{00} = \frac{rM'(r) - M(r)}{r^3} + \frac{1}{r\tilde{n}_0^2} \left(\frac{K_e N_1'(r)}{2\omega_\infty^2} + \Phi'(r) \right), \quad (4.112)$$

$$\tilde{\Phi}_{11} = \frac{M(r)}{2r^3} + \frac{1}{4\tilde{n}_0^2} \left(\frac{K_e N_1''(r)}{2\omega_\infty^2} + \Phi''(r) \right), \quad (4.113)$$

$$\tilde{\Psi}_2 = \frac{rM'(r) - 3M(r)}{6r^3} - \frac{1}{6r\tilde{n}_0^2} \left(\frac{K_e}{2\omega_\infty^2} (N_1'(r) - rN_1''(r)) + \Phi'(r) - r\Phi''(r) \right). \quad (4.114)$$

Usando las ecuaciones de Einstein (4.94), (4.95) y la ecuación de conservación (4.97) es posible expresar dichas componentes de curvatura en términos de las componentes del tensor energía-momento y de la función $M(r)$, la cual debido a (4.94) contiene la misma información que la densidad de energía $\varrho(r)$,

$$\tilde{\Phi}_{00} = 4\pi \left(\varrho(r) + \frac{P_r(r)}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{M(r)}{r^3} \left(1 - \frac{1}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{K_e}{2r\omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} N_1'(r), \quad (4.115)$$

$$\tilde{\Phi}_{11} = \frac{\pi}{\tilde{n}_0^2} \left(\varrho(r) + 2P_t(r) - P_r(r) \right) + \frac{M(r)}{2r^3} \left(1 - \frac{1}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{K_e}{8\omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} N_1''(r), \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_2 = & \frac{4\pi}{3\tilde{n}_0^2} \left(P_t(r) - P_r(r) \right) + \left(\frac{2}{3}\pi\varrho(r) - \frac{M(r)}{2r^3} \right) \left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_0^2} \right) \\ & + \frac{K_e}{12r\omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} \left(rN_1''(r) - N_1'(r) \right). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Las relaciones (4.110) y (4.111) junto con las expresiones previas para los escalares de curvatura nos permiten escribir los escalares ópticos y el ángulo de deflexión en términos de las componentes del tensor energía-momento y de la densidad de electrones en el plasma. En particular, a partir de las relaciones (4.40), (4.45) y (4.50) obtenemos finalmente,

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} = & \int_{-\lambda_l}^{\lambda_{ls}} \left[4\pi \left(\varrho + \frac{P_r}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{4\pi b^2}{\tilde{n}_0^2 r^2} (P_t - P_r) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{3b^2}{2r^3} M - \frac{M}{r} - 2\pi b^2 \varrho \right) \left(1 - \frac{1}{\tilde{n}_0^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{b^2 K_e}{4r^3 \omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} (N_1' - rN_1'') + \frac{K_e}{2r\omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} N_1' \right] dy, \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$\tilde{\gamma} = \int_{-\lambda_l}^{\lambda_{ls}} \frac{b^2}{r^2} \left[\frac{4\pi}{\tilde{n}_0^2} (P_r - P_t) + \left(\frac{3M}{2r^3} - 2\pi\varrho \right) \left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{K_e}{4r\omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} (N_1' - rN_1'') \right] dy, \quad (4.119)$$

$$\alpha = b \int_{-\lambda_l}^{\lambda_{ls}} \left[4\pi \left(\varrho + \frac{P_r}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{b^2}{r^2} \left(\frac{3M}{r^3} - 4\pi\varrho \right) - \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{1}{\tilde{n}_0^2} \right) + \frac{K_e N_1'}{2r\omega_\infty^2 \tilde{n}_0^2} \right] dy, \quad (4.120)$$

donde estamos integrando en la coordenada y definida en (4.59).

Como antes, λ_l indica la distancia desde el observador a la lente si el espacio-tiempo fuera plano. De forma similar, $\lambda_{ls} = \lambda_s - \lambda_l$. Estas expresiones generalizan los resultados obtenidos en [90] para el caso de gravedad pura ($\tilde{n}_o = 1$ y $N_1 = 0$).

4.3.1.3. $\lambda_{ls} \rightarrow \infty$ y $\lambda_l \rightarrow \infty$

En situaciones astrofísicas típicas, resulta conveniente asumir que tanto el observador como la fuente se encuentran suficientemente lejos de la lente. Como veremos a continuación, en este caso al reemplazar los límites de integración $\lambda_{ls} \rightarrow \infty$ y $\lambda_l \rightarrow \infty$ e integrando por partes, podemos ver que la dependencia explícita en $q(r)$ puede ser omitida en (4.118), (4.119) y (4.120). Al utilizar las ecuaciones de Einstein (4.94) podemos escribir $q(r)$ como una derivada primera de $M(r)$ y entonces integrar por partes todos los términos que contengan $q(r)$. Haciendo esto, resulta trivial obtener las siguientes identidades,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(r) dy = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(r)}{r^3} \left(1 - \frac{r^2}{b^2 - r^2}\right) dy, \quad (4.121)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(r)}{r^2} dy = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(r)}{r^5} \left(3 - \frac{r^2}{b^2 - r^2}\right) dy, \quad (4.122)$$

donde los términos de borde decaen debido a que el espaciotiempo es asintóticamente plano, lo cual implica en particular que,

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{M(r)}{r^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{M(r)}{r^4} = 0. \quad (4.123)$$

Usando las identidades (4.121) y (4.122) podemos expresar los escalares ópticos y el ángulo de deflexión como sigue,

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa} = \int_{-\infty}^{\infty} & \left[\frac{4\pi}{\tilde{n}_o^2} \left(P_r + \frac{b^2}{r^2} (P_t - P_r) \right) + \frac{M}{2r^3} \left(1 - \frac{r^2}{b^2 - r^2} \right) \left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_o^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{b^2 K_e}{4r^3 \omega_\infty^2 \tilde{n}_o^2} (N'_1 - rN''_1) + \frac{K_e}{2r\omega_\infty^2 \tilde{n}_o^2} N'_1 \right] dy, \end{aligned} \quad (4.124)$$

$$\tilde{\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2}{r^2} \left[\frac{4\pi}{\tilde{n}_o^2} (P_r - P_t) + \frac{M}{2r} \left(\frac{1}{b^2 - r^2} \right) \left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_o^2} \right) + \frac{K_e}{4r\omega_\infty^2 \tilde{n}_o^2} (N'_1 - rN''_1) \right] dy, \quad (4.125)$$

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{r} \left[\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_o^2} \right) + \frac{4\pi r P_r}{\tilde{n}_o^2} + \frac{K_e N'_1}{2\omega_\infty^2 \tilde{n}_o^2} \right] dy. \quad (4.126)$$

Vale la pena mencionar que incluso cuando estas expresiones son muy compactas y potencialmente muy prácticas, no tenemos conocimiento de las mismas en la literatura hasta ahora.

4.3.1.4. Analogía entre fotones en un plasma frío y partículas masivas en gravedad pura

Como es bien sabido existe una correspondencia uno a uno entre el movimiento de fotones en un plasma homogéneo ($N'_1 = 0$) sobre un dado espaciotiempo y el

movimiento de partículas masivas en el mismo espaciotiempo

En el contexto de este capítulo, dicha correspondencia se alcanza tomando $N'_1 = 0$ e identificando \tilde{n}_o con la velocidad v , la cual representa la velocidad inicial de una partícula masiva medida por un observador estático y asintótico cuando la partícula se encuentra suficientemente alejada de la lente. Para más detalles de esta correspondencia sugerimos referirse a los siguientes trabajos [22, 40, 80]. Entonces, el ángulo de deflexión para partículas masivas α_{mp} viene dado por,

$$\alpha_{mp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{r} \left[\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) + \frac{4\pi r P_r}{v^2} \right] dy. \quad (4.127)$$

Alternativamente, se puede reescribir como,

$$\alpha_{mp} = \frac{\alpha_M}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) + \frac{\alpha_{P_r}}{v^2}, \quad (4.128)$$

donde

$$\alpha_M = 2b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{r^3} dy, \quad y \quad \alpha_{P_r} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} r P_r dy. \quad (4.129)$$

La expresión (4.128) generaliza los resultados obtenidos en [90] al incluir la deflexión de partículas con masa. En particular, si $v = 1$, esto es, si consideramos partículas sin masa, el ángulo de deflexión se reduce a $\alpha = \alpha_M + \alpha_{P_r}$, donde podemos apreciar claramente la contribución tanto de la masa total como de la presión radial por separado. Notemos que este resultado es independiente de la distribución de masa y de presión radial adoptadas. Más aún, si el espaciotiempo es tal que la presión radial puede ser despreciada entonces la relación entre el ángulo de deflexión para partículas masivas α_{mp} y el ángulo para partículas sin masa $\alpha_\gamma \equiv \alpha_M$ está dado por,

$$\alpha_{mp} = \frac{\alpha_\gamma}{2} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right). \quad (4.130)$$

Nuevamente, queremos señalar que este resultado es completamente general a orden dominante en el sentido que es independiente del modelo de distribución de materia.

4.3.2. Enfoque basado en el teorema de Gauss-Bonnet

En esta sección utilizaremos el método basado en el uso del teorema de Gauss-Bonnet a fin comparar con los resultados obtenidos en la subsección anterior.

Como se describió en los capítulos anteriores, para un espaciotiempo $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ con elemento de línea dado por (4.87), las proyecciones espaciales de los rayos de luz propagándose a través de un medio con índice de refracción n en la sección $t = \text{constante}$, son geodésicas de la siguiente métrica óptica Riemanniana,

$$d\sigma^2 = g_{ij}^{\text{opt}} dx^i dx^j = \frac{n^2(r)}{A(r)} \left(B(r) dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right), \quad (4.131)$$

donde nos hemos restringido al plano ecuatorial $\vartheta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad debido a la simetría esférica. Expresamos las funciones $A(r)$ y $B(r)$ como,

$$A(r) = e^{2\Phi(r)}, \quad B(r) = \frac{1}{1 - \frac{2M(r)}{r}}. \quad (4.132)$$

Para un plasma frío el índice de refracción dado por (4.98) puede ser reescrito como,

$$n^2(r) = 1 - (1 - n_o^2(r))A(r), \quad (4.133)$$

donde $n_o^2(r)$ está dado por,

$$n_o^2(r) = 1 - \frac{\omega_e^2(r)}{\omega_\infty^2}. \quad (4.134)$$

A fin de calcular el ángulo de deflexión usando el teorema de Gauss-Bonnet tenemos que elegir un dominio específico en la variedad óptica $(\mathcal{M}^{\text{opt}}, g_{ij}^{\text{opt}})$. Hay varias maneras de elegir este dominio, la forma más simple, y siguiendo el trabajo original de Gibbons y Werner, es considerar un espacio simplemente conexo como se muestra en la figura 2.2, donde su borde está formado por la geodésica espacial γ_p seguida por el fotón en la variedad óptica y la curva C_R definida como $r(\varphi) = R = \text{constante}$. Luego, el ángulo de deflexión α se puede calcular como sigue,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi+\alpha} \left[\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \right] \Big|_{C_R} d\varphi = \pi - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{D_R} \mathcal{K} dS, \quad (4.135)$$

donde \mathcal{K} es la curvatura Gaussiana, dS es el elemento de superficie en coordenadas (r, ϑ) y κ_g es la curvatura geodésica de C_R .

Como estamos interesado solamente en expresiones lineales en $M(r)$ y $\Phi(r)$ para el ángulo de deflexión, es suficiente aproximar r_φ por la trayectoria en el espacio de fondo seguida por los rayos de luz, esto es,

$$r_\varphi = \frac{b}{\sin(\varphi)}, \quad (4.136)$$

y por otro lado, sólo necesitamos calcular $\mathcal{K}dS$ y $\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi}$ a primer orden en $M(r)$ y $\Phi(r)$,

$$\mathcal{K}dS = \left[\frac{(r\Phi)'}{n_o^2} + \left(\frac{M}{r} \right)' - \frac{(rn_o)'}{n_o} + \mathcal{F} \right] dr d\varphi, \quad (4.137)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\Phi n_o', \Phi n_o'', \Phi' n_o', (n_o')^2, Mn_o', Mn_o'', M' n_o') \\ &= r \frac{(n_o')^2}{n_o^4} - 2\Phi \frac{(rn_o)'}{n_o^3} + 6\Phi r \frac{(n_o')^2}{n_o^4} - 4\Phi' r \frac{n_o'}{n_o^3} + \frac{(n_o' M)'}{n_o} - \frac{(n_o')^2 M}{n_o^2}, \end{aligned} \quad (4.138)$$

y ' indica la derivada respecto de la coordenada radial. Por otro lado,

$$\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi} = 1 - \frac{r\Phi'}{n_o^2} - \frac{M}{r} + \frac{rn_o'}{n_o} + \mathcal{G}, \quad (4.139)$$

donde $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Phi n_o', Mn_o')$ está dado por

$$\mathcal{G} = 2 \frac{r\Phi n_o'}{n_o^3} - M \frac{n_o'}{n_o}. \quad (4.140)$$

De aquí en adelante, despreciaremos las contribuciones de la forma plasma \times gravedad dada por las funciones \mathcal{F} y \mathcal{G} . Consideraremos además dos casos por separado. El primero cuando $\mathcal{K}dS \neq 0$ y el otro cuando esta 2-forma se anula.

4.3.2.1. $\mathcal{K}dS \neq 0$

Si $\mathcal{K}dS \neq 0$ nos queda la siguiente expresión para el ángulo de deflexión,

$$\alpha = - \int_0^\pi \int_{r_\varphi}^\infty \left[\frac{(r\Phi')'}{n_o^2} + \left(\frac{M}{r} \right)' - \frac{(rn_o')'}{n_o} \right] dr d\varphi. \quad (4.141)$$

Al integrar por partes y descartar los términos de orden $\mathcal{O}((n_o')^2, \Phi'n_o')$, podemos reescribir (4.141) como una integral de línea,

$$\alpha = \int_0^\pi \left[\frac{r\Phi'}{n_o^2} + \frac{M}{r} - \frac{rn_o'}{n_o} \right] \Big|_{r=r_\varphi} d\varphi, \quad (4.142)$$

donde hemos asumido que,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{rn_o'}{n_o} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r\Phi'}{n_o^2} = 0, \quad (4.143)$$

Cambiamos a una nueva coordenada y relacionada a r de la manera $y = \sqrt{r^2 - b^2}$ y por lo tanto satisfaciendo $\tan \varphi = b/y$. Usando las ecuaciones de Einstein a primer orden en M y P_r obtenemos,

$$\Phi' = \frac{M(r)}{r^2} + 4\pi r P_r(r). \quad (4.144)$$

Finalmente podemos obtener una expresión para el ángulo de deflexión en términos de las componentes del tensor energía-momento para una lente en presencia de un plasma frío de la siguiente forma,

$$\alpha = \int_{-\infty}^\infty \frac{b}{r} \left[\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{n_o^2} \right) + \frac{4\pi r P_r}{n_o^2} - \frac{n_o'}{n_o} \right] \Big|_{r=r_y} dy \quad (4.145)$$

donde $r_y = \sqrt{b^2 + y^2}$.

4.3.2.2. $\mathcal{K}dS = 0$

En gravedad pura esta situación aparece por ejemplo cuando uno considera una distribución de masa determinada por un perfil de densidad isotérmico [45]. Dicho caso se podría presentar también para algún perfil de plasma muy específico, de modo que vale la pena averiguar que pasaría en este caso. Si $\mathcal{K}dS = 0$ entonces al descartar \mathcal{F} y también todos aquellos términos de orden $\mathcal{O}((n_o')^2, \Phi'n_o')$, podemos ver lo siguiente a partir de la ecuación (4.137),

$$\begin{aligned} \left(\frac{r\Phi'}{n_o^2} + \frac{M}{r} - \frac{rn_o'}{n_o} \right)' &= \mathcal{O}((n_o')^2, \Phi'n_o') - \mathcal{F} \\ &= \mathcal{O}\left(\Phi n_o', \Phi n_o'', \Phi' n_o', (n_o')^2, M n_o', M n_o'', M' n_o' \right); \end{aligned} \quad (4.146)$$

lo cual implica que, a primer orden, la siguiente cantidad es constante con respecto a la coordenada radial,

$$\frac{r\Phi'}{n_o^2} + \frac{M}{r} - \frac{rn_o'}{n_o} = C = \text{constante}. \quad (4.147)$$

Notemos que esta constante C es una cantidad a primer orden y por lo tanto, a este orden,

$$\begin{aligned} \left[\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \right] \Big|_{C_R} &= \left[1 - \frac{r\Phi'}{n_o^2} - \frac{M}{r} + \frac{rn_o'}{n_o} \right] \Big|_{R(\varphi)} \\ &= \left[1 - \frac{r\Phi'}{n_o^2} - \frac{M}{r} + \frac{rn_o'}{n_o} \right] \Big|_{r_\varphi}. \end{aligned} \quad (4.148)$$

donde en la última igualdad hemos usado el hecho de que el lado derecho de la igualdad es constante y por lo tanto puede ser evaluado a lo largo de la trayectoria de los rayos de luz $r_\varphi = b/\sin(\varphi)$ en vez de $R(\varphi) = \text{constante}$. Luego, la ecuación (4.135) para calcular el ángulo de deflexión se reduce a lo siguiente,

$$\int_0^{\pi+\alpha} \left[1 - \frac{r\Phi'}{n_o^2} - \frac{M}{r} + \frac{rn_o'}{n_o} \right] \Big|_{r_\varphi} d\varphi = \pi. \quad (4.149)$$

Finalmente, separando el dominio de integración desde 0 hasta π y desde π hasta $\pi + \alpha$, y haciendo la aproximación,

$$\int_\pi^{\pi+\alpha} \left[1 - \frac{r\Phi'}{n_o^2} - \frac{M}{r} + \frac{rn_o'}{n_o} \right] \Big|_{r_\varphi} d\varphi \approx \alpha, \quad (4.150)$$

obtenemos finalmente

$$\alpha = \int_0^\pi \left[\frac{r\Phi'}{n_o^2} + \frac{M}{r} - \frac{rn_o'}{n_o} \right] \Big|_{r=r_\varphi} d\varphi = C\pi. \quad (4.151)$$

Notemos que esta ecuación coincide con la expresión para α en el caso $\mathcal{K}dS \neq 0$. De esta forma, a fines prácticos no es necesario hacer la distinción entre ambos casos.

4.3.2.3. Comparación

Adicionalmente, si separamos la frecuencia del plasma ω_e^2 como se hizo en (4.101), obtenemos,

$$n_o^2 = \tilde{n}_o^2 \left(1 - \frac{K_e N_1(r)}{\tilde{n}_o^2 \omega_\infty^2} \right) \quad (4.152)$$

y entonces,

$$-\frac{n_o'}{n_o} = \frac{K_e N_1'(r)}{2n_o^2 \omega_\infty^2}. \quad (4.153)$$

Por otro lado, dado que estamos asumiendo que $\frac{K_e N_1(r)}{\omega_\infty^2} \ll 1$, podemos hacer la aproximación $n_o^2 \approx \tilde{n}_o^2$ y obtener finalmente,

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{r} \left[\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{\tilde{n}_o^2} \right) + \frac{4\pi r P_r}{\tilde{n}_o^2} + \frac{K_e N_1'}{2\omega_\infty^2 \tilde{n}_o^2} \right] dy, \quad (4.154)$$

la cual coincide completamente con la ecuación (4.126). De esta forma, hemos obtenido la misma expresión para el ángulo de deflexión en términos de las componentes del tensor energía-momento utilizando dos métodos geométricos distintos.

4.4. Correspondencia entre el movimiento espacial de los fotones en un plasma inhomogéneo y partículas masivas en un campo externo

Como mencionamos anteriormente, existe una correspondencia bien conocida entre el movimiento geodésico de partículas masivas de prueba en un campo gravitacional y el movimiento de fotones en un plasma frío. En esta sección mostramos que existe también una correspondencia entre el movimiento no geodésico de partículas de prueba, masivas y cargadas, en un campo gravitacional donde además se encuentra presente un campo eléctrico, y el movimiento de fotones en un plasma frío inhomogéneo.

Consideremos un espaciotiempo estático con elemento de línea,

$$ds^2 = A(x^i)dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j, k, \dots = 1, 2, 3. \quad (4.155)$$

La acción para una partícula de prueba con carga q y masa μ moviéndose bajo la influencia de un campo gravitacional y un campo eléctrico estático determinado por un potencial $U(x^i)$ viene dada por,

$$S = \int \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i) dt, \quad (4.156)$$

donde la integral se hace a lo largo de la línea mundo de la partícula, y la densidad lagrangiana \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i) = -\mu \sqrt{A(x^i) - g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j} - qU(x^i). \quad (4.157)$$

Antes de continuar recordemos que la densidad lagrangiana más general que uno puede escribir para partículas masivas cargadas en un campo de Einstein-Maxwell está dado por $\mathcal{L} = -\mu \sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta} - qA_\alpha u^\alpha$. Aquí estamos asumiendo que en las coordenadas $\{t, x^i\}$ sólo tenemos $A_0 \neq 0$. Más aún, nuestras consideraciones son válidas para *cualquier* campo escalar central $U(x^i)$ no necesariamente de naturaleza electromagnética.

El movimiento de partículas puede ser estudiado a partir de las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange o equivalentemente a partir de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi del Hamiltoniano $\mathcal{H}(x^i, p_i)$ dado por la transformación de Legendre,

$$\mathcal{H}(x^i, p_i) = p_i \dot{x}^i - \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i), \quad (4.158)$$

donde $\dot{x}^i = \dot{x}^i(x^j, p_k)$. El 4-momento está definido como,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i}. \quad (4.159)$$

Para este caso el Hamiltoniano toma la forma,

$$\mathcal{H}(x^i, p_i) = \sqrt{\mu^2 A(x^i) + A(x^i) g^{ij} p_i p_j} + qU(x^i). \quad (4.160)$$

Como se mencionó en capítulos anteriores en el pasado reciente, Gibbons introdujo una formulación basada en la métrica de Jacobi a fin de estudiar el movimiento

de partículas de prueba masivas en espaciotiempos estáticos [92]. En esta formulación las trayectorias de estas partículas están dadas por las geodésicas de una métrica Riemanniana (dependiente de la energía de las partículas) conocida como métrica de Jacobi.

Más aún, cualquier movimiento no geodésico puede ser descrito como una geodésica asociada a la métrica de Jacobi derivada a partir de un Hamiltoniano. En particular, para partículas de prueba cuyo movimiento sea descrito por el Hamiltoniano (4.160), la métrica de Jacobi J_{ij} vendrá dada como sigue,

$$J_{ij} = E_\infty^2 \hat{g}_{ij}^{\text{opt}}, \quad (4.161)$$

donde

$$\hat{g}_{ij}^{\text{opt}} = \left[\left(1 - \frac{qU(x^i)}{E_\infty} \right)^2 - \frac{\mu^2 A(x^i)}{E_\infty^2} \right] \frac{g_{ij}}{A(x^i)}. \quad (4.162)$$

Para partículas de prueba sin masa, esta métrica coincide con la métrica óptica g_{ij}^{opt} en gravedad pura.

Por otro lado, sabemos que las trayectorias de los fotones en un medio descrito por un índice de refracción n son geodésicas respecto de la métrica óptica

$$g_{ij}^{\text{opt}} = n^2(x^i) \frac{g_{ij}}{A(x^i)}, \quad (4.163)$$

donde en particular para un plasma frío n está dado por (4.98).

Al escribir la frecuencia del plasma ω_e^2 como,

$$\omega_e^2(x^i) = \omega_{e0}^2 + K_e N_1(x^i), \quad (4.164)$$

con $\omega_{e0} = \text{constante}$ y, comparando el índice de refracción n con el factor que precede a $\frac{g_{ij}}{A(x^i)}$ en (4.162) vemos que si hacemos la siguiente identificación,

$$\omega_{e0} \leftrightarrow \mu, \quad \omega_\infty \leftrightarrow E_\infty, \quad (4.165)$$

$$N_1(x^i) \leftrightarrow \frac{qU(x^i)}{K_e A(x^i)} (2E_\infty - qU(x^i)), \quad (4.166)$$

con $N_1(x^i) > 0$, entonces las órbitas espaciales de una partícula masiva y cargada en un dado espaciotiempo con un campo eléctrico presente son equivalentes a las órbitas espaciales de un fotón en un plasma inhomogéneo particular y dependiente de la energía del fotón, y viceversa. Notemos que esta analogía no sólo es válida en presencia de un campo gravitacional sino que la misma se da por ejemplo en el espaciotiempo de Minkowski. Por ejemplo, si asumimos que tenemos una carga fija Q generando el potencial $U(r) = Q/r$, entonces las órbitas de una partícula de prueba de masa μ , carga q y energía total E_∞ gobernada por la fuerza de Lorentz, coinciden con las órbitas de un fotón con la misma energía moviéndose en un plasma en el cual además de la parte homogénea de la densidad de electrones en el plasma dada por $K_e \mu^2$ tenemos una densidad de electrones en el plasma no homogénea que debe estar dada por $\frac{qQ}{K_e r} (2E_\infty - \frac{qQ}{r})$. La cual a su vez será positiva si $qQ > 0$, esto es, el carácter repulsivo entre las cargas puede ser descrito como el efecto divergente de la trayectoria de un fotón en particular con energía E_∞ en un perfil de plasma particular. Por supuesto, para el resto de los fotones con diferentes energías moviéndose en el mismo plasma esta correspondencia no es tal.

Por otro lado, la métrica de Jacobi no sólo nos permite hacer la analogía previa

entre fotones en un plasma frío y partículas en un campo externo, sino que además nos permite estudiar la dispersión de partículas relativistas siguiendo movimientos no geodésicos a través del teorema de Gauss-Bonnet. Más precisamente, para un espaciotiempo esféricamente simétrico podemos usar la expresión (4.145) con $n_o(r)$ dada por,

$$n_o^2(r) = 1 - \frac{1}{E_\infty^2} \left(\mu^2 + \frac{2qU(r)E_\infty}{A(r)} - \frac{q^2U(r)^2}{A(r)} \right), \quad (4.167)$$

a fin de calcular el ángulo de deflexión. Quedándonos sólo con términos de orden dominante obtenemos que el ángulo de deflexión se reduce a (4.154), el cual si sólo consideramos términos a orden lineal en $U(r)$ nos queda,

$$\alpha \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{r} \left[\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) + \frac{4\pi r P_r}{v^2} + \frac{qU'}{E_\infty v^2} \right] \Big|_{r=r_y} dy. \quad (4.168)$$

Esta ecuación generaliza la expresión obtenida en [90] a la situación más general donde partículas masivas y campos centrales externos no-gravitacionales son permitidos.

En la siguiente subsección mostramos el alcance de esta técnica al calcular el ángulo de deflexión de partículas relativistas con carga sobre el espaciotiempo de Reissner-Nordström quedándonos con términos de orden más alto que en (4.168). Para una descripción más detallada de la métrica de Jacobi para este caso en particular nos referimos al trabajo recientemente publicado por Das, Sk y Ghosh [137].

4.4.1. Deflexión de partículas masivas y cargadas en el espaciotiempo de Reissner-Nordström

Consideremos una partícula de prueba con masa y carga moviéndose en un espaciotiempo de Reissner-Nordström,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.169)$$

y bajo la acción de un potencial Coulombiano,

$$U(r) = \frac{Q}{r}. \quad (4.170)$$

La energía E_∞ y el momento angular J de una partícula medida por un observador estático y asintótico están dados por las siguientes expresiones [40],

$$E_\infty = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{y} \quad J = \frac{\mu v b}{\sqrt{1-v^2}} \quad (4.171)$$

donde v es la velocidad de la partícula cuando la misma está en la región asintótica y b es el parámetro de impacto.

Comencemos calculando la expresión para el ángulo de deflexión a primer orden en términos de las componentes del tensor energía-momento y del potencial a partir de la ecuación (4.168). Como es sabido, en el espaciotiempo de Reissner-Nordström

la función de masa $M(r)$ y la presión radial $P_r(r)$ están dadas por lo siguiente,

$$M(r) = m - \frac{Q^2}{2r}, \quad (4.172)$$

$$P_r(r) = -\frac{Q^2}{8\pi r^4}. \quad (4.173)$$

Reemplazando estas relaciones así como también la expresión (4.170) para el potencial de Coulomb en la ecuación (4.168) y teniendo en cuenta que $r = \sqrt{b^2 + y^2}$ obtenemos la siguiente expresión para el ángulo de deflexión a primer orden,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) - \frac{\pi Q^2}{4b^2} \left(1 + \frac{2}{v^2}\right) - \frac{2qQ}{bv^2 E_\infty}. \quad (4.174)$$

Ahora calculemos correcciones a orden más alto para el ángulo de deflexión utilizando el teorema de Gauss-Bonnet directamente. A fin de llevar a cabo esto, podemos proceder de diferentes maneras. Por ejemplo, podemos calcular el ángulo de deflexión de un fotón moviéndose en un plasma frío inhomogéneo con una densidad de electrones dada por el perfil (4.164) y luego usar las identificaciones (4.165) y (4.166) con el potencial no gravitacional U dado por (4.170). En este caso la correspondencia es física sólo si la partícula de prueba tiene una carga con el mismo signo que la carga total del agujero negro. Sin embargo, el uso de la métrica óptica dada por (4.163) es independiente del signo de las cargas. En este caso el índice de refracción efectivo esta dado de la siguiente manera,

$$n^2(r) = 1 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)(1 - v^2) - \frac{2qQ}{rE_\infty} + \frac{q^2 Q^2}{r^2 E_\infty^2}, \quad (4.175)$$

donde hemos usado la primera identidad en (4.171) a fin de expresar el índice de refracción en términos de la velocidad, carga y energía de la partícula.

Por otro lado, la métrica óptica viene dada por lo siguiente,

$$d\sigma^2 = n^2(r) \left(\frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^2} + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \right). \quad (4.176)$$

Resultará conveniente introducir los siguientes parámetros adimensionales los cuales asumiremos que son suficientemente "pequeños",

$$\beta = \frac{m}{b}, \quad \gamma = \frac{Q^2}{b^2}, \quad \delta = \frac{qQ}{b^2}. \quad (4.177)$$

Estamos interesados en calcular el ángulo de deflexión conservando todos los términos de orden $\mathcal{O}(\beta, \gamma, \delta, \beta^2, \delta^2, \beta\delta)$; y por lo tanto necesitamos la 2-forma $\mathcal{K}dS$ al siguiente orden,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}dS = & \left[-\frac{b\beta}{r^2} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{b^2\delta}{r^2 v^2 E_\infty} - (v^4 + 6v^2 - 4) \frac{b^2\beta^2}{r^3 v^4} + 2(3v^2 - 4) \frac{b^3\beta\delta}{r^3 v^4 E_\infty} \right. \\ & \left. + (2 + v^2) \frac{b^2\gamma}{r^3 v^2} + (2 - v^2) \frac{2b^4\delta^2}{r^3 v^4 E_\infty^2} \right] d\varphi dr + \mathcal{O}(\gamma^2, \beta^3, \delta^3, \delta\beta^2, \beta\gamma, \beta\delta^2, \delta\gamma), \end{aligned} \quad (4.178)$$

o equivalentemente, en términos de la variable $u = 1/r$ como sigue,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}dS = & \left[b\beta \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) - \frac{b^2\delta}{v^2 E_\infty} + (v^4 + 6v^2 - 4) \frac{ub^2\beta^2}{v^4} - 2(3v^2 - 4) \frac{ub^3\beta\delta}{v^4 E_\infty} \right. \\ & \left. - (2 + v^2) \frac{ub^2\gamma}{v^2} - (2 - v^2) \frac{2ub^4\delta^2}{v^4 E_\infty^2} \right] d\varphi du + \mathcal{O}(\gamma^2, \beta^3, \delta^3, \delta\beta^2, \beta\gamma, \beta\delta^2, \delta\gamma). \end{aligned} \quad (4.179)$$

A fin de calcular el ángulo de deflexión al orden deseado, el cual incluye términos de orden β^2 y δ^2 , debemos integrar a lo largo de la órbita espacial teniendo en cuenta correcciones de orden β y δ . Estas correcciones en la órbita espacial son necesarias debido a que incluso cuando $\mathcal{K}dS$ ya tiene contribuciones de orden β^2 y δ^2 , la misma contiene términos lineales en estos parámetros y por lo tanto, se sigue que la integral de esos términos lineales evaluados a lo largo de la órbita espacial, la cual contiene términos lineales en los mismo parámetros, producirá términos de orden β^2 y δ^2 en el ángulo de deflexión. Como se muestra en el apéndice E, al orden considerado la órbita espacial viene dada por lo siguiente,

$$u(\varphi) = \frac{1}{b} \left[\sin \varphi + \left((1 - \cos \varphi) + v^2(\cos^2 \varphi - \cos \varphi) \right) \frac{\beta}{v^2} - (1 - \cos \varphi) \sqrt{1 - v^2} \frac{\delta}{v^2 \mu} \right]. \quad (4.180)$$

Es importante señalar nuevamente que en este caso sólo tenemos que resolver la ecuación de la órbita hasta el orden β y δ . Esta es la principal diferencia entre el uso del método de Gauss-Bonnet para calcular el ángulo de deflexión y la forma usual de calcularlo a partir de resolver la ecuación de la órbita al mismo orden que tendrá el ángulo de deflexión como mostramos en el apéndice E. Lo cual es más laborioso de realizar.

Finalmente, usando la ecuación (4.135) donde el lado izquierdo se reduce a $\alpha + \pi$ debido a que el espaciotiempo es asintóticamente plano, obtenemos la siguiente expresión para el ángulo de deflexión,

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) + \frac{3\pi m^2}{4b^2} \left(1 + \frac{4}{v^2} \right) - \frac{\pi Q^2}{4b^2} \left(1 + \frac{2}{v^2} \right) \\ & - \frac{2qQ}{bv^2 E_\infty} + \frac{\pi q^2 Q^2}{2b^2 v^2 E_\infty^2} - \frac{3\pi q Q m}{b^2 v^2 E_\infty}. \end{aligned} \quad (4.181)$$

Los primeros tres términos coinciden con los obtenidos recientemente por Pang y Jia [142], donde han estudiado el ángulo de deflexión de partículas neutras en un espaciotiempo de Reissner-Nordström. El cuarto y quinto término también están presentes en el espaciotiempo de Minkowski. Para este caso, una expresión exacta del ángulo de deflexión fue hallada por Synge (ver apéndice C de [83]). En nuestra notación, el resultado de Synge se escribe como,

$$\alpha = -\pi + \frac{4}{K} \arctan \sqrt{\Gamma}; \quad (4.182)$$

donde

$$K = \sqrt{1 - \frac{\delta^2 b^2}{E_\infty^2 - 1}}, \quad (4.183)$$

y

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\delta^2 b^2 \mu^2 + (E_\infty^2 - \mu^2)^2} - \delta E_\infty b}{\sqrt{\delta^2 b^2 \mu^2 + (E_\infty^2 - \mu^2)^2} + \delta E_\infty b}, \quad (4.184)$$

y δ está definido en (4.177).

Teniendo en cuenta las expresiones (4.183) y (4.184), y realizando la expansión en series de Taylor de (4.182) en el parámetro δ obtenemos,

$$\alpha = -\frac{2E_\infty b}{E_\infty^2 - \mu^2} \delta + \frac{b^2 \pi}{2(E_\infty^2 - \mu^2)} \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3). \quad (4.185)$$

Resulta trivial corroborar que esta expresión coincide con el cuarto y quinto término de la ecuación (4.181). El último término es un término novedoso asociado a la fuerza de Lorentz el cual indica que la dinámica se lleva a cabo efectivamente en un espaciotiempo curvo.

4.5. Resumen del capítulo

En este capítulo hemos mostrado cómo el formalismo basado en tetradas nulas, originalmente propuesto en [44, 90, 91] para expresar el ángulo de deflexión en términos de escalares de curvatura y/o distribuciones de energía-momento, para el caso de gravedad pura, puede ser extendido al caso más general de rayos de luz propagándose a través de un plasma, teniendo en cuenta tanto contribuciones a primer como a segundo orden. Para ello hemos definido una métrica 4-dimensional, que hemos denominado métrica tipo Gordon, con la cual hemos probado que para espaciotiempos estáticos arbitrarios, las órbitas (no geodésicas) de rayos de luz en medios dispersivos pueden ser puestas en correspondencia con órbitas espaciales provenientes de proyecciones a $t = \text{constante}$ de geodésicas nulas de la métrica tipo Gordon. A su vez hemos podido obtener una expresión para el ángulo de deflexión en términos de las componentes del tensor energía momento y de la distribución de electrones en el plasma. Estos últimos resultados también los hemos podido obtener a través del uso del teorema de Gauss-Bonnet mostrando una vez más los alcances de este novedoso método.

Finalmente, hemos establecido una correspondencia entre el movimiento espacial de fotones en el plasma bajo la acción de un campo gravitatorio, y el de partículas masivas y cargadas en un campo electro-estático externo y bajo la acción del mismo campo gravitacional. Dicha correspondencia, que vale además para cualquier campo externo central estático, nos permite extender tanto el método basado en tetradas nulas como el método de Gibbons y Werner, al estudio de partículas cargadas sobre un espaciotiempo esféricamente simétrico de una manera muy sencilla y elegante.

Capítulo 5

Influencia del plasma en espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos

Como hemos visto a lo largo de este trabajo, y publicado en [40], hemos extendido el uso del método de Gibbons-Werner para calcular el ángulo de deflexión en gravedad pura a situaciones más generales donde se consideran rayos de luz propagándose a través de un plasma sobre un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico. A su vez hemos extendido este método al estudio de partículas de prueba con masa en gravedad pura gracias a la discutida correspondencia entre éstas y fotones moviéndose en un plasma homogéneo [80]. Esta correspondencia fue extensamente utilizada por otros autores en el pasado. En [22] Bisnovatyi-Kogan y Tsupko usaron esta correspondencia para calcular el ángulo de deflexión de partículas masivas en espaciotiempos estáticos en la aproximación de campo débil mientras que en [23] y [143] esta correspondencia fue utilizada para estudiar el límite de deflexión fuerte. Ambos resultados sin utilizar el teorema de Gauss-Bonnet.

En este trabajo también hemos visto una correspondencia entre la propagación de rayos de luz en un plasma inhomogéneo particular y la de partículas masivas y cargadas de prueba en gravedad pura. Dichas correspondencia fue establecida por primera vez en [77]. Por otro lado también hemos visto cómo aplicar el método de Gibbons-Werner para calcular el ángulo de deflexión en términos de las componentes del tensor energía-momento y de la distribución electrónica del plasma generalizando de esta forma resultados previos restringidos al caso de gravedad pura [43, 44, 90, 133].

Un ejemplo bien conocido de la importancia del plasma y que también hemos abordado en este trabajo es el de la influencia de la corona solar en la propagación de los rayos de luz. Si bien en dicho ejemplo, un modelo de lente estática con simetría esférica fue suficiente para nuestros propósitos existen otras situaciones donde también el momento angular de la lente puede influir significativamente en la propagación de la luz. Un caso de esto es el reciente anuncio de la primer imagen concierne a la detección de un horizonte de eventos de un agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 por la colaboración *Event Horizon Telescope* [144-149]. En general, la imagen de un agujero negro rodeada por un disco de acreción aparece distorsionada debido a los efectos de lente gravitacional fuerte. De esta manera, se espera que los agujeros negros proyecten *sombras* sobre el fondo brillante, lo que está relacionado con la existencia de un horizonte de eventos y, por lo tanto, una región de fotones inestable [150]. Esta sombra que se proyecta sobre el fondo brillante es de gran importancia científica debido a que su estudio puede ayudar a probar la estructura geométrica del agujero negro y tal vez medir su momento angular.

Debido a la importancia que puede llegar a tener el momento angular de algunos cuerpos compactos en los efectos de lentes gravitacionales, en este capítulo extendemos nuestros resultados presentados en el capítulo 2, válidos para espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos, al caso de espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos, teniendo en cuenta también el efecto del plasma. Estos resultados fueron publicados en [40]. Para llevar a cabo dicha tarea utilizaremos una métrica de tipo Finsler-Randers. Por otro lado, aunque muchos otros trabajos abordan el uso del teorema de Gauss-Bonnet para espaciotiempos estacionarios (sólo para el caso de gravedad pura), en general no abordan el problema de correcciones de orden más alto de la deflexión de la luz para esta clase de espaciotiempos. En este capítulo ahondaremos en dicha discusión calculando el ángulo de deflexión hasta tercer orden en el régimen de campo débil tanto para distribuciones homogéneas de plasma (incluyendo el caso de partículas masivas) como para distribuciones inhomogéneas.

5.1. Métrica óptica para espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos en un plasma frío

Consideremos un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ con elemento de línea,

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\varphi + g_{ab}dx^a dx^b, \quad (5.1)$$

y un plasma frío no-magnetizado. En lo que sigue los índices latinos corren de 1 a 3, y serán reservados los griegos para índices espaciotemporales (de 0 a 3). Como hemos visto en el capítulo 1, el índice de refracción para este tipo de medios viene dado por la ecuación (2.23), mientras que la dinámica de los rayos de luz se sigue de las ecuaciones de Hamilton asociadas al Hamiltoniano (2.24) con la relación de dispersión (2.26). En este capítulo estaremos trabajando con la signatura de la métrica $(-+++)$.

Como se explica en [15], este Hamiltoniano define una estructura de rayos ópticos en \mathcal{M} y más aún, bajo las condiciones apropiadas, es posible construir una estructura de rayos ópticos reducida en una variedad 3-dimensional $\hat{\mathcal{M}}$ a fin de discutir las trayectorias espaciales de los rayos de luz.

En esta sección llevaremos a cabo el proceso de reducción descrito en [15] (ver teorema 6.5.1 en dicha referencia) a fin de construir una estructura de rayos ópticos reducida para un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico arbitrario con elemento de línea dado por (5.1).

A fin de llevar a cabo este proceso, tenemos que restringirnos a regiones del espaciotiempo donde el campo vectorial de Killing $\frac{\partial}{\partial t}$ sea temporal y donde la propagación de los rayos de luz esté permitida, ie, $\omega^2(x) > \omega_e^2(x)$.

Antes que nada notemos que el Hamiltoniano (2.24) puede ser reescrito como sigue,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(g^{ij}p_i p_j + g^{33}(p_3 + \frac{g^{03}}{g^{33}}p_0)^2 - p_0^2\Omega^2), \quad (5.2)$$

donde

$$\Omega^2 := \frac{(g^{03})^2 - g^{00}g^{33}}{g^{33}} - \frac{\omega_e^2}{p_0^2}. \quad (5.3)$$

Como la métrica es estacionaria, p_0 es una constante de movimiento la cual puede ser identificada con la frecuencia medida por un observador estacionario en infinito, esto es, $p_0 := -\omega_\infty$.

Debido a que las ecuaciones básicas a partir de las cuales la dinámica de los rayos de luz puede ser deducida es la relación de dispersión (2.26), podemos multiplicar el Hamiltoniano (5.2) por una función no nula sin alterar la dinámica de los rayos de luz¹. Entonces podemos reescribir el Hamiltoniano como,

$$\mathcal{H} = \Omega^2 \tilde{\mathcal{H}}, \quad (5.4)$$

donde

$$\tilde{\mathcal{H}}(x^\alpha, p_\alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{g^{ij} p_i p_j + g^{33} (p_3 + \frac{g^{03}}{g^{33}} p_0)^2}{\Omega^2} - p_0^2 \right), \quad (5.5)$$

y como veremos, Ω es una función no nula. En particular, a partir de las identidades,

$$\frac{(g^{03})^2 - g^{00} g^{33}}{g^{33}} = -\frac{1}{g_{00}}, \quad (5.6)$$

$$-\frac{g^{03}}{g^{33}} = \frac{g_{03}}{g_{00}}, \quad (5.7)$$

podemos expresar el Hamiltoniano (5.5) como sigue,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(\frac{g^{ij} p_i p_j + g^{33} (p_3 - \frac{g_{03}}{g_{00}} p_0)^2}{\Omega^2} - p_0^2 \right), \quad (5.8)$$

con

$$\Omega^2 = -\frac{1}{g_{00}} \left(1 - \frac{\omega_e^2(x)}{(p_0/\sqrt{-g_{00}})^2} \right). \quad (5.9)$$

Como fue discutido en [15] una estructura reducida de rayos ópticos dada por el Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}$ puede ser obtenida simplemente reemplazando el momento p_0 el cual es una cantidad conservada por la constante $-\omega_\infty$, es decir, por la frecuencia del fotón medida por un observador asintótico. Entonces la estructura reducida 3-dimensional de rayos ópticos queda definida por el Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(x^a, p_a) &= \tilde{\mathcal{H}}(x^a, p_a, p_0 = -\omega_\infty) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{g^{ij} p_i p_j + g^{33} (p_3 + \frac{g_{03}}{g_{00}} \omega_\infty)^2}{\Omega^2} - \omega_\infty^2 \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde

$$\Omega^2 = -\frac{1}{g_{00}} \left(1 - \frac{\omega_e^2(x)}{(\omega_\infty/\sqrt{-g_{00}})^2} \right) = -\frac{n^2}{g_{00}} \neq 0; \quad (5.11)$$

siendo n el índice de refracción del medio en cuestión dado por la ecuación (2.23) y donde la frecuencia de observación medida por un observador en una posición arbitraria del espaciotiempo, $\omega(x)$, viene dada por

$$\omega(x) = \frac{\omega_\infty}{\sqrt{-g_{00}}}. \quad (5.12)$$

De esta forma podemos reescribir el Hamiltoniano (5.10) como sigue,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} (\hat{g}^{ab} (p_a + \hat{\beta}_a \omega_\infty) (p_b + \hat{\beta}_b \omega_\infty) - \omega_\infty^2), \quad (5.13)$$

¹Esto induce una reparametrización en las ecuaciones de Hamilton.

donde

$$\hat{g}^{ab}(x) \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b} \equiv -\frac{g_{00}}{n^2} \left(g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + g^{33} \left(\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^2 \right), \quad (5.14)$$

con inversa \hat{g}_{ab} (definida como $\hat{g}_{ab} \hat{g}^{bc} = \delta_a^c$) dada por,

$$\hat{g}_{ab} = \frac{n^2}{-g_{00}} \left(g_{ab} - \frac{g_{0a} g_{0b}}{g_{00}} \right), \quad (5.15)$$

donde hemos usado la siguiente identidad para llegar a esta expresión,

$$\frac{1}{g^{33}} = g_{33} - \frac{(g_{03})^2}{g_{00}}. \quad (5.16)$$

Por otro lado, $\hat{\beta}_a$ son las componentes de la 1-forma $\hat{\beta}$ dada por,

$$\hat{\beta} \equiv \hat{\beta}_a(x) dx^a = \frac{g_{03}}{g_{00}} d\varphi. \quad (5.17)$$

Es importante señalar que \hat{g}_{ab} es una métrica 3-dimensional Riemanniana y, como sigue de las ecuaciones de Hamilton asociadas al Hamiltoniano (5.13), el movimiento de los rayos de luz quedan determinados por las ecuaciones [15],

$$\hat{g}_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = 1, \quad (5.18)$$

$$\dot{x}^a + \hat{\Gamma}_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = \hat{g}^{ad} (\partial_e \hat{\beta}_d - \partial_d \hat{\beta}_e) \dot{x}^e \quad (5.19)$$

donde $\hat{\Gamma}_{bc}^a$ son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica \hat{g}_{ab} . A partir de (5.19) vemos que si $\hat{\beta} \neq 0$ entonces los rayos de luz no seguirán curvas geodésicas respecto de la métrica \hat{g}_{ab} . Para espaciotiempos estáticos, los rayos de luz seguirán efectivamente curvas geodésicas respecto de esta métrica, y en tal caso la misma se reduce a la métrica dada por la ecuación (2.31) del capítulo 2, también conocida como métrica de Jacobi).

Por último, vale la pena señalar que la dinámica de los rayos de luz puede ser derivada a partir de la variación $\delta\mathcal{I} = 0$ de la acción

$$\mathcal{I} = \pm \int_{\tilde{s}_1}^{\tilde{s}_2} \mathcal{F}(x, \dot{x})(\tilde{s}) d\tilde{s}, \quad (5.20)$$

donde

$$\mathcal{F}(x, \dot{x}) = \sqrt{\hat{g}_{ab}(x) \dot{x}^a \dot{x}^b - \hat{\beta}_a(x) \dot{x}^a}, \quad (5.21)$$

es una métrica de tipo Finsler-Randers. Acorde al principio de Fermat, los rayos de luz son extremos de la funcional (5.20) y en particular siguen geodésicas respecto de la métrica \mathcal{F} . Nos referimos a [151] para un tratamiento más detallado de las geometrías de Finsler.

Expresiones explícitas de la métrica de Finsler-Randers (5.21) han sido obtenidas para el caso particular de rayos de luz propagándose en un plasma frío no magnetizado sobre el espaciotiempo de Kerr (ver [15]). Las ecuaciones (5.15) y (5.17) son sus generalizaciones a espaciotiempos estacionarios arbitrarios. Aún cuando dichas expresiones no aparecen en la literatura (a nuestro mejor entender), las mismas están implícitamente derivadas en [15]. Por otro lado, recientemente fue reportado en [136] una expresión de la métrica de Finsler-Randers para partículas masivas propagándose en un espaciotiempo de Kerr. Las ecuaciones (5.15) y (5.17) también contienen

este caso particular a través de la bien conocida correspondencia entre el movimiento de partículas masivas y el movimiento de fotones en un plasma homogéneo. A lo largo de este capítulo usaremos esta correspondencia a fin de estudiar el movimiento de partículas masivas.

5.2. Ángulo de deflexión en espaciotiempos estacionarios y axi-simétricos usando el teorema de Gauss-Bonnet

A fin de aplicar el teorema de Gauss-Bonnet para obtener una expresión del ángulo de deflexión de rayos de luz propagándose en un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico seguiremos el procedimiento descrito por Gibbons y Werner en [45] para el caso de gravedad pura y extendido al caso de plasma como parte de este trabajo (ver [40]). Esto es, aplicaremos el teorema de Gauss-Bonnet al dominio D_R que se muestra en la figura 2.2 pero a diferencia de los trabajos mencionados previamente, consideraremos que los rayos de luz no siguen necesariamente geodésicas respecto de la métrica óptica g_{ij}^{opt} ². En todos los casos estaremos asumiendo que los rayos de luz se propagan sobre el plano ecuatorial. Esto implica en particular que la curvatura geodésica de los rayos de luz proyectada sobre la variedad óptica no es cero, y por lo tanto obtenemos la siguiente expresión para el ángulo de deflexión α ,

$$\int_0^{\pi+\alpha} \left[\kappa_g \frac{d\sigma}{d\varphi} \right]_{C_R} d\varphi = \pi - \left(\int_{D_R} \mathcal{K} dS + \int_{\gamma_p} k_g dl \right), \quad (5.22)$$

donde el límite $R \rightarrow \infty$ en ambos lados de la igualdad está sobreentendido. Como ha sido previamente mencionado en este trabajo, para espaciotiempos asintóticamente planos se tiene que $[k_g \frac{d\sigma}{d\varphi}]_{C_R} \rightarrow 1$ a medida que el radio del semicírculo C_R tiende a infinito. En este caso particular se obtiene una expresión incluso mucho más simple para el ángulo de deflexión, el cual queda expresado en términos de la curvatura Gaussiana del dominio D_R así como también de la curvatura geodésica de los rayos de luz en la variedad óptica,

$$\alpha = - \int_{D_R} \mathcal{K} dS - \int_{\gamma_p} k_g dl. \quad (5.23)$$

Esta expresión es similar a la obtenida por Ono *et al* (ver ecuación (30) en [75]) donde la diferencia está en el dominio de integración utilizado debido a que en dicho trabajo están analizando también la contribución al ángulo de deflexión por distancias finitas. En este capítulo estaremos asumiendo que tanto el observador como la fuente se encuentran suficientemente lejos de la lente como para tener en cuenta dichas correcciones.

En general existen dos maneras de implementar la ecuación (5.23) para calcular el ángulo de deflexión en un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico que han sido llevadas a cabo para el caso de gravedad pura y que pretendemos implementar en esta capítulo para el caso de plasma. Las describiremos brevemente a continuación. Uno de los métodos, desarrollados en [75], consiste en usar la métrica Riemanniana \hat{g}_{ab} restringida al plano ecuatorial a fin de calcular las curvaturas Gaussiana y geodésica en (5.23). En este caso, debido a que los rayos de luz no siguen curvas geodésicas respecto de esta métrica, la curvatura geodésica asociada a γ_p no será cero. En particular, para rayos de luz propagándose en el plano ecuatorial

²Luego, identificaremos esta métrica con la métrica \hat{g}_{ij} .

caracterizado por $\theta = \pi/2$, su curvatura geodésica se puede calcular como sigue,

$$k_g = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}\hat{g}^{\theta\theta}}}\partial_r\hat{\beta}_\varphi, \quad (5.24)$$

donde \hat{g} es el determinante de \hat{g}_{ab} .

El otro método, reportado por Werner en [69] para espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos en el caso de gravedad pura consiste en construir una métrica Riemanniana a partir de una métrica de Finsler utilizando el método de Nazim [152]. La ventaja de este método es que, en este caso, los rayos de luz sí siguen geodésicas respecto de esta nueva métrica y por lo tanto su curvatura geodésica k_g será cero. La desventaja es que, incluso a orden dominante, los cálculos suelen ser bastante engorrosos.

A continuación veremos cómo implementar ambos métodos para estudiar el ángulo de deflexión asociado a los rayos de luz propagándose en un plasma frío en la aproximación de campo débil.

5.3. Ángulo de deflexión en la aproximación de campo débil usando el enfoque de Ono *et al*

En esta sección calcularemos el ángulo de deflexión en el régimen de campo gravitacional débil para rayos de luz propagándose en un plasma frío no magnetizado sobre un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico con el método implementado en [75] para el caso de gravedad pura. En particular, obtendremos una expresión general para el ángulo a orden lineal. Para ello, consideremos un espaciotiempo caracterizado por el elemento de línea,

$$ds^2 = -(1 + \epsilon_1 h_{tt}(r, \theta))dt^2 + (1 + \epsilon_2 h_{rr}(r, \theta))dr^2 + 2\epsilon_3 h_{t\varphi} dt d\varphi + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.25)$$

quedándonos sólo con aquellos términos lineales en los parámetros ϵ_1 , ϵ_2 y ϵ_3 . En general, se asume que $h_{t\varphi}$ es proporcional al parámetro de spin a y restringimos toda la discusión al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Al orden deseado, la métrica óptica \hat{g}_{ab} , así como la 1-forma $\hat{\beta}$, vienen dadas como sigue,

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ab}dx^a dx^b &= n^2[(1 - \epsilon_1 h_{tt} + \epsilon_2 h_{rr})dr^2 + r^2(1 - \epsilon_1 h_{tt})d\varphi^2], \\ \hat{\beta} &= \epsilon_3 h_{t\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Para un plasma frío no magnetizado con densidad de carga de la forma $N(r) = N_0 + N_1(r)$, tal que $N_0 = \text{constante}$, se sigue que el índice de refracción viene dado por lo siguiente,

$$n^2 = 1 - \frac{K_e N(r)}{\omega_\infty^2}(1 + \epsilon_1 h_{tt}), \quad (5.27)$$

donde hemos usado que $\omega_e^2 = K_e N(r)$. El ángulo de deflexión se escribe entonces como sigue

$$\alpha = -\underbrace{\int \int_{D_R} \mathcal{K} dS}_{\alpha_{\mathcal{K}}} - \underbrace{\int_R^S \kappa_g dl}_{\alpha_{\kappa_g}}. \quad (5.28)$$

Al orden deseado, la 2-forma $\mathcal{K}dS$ viene dada de la siguiente manera,

$$\mathcal{K}dS = (\epsilon_2 \tilde{\mathcal{K}}_{\epsilon_2} + \epsilon_1 \tilde{\mathcal{K}}_{\epsilon_1} + \tilde{\mathcal{K}}_{\text{plasma}}) dr d\varphi; \quad (5.29)$$

con

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\epsilon_2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{h_{rr}}{2} \right), \quad (5.30)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\epsilon_1} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\omega_\infty^2 r h'_{tt}}{2(\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2)} \right), \quad (5.31)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\text{plasma}} = \frac{d}{dr} \left(\frac{K_e r N'_1}{2(\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2)} \right). \quad (5.32)$$

Asumamos que $\tilde{\mathcal{K}}_{\epsilon_2}$, $\tilde{\mathcal{K}}_{\epsilon_1}$ y $\tilde{\mathcal{K}}_{\text{plasma}}$ son simultáneamente distintas de cero, es decir, ni h_{rr} ni $r h'_{tt}$ ni $r N'_1$ toman valores constantes simultáneamente. Por el momento, sólo consideraremos órbitas prógradas, esto es, órbitas cuyo momento angular orbital se encuentra en la misma dirección que el spin de la métrica considerada.

Como estamos interesados en contribuciones a primer orden para el ángulo de deflexión es suficiente integrar sobre el dominio D_R donde la curva γ_p se puede aproximar por la trayectoria seguida por los rayos de luz en el espaciotiempo plano de fondo, esto es, por líneas rectas. Por lo tanto, la ecuación para γ_p en el dominio de integración D_R puede ser reemplazada por la línea recta $r_\varphi = \frac{b}{\sin \varphi}$, donde la coordenada angular polar φ va de 0 a π . En tal caso, la integración de (5.29) nos da lo siguiente,

$$\alpha_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\epsilon_2 h_{rr} + \epsilon_1 \frac{\omega_\infty^2 r h'_{tt}}{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2} + \frac{r K_e N'_1}{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2} \right) \Big|_{r_\varphi} d\varphi. \quad (5.33)$$

Como veremos en la sección 5.5.1, para obtener correcciones de orden más alto esta aproximación debe ser mejorada.

Veamos ahora α_{k_g} ,

$$\alpha_{k_g} = \int_0^\pi \left(k_g \frac{dl}{d\varphi} \right) \Big|_{r_\varphi} d\varphi. \quad (5.34)$$

La curvatura geodésica k_g obtenida a partir de la ecuación (5.24) viene dada por,

$$k_g = -\epsilon_3 \frac{h'_{t\varphi}}{r} \frac{\omega_\infty^2}{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2} + \mathcal{O}(\epsilon_3 \epsilon_1, \epsilon_3^2). \quad (5.35)$$

Por otro lado, para órbitas prógradas,

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{\sqrt{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2}}{\omega_\infty b} r^2 \Big|_{r_\varphi}. \quad (5.36)$$

Luego,

$$\alpha_{k_g} = - \int_0^\pi \frac{\epsilon_3}{b} \left(\frac{r \omega_\infty h'_{t\varphi}}{\sqrt{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2}} \right) \Big|_{r_\varphi} d\varphi. \quad (5.37)$$

Finalmente, se obtiene la siguiente expresión para el ángulo de deflexión,

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\epsilon_2 h_{rr} + \epsilon_1 \frac{\omega_\infty^2 r h'_{tt}}{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2} + \frac{r K_e N'_1}{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2} - \epsilon_3 \frac{2r \omega_\infty h'_{t\varphi}}{b \sqrt{\omega_\infty^2 - \omega_{e0}^2}} \right) \Big|_{r_\varphi} d\varphi. \quad (5.38)$$

Para espaciotiempos estáticos ($\epsilon_3 = 0$) esta expresión puede ser comparada con

el resultado obtenido por Bisnovatyi-Kogan y Tsupko en [22] (ver ecuación (30) de dicha referencia), con la diferencia que nuestra expresión para el ángulo de deflexión está dada en coordenadas radiales en vez de las cartesianas utilizadas en [22]. Luego de un cambio de coordenadas se puede ver que son completamente equivalentes.

El caso de órbitas retrógradas puede ser analizado de forma similar integrando bajo un dominio correspondiente D'_R , resultando en una expresión similar a (5.38) pero con el signo opuesto en el último término. Alternativamente, esto puede ser entendido como que el movimiento retrógrado del fotón, con momento angular orbital $p_\varphi < 0$, en la expresión coordenada original para la métrica (con spin a positivo y comenzando en la región asintótica en $\varphi_S = 0$ y con el observador en $\varphi_R = -\pi$) es equivalente al movimiento de un fotón con momento angular positivo $p_\varphi > 0$ en una métrica de la misma forma coordenada que en (5.25) pero obtenida reemplazando a por $-a$ y estudiando las órbitas que emanan de la región asintótica en $\varphi_S = 0$ y terminan en $\varphi_R = \pi$.

Vale la pena notar que a diferencia de la expresión exacta para el ángulo de deflexión en términos de la distancia de menor acercamiento en el espaciotiempo de Kerr para plasmas inhomogéneos derivada por Perlick en [15], en la práctica resulta ser más conveniente trabajar con una expresión aproximada del mismo en términos del parámetro de impacto (en vez de la distancia de mínimo acercamiento) debido a que este es un parámetro definido asintóticamente y que no depende de las coordenadas elegidas. Por lo tanto, para aplicaciones en la aproximación de campo gravitacional débil, la expresión (5.38) es más conveniente que la obtenida por Perlick en [15]. Por otro lado, la expresión derivada en [15] no está limitada a la aproximación de campo débil y por lo tanto puede ser utilizada en el caso general. En la sección 5.5 derivaremos una expresión para el ángulo de deflexión con las mismas características que (5.38) en el espaciotiempo de Kerr y para diferentes perfiles de plasma teniendo en cuenta incluso correcciones de orden superior.

5.3.1. Correspondencia entre fotones propagándose en un plasma homogéneo y partículas masivas

A partir de la identificación entre el movimiento de fotones en un medio plasmático y el de partículas masivas en gravedad pura como explicamos en la sección 2.5, y estableciendo los parámetros $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, podemos expresar el ángulo de deflexión para partículas masivas como sigue,

$$\alpha_{\text{mp}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(h_{rr} + \frac{rh'_{tt}}{v^2} - 2s \frac{rh'_{t\varphi}}{bv} \right) \Big|_{r_\varphi} d\varphi, \quad (5.39)$$

con $s = +1$ para órbitas prógradas y $s = -1$ para órbitas retrógradas. Como aplicación de esta expresión consideraremos la propagación de una partícula masiva en el espaciotiempo de Kerr-Newman y en el agujero de gusado rotante de Teo.

5.3.1.1. Espaciotiempo de Kerr-Newman

Consideremos un espaciotiempo de Kerr-Newman caracterizado por el siguiente elemento de línea a primer orden en a , M y Q^2 ,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 - \frac{4aM \sin^2 \theta}{r} dt d\varphi + \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{Q^2}{r^2} \right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \mathcal{O}(M^2, a^2, aQ^2). \quad (5.40)$$

Restringiéndonos al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ podemos hacer la siguiente identificación,

$$h_{tt}(r) = -\frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (5.41)$$

$$h_{rr}(r) = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2}, \quad (5.42)$$

$$h_{t\varphi}(r) = -\frac{2aM}{r}. \quad (5.43)$$

Usando la expresión (5.39) obtenemos el ángulo de deflexión asociado a partículas masivas para órbitas prógradas/retrógradas,

$$\alpha_{\text{mp}} = \frac{2M}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) - \frac{\pi Q^2}{4b^2} \left(1 + \frac{2}{v^2}\right) - \frac{4saM}{b^2v}, \quad (5.44)$$

el cual coincide con el resultado obtenido en [153] para partículas sin carga.

5.4. Ángulo de deflexión en la aproximación de campo débil usando el enfoque de Werner: partículas masivas

A continuación mostramos un método alternativo propuesto originalmente por Werner (para el caso de gravedad pura) para calcular el ángulo de deflexión en espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos. Debido a que este método requiere la construcción de una métrica Riemanniana no trivial, incluso para expresiones lineales y lentes rotando lentamente, resulta una tarea tediosa obtener una expresión similar a la obtenida en la ecuación (5.39). Por esta razón, utilizaremos este enfoque sólo a fin de recuperar expresiones conocidas para el ángulo de deflexión de partículas masivas propagándose sobre el espaciotiempo de Kerr.

5.4.1. Espaciotiempo de Kerr

Consideremos la métrica de Kerr restringida al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 - \frac{4aM}{r} dt d\varphi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\varphi^2 \quad (5.45)$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (5.46)$$

En lo que sigue usaremos la métrica (5.45) para obtener el ángulo de deflexión de partículas masivas. Para ello debemos primero obtener la métrica de Finsler-Randers \mathcal{F} asociada a la métrica de Kerr, la cual, para una variedad \mathcal{M} con $x \in \mathcal{M}$ y $X \in T_x\mathcal{M}$, viene dada por el Hessiano,

$$g_{ij}(x, X) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(x, X)}{\partial X^i \partial X^j}. \quad (5.47)$$

Usando la correspondencia entre fotones en un plasma homogéneo y partículas con masa discutidas en (5.3.1) podemos estudiar la propagación de partículas masivas sobre el espaciotiempo de Kerr.

En particular, se asume que la partícula con masa m deja la región asintótica con velocidad v medida por un observador asintótico y por lo tanto con energía,

$$E_\infty = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (5.48)$$

De la misma manera, asumimos que la partícula tiene un momento angular,

$$J = \frac{m\varpi b}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (5.49)$$

Considerando únicamente partículas siguiendo órbitas prógradas y propagándose en un medio efectivo con índice de refracción,

$$n^2(r) = 1 - \frac{m^2}{E^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 1 - (1-v^2) \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (5.50)$$

se sigue que la métrica de Finsler-Randers viene dada por la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(r, \varphi, \frac{dr}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right) &= \left[1 - (1-v^2) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{1/2} \\ &\times \left[\frac{r^4 \Delta}{(\Delta - a^2)^2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{r^4}{\Delta(\Delta - a^2)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{2Mar}{\Delta - a^2} \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Cómo hemos mencionado previamente en este trabajo, acorde al principio de Fermat en relatividad general, las partículas masivas (debido a la correspondencia con fotones en un plasma homogéneo) siguen geodésicas con respecto a la métrica de Finsler-Randers \mathcal{F} . Esto es, partículas de prueba con masa siguen geodésicas dadas por la condición,

$$0 = \delta \int_{\gamma_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}(x, \dot{x}) dt. \quad (5.52)$$

Vale la pena destacar que $\gamma_{\mathcal{F}}$ representa una geodésica de la métrica de Kerr-Randers \mathcal{F} . Siguiendo el método propuesto por Werner [69], uno puede ahora construir una variedad Riemanniana (\mathcal{M}, \bar{g}) usando el llamado método de Nazım [152] que consiste en tomar un campo vectorial tangente \bar{X} a la geodésica $\gamma_{\mathcal{F}}$ con $\bar{X}(\gamma_{\mathcal{F}}) = \dot{x}$ para obtener una métrica Riemanniana como sigue,

$$\bar{g}_{ij}(x) = g_{ij}(x, \bar{X}(x)). \quad (5.53)$$

Por otro lado, es imprescindible destacar el hecho crucial de que la curva geodésica $\gamma_{\mathcal{F}}$ asociada a la métrica de Finsler-Randers es también una geodésica de la métrica Riemanniana \bar{g} (ver [69] para más detalles). Por lo tanto, la curvatura geodésica de esta curva es cero. En lo que sigue utilizaremos esta métrica Riemanniana para calcular el ángulo de deflexión de partículas de prueba con masa. A orden lineal es suficiente utilizar la aproximación de Born, por lo tanto uno puede considerar las componentes del vector tangente como sigue,

$$\bar{X}^r = -\cos \varphi + \mathcal{O}(a, M), \quad (5.54)$$

$$\bar{X}^\varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{b} + \mathcal{O}(a, M). \quad (5.55)$$

Para espaciotiempos asintóticamente planos, y debido a que la curvatura geodésica es cero, el ángulo de deflexión viene dado por la expresión,

$$\alpha_{\text{mp}} = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int \int_{D_R} \mathcal{K} dS, \quad (5.56)$$

donde \mathcal{K} y dS son la curvatura Gaussiana y el elemento de superficie asociados a la métrica \bar{g} .

Utilizando el método descrito previamente, la métrica Riemanniana \bar{g} a orden dominante viene dada por lo siguiente,

$$\bar{g}_{rr} = v^2 + \frac{2(1+v^2)M}{r} - \frac{2Marv \sin^6 \varphi}{(r^2 \sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi b^2)^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{b^2}, \frac{a^2}{b^2}\right), \quad (5.57)$$

$$\bar{g}_{\varphi\varphi} = r^2 v^2 + 2Mr - \frac{2Mav \sin^2 \varphi r (2 \sin^4 \varphi r^2 + 3 \cos^2 \varphi b^2)}{(r^2 \sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi b^2)^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{b^2}, \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (5.58)$$

$$\bar{g}_{r\varphi} = \frac{2avM \cos^3 \varphi}{r \left(\frac{r^2 \sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi b^2}{b^2}\right)^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{b^2}, \frac{a^2}{b^2}\right), \quad (5.59)$$

con determinante,

$$\det \bar{g} = r^2 v^2 + 2v^2 Mr (v^2 + 2) - \frac{6Mav^3 r \sin^2 \varphi}{\sqrt{r^2 \sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi b^2}} + \mathcal{O}(a^2, M^2); \quad (5.60)$$

mientras que la curvatura Gaussiana nos queda,

$$\mathcal{K} = -\frac{M(v^2 + 1)}{v^4 r^3} + \frac{Ma}{r^2 v^3} f(r, \varphi) + \mathcal{O}\left(\frac{M^2}{b^4}, \frac{a^2}{b^4}\right) \quad (5.61)$$

donde

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) = & \frac{1}{(r^2 \sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi b^2)^{7/2}} \left(30 \cos^4 \varphi \sin^8 \varphi b^2 r^3 - 6 \sin^{14} \varphi r^5 \right. \\ & + 12 \cos^2 \varphi \sin^{10} \varphi b^2 r^3 - 48 \cos^4 \varphi \sin^7 \varphi b^3 r^2 - 24 \cos^2 \varphi \sin^9 \varphi b^3 r^2 \\ & - 30 \cos^6 \varphi \sin^4 \varphi b^4 r - 27 \cos^4 \varphi \sin^6 \varphi b^4 r \\ & \left. - 12 \cos^2 \varphi \sin^8 \varphi b^4 r + 12 \cos^6 \varphi \sin^3 \varphi b^5 + 6 \cos^4 \varphi \sin^5 \varphi b^5 \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Usando las ecuaciones (5.61) y (5.62), y a partir de la expresión (5.56), el ángulo de deflexión se puede expresar como sigue,

$$\alpha_{\text{mp}} = - \int_0^\pi \int_{\frac{b}{\sin \varphi}}^\infty \left(-\frac{M(v^2 + 1)}{v^2 r^2} + \frac{Ma}{rv} f(r, \varphi) \right) dr d\varphi. \quad (5.63)$$

Finalmente, realizando la integral obtenemos,

$$\alpha_{\text{mp}} = \frac{2M}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) - \frac{4Ma}{b^2 v}, \quad (5.64)$$

el cual coincide con (5.44) si tomamos $Q = 0$. En el límite $v \rightarrow 1$, recuperamos el ángulo de deflexión de rayos de luz propagándose en el espaciotiempo de Kerr

[154-156].

De esta manera, hemos mostrado que es posible calcular el ángulo de deflexión para partículas masivas usando el enfoque de Werner, o equivalentemente, el ángulo de rayos de luz propagándose en un plasma homogéneo. A fin de estudiar la propagación de rayos de luz en un plasma inhomogéneo preferimos utilizar el método discutido en la sección 5.3 debido a que es más directo. Estudiaremos este caso en la sección 5.5.1.

5.5. Correcciones de orden superior al ángulo de deflexión

5.5.1. Ángulo de deflexión para partículas masivas a tercer orden en el espaciotiempo de Kerr

Como hemos mostrado, a orden lineal, la expresión (5.39) es una fórmula general y por lo tanto no es necesario volver a repetir el cálculo de las curvaturas Gaussianas y geodésicas para cada una de las métricas bajo estudio.

Sin embargo, la misma no se puede aplicar al estudio de correcciones de orden superior. Más aún, a orden superior la aproximación de Born no resulta suficiente y el dominio de integración depende cada vez más de los detalles de la órbita. A nuestro mejor entendimiento, todos los cálculos existentes del ángulo de deflexión en espaciotiempos estacionarios basados en el uso del teorema de Gauss-Bonnet se han limitado a encontrar expresiones a orden lineal debido al spin intrínseco de las métricas (ver por ejemplo [68, 72, 157]).

Nos proponemos aquí a llenar ese bache al calcular el ángulo de deflexión de partículas de prueba relativistas con masa en el espaciotiempo de Kerr incluyendo correcciones de orden superior, esto es, expresiones que contengan términos de la forma $\frac{M^3}{b^3}$, $\frac{M^2 a}{b^3}$ y $\frac{Ma^2}{b^3}$. En particular, veremos que para el caso de partículas sin masa nuestras expresiones se reducen a fórmulas conocidas obtenidas utilizando otras técnicas [156, 158].

Como mencionamos, a orden superior, necesitamos ir más allá de la aproximación de Born y en particular, necesitamos conocer la órbita de las partículas masivas o sin masa, según corresponda, al menos a segundo orden.

Antes de llevar a cabo esto, escribamos una expresión general para la órbita en el plano ecuatorial para un espaciotiempo estacionario general descrito por el siguiente elemento de línea,

$$ds^2|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -Adt^2 - 2Hdtd\varphi + Bdr^2 + Dd\varphi^2. \quad (5.65)$$

A partir del Hamiltoniano $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta + m^2)$, se sigue que la ecuación de la órbita para órbitas prógradas de una partícula que se asume dejando la región asintótica con una velocidad v medida por un observador asintótico y por lo tanto con una energía y momento angular dados por las ecuaciones (5.48) y (5.49) viene dada por lo siguiente,

$$\left(\frac{du_\gamma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{u_\gamma^4 \Delta}{(H + Abv)^2 B} [-\Delta(1 - v^2) + D - 2Hbv - Ab^2 v^2]; \quad (5.66)$$

con $\Delta = AD + H^2$ y donde $u_\gamma = 1/r_\gamma$. Para partículas sin masa ($v = 1$), se reduce a la expresión obtenida en [75].

Particularicemos para el espaciotiempo de Kerr. Para otras métricas estacionarias el procedimiento será similar. En este caso, las componentes de la métrica en el plano

ecuatorial vienen dadas como sigue,

$$A = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (5.67)$$

$$H = \frac{2aM}{r}, \quad (5.68)$$

$$B = \frac{r^2}{\Delta}, \quad (5.69)$$

$$D = r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}; \quad (5.70)$$

con $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr$. Mientras que la ecuación de la órbita nos queda,

$$\left(\frac{du_\gamma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1 + a^2u_\gamma^2 - 2Mu_\gamma}{[2Mu_\gamma(a - bv) + bv]^2} \left[2M(a - bv)^2u_\gamma^3 + v^2(a^2 - b^2)u_\gamma^2 + 2M(1 - v^2)u_\gamma + v^2 \right]. \quad (5.71)$$

Como estaremos trabajando en el régimen de campo gravitacional débil, vamos a definir los siguientes parámetros y realizar expansiones alrededor de ellos,

$$\gamma = \frac{M}{b} \ll 1; \quad \delta = \frac{a}{b} \ll 1. \quad (5.72)$$

En particular, como estaremos interesados en una expresión para el ángulo de deflexión que sea correcta hasta tercer orden en estos parámetros, esto es, que contenga términos de la forma γ^3 , $\gamma^2\delta$ y $\gamma\delta^2$, necesitamos conocer u_γ al menos a segundo orden en dichos parámetros, esto es, requerimos una expresión para u_γ de la siguiente forma,

$$u_\gamma = u_0 + u_1\gamma + u_2\delta + u_3\gamma^2 + u_4\delta\gamma + u_5\delta^2 + \mathcal{O}(\gamma^3, \gamma\delta^2, \delta\gamma^2, \delta^3). \quad (5.73)$$

Reemplazando este *ansatz* en la ecuación (5.71), e imponiendo la condición asintótica $\lim_{\varphi \rightarrow 0} u = 0$, obtenemos la solución a segundo orden para la ecuación de la órbita,

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{\sin \varphi}{b}, \\ u_1 &= \frac{(\cos \varphi - 1)(v^2 \cos \varphi - 1)}{bv^2}, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= -\frac{1}{16bv^2} \left[12\varphi \cos \varphi (4 + v^2) + 3v^2 \sin(3\varphi) \right. \\ &\quad \left. + (11v^2 - 16) \sin \varphi - 16 \sin(2\varphi)(1 - v^2) \right] \\ u_4 &= -\frac{2(1 - \cos \varphi)}{bv}, \\ u_5 &= \frac{\sin^3 \varphi}{2b}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

El hecho que u_5 , que es proporcional a $\frac{a^2}{b^2}$, sea diferente de cero incluso para un espaciotiempo plano ($M = 0$) debe ser esperado debido a que las coordenadas r, φ son esferoidales en vez de esféricas, y por lo tanto a orden a^2 en estas coordenadas

una línea recta no viene dada por $r = b/\sin\varphi$. Por la misma razón, el hecho que u_2 , proporcional a $\frac{a}{b}$, sea cero también debe ser esperado debido a que cuando $M = 0$ la correspondiente métrica plana depende de a^2 y por lo tanto a orden lineal en a las coordenadas se comportan como coordenadas polares estándar.

Veamos ahora la métrica óptica asociada, la cual se obtiene a partir de la ecuación (5.15),

$$\hat{g}_{rr} = \frac{n^2 r^4}{(r^2 - 2Mr)\Delta}, \quad (5.75)$$

$$\hat{g}_{\varphi\varphi} = \frac{n^2 r^2 \Delta}{(r - 2M)^2}. \quad (5.76)$$

con índice de refracción dado por la ecuación (5.50).

Para calcular el ángulo de deflexión utilizando el teorema de Gauss-Bonnet, necesitamos definir primero el dominio de integración. Este dominio está acotado por debajo por la órbita bajo análisis determinada por $r_\gamma \equiv 1/u_\gamma$, y la curva semi-circular C_R con radio $R \rightarrow \infty$ por arriba. Para la coordenada angular φ , elegimos la posición de la fuente en $\varphi_S = 0$, y la posición del observador en $\varphi_R = \pi + \alpha^{(1)}$, donde $\alpha^{(1)}$ es la expresión a primer orden en la masa del ángulo de deflexión, esto es, dado por el primer término de la ecuación (5.44).

Al orden considerado la 2-forma $\mathcal{K}dS$ viene dada como sigue,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}dS = & \left[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)M}_{\hat{\mathcal{K}}_M} + \underbrace{\left(1 + \frac{6}{v^2} - \frac{4}{v^4}\right)M^2 u}_{\hat{\mathcal{K}}_{M^2}} + \underbrace{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{15}{v^2} - \frac{20}{v^4} + \frac{8}{v^6}\right)M^3 u^2}_{\hat{\mathcal{K}}_{M^3}} \right. \\ & \left. + 3 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)a^2 M u^2}_{\hat{\mathcal{K}}_{Ma^2}} \right] dud\varphi, \end{aligned} \quad (5.77)$$

y por lo tanto la contribución de la curvatura Gaussiana al ángulo de deflexión se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{K}} = & \int_0^{\pi + \frac{2M}{b}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)} \int_0^{u_\gamma} (\hat{\mathcal{K}}_M + \hat{\mathcal{K}}_{M^2} + \hat{\mathcal{K}}_{M^3} + \hat{\mathcal{K}}_{Ma^2}) dud\varphi \\ = & \frac{2M}{b}\left(1 + \frac{1}{v^2}\right) + \frac{3\pi(4 + v^2)}{4v^2} \frac{M^2}{b^2} + \frac{2(15v^2 + 5v^6 + 45v^4 - 1)}{3v^6} \frac{M^3}{b^3} \\ & - \frac{2\pi(1 + v^2)}{v^3} \frac{aM^2}{b^3} + \frac{2(1 + v^2)}{v^2} \frac{a^2 M}{b^3} + \mathcal{O}\left(\frac{M^4}{b^4}, \frac{M^3 a}{b^4}, \frac{M^2 a^2}{b^4}, \frac{M a^3}{b^4}\right). \end{aligned} \quad (5.78)$$

En la integración sobre la variable angular aparecen funciones trigonométricas que deben ser evaluadas en φ_R y por lo tanto deben ser re-expandidas en términos de γ y δ alrededor de π . Como mencionamos anteriormente, se puede chequear por integración directa que si en vez de considerar $\varphi_R = \pi + \alpha^{(1)}$ consideráramos $\varphi_R = \pi + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}$, con $\alpha^{(2)}$ formado por términos de orden $\delta^2 = M^2/b^2$ y $\delta\gamma = Ma/b^2$, la contribución a $\alpha_{\mathcal{K}}$ de este nuevo término sería de orden superior al tercero. Esto se puede ver del hecho que sólo términos que potencialmente contribuirían a tercer orden sobre el ángulo de deflexión (al introducir correcciones a segundo orden en φ_R) vendrían de la integración en la variable angular del siguiente término,

$$\int_0^{u_\gamma} \tilde{\mathcal{K}}_M du = \left(1 + \frac{1}{v^2}\right) \frac{M}{b} \sin\varphi + \mathcal{O}(M^2, Ma^2, M^3). \quad (5.79)$$

Sin embargo, como la integración de (5.79) en la variable angular producirá un término proporcional a

$$M \cos \varphi_R = M \cos \left(\pi + a_1 \frac{M}{b} + a_2 \frac{Ma}{b} + a_3 \frac{M^2}{b^2} + \mathcal{O}\left(\frac{Ma^2}{b^2}, \frac{M^3}{b^3}\right) \right), \quad (5.80)$$

con a_1 , a_2 y a_3 constantes, se sigue que luego de re-expandir este término en potencias de M , sólo el primer término en M de φ_R (proporcional a a_1) contribuirá a tercer orden. Por lo tanto, a fin de calcular el ángulo de deflexión a tercer orden, necesitamos conocer la órbita a segundo orden y el ángulo de deflexión a primer orden. Usando el mismo argumento, se puede ver que para conocer el ángulo a orden n usando (5.28), necesitamos conocer la órbita a orden $n - 1$ y el ángulo de deflexión a orden $n - 2$.

Para finalizar, necesitamos además conocer la contribución de α_{κ_g} al ángulo de deflexión. En nuestro caso,

$$\hat{\beta} = -\frac{2Mar}{r^2 - 2Mr} d\varphi. \quad (5.81)$$

La curvatura geodésica asociada viene dada por lo siguiente,

$$\kappa_g = -\frac{2aM}{\sqrt{r(r-2M)}[2Mr(1-v^2) + r^2v^2]} \Big|_{r_\gamma}. \quad (5.82)$$

Por otro lado, el elemento de línea dl nos queda,

$$dl = \sqrt{\left(\hat{g}_{rr} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \hat{g}_{\varphi\varphi} \right)} \Big|_{r_\gamma} d\varphi. \quad (5.83)$$

Al orden deseado vemos que la cantidad $\kappa_g dl$ resulta de la siguiente forma,

$$\kappa_g dl \Big|_{r_\gamma} = d\varphi \left[-\frac{\sin \varphi}{v} \frac{2Ma}{b^2} + \frac{2(\cos \varphi - 1)(2v^2 \cos \varphi + 3v^2 + 1)}{v^3} \frac{M^2 a}{b^3} \right]. \quad (5.84)$$

Por lo tanto, la contribución α_{κ_g} al ángulo de deflexión será la siguiente,

$$\alpha_{\kappa_g} = \int_0^{\varphi_R} \kappa_g dl \approx \left[-\frac{4Ma}{b^2 v} - \frac{2\pi(1+2v^2)}{v^3} \frac{M^2 a}{b^3} \right]. \quad (5.85)$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones (5.78) y (5.85), y definiendo el parámetro adimensional $\hat{a} = \frac{a}{M}$, que para agujeros negros satisface $|\hat{a}| \leq 1$, el ángulo de deflexión al orden que estamos considerando se puede escribir como sigue,

$$\begin{aligned} \alpha = & \underbrace{\frac{2M}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right)}_{\alpha^{(1)}} + \underbrace{\left[\frac{3\pi}{4} \left(1 + \frac{4}{v^2} \right) - \frac{4\hat{a}}{v} \right] \frac{M^2}{b^2}}_{\alpha^{(2)}} \\ & + \underbrace{\left[\frac{2}{3} \left(5 + \frac{45}{v^2} + \frac{15}{v^4} - \frac{1}{v^6} \right) - \frac{2\pi(2+3v^2)\hat{a}}{v^3} + \frac{2(v^2+1)\hat{a}^2}{v^2} \right] \frac{M^3}{b^3}}_{\alpha^{(3)}}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Para partículas sin masa se obtiene la siguiente expresión,

$$\alpha = \frac{4M}{b} + \left[\frac{15\pi}{4} - 4\hat{a} \right] \frac{M^2}{b^2} + \left[\frac{128}{3} - 10\pi\hat{a} + 4\hat{a}^2 \right] \frac{M^3}{b^3}; \quad (5.87)$$

la cual coincide con los resultados obtenidos por otros autores utilizando técnicas diferentes [156, 158]. Al igual que en los casos previos que hemos analizado en este capítulo, para órbitas retrógradas sólo debemos cambiar el signo de los términos lineales en \hat{a} para obtener el ángulo de deflexión correspondiente.

De esta forma hemos mostrado por primera vez que el método propuesto por Ono *et al* en [75] puede ser aplicado de manera exitosa al cálculo del ángulo de deflexión a orden superior para espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos, y más aún, se puede aplicar para estudiar partículas masivas. No tenemos conocimiento de una presentación previa de la ecuación (5.86) en la literatura.

Por último, utilizando la correspondencia entre partículas de prueba con masa y fotones en un plasma homogéneo, la ecuación (5.86) nos da el ángulo de deflexión de rayos de luz con frecuencia ω_∞ en un plasma homogéneo caracterizado por $\omega_e = \text{constante}$, simplemente reemplazando v en la ecuación (5.86) por la velocidad de grupo $v_{\text{gr}} = n_0 = \sqrt{1 - \omega_e^2/\omega_\infty^2}$, en unidades donde $c = 1$.

De manera ilustrativa en las figuras (5.1) y (5.2) consideramos un agujero negro con parámetros similares a los del agujero negro supermasivo del centro de nuestra galaxia, Sgr A*, a fin de analizar las diferentes contribuciones del ángulo de deflexión. Consideramos los siguiente valores: $M = 4,1 \times 10^6 M_\odot$, $\hat{a} = 0,6$ y asumimos que $b = 100M$. En ambas figuras graficamos las contribuciones $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ y $\alpha^{(3)}$ al ángulo de deflexión total. En la figura (5.1) graficamos dichas contribuciones en términos de la velocidad de la partícula masiva mientras que en la figura (5.2) lo hacemos en términos del cociente ω_e/ω_∞ . En ambas situaciones consideramos tanto órbitas progradas ($s = 1$) como retrógradas ($s = -1$), como así también el caso $\hat{a} = 0$.

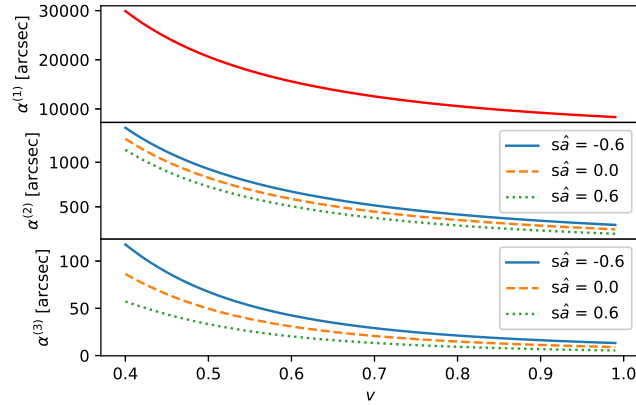


FIGURA 5.1: Diferentes contribuciones al ángulo de deflexión total dado por la ecuación (5.86) para una lente con parámetros $M = 4.1 \times 10^6 M_\odot$ y $\hat{a} = 0.6$ en términos de la velocidad v de la partícula masiva. Asumimos además que $b = 100M$.

En el apéndice (F) presentamos una derivación alternativa de la ecuación (5.86) generalizando un método originalmente propuesto por Aazami, Keeton y Petters en [156].

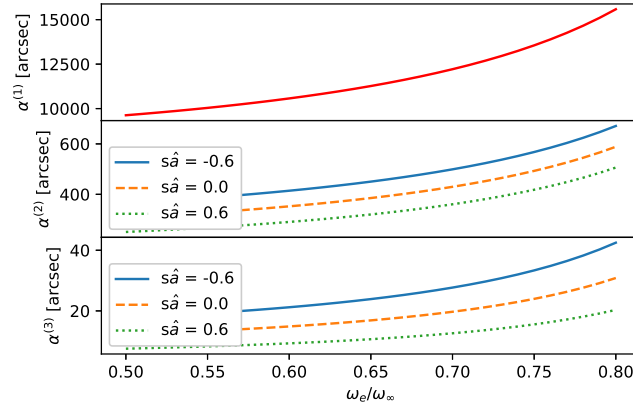


FIGURA 5.2: Diferentes contribuciones al ángulo de deflexión para un plasma homogéneo con $\omega_e = \text{constante}$ (obtenido a partir de la ecuación (5.86) reemplazando v^2 por $1 - \omega_e^2/\omega_\infty^2$). Consideramos una lente con parámetros $M = 4.1 \times 10^6 M_\odot$, $\hat{a} = 0.6$ y $b = 100M$.

5.5.2. Ángulo de deflexión de rayos de luz en un plasma inhomogéneo hasta tercer orden en el espaciotiempo de Kerr

Consideremos un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico en presencia de un plasma frío no magnetizado cuyo elemento de línea restringido al plano ecuatorial toma la forma de la ecuación (5.65). Para este caso, la ecuación de la órbita se puede escribir como sigue,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{u^4(\omega_e^2\Delta - Dp_t^2 - 2Hp_t p_\varphi + Ap_\varphi^2)\Delta}{B(-Hp_t + Ap_\varphi)^2} \quad (5.88)$$

En general, para un fotón propagándose en una órbita prógrada en un plasma se suele identificar las constantes de movimiento p_t y p_φ de la forma,

$$p_t = -\hbar\omega_\infty \quad (5.89)$$

$$p_\varphi = -p_t b n_0, \quad (5.90)$$

donde b es el parámetro de impacto y n_0 el valor asintótico del índice de refracción del medio en cuestión. En la discusión que sigue estaremos asumiendo un modelo de plasma caracterizado por

$$\omega_{e0} = 0, \quad N_1(r) = \frac{\tilde{N}_0}{r^k}, \quad (5.91)$$

siendo \tilde{N}_0 una constante y k un número entero positivo. En el caso de espaciotiempos esféricamente simétricos, una discusión detallada de la contribución de un plasma con este perfil sobre el ángulo de deflexión a orden dominante puede ser consultada en [22].

Esta familia de perfiles de plasma suele ser útil para describir los entornos de plasmas en galaxias y cluster de galaxias. Por otro lado, para el agujero negro del centro de nuestra galaxia, un perfil de plasma con dependencia radial de la forma $r^{-1.1}$ ha sido también considerado por diferentes autores [159, 160]. A pesar de que este caso no pertenece a la familia descrita por (5.91), para $k = 1$ podemos tener una buena aproximación al ángulo de deflexión para esta clase de sistemas. Como se discutió en el capítulo 3 modelos con potencia de orden más alto, incluyendo $k = 6$ y

$k = 16$, también aparecen en discusiones sobre la propagación de la luz en el sistema solar teniendo en cuenta la influencia de la corona solar [10, 76, 129, 130, 132]. En [22] expresiones analíticas cerradas a primer orden fueron derivadas para cualquier valor de k . Para órdenes más altos es más difícil obtener expresiones generales y los pasos intermedios son poco ilustrativos. Por esta razón, en lo siguiente sólo consideraremos los casos $k = \{1, 2, 3\}$, mostrando en detalle la manera de proceder para el caso $k = 2$, y sólo dando las expresiones finales para los otros dos casos. Para cualquier otro valor de k que no sea considerado en este trabajo, la expresión para el ángulo de deflexión se puede derivar de la misma forma en que procederemos para $k = 2$.

Nuestras expresiones finales también pueden ser utilizadas para espaciotiempos esféricamente simétricos. En lo que sigue estaremos considerando que la frecuencia del fotón en la región asintótica, ω_∞ , es mucho más grande que la frecuencia del plasma $\tilde{\omega}_e \equiv \omega_e(b)$ en $r = b$. Esto es, asumiremos que $\epsilon = \frac{\tilde{\omega}_e^2}{\omega_\infty^2} \ll 1$. Notemos que para la situación presente, $n_0 = 1$; y por lo tanto, la ecuación de la órbita se puede reescribir como,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -\frac{u^4[\omega_e^2\Delta - (D + 2Hb - Ab^2)\omega_\infty^2]\Delta}{B\omega_\infty^2(H + Ab)^2} \quad (5.92)$$

Restrinjamos nuestra atención al espaciotiempo de Kerr con funciones coordenadas A, H, B y D dadas por (5.67)-(5.70). Utilizando el *ansatz*,

$$u = u_0(\varphi) + u_M(\varphi)\gamma + u_a(\varphi)\delta + u_\epsilon(\varphi)\epsilon + u_{Ma}(\varphi)\gamma\delta + u_{\epsilon a}(\varphi)\epsilon a + u_{M\epsilon}(\varphi)\gamma\epsilon + u_M(\varphi)\gamma^2 + u_{a^2}(\varphi)\delta^2 + u_{\epsilon^2}(\varphi)\epsilon^2, \quad (5.93)$$

e imponiendo la condición asintótica $\lim_{\varphi \rightarrow 0} u = 0$, obtenemos la siguiente solución iterativa para u_γ ,

$$u_0 = \frac{\sin \varphi}{b}, \quad (5.94)$$

$$u_m = \frac{(\cos \varphi - 1)^2}{b}, \quad (5.95)$$

$$u_a = u_{\epsilon a} = 0, \quad (5.96)$$

$$u_\epsilon = -\frac{\cos \varphi(\tan \varphi - \varphi)}{2b} \quad (5.97)$$

$$u_{Ma} = -\frac{2(1 - \cos \varphi)}{b} \quad (5.98)$$

$$u_{M\epsilon} = -\frac{(\cos \varphi - 1)(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi - 1)}{b}, \quad (5.99)$$

$$u_{M^2} = -\frac{1}{4b} [3 \sin \varphi \cos^2 \varphi + 15\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi(1 + 8 \cos \varphi)], \quad (5.100)$$

$$u_{a^2} = \frac{\sin^3 \varphi}{b}, \quad (5.101)$$

$$u_{\epsilon^2} = -\frac{[(\varphi^2 - 3) \sin \varphi + 3\varphi \cos \varphi]}{8b} \quad (5.102)$$

Al orden que estamos considerando la 2-forma $\mathcal{K}dS$ se escribe como,

$$\mathcal{K}dS = \left[\underbrace{2M}_{\hat{\kappa}_M} \underbrace{-2b^2\epsilon u}_{\hat{\kappa}_\epsilon} \underbrace{+3M^2u}_{\hat{\kappa}_{M^2}} \underbrace{+12Mb^2\epsilon u^2}_{\hat{\kappa}_{Me}} \underbrace{-4b^4\epsilon^2u^3}_{\hat{\kappa}_{\epsilon^2}} \underbrace{+6M^3u^2}_{\hat{\kappa}_{M^3}} \underbrace{-10b^2\epsilon M^2u^3}_{\hat{\kappa}_{\epsilon M^2}} \right. \\ \left. \underbrace{+6Ma^2u^2}_{\hat{\kappa}_{Ma^2}} \underbrace{+30Mb^4\epsilon^2u^4}_{\hat{\kappa}_{Me^2}} \underbrace{-4b^2\epsilon a^2u^3}_{\hat{\kappa}_{\epsilon a^2}} \underbrace{-6b^6\epsilon^3u^5}_{\hat{\kappa}_{\epsilon^3}} \right] dud\varphi. \quad (5.103)$$

A fin de calcular el ángulo de deflexión a órdenes superiores, necesitamos también conocer la expresión del ángulo de deflexión a primer orden. Esto se puede obtener directamente a partir de la ecuación (5.38),

$$\alpha^{(1)} = \frac{4M}{b} - \frac{\pi\epsilon}{2} - \frac{4Ma}{b^2}. \quad (5.104)$$

Por lo tanto, la contribución $\alpha_{\mathcal{K}}$ al ángulo de deflexión incluyendo términos de tercer orden queda determinada por lo siguiente³,

$$\alpha_{\mathcal{K}} = \int_0^{\varphi_R = \pi + \alpha^{(1)}} \int_0^{u_\gamma} \mathcal{K}dS \\ = \frac{4M}{b} - \epsilon \frac{\pi}{2} + \frac{15\pi M^2}{4b^2} - \frac{4M\epsilon}{b} + \frac{3}{8}\pi\epsilon^2 + \frac{128M^3}{3b^3} - \frac{4\pi aM^2}{b^3} \\ - \frac{45\pi\epsilon M^2}{8b^2} + \frac{4a^2M}{b^3} + \frac{8Ma\epsilon}{b^2} + \frac{4M\epsilon^2}{b} - \frac{3\pi\epsilon a^2}{4b^2} - \frac{5\pi}{16}\epsilon^3. \quad (5.105)$$

La curvatura geodésica por otro lado viene dada como sigue,

$$\kappa_g = - \frac{2Mau^3}{[1 - \epsilon b^2u^2(1 - 2Mu)]\sqrt{1 - 2Mu}} \Big|_{u_\gamma} \quad (5.106)$$

mientras que el elemento de línea dl ,

$$dl = \sqrt{\left(\hat{g}_{rr} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \hat{g}_{\varphi\varphi} \right)} \Big|_{r_\gamma} d\varphi \\ = \sqrt{\left(\hat{g}_{rr} \left(\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + \hat{g}_{\varphi\varphi} \right)} \Big|_{u_\gamma} d\varphi \\ = \frac{[1 - \epsilon b^2u^2(1 - 2Mu)](1 + a^2u^2 - 2Mu)}{u^2[2aMu + b(1 - 2Mu)](1 - 2Mu)} \Big|_{u_\gamma} d\varphi. \quad (5.107)$$

³Como vimos en la sección (5.5.1), se puede chequear que agregar términos a φ_R con correcciones a segundo orden en γ , δ y ϵ (notar que el último término en la ecuación (5.104) es uno de ellos) no contribuye al ángulo de deflexión al orden que estamos considerando. Más precisamente, los únicos términos que potencialmente podrían producir correcciones vienen de la integración de $\hat{\kappa}_M$ y $\hat{\kappa}_\epsilon$. Sin embargo, usando argumentos similares a los utilizados en la sección (5.5.1) se puede mostrar que sólo aquellos términos que contribuyen al orden deseado son en efecto términos de primer orden presentes en $\alpha^{(1)}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \kappa_g dl &= - \left. \frac{2Ma u(1 + a^2 u^2 - 2Mu)}{(1 - 2Mu)^{3/2} [2aMu + b(1 - 2Mu)]} \right|_{u_\gamma} d\varphi \\ &\approx \left[-\frac{2Ma}{b^2} \sin \varphi + \frac{4aM^2}{b^3} (\cos \varphi + 2)(\cos \varphi - 1) + \cos \varphi (\tan \varphi - \varphi) \frac{aM\epsilon}{b^2} \right] d\varphi \end{aligned} \quad (5.108)$$

Por lo tanto, la contribución α_{κ_g} al ángulo de deflexión total viene dada por lo siguiente,

$$\alpha_{\kappa_g} = \int_0^{\varphi_R} \kappa_g dl \approx \left[-4 \frac{aM}{b^2} - \frac{6\pi aM^2}{b^3} + \frac{4aM\epsilon}{b^2} \right]. \quad (5.109)$$

Finalmente, agrupando los resultados obtenidos en las ecuaciones (5.105) y (5.109), y escribiéndolos en términos de la cantidad $\hat{a} = a/M$, obtenemos,

$$\alpha = \alpha_{\text{vac}} + \alpha_p \quad (5.110)$$

donde

$$\alpha_p \approx -\epsilon \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \pi \epsilon^2 - \frac{5}{16} \pi \epsilon^3 - \frac{4M\epsilon}{b} + \frac{4M\epsilon^2}{b} - \left[\frac{45}{2} \pi - 48\hat{a} + 3\pi \hat{a}^2 \right] \frac{\epsilon M^2}{4b^2}, \quad (5.111)$$

es la contribución al ángulo de deflexión total debido a la presencia del plasma; mientras que α_{vac} es la contribución al ángulo de deflexión total para el caso de gravedad pura y viene dado por la ecuación (5.87).

Los primeros tres términos en la ecuación (5.111) representan la contribución al ángulo debido puramente a la presencia del plasma mientras que el resto de los términos se debe al acople entre el plasma y los efectos gravitacionales. Como antes, el ángulo de deflexión para órbitas retrógradas se obtiene a partir de (5.111) al cambiar el signo en todos los términos lineales en \hat{a} .

La contribución de cada componente al ángulo de deflexión dependerá de los parámetros M , a y b , y del cociente ϵ entre la frecuencia del plasma y la frecuencia de observación ω_∞ .

Por completitud, y siguiendo el mismo procedimiento descrito para el caso $k = 2$, escribimos las expresiones para el ángulo de deflexión correspondiente a los casos $k = 1$ y $k = 3$. Para el caso $k = 1$, i.e. $N = \tilde{N}_0/r$, la expresión final para el ángulo de deflexión viene dada como sigue,

$$\alpha = \alpha_{\text{vac}} + \alpha_p, \quad (5.112)$$

con α_p dada por,

$$\alpha_p = -\epsilon + \frac{1}{12} \epsilon^3 - \frac{\pi M\epsilon}{2b} + (2\pi\hat{a} - \hat{a}^2 - 8) \frac{\epsilon M^2}{b^2}. \quad (5.113)$$

Notemos que en este caso no hay una contribución debida puramente a la presencia del plasma a segundo orden en ϵ . Similarmente, para $k = 3$, i.e. $N = \tilde{N}_0/r^3$, la contribución α_p al ángulo de deflexión se escribe como,

$$\alpha_p = -2\epsilon + \frac{15\pi}{16} \epsilon^2 - \frac{16}{3} \epsilon^3 - \frac{9\pi M\epsilon}{4b} + (6\pi\hat{a} - 4\hat{a}^2 - 32) \frac{\epsilon M^2}{b^2}. \quad (5.114)$$

En todos los casos el término lineal en ϵ puede ser considerado como caso particular de la expresión obtenida por Giampieri en [129], y reobtenida en un contexto más general por Bisnovatyi-Kogan y Tsupko en [22],

$$\alpha_p^{(1)} = -\epsilon \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}, \quad (5.115)$$

con $\Gamma(x)$ siendo la función Gamma.

En la figura (5.3) consideramos un agujero negro con los mismos parámetros que en las figuras 5.1 y 5.2, asumiendo de nuevo $b = 100M$. Graficamos la contribución de orden dominante al ángulo de deflexión dada por $\alpha_{\text{vac}}^{(1)} = 4M/b$ y $\alpha_p^{(1)}$ para los casos considerados en términos de $\epsilon \in [0.01, 0.018]$. Para este rango de valores el ángulo de deflexión producido por el plasma es del mismo orden que el ángulo en el espaciotiempo de Kerr para el caso de gravedad pura, pero con sentido opuesto. Esto es, como es sabido y se puede ver directamente de la ecuación (5.38), el efecto de un plasma inhomogéneo que decae con r es producir un efecto de lente divergente. Notemos que para el mismo valor de ϵ , mientras más rápido decae el perfil de plasma, más grande es el efecto divergente en los rayos de luz. Por supuesto, este es un efecto cromático y por lo tanto, diferentes valores de ϵ contribuirán de diferentes maneras.

Similarmente, en la figura 5.4 graficamos la contribución al ángulo de deflexión debido a los demás términos en α_{vac} y α_p para los tres perfiles de plasma considerados. El caso $s = \pm 1$ corresponde a órbitas prógradas/retrógradas. Por completitud, graficamos también las contribuciones al ángulo de deflexión para agujeros negros no rotantes, ie, $\hat{a} = 0$.

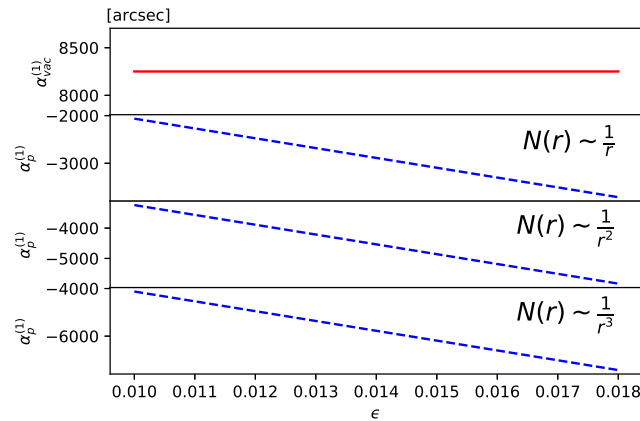


FIGURA 5.3: Contribución de orden dominante al ángulo de deflexión para una lente con parámetros $M = 4.1 \times 10^6 M_\odot$ y $\hat{a} = 0.6$, y para diferentes perfiles de plasma de la forma $N(r) = \tilde{N}_0 r^{-k}$. Asumimos que $b = 100M$. Aquí $\alpha_{\text{vac}}^{(1)} = 4M/b$ y $\alpha_p^{(1)} = -\epsilon$ para $k = 1$, $\alpha_p^{(1)} = -\epsilon\pi/2$ para $k = 2$, y $\alpha_p^{(1)} = -2\epsilon$ para $k = 3$. Todos ellos son casos particulares de la expresión (5.115). Aquí $\epsilon \in [0.01, 0.018]$.

5.6. Resumen del capítulo

En este capítulo hemos utilizado el teorema de Gauss-Bonnet a fin de estudiar la deflexión de fotones a través de un plasma y de partículas masivas en gravedad

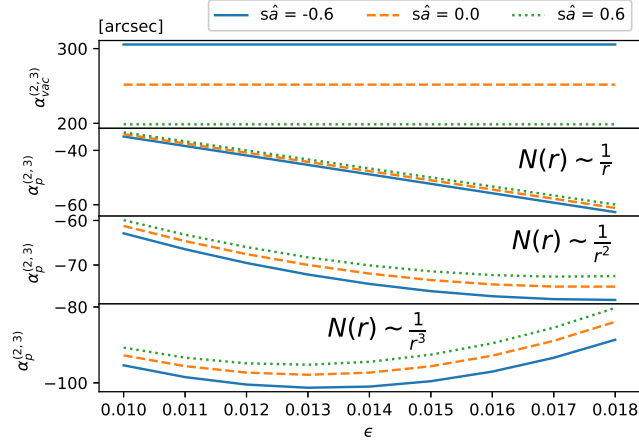


FIGURA 5.4: Contribución de orden superior al ángulo de deflexión para una lente con parámetros $M = 4.1 \times 10^6 M_\odot$ y $\hat{a} = 0.6$. Asumimos que $b = 100M$. Aquí $\alpha_{\text{vac}}^{(2,3)} = \alpha_{\text{vac}} - \alpha_{\text{vac}}^{(1)}$ y $\alpha_p^{(2,3)} = \alpha_p - \alpha_p^{(1)}$. $\epsilon \in [0.01, 0.018]$. Como en la figura 5.3 cada uno de ellos se considera para los diferentes perfiles determinados por $k = 1, 2$ y 3.

pura, ambas sobre espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos. Para ello obtuvimos una métrica de tipo Finsler-Randers la cual utilizamos para calcular el ángulo de deflexión vía una extensión del método de Gibbons y Werner originalmente presentado para espaciotiempos estáticos. Dicha extensión fue llevada a cabo desde dos enfoques diferentes: el enfoque de Ono *et al* y el de Werner. Presentamos una expresión general del ángulo de deflexión en gravedad linealizada (ver ecuación (5.38)) y particularizamos para los espaciotiempos rotantes de Kerr y Kerr-Newman.

Por otro lado, fuimos capaces de obtener por primera correcciones de orden superior (hasta tercer orden) al ángulo de deflexión en el espaciotiempo de Kerr, tanto para partículas masivas en gravedad pura (equivalentemente, para fotones propagándose en un plasma homogéneo) así como también para fotones en un plasma inhomogéneo, utilizando el método de Gibbons-Werner.

Capítulo 6

Lentes fuertes con plasma: enfoque numérico y perturbativo

En esta capítulo abordaremos el estudio de cómo la presencia de un plasma frío no-magnetizado influye en la posición de las imágenes en el régimen de lente gravitacional fuerte, es decir, estaremos interesados en aquel tipo de imágenes formadas a partir de la deflexión de los rayos de luz provenientes de fuentes en las cercanías de las curvas cáusticas asociadas a la lente, dando origen a la formación de anillos de Einstein, arcos gravitacionales y sistemas de imágenes múltiples. Dicho estudio será llevado a cabo a partir de la resolución de forma perturbativa de la ecuación de lente gravitacional en la aproximación de lente delgada, contrastando la misma con una solución numérica, pudiendo testear de esta forma la precisión de la solución perturbativa.

Mientras que la solución numérica será implementada a partir del paquete *Lenstronomy*¹, el cual editamos de forma conveniente a fin de incluir la contribución del plasma, la solución perturbativa será llevada a cabo siguiendo el método propuesto por Alard [161], originalmente propuesto para gravedad pura. La idea del método es la siguiente. Consideramos primero una lente gravitacional con una densidad de masa proyectada circularmente simétrica y con la línea de la visión pasando exactamente por el centro de la distribución. A su vez, consideramos una fuente puntual alineada con la línea de la visual. Bajo estas hipótesis la imagen formada será la de un anillo perfecto, conocido como anillo de Einstein en el caso de gravedad pura. Los sistemas de imágenes múltiples así como los arcos gravitacionales se pueden obtener a partir de resolver perturbativamente la ecuación de lente gravitacional alrededor del anillo de Einstein. Para ello, se consideran dos tipos diferentes de perturbaciones: a) que la fuente no se encuentra perfectamente alineada con la línea de la visual, y/o b) que la distribución de materia proyectada de la lente no sea circularmente simétrica. En cuanto al plasma, consideraremos en todo momento que la distribución de electrones proyectada del mismo se encuentra centrada con la línea de la visual pero no necesariamente que sea circularmente simétrica. De esta forma en algunas situaciones el plasma intervendrá únicamente como una perturbación (en el caso de distribuciones proyectadas no circularmente simétricas) y en otras el plasma también afectará el radio de los anillos de Einstein comparado a la situación sin plasma.

Por otro lado, debido a que es un método perturbativo, el mismo pierde precisión obviamente si apartamos demasiado la fuente de la línea de la visual, o si consideramos una lente con una elipticidad suficientemente alta e incluso cuando consideramos una frecuencia de observación muy baja o una densidad de electrones

¹<https://github.com/sibirrer/lenstronomy>

muy alta; esto último para distribuciones de plasma proyectadas no circularmente simétricas. Por este motivo implementamos también una corrección iterativa del método y la comparamos gráficamente con la solución numérica a fin de apreciar cómo mejora la solución perturbativa con las iteraciones.

Por último, estudiamos numéricamente cómo influye el plasma en la estructura de las curvas críticas y cáusticas así como también en la magnificación. Para los modelos estudiados, encontraremos una estructura mucho más rica en la configuración geométrica de las curvas cáusticas, lográndose un desdoblamiento y una multiplicidad extra de imágenes comparado a la observación de la misma fuente lenteada en el régimen de frecuencias altas.

6.1. Ecuaciones básicas

En la aproximación de lente delgada, la ecuación de lente que relaciona la posición de la fuente con la posición de las imágenes a través del ángulo de deflexión se puede escribir de la siguiente manera,

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \alpha(\vec{\theta}), \quad (6.1)$$

donde $\vec{\beta}$ y $\vec{\theta}$ denotan la posición angular de la fuente y de la imagen, respectivamente; mientras que $\alpha(\theta)$ es una cantidad relacionada al ángulo de deflexión $\hat{\alpha}$ de la siguiente manera $\alpha = \frac{D_{ls}}{D_s} \hat{\alpha}(\theta)$ ². Por otro lado, las cantidades D_l , D_s y D_{ls} hacen referencia a las distancias diámetro-ángulo del observador a la lente, de la fuente a la lente y de la lente a fuente, respectivamente. Dichas distancias dependen a su vez de la cosmología considerada.

Consideremos un modelo de lente en un espaciotiempo estático y asintóticamente plano con coordenadas $\{x^0, x^i\}$, siendo x^i , $i = 1..3$ coordenadas espaciales. Por otro lado consideraremos también que las componentes espaciales del tensor energía-momento son despreciables, por lo que la lente gravitacional (sin contar el plasma) estará completamente descrita por su distribución de materia. Bajo esta suposición la ecuación de lente se puede reescribir en términos del potencial de lente ψ_{grav} como sigue,

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \nabla_{\vec{\theta}} \psi_{\text{grav}}(\vec{\theta}), \quad (6.2)$$

el cual está relacionado con α a través de $\alpha(\vec{\theta}) = \nabla_{\vec{\theta}} \psi_{\text{grav}}(\vec{\theta})$, donde $\nabla_{\vec{\theta}}$ es el gradiente con respecto a la posición angular $\vec{\theta}$ en el plano de la lente. Nos referimos a ψ_{grav} como *potencial de lente efectivo* y está relacionado con el potencial Newtoniano de la siguiente manera,

$$\psi_{\text{grav}}(\vec{\theta}) = \frac{D_{ls}}{D_l D_s} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_l \vec{\theta}, x) dx, \quad (6.3)$$

donde x es la distancia a lo largo de la línea de la visual entre el observador y la fuente.

En analogía con la teoría de lentes gravitacionales en gravedad pura, los efectos del plasma en la desviación de los rayos de luz puede ser codificada en un *potencial de plasma efectivo* dependiente de la frecuencia de observación [162],

$$\Phi(x^i) \approx \frac{c^2 \omega_e(x^i)}{4\omega^2(x^i)}, \quad (6.4)$$

²En este capítulo denotaremos el ángulo de deflexión como $\hat{\alpha}$

donde $\omega_e(x^i)$ es la frecuencia del plasma y ω la frecuencia de observación. En la expresión previa hemos utilizado el límite de alta frecuencia $\omega(x^i) \gg \omega_e(x^i)$ que suele ser adecuado en aplicaciones de radioastronomía. A su vez, en su viaje desde la fuente hasta el observador la luz experimentará un redshift gravitacional debido a la presencia de la lente y un redshift cosmológico, siendo el primero despreciable respecto del segundo debido a que la distancia lente-observador es suficientemente grande. Por tal motivo sólo tendremos en cuenta el efecto del redshift cosmológico de forma que la frecuencia de los fotones en la posición de la lente será $(1 + z_l)\omega$, siendo z_l el redshift de la lente y ω , como dijimos, la frecuencia de observación.

Considerando la propagación de los rayos de luz a través del plasma en una dirección \hat{x} , la densidad de electrones proyectada a lo largo de la línea de la visual viene dada por la siguiente cantidad conocida como *medida de dispersión*,

$$N_e(\vec{\theta}) = \int n_e(x^i(x)) dx, \quad (6.5)$$

la cual puede ser estimada a partir de mediciones del time delay. Finalmente, el potencial efectivo de plasma en términos de la frecuencia angular ω , viene dado por [162],

$$\psi_{\text{plasma}}(\vec{\theta}, \omega) = \frac{D_{ls}}{D_s D_l} \frac{2\pi c^2}{\omega^2 (1 + z_l)^2} r_e N_e(\vec{\theta}), \quad (6.6)$$

donde $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ es el radio clásico del electrón y la frecuencia de observación ν medida en Hz está relacionada con ω por $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.

Señalamos además que en este capítulo no estaremos considerando los términos de interacción plasma-gravedad ya que como hemos visto en general suelen ser despreciables respecto de los términos de gravedad y de plasma puros.

6.1.1. Solución perturbativa de la ecuación de lente

A continuación repasaremos brevemente una solución perturbativa de la ecuación de lente en régimen de lentes gravitacionales fuertes que suele ser acertado para describir arcos gravitacionales así como también formaciones de imágenes múltiples. Este método introducido por Alard [161], y luego extensamente utilizado, parte de una solución exacta de la ecuación de lente gravitacional para una fuente puntual alineada con la línea de la visión para una lente esféricamente simétrica, resultando en una imagen circular de la fuente conocida generalmente como *anillo de Einstein*.

Consideremos una fuente circular de radio $\delta\beta_s$ localizada en $(\delta\beta_{10}, \delta\beta_{20})$. Explícitamente,

$$\delta\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\beta_{10} + \delta\beta_s \cos \phi_s \\ \delta\beta_{20} + \delta\beta_s \sin \phi_s \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi_s \leq 2\pi. \quad (6.7)$$

Por otro lado, cada punto del borde de la fuente nos dará una imagen localizada en $\vec{\theta}$ a través de la ecuación de la lente,

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \cos \phi \\ \theta \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (6.8)$$

donde $\theta = |\vec{\theta}|$.

Por lo tanto, en un sistema de lente gravitacional donde se tenga en cuenta también el efecto del plasma circundante a la lente, la ecuación de lente viene dada como

sigue,

$$\delta\beta_{10} + \delta\beta_s \cos \phi_s = \theta \cos \phi - \cos \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad (6.9)$$

$$\delta\beta_{20} + \delta\beta_s \sin \phi_s = \theta \sin \phi - \sin \phi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}. \quad (6.10)$$

donde

$$\psi = \psi(\theta, \phi) = \psi_{\text{grav}}(\theta, \phi) + \psi_{\text{plasma}}(\theta, \phi). \quad (6.11)$$

En particular, estas ecuaciones implican lo siguiente [163],

$$\theta = \delta\beta_{10} \cos \phi + \delta\beta_{20} \sin \phi + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \pm \sqrt{\Delta_{\text{exact}}}, \quad (6.12)$$

siendo

$$\Delta_{\text{exact}} = \delta\beta_s^2 - \left(\frac{1}{\theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \delta\beta_{10} \sin \phi + \delta\beta_{20} \cos \phi \right)^2. \quad (6.13)$$

Notemos que la ecuación (6.12) es una ecuación exacta e implícita para θ .

Revisaremos ahora el método perturbativo introducido por Alard para resolver la ecuación de lente y presentaremos una nueva expresión iterativa que mejora la aproximación a primer orden del método perturbativo. Cabe aclarar que este método fue presentado en el caso de gravedad pura y aquí estamos extendiéndolo al caso con plasma.

Comencemos considerando una lente esféricamente simétrica caracterizada por un potencial de lente $\psi_0(\theta)$ alrededor de la línea de la visión. Este potencial puede tener la contribución tanto gravitacional como del medio plasmático. Y consideremos una lente puntual situada a lo largo de la línea de la visual en $\vec{\beta} = 0$. En esta situación la ecuación de la lente se reduce de la siguiente manera,

$$\theta - \frac{\partial \psi_0(\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (6.14)$$

Denotamos su solución como θ_p . En el caso de gravedad pura, la solución de esta ecuación se conoce como anillo o radio de Einstein y se suele denotar como θ_E o bien $|\vec{\theta}_E|$. Como veremos en este capítulo la solución θ_p también tendrá una forma de anillo en el plano de las imágenes pero reservaremos el término anillo de Einstein para el caso de gravedad pura.

Por otro lado, en este capítulo trabajaremos con perfiles de masa y de plasma que son comúnmente utilizados en estudios de astrofísica. Es importante señalar dos cosas: para dichos modelos existe solución de la ecuación (6.14) y por otro lado, las soluciones presentan una única solución circular (anillo de Einstein en el caso de gravedad pura) en el plano de las imágenes. Otros perfiles de plasma, diferentes a los utilizados en este trabajo nos permiten obtener varias de estas soluciones circulares como solución de la ecuación (6.14), como son los modelos de plasma polinómicos [164]. Si bien el método perturbativo presentado en este capítulo no presenta ningún impedimento para tratar estos casos, dejaremos su estudio para trabajos posteriores.

Consideremos ahora una pequeña desviación en la posición de la fuente así como también en la simetría circular del potencial de lente, es decir introduciremos una

pequeña elipticidad en el potencial de lente,

$$\begin{aligned}\vec{\beta} &= \delta\vec{\beta}, \\ \psi(\vec{\theta}) &= \psi_0(|\vec{\theta}|) + \delta\psi(\vec{\theta}).\end{aligned}\quad (6.15)$$

Asumiremos además que estas pequeñas desviaciones en la simetría circular y en la posición de la fuente, implicarán una pequeña desviación de la solución de fondo, que como hemos dicho presenta una forma circular en el plano de las imágenes. Introducimos entonces el siguiente *ansatz*,

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_E^p + \delta\vec{\theta}, \quad (6.16)$$

y la ecuación de la lente se puede reescribir como,

$$\delta\vec{\beta} = \vec{\theta}_E^p + \delta\vec{\theta} - \nabla_{\vec{\theta}}[\psi_0(|\vec{\theta}|) + \delta\psi(\vec{\theta})]_{|\vec{\theta}=\vec{\theta}_p+\delta\vec{\theta}}. \quad (6.17)$$

Asumiremos además que las tres cantidades $\delta\vec{\beta}$, $\delta\psi(\vec{\theta})$ y $\delta\vec{\theta}$ son del mismo orden de magnitud. A este orden la ecuación de lente perturbada se escribe como,

$$\delta\vec{\beta} = \delta\vec{\theta} - [(\delta\vec{\theta} \cdot \nabla_{\vec{\theta}}) \nabla_{\vec{\theta}} \psi_0(|\vec{\theta}|) + \nabla_{\vec{\theta}} \delta\psi(\vec{\theta})]_{|\vec{\theta}=\vec{\theta}_p}. \quad (6.18)$$

Consideremos una fuente circular localizada en $(\delta\beta_{10}, \delta\beta_{20})$ con un radio $\delta\beta_s$. Explícitamente,

$$\delta\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \delta\beta_1 \\ \delta\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta\beta_{10} + \delta\beta_s \cos \phi_s \\ \delta\beta_{20} + \delta\beta_s \sin \phi_s \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi_s \leq 2\pi. \quad (6.19)$$

Por otro lado, la posición de la imagen se puede escribir como,

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\theta_p + \delta\theta) \cos \phi \\ (\theta_p + \delta\theta) \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \text{con } 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad (6.20)$$

donde $\theta_E^p = |\vec{\theta}_E^p|$.

La ecuación de la lente perturbada nos queda de la siguiente forma

$$\delta\beta_{10} + \delta\beta_s \cos \phi_s = \left[\delta\theta \cos \phi \left(1 - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial |\vec{\theta}|^2} \right) - \cos \phi \frac{\partial \delta\psi}{\partial |\vec{\theta}|} + \frac{\sin \phi}{|\vec{\theta}|} \frac{\partial \delta\psi}{\partial \phi} \right]_{|\vec{\theta}=\theta_p}, \quad (6.21)$$

$$\delta\beta_{20} + \delta\beta_s \sin \phi_s = \left[\delta\theta \sin \phi \left(1 - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial |\vec{\theta}|^2} \right) - \sin \phi \frac{\partial \delta\psi}{\partial |\vec{\theta}|} - \frac{\cos \phi}{|\vec{\theta}|} \frac{\partial \delta\psi}{\partial \phi} \right]_{|\vec{\theta}=\theta_p}. \quad (6.22)$$

Finalmente combinando estas ecuaciones obtenemos la solución de la ecuación de la lente perturbada de la siguiente manera

$$\delta\theta = \frac{1}{1 - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial |\vec{\theta}|^2}} \left[\frac{\partial \delta\psi}{\partial |\vec{\theta}|} + \delta\beta_{10} \cos \phi + \delta\beta_{20} \sin \phi \pm \sqrt{\Delta} \right]_{|\vec{\theta}=\theta_p}, \quad (6.23)$$

donde

$$\Delta = \delta\beta_s^2 - \left(\frac{1}{|\vec{\theta}|} \frac{\partial \delta\psi}{\partial \phi} - \delta\beta_{10} \sin \phi + \delta\beta_{20} \cos \phi \right)^2. \quad (6.24)$$

A partir de (6.24) podemos ver que la región en el plano de las imágenes donde la formación de imágenes es posible está caracterizada por la condición,

$$\Delta \left(|\vec{\theta}| = \theta_p, \phi \right) \geq 0. \quad (6.25)$$

6.1.2. N iteraciones

A fin de construir la primera aproximación a la posición de la imagen comenzamos con la imagen a orden cero situada en $\vec{\theta} = \vec{\theta}_E^p$ y encontramos correcciones a las imágenes situadas en $\vec{\theta}_1^p = \vec{\theta}_E^p + \delta\vec{\theta}_1^p$. Este método se puede extender fácilmente a órdenes más altos. Por ejemplo, asumamos que las imágenes en la i -ésima aproximación son conocidas y luego perturbemos los potenciales alrededor de dichas posiciones y calculemos las correcciones. Esto es, conociendo $\vec{\theta}_{i-1}^p$, podemos construir una nueva corrección dada por $\vec{\theta}_i^p = (|\vec{\theta}_{i-1}^p| + \delta\theta_i^p)(\cos \phi, \sin \phi)$ con,

$$\delta\theta_i^p = \frac{\frac{\partial\psi_0(\theta)}{\partial|\theta|} - \theta + c}{1 - \frac{\partial^2\psi_0}{\partial|\theta|^2}} \Bigg|_{\vec{\theta}=\vec{\theta}_{i-1}^p} \quad (6.26)$$

donde

$$c = \left[\frac{\partial\delta\psi}{\partial|\vec{\theta}|} + \delta\beta_{10} \cos \phi + \delta\beta_{20} \sin \phi \pm \sqrt{\Delta} \right] \Bigg|_{|\vec{\theta}|=\theta_{i-1}^p}. \quad (6.27)$$

6.2. Modelo de galaxia-lente y formación de imágenes

A fin de estudiar el efecto del plasma en la formación de imágenes así como también su influencia en la estructura de curvas cáusticas y críticas necesitamos primero especificar el perfil de densidad de masa de la lente, o alternativamente su potencial de lente, y luego el perfil de densidad electrónica del plasma. Estaremos considerando un modelo de galaxia-lente con elipticidad descrito por el potencial de lente singular isotérmico elíptico (SIE) que es extensamente utilizado para modelar halos de materia oscura en galaxias tanto en la teoría de lentes gravitacionales como también en estudios de dinámica estelar. Dicho perfil SIE viene caracterizado por el siguiente potencial de lente,

$$\psi_{\text{grav}}(\vec{\theta}) = |\vec{\theta}_E| |\vec{\theta}| \sqrt{1 - \eta \cos 2\phi} \quad (6.28)$$

donde η es la elipticidad y $|\vec{\theta}_E|$ es el anillo de Einstein que en términos de la velocidad de dispersión σ viene dado como sigue,

$$|\vec{\theta}_E| = 4\pi \frac{\sigma^2 D_{ls}}{c^2 D_s}. \quad (6.29)$$

En cuanto al perfil de densidad electrónica del plasma comenzaremos con una distribución esféricamente simétrica de electrones con un decaimiento exponencial para luego considerar otros perfiles menos restrictivos.

Antes que nada debemos especificar los sistemas de coordenadas que utilizaremos. Como se puede ver en la figura 6.1 hemos elegido el eje x de tal forma que coincida con la línea de la visual mientras que el plano de la lente coincide con el plano yz . Además, hemos definido en el mismo plano el ángulo ϕ como se muestra en la misma figura y una coordenada cilíndrica radial r_c definida en el plano xy (no

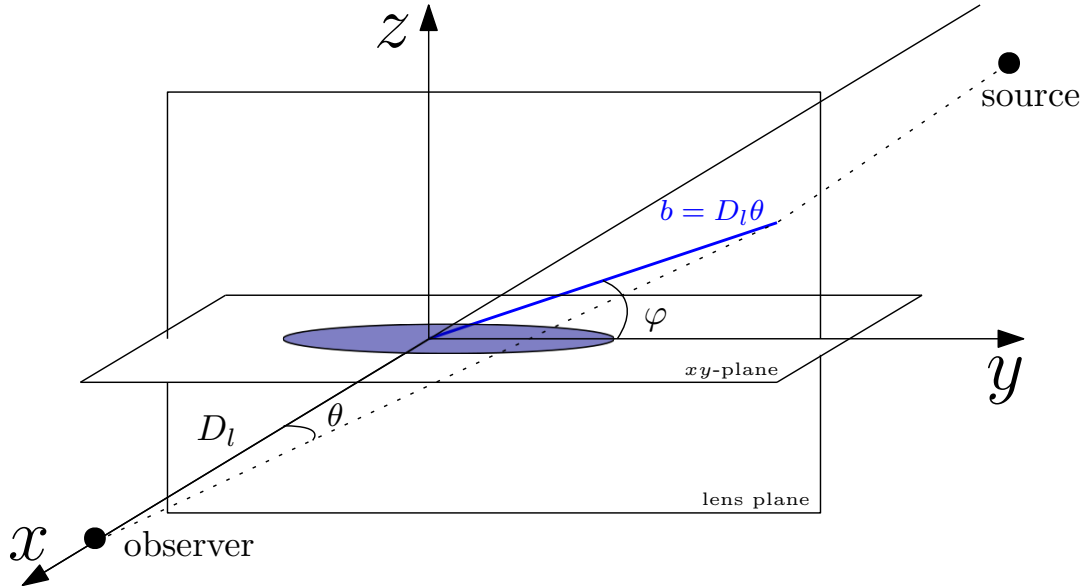


FIGURA 6.1: Sistemas de coordenadas utilizados.

se muestra). Reservamos la letra r para denotar la coordenada esférica radial con origen en el centro de la lente. Por lo tanto, resulta trivial corroborar las siguientes relaciones,

$$y = b \cos \varphi = D_l \theta \cos \varphi, \quad (6.30)$$

$$z = b \sin \varphi = D_l \theta \sin \varphi, \quad (6.31)$$

$$r_c = \sqrt{x^2 + (D_l \theta \cos \varphi)^2}, \quad (6.32)$$

$$r = \sqrt{x^2 + (D_l \theta)^2}. \quad (6.33)$$

En las próximas subsecciones describimos los modelos de plasma que utilizaremos.

6.2.1. Modelo de plasma esféricamente simétrico con decaimiento exponencial

Como primer modelo consideraremos una densidad electrónica esféricamente simétrica con decaimiento exponencial dada por la siguiente expresión,

$$n_e(r) = n_0 e^{-r/r_0}. \quad (6.34)$$

Este tipo de perfiles de plasma han sido analizados de forma numérica en el pasado por Er y Mao en [41]. Aquí desarrollaremos un análisis perturbativo de los mismos. A su vez, este tipo de modelo servirá de semilla para obtener la medida de dispersión en modelos más genéricos que no respeten simetría esférica y que serán discutidos en las próximas subsecciones. Este modelo está inspirado en ajustes observacionales propuestos en el pasado para estudiar la distribución de iones en las regiones H II de diversas galaxias. En [165], basándose en observaciones de la galaxia M51 (galaxia que se encuentra de cara a la línea de visual), se estimaron valores de la densidad electrónica $n_0 = 10 \text{cm}^{-3}$ y de 1kpc para el radio característico r_0 . Si bien en dicha galaxia r cumple el rol de radio galactocéntrico (medido en la dirección del plano que contiene a la galaxia), en la ecuación (6.34) r se asume una coordenada esférica.

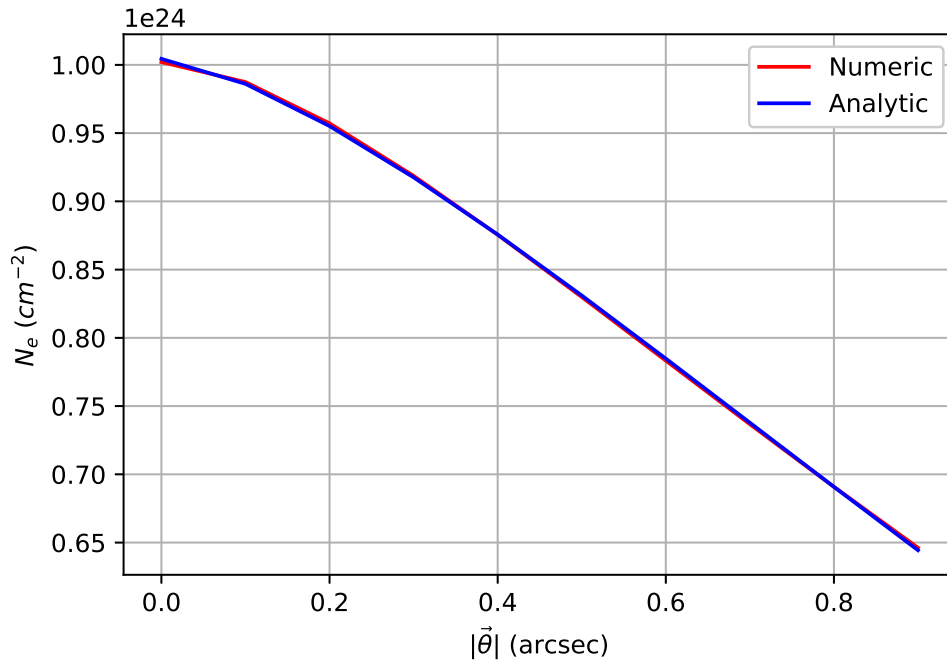


FIGURA 6.2: El error en el ajuste es de menos del 0.25 % en este rango.

Dado que la integral (6.5) no puede resolverse analíticamente de forma cerrada para este modelo de plasma, no podemos obtener una expresión analítica exacta de la densidad electrónica proyectada sobre la visual N_e . Lejos de ser esto una limitación para este modelo ya que tal integral siempre se puede hacer de forma numérica, elegimos ajustar N_e por una función en un rango adecuado a fin de obtener una expresión analítica para la solución de la ecuación de la lente. Entonces, aproximamos N_e como sigue,

$$N_e(\theta) \approx An_0r_0e^{-(\theta/B\theta_0)^C}, \quad (6.35)$$

donde $\theta_0 = r_0/D_l$, y A, B, C son parámetros adimensionales que se obtienen a partir del ajuste. Notemos que los valores de A, B y C dependerán de la elección particular de r_0 . En la figura 6.2 mostramos gráficamente a modo de ejemplo el ajuste (6.35) para una configuración de lente que detallaremos más adelante cuando describamos la formación de imágenes. Vemos que en el rango bajo consideración, que es el rango donde tendremos formación de imágenes en dicho caso (ver figura 6.3), el ajuste que implementamos es adecuado con un error de menos del 0.25%, mientras que los parámetros de ajuste nos quedan de la siguiente forma: $A = 2.003 \pm 0.002$, $B = 1.55 \pm 0.01$, $C = 1.47 \pm 0.01$.

El potencial de plasma para este modelo es entonces,

$$\psi_{\text{plasma}}(\theta, \omega) = \frac{D_{ls}}{D_s D_l} \frac{2\pi c^2}{\omega^2 (1+z_l)^2} A r_e n_0 r_0 e^{-\left(\frac{\theta}{B\theta_0}\right)^C}. \quad (6.36)$$

A fin de simplificar las expresiones reescribiremos (6.36) de la siguiente manera,

$$\psi_{\text{plasma}}(\theta, \omega) = \psi_{\omega}^2 e^{-\left(\frac{\theta}{B\theta_0}\right)^C}, \quad (6.37)$$

donde

$$\psi_\omega^2 = \frac{D_{ls}}{D_s D_l} \frac{2\pi c^2}{\omega^2 (1+z_l)^2} A r_e n_0 r_0. \quad (6.38)$$

Finalmente, la solución perturbativa de la ecuación de la lente se puede expresar como,

$$\delta\theta^\pm = \frac{|\vec{\theta}_E| (\sqrt{1 - \eta \cos 2\phi} - 1) + \delta\beta_{10} \cos \phi + \delta\beta_{20} \sin \phi \pm \sqrt{\Delta}}{1 - \frac{\psi_\omega^2}{\theta_p^2} C \zeta e^{-\zeta} (1 + C(\zeta - 1))}, \quad (6.39)$$

donde $\zeta = (\frac{\theta_p}{B\theta_0})^C$, y

$$\Delta = \delta\beta_s^2 - \left(\delta\beta_{20} \cos \phi - \delta\beta_{10} \sin \phi + \frac{\eta |\vec{\theta}_E| \sin 2\phi}{\sqrt{1 - \eta \cos 2\phi}} \right)^2. \quad (6.40)$$

Como hemos señalado la formación de imágenes viene caracterizada por la desigualdad (6.25). A partir de esta condición podemos analizar de forma analítica, para algunos casos particulares, las regiones en el plano de la lente donde tendremos formación de imágenes en términos de los parámetros de la fuente y de la lente. Lo primero que podemos notar de forma general es que el plasma no tendrá efecto en la posición angular de las imágenes ya que Δ no depende ni de la frecuencia de observación ni de la distribución de electrones en el plasma. Por lo que el efecto del plasma en la posición de las imágenes se dará completamente en la dirección radial.

Veamos el caso sin elipticidad ($\eta = 0$) para tres disposiciones distintas en la posición de la fuente. Para el caso en que la fuente se encuentra *horizontalmente* alineada en el plano de la fuente, es decir para fuentes situadas a lo largo de la recta caracterizada por $\delta\beta_{10} \neq 0$ y $\delta\beta_{20} = 0$, vemos a partir de (6.40) que las imágenes en el plano de la lente estarán ubicadas en las regiones ϕ con $0 \leq \phi \leq 2\pi$, donde se satisfaga además que $\sin^2 \phi \leq (\delta\beta_s / \delta\beta_{10})^2$. Por otro lado para fuentes *verticalmente* alineadas, es decir, para fuentes situadas a lo largo de la recta $\delta\beta_{10} = 0$ y $\delta\beta_{20} \neq 0$, la formación de imágenes estará restringida a regiones donde se satisfaga $\cos^2 \phi \leq (\delta\beta_s / \delta\beta_{20})^2$, con $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Finalmente, dentro del caso sin elipticidad podemos obtener también una condición explícita para la formación de imágenes para fuentes localizadas a lo largo de la *diagonal* y *contradiagonal* en el plano de la fuente caracterizadas por $\delta\beta_{10} = \pm \delta\beta_{20} \neq 0$. En tal caso la formación de imágenes en el plano de la lente estará caracterizada por la condición $\sin^2(\pi/4 \mp \phi) \leq \frac{1}{2} (\delta\beta_s / \delta\beta_{20})^2$, con $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Por otro lado podemos analizar también el caso donde la elipticidad de la lente es extremadamente pequeña ($\eta \ll 1$) pero donde la fuente se encuentra ubicada en el origen del plano de la fuente, es decir, $\delta\beta_{10} = \delta\beta_{20} = 0$. En este caso la formación de imágenes se dará en la región del plano de la lente caracterizada por $\sin^2(2\phi) \leq (\frac{\delta\beta_s}{\eta\theta_E})^2$, con $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

En la figura 6.3 analizamos gráficamente el alcance del método perturbativo con este modelo de plasma en particular para la siguiente configuración de lente. Consideramos una lente gravitacional descrita por los parámetros: $n_0 = 60\text{cm}^{-3}$, $r_0 = 1\text{kpc}$, $\sigma_v = 180\text{km/s}$, $\eta = 0.3$ y una frecuencia de observación $\nu = 80\text{Mhz}$. El radio angular del anillo de Einstein para esta configuración es $\theta_E = 0.555$ (línea verde) mientras que $\theta_E^p = 0.517\text{arcsec}$ (línea negra). Los parámetros de la fuente son (radio y posición): $\delta\beta_s = 0.06\theta_E$, $\delta\beta_{10} = 0.08\theta_E$, $\delta\beta_{20} = 0.0$. La lente y la fuente se encuentran en $z_l = 0.04$ y $z_s = 0.1$, respectivamente. Los calculos se realizan en base al modelo estándar de la cosmología ΛCDM con parámetros $\Omega_m = 0.314$ y

$h = 0.674$. En dicha figura mostramos la solución de la ecuación de la lente para el caso de gravedad pura en líneas rojas, mientras que en líneas azules mostramos la solución para el caso con plasma. En este caso particular vemos que el plasma no cambia la multiplicidad de imágenes ni la morfología de las mismas y en particular podemos ver que dicha solución perturbativa coincide plenamente con la solución numérica (línea gris) para el caso de una única iteración. Sin embargo, vemos que para esta configuración, con parámetros completamente razonables, el efecto principal del plasma es el corrimiento en la dirección radial hacia el centro de la lente de la posición de las imágenes.

6.2.2. Modelo exponencial para un disco de plasma visto de lado

Si bien una distribución esféricamente simétrica de electrones en el plasma permite mostrar los efectos básicos de la influencia del plasma sobre la formación de imágenes puede resultar no ser un modelo suficientemente realista, por lo cual vale la pena también estudiar distribuciones electrónicas que respeten otras simetrías. En esta subsección consideraremos una distribución de electrones con simetría azimutal respecto del eje coordenado z . En este caso resulta conveniente trabajar con coordenadas cilíndricas de tal forma que la densidad de electrones en el plasma sólo dependa explícitamente de las coordenadas z y r_c . Recordemos que la coordenada radial cilíndrica r_c está definida sobre el plano xy perpendicular al plano de la lente como se muestra en la figura 6.1. Elegimos un decaimiento exponencial en la dirección radial y haremos dos elecciones diferentes para el comportamiento de la densidad de electrones en la dirección z . De este modo consideraremos una densidad electrónica de la forma,

$$n_e(r_c, z) = n_0 e^{-r_c/r_0} f(z). \quad (6.41)$$

Este tipo de modelos más realista que aquellos esféricamente simétricos (ver ecuación (6.34)) también han sido considerados en el pasado, obteniendo diversas estimaciones para la densidad electrónica promedio n_0 y el radio característico r_0 a partir del estudio de la distribución de iones en las regiones H II para diversas galaxias. En [166] se obtuvieron valores de $n_0 = 500 \text{cm}^{-3}$ y $r_0 = 8 \text{kpc}$ para la galaxia NGC 1232, mientras que en [167] se estimaron valores para n_0 en el rango de $\approx [30 - 260] \text{cm}^{-3}$, basados en el estudio de más de 600 galaxias de los surveys KMOS y SAMI.

En este caso, la densidad de electrones proyectada a lo largo de la visual nos queda,

$$\begin{aligned} N_e(\theta, \varphi) &= \int_{-D_l}^{D_{ls}} n_e(r_c, z) dx \\ &= n_0 f(z) \int_{-D_l}^{D_{ls}} e^{-\frac{\sqrt{x^2 + (D_l \theta \cos \varphi)^2}}{r_0}} dx \\ &= n_0 r_0 f(z) \int_{-D_l/r_0}^{D_{ls}/r_0} e^{-\frac{\sqrt{x^2 + (D_l \theta \cos \varphi)^2}}{r_0}} d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde $\tilde{x} = x/r_0$. Como no podemos calcular esta integral de forma analítica y cerrada, decidimos ajustarla por una función exponencial de la siguiente forma,

$$N_e(\theta, \varphi) = n_0 r_0 f(z) \left(A e^{-(\theta |\cos \varphi| / B \theta_0)^C} \right), \quad (6.43)$$

donde $\theta_0 = r_0/D_l$, y A, B, C son parámetros adimensionales. Como hemos mencionada previamente los parámetros A, B y C dependen de la elección particular de

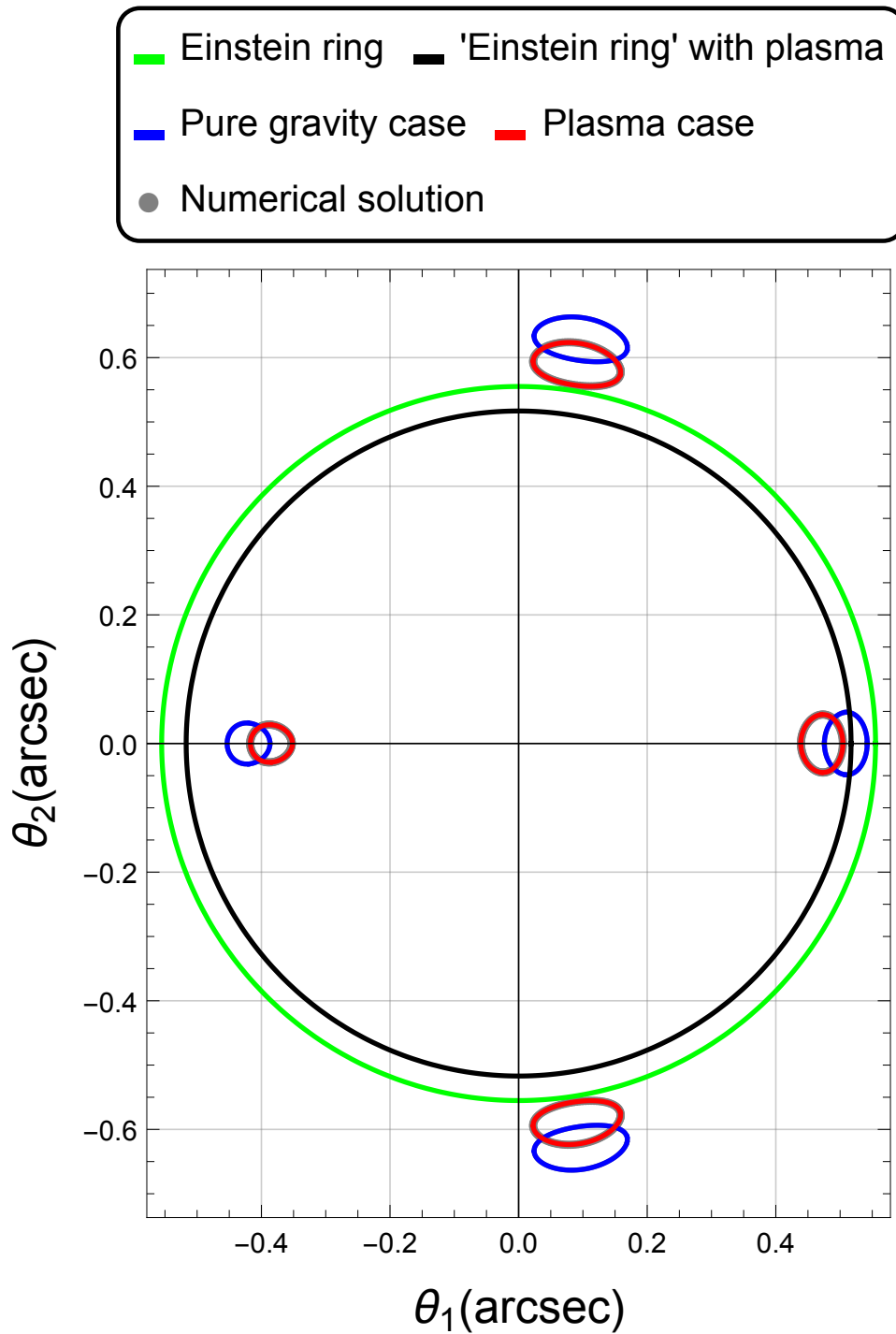


FIGURA 6.3: Modelo SIE con plasma esférico y decaimiento exponencial.

r_0 . Por lo tanto el potencial de plasma para este perfil de plasma viene dado por lo siguiente,

$$\psi_{\text{plasma}}(\vec{\theta}, \omega) = \psi_{\omega}^2 e^{-\left(\frac{\theta |\cos \varphi|}{B\theta_0}\right)^C} f(z), \quad (6.44)$$

donde

$$\psi_{\omega}^2 = \frac{D_{ls}}{D_s D_l} \frac{2\pi c^2}{\omega^2 (1+z_l)^2} A r_e n_0 r_0. \quad (6.45)$$

Lo primero que notamos en este tipo de modelos es que debido a que la densidad de electrones no tiene simetría esférica, el potencial de plasma tampoco tendrá esta simetría. De tal forma que la solución de la ecuación de la lente a orden cero θ_p dada por (6.14) coincidirá con el radio del anillo de Einstein, es decir, $\theta_p = \theta_E$. A diferencia del modelo esféricamente simétrico que describimos anteriormente, en este caso el potencial de plasma interviene como una perturbación en la ecuación de la lente.

Finalmente, elegiremos dos tipos diferentes de decaimiento a lo largo de la dirección z , tanto para valores positivos como negativos de esta coordenada. Primero un decaimiento exponencial y luego uno Gaussiano. En ambos casos la idea es simular que los electrones se encuentran mayormente distribuidos a lo largo del plano xy , es decir que el decaimiento en la dirección z debe ser más rápido que a lo largo del plano xy . Al igual que hicimos en el caso anterior, a fin de describir las imágenes en el plano de la lente, expresaremos el potencial de lente en términos de las coordenadas $b = D_l \theta$ y φ adaptadas al plano de la lente.

6.2.2.1. Decaimiento exponencial en la dirección z

En este caso elegimos una función $f(z)$ de la forma

$$f(z) = e^{-|z|/z_0} = e^{-\theta |\sin \varphi| / \theta_z}, \quad (6.46)$$

donde $\theta_z = z_0 / D_l$, mientras que el potencial de plasma estará dado por,

$$\psi_{\text{plasma}}(\vec{\theta}, \omega) = \psi_{\omega}^2 e^{-\left(\frac{\theta |\cos \varphi|}{B\theta_0}\right)^C} e^{-\frac{\theta |\sin \varphi|}{\theta_z}}. \quad (6.47)$$

De este modo, la solución de la ecuación de la lente viene dada por la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \delta\theta^{\pm} = & \delta\beta_{10} \cos \varphi + \delta\beta_{20} \sin \varphi + \theta_E (\sqrt{1 - \eta \cos 2\varphi} - 1) \\ & - \frac{\psi_{\omega}^2}{\theta_p} e^{-\chi} \left(\chi + (C-1) \left(\frac{\theta_p}{B\theta_0}\right)^C |\cos \varphi|^C \right) \pm \sqrt{\Delta}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

donde $\chi = \left(\frac{\theta_p}{B\theta_0}\right)^C |\cos \varphi|^C + \frac{\theta_p}{\theta_z} |\sin \varphi|$, y

$$\begin{aligned} \Delta = & \delta\beta_s^2 - \left(\delta\beta_{20} \cos \varphi - \delta\beta_{10} \sin \varphi + \frac{\eta\theta_E \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \eta \cos 2\varphi}} \right. \\ & \left. + \frac{\psi_{\omega}^2}{\theta_p} e^{-\chi} \left(C \left(\frac{\theta_p}{B\theta_0}\right)^C |\cos \varphi|^C \tan \varphi - \frac{\theta_p}{\theta_z} |\sin \varphi| \cot \varphi \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Obtenemos de esta forma una solución analítica para determinar la posición de las imágenes en el plano de la lente. Si bien en este caso también se puede realizar un estudio sobre la posición de las imágenes para diferentes posiciones de la fuente como hicimos para el modelo esférico, las expresiones que resultan de dicho análisis no aportan tanta claridad como en el caso anterior y por ello decidimos directamente

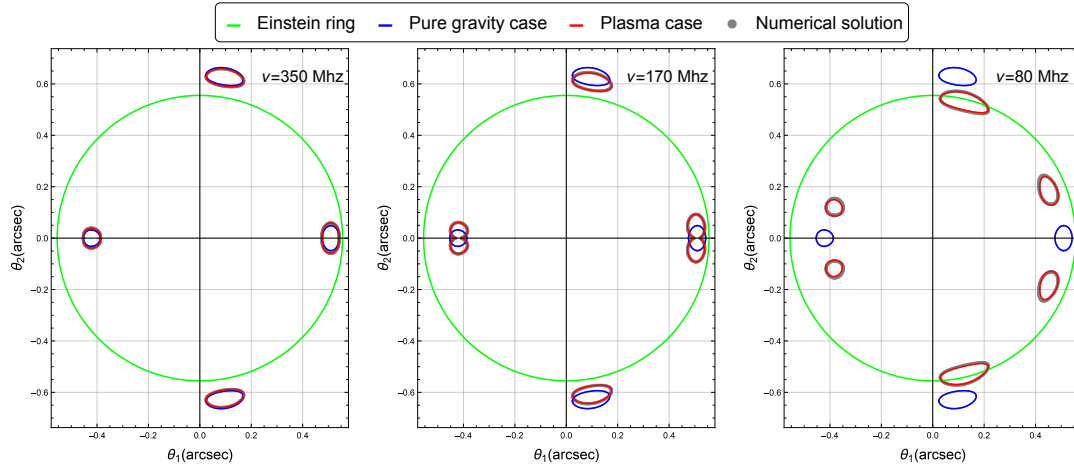


FIGURA 6.4: Modelo SIE para un disco de plasma con decaimiento exponencial en la dirección z .

encarar un análisis gráfico de las imágenes. Lo que sí podemos decir a partir de la solución analítica es que, a diferencia del caso esféricamente simétrico el efecto del plasma en las imágenes se dará no sólo en la dirección radial sino también en su posición angular debido a que en este caso la función Δ sí depende de los parámetros del plasma.

En la figura 6.4 consideramos los siguientes parámetros: $n_0 = 10\text{cm}^{-3}$, $r_0 = 10\text{kpc}$, $z_0 = 1\text{kpc}$, $\sigma_v = 180\text{km/s}$, $\eta = 0.3$, $\theta_E = 0.555\text{arcsec}$ (línea verde), $z_l = 0.04$, $z_s = 0.1$. Consideramos una fuente circular con radio $\delta\beta_s = 0.06\theta_E$ centrada en $\delta\beta_{10} = 0.08\theta_E$, $\delta\beta_{20} = 0.0$. El modelo cosmológico es el estándar ΛCDM con $\Omega_m = 0.314$, $h = 0.674$, mientras que los parámetros de ajuste nos dan $A = 2.00004 \pm 0.00002$, $B = 1.16 \pm 0.01$, $C = 1.719 \pm 0.006$. En trazos azules vemos la solución de la ecuación de la lente para el caso de gravedad pura mientras que en rojo graficamos la solución perturbativa con plasma y la comparamos con la integración numérica de la ecuación de la lente (línea gris) a fin de corroborar la exactitud del método.

En este caso graficamos las imágenes para tres frecuencias de observación diferentes, de izquierda a derecha: 350Mhz, 170Mhz y 80Mhz. Para la frecuencia más alta que estamos considerando el efecto del plasma es poco distinguible del caso en gravedad pura, y es correcto que esto sea así debido a que debemos recuperar los resultados de gravedad pura para el caso en que no haya distribución de electrones o bien en el caso de altas frecuencias. Para una frecuencia menor de 170Mhz, vemos que las imágenes más alejadas del eje horizontal, el cual coincide con el eje $z = 0$ en el plano de la lente, tienden a acercarse al centro de la lente también se aprecia un cambio en la posición angular de las imágenes respecto del caso de gravedad pura. Por otro lado, vemos que las imágenes cercanas al eje horizontal, que a su vez coincide con el disco de plasma, tienden a separarse formando dos imágenes nuevas cada una, debido a que algunos rayos de luz se desvían por encima y otros por debajo del disco de plasma de forma simétrica. Estos hechos se ponen en evidencia en el último gráfico para una frecuencia aún menor de 80Mhz, mostrando en este caso que el plasma no sólo puede interferir en la morfología de las imágenes sino también en su multiplicidad.

Señalamos finalmente que dichos graficos fueron obtenidos con una única iteración de nuestro método y en comparación con la solución numérica vemos que el método es bastante preciso al menos para esta configuración, aunque mostrando que es menos preciso para frecuencias cada vez más bajas.

6.2.2.2. Decaimiento Gaussiano en la dirección z

En este caso elegimos una función $f(z)$ de la forma

$$f(z) = e^{-(z/z_0)^2} = e^{-(\theta \sin \varphi / \theta_z)^2}, \quad (6.50)$$

donde $\theta_z = z_0/D_l$, mientras que el potencial de plasma estará dada por,

$$\psi_{\text{plasma}}(\vec{\theta}, \omega) = \psi_\omega^2 e^{-\left(\frac{\theta |\cos \varphi|}{B\theta_0}\right)^C} e^{-\left(\frac{\theta \sin \varphi}{\theta_z}\right)^2}. \quad (6.51)$$

De este modo, la solución de la ecuación de la lente viene dada por la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \delta\theta^\pm = & \delta\beta_{10} \cos \varphi + \delta\beta_{20} \sin \varphi + \theta_E (\sqrt{1 - \eta \cos 2\varphi} - 1) \\ & - \frac{\psi_\omega^2}{\theta_p} e^{-\xi} \left(\xi + (C-1) \left(\frac{\theta_p}{B\theta_0}\right)^C |\cos \varphi|^C + \frac{\theta_p^2}{\theta_z^2} \sin^2 \varphi \right) \pm \sqrt{\Delta}, \end{aligned} \quad (6.52)$$

donde $\xi = \left(\frac{\theta_p}{B\theta_0}\right)^C |\cos \varphi|^C + \frac{\theta_p^2}{\theta_z^2} \sin^2 \varphi$, y

$$\begin{aligned} \Delta = & \delta\beta_s^2 - \left(\delta\beta_{20} \cos \varphi - \delta\beta_{10} \sin \varphi + \frac{\eta\theta_E \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - \eta \cos 2\varphi}} \right. \\ & \left. + \frac{\psi_\omega^2}{\theta_p} e^{-\xi} \left(C \left(\frac{\theta_p}{B\theta_0}\right)^C |\cos \varphi|^C \tan \varphi - 2 \frac{\theta_p^2}{\theta_z^2} \cos \varphi \sin \varphi \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Vemos nuevamente que el plasma tendrá efectos tanto en la posición radial como angular de las imágenes en el plano de la lente ya que Δ depende también de los parámetros del plasma.

En la figura 6.5 consideramos los siguientes parámetros: $n_0 = 40\text{cm}^{-3}$, $r_0 = 10\text{kpc}$, $z_0 = 1\text{kpc}$, $\sigma_v = 180\text{km/s}$, $\eta = 0.3$, $\theta_E = 0.730\text{arcsec}$ (línea verde), $z_l = 0.2$, $z_s = 1.2$. Consideramos una fuente circular con radio $\delta\beta_s = 0.06\theta_E$ centrada en $\delta\beta_{10} = 0.08\theta_E$, $\delta\beta_{20} = 0.0$. Estamos considerando el modelo cosmológico estándar ΛCDM con $\Omega_m = 0.314$, $h = 0.674$. Los parámetros de ajuste en este caso son $A = 2.008 \pm 0.002$, $B = 1.590 \pm 0.005$, $C = 1.430 \pm 0.008$. En trazos azules vemos la solución de la ecuación de la lente para el caso de gravedad pura mientras que en rojo graficamos la solución perturbativa con plasma y la comparamos con la integración numérica de la ecuación de la lente (línea gris) a fin de corroborar la exactitud del método.

En este caso graficamos las imágenes para cuatro frecuencias de observación diferentes, de izquierda a derecha: 320Mhz, 170Mhz, 140Mhz, 130Mhz. Nuevamente para frecuencias altas el efecto del plasma es bastante tenue. Aunque a medida que vamos a frecuencias de observación cada vez menores vemos una situación parecida con el modelo anterior. Las imágenes que están cerca del eje horizontal $z = 0$ comienzan a separarse pero esta vez en tres imágenes cada una, mientras que las dos imágenes que están más alejadas del eje $z = 0$ permanecen prácticamente inmutables respecto al caso de gravedad pura debido a que, para este modelo en particular, el decaimiento a lo largo de la dirección z es mucho más rápido que en el modelo anterior y por lo tanto la influencia del plasma en estas imágenes es muy leve. Es por este motivo también que la solución perturbativa resuelve bastante bien estas imágenes y no tan bien aquellas cercas del eje $z = 0$. En particular vemos que para la

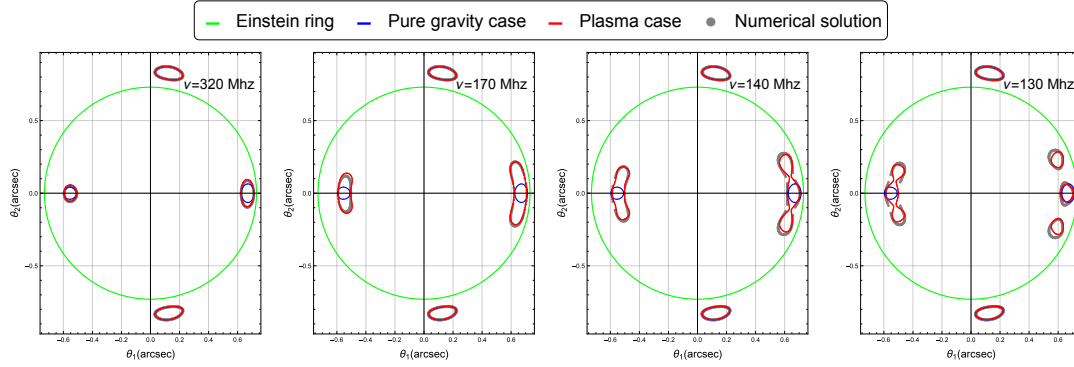


FIGURA 6.5: Modelo SIE para un disco de plasma con decaimiento Gaussiano en la dirección z .

frecuencia de observación de 130Mhz, la solución perturbativa necesitaría al menos otra iteración para poder reproducir las imágenes adecuadamente.

El efecto que produce el plasma en la multiplicidad de imágenes está íntimamente relacionado con el efecto que produce el plasma sobre la estructura de curvas cósmicas, y por ende también, sobre la estructura de curvas críticas. En la sección 6.4 estudiaremos el efecto del plasma en estas clases de curvas mostrando de esta forma a qué se debe este desdoblamiento en las imágenes que produce el plasma.

6.2.3. Modelo Gaussiano para un disco de plasma visto de frente

Consideremos ahora un disco de plasma visto de frente con decaimiento Gaussiano tanto a lo largo como a lo ancho en el plano perpendicular a línea de la visual. En este caso la densidad de electrones estará dada de la siguiente manera,

$$n_e(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{y^2+z^2}{r_0^2}} e^{-\frac{x^2}{z_0^2}}. \quad (6.54)$$

Luego, la densidad de electrones proyectada a lo largo de la línea de la visual nos queda de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} N_e(y, z) &= \int_{-D_l}^{D_{l_s}} n_e(x, y, z) dx \\ &= n_0 e^{-\frac{y^2+z^2}{r_0^2}} \int_{-D_l}^{D_{l_s}} e^{-\frac{x^2}{z_0^2}} dx \\ &= n_0 z_0 e^{-\frac{y^2+z^2}{r_0^2}} \int_{-D_l/z_0}^{D_{l_s}/z_0} e^{-\tilde{x}^2} d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

donde $\tilde{x} = x/z_0$. Veamos la integral. En general para las situaciones que estaremos considerando las distancias D_l y D_{l_s} son del orden de Mpc (megaparsec) mientras que z_0 , la escala característica del disco de plasma, es del orden de los kpc (kiloparsec). Sumado al hecho que el integrando $e^{-\tilde{x}^2}$ decae lo suficientemente rápido, podemos reemplazar los límites de integración D_l/z_0 y $-D_{l_s}/z_0$ en la integral anterior por los valores asintóticos ∞ y $-\infty$, respectivamente; y obtener de este modo una buena aproximación de la misma. Además esto nos permitirá resolver la integral

de forma analítica. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} N_e(y, z) &\approx n_0 z_0 e^{-\frac{y^2+z^2}{r_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{x}^2} d\tilde{x} \\ &= n_0 z_0 e^{-\frac{y^2+z^2}{r_0^2}} \sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Reescribiendo N_e en términos de la coordenada angular θ utilizando las relaciones (6.30) y (6.31) obtenemos,

$$N_e(\theta) = n_0 z_0 e^{-\theta/\theta_0} \sqrt{\pi}, \quad (6.57)$$

donde $\theta_0 = r_0/D_l$. Finalmente, el potencial de plasma estará dado como sigue,

$$\psi_{\text{plasma}}(\vec{\theta}, \omega) = \psi_{\omega}^2 e^{-\theta/\theta_0}, \quad (6.58)$$

donde

$$\psi_{\omega}^2 = \frac{D_{ls}}{D_s D_l} \frac{2\pi c^2}{\omega^2 (1+z_l)^2} r_e n_0 z_0 \sqrt{\pi}. \quad (6.59)$$

Notemos que este perfil de plasma tendrá un efecto similar al perfil de plasma esféricamente simétrico que consideramos en (6.34) debido a que en ambos casos la densidad de electrones proyectada N_e es axialmente simétrica respecto de la línea de la visual. En efecto, podemos ver la similitud de los potenciales de plasma si comparamos las ecuaciones (6.58) y (6.59) con las ecuaciones (6.37) y (6.38). Por este motivo, en lo que resta del capítulo no haremos mención de este perfil debido a que cualquier análisis que pudiéramos realizar se encuentra de alguna forma contenido en el análisis llevado a cabo para el perfil de densidad esféricamente simétrico dado por (6.34).

Por último, el efecto que un disco de plasma como el que estamos considerando, para una orientación arbitraria respecto de la línea de la visual, tiene en la formación de las imágenes fue abordado recientemente y puede ser consultado en [168].

6.3. Comparación gráfica para varias iteraciones

Debido a que este es un método perturbativo es de esperar que en algunas situaciones las soluciones obtenidas a través del mismo disten demasiado de las soluciones exactas. En esta sección nos tomamos la libertad de llamar *soluciones exactas* a aquellas obtenidas numéricamente ya que podemos obtenerlas con un alto grado de precisión, aunque estrictamente no lo sean. Se puede llegar a esta situación donde el método perturbativo no es suficientemente preciso en varias circunstancias, ya sea debido a que la elipticidad de la lente sea muy alta o bien porque la fuente se encuentra centrada muy lejos de la línea de la visual o que su radio sea excesivamente grande. O bien una combinación de ellas. Estas situaciones han sido estudiadas tanto en el trabajo original de Alard como en trabajos subsiguientes.

Por otro lado el plasma también influirá en la precisión del método perturbativo ya que para potenciales de plasma sin simetría esférica el mismo intervendrá como una perturbación del potencial de lente en gravedad pura, tal es el caso, por ejemplo, del disco de plasma visto de lado que analizamos en la sección anterior. Pero también los potenciales de plasma con simetría esférica tendrán efecto en la precisión del método ya que, como vemos, la solución a primer orden dada por (6.23) debe ser evaluada en θ_p que corresponde con la solución a orden cero de la ecuación de la lente la cual se ve afectada por el plasma. Obviamente, la influencia del plasma

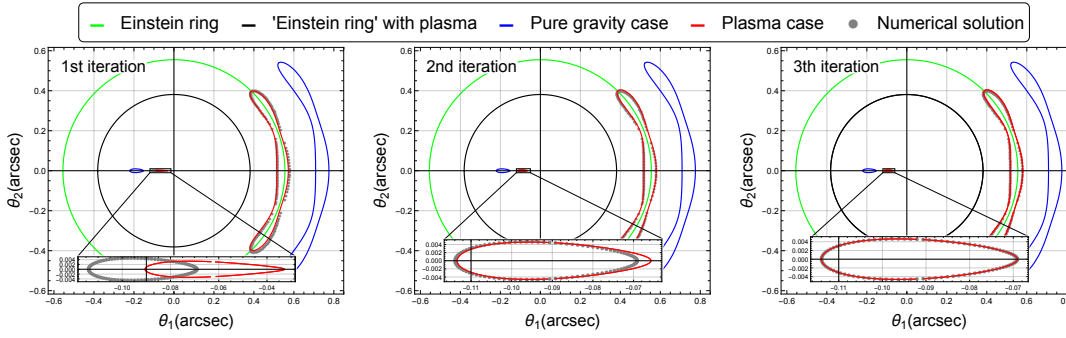


FIGURA 6.6: Modelo SIE con plasma esférico y decaimiento exponencial. Comparación para las tres primeras iteraciones.

en la precisión del método perturbativo será mayor a medida que la densidad de electrones aumente así como también para frecuencias de observación cada vez más bajas.

Como hemos visto, en 6.1.2 introdujimos una corrección iterativa del método perturbativo a fin de atender aquellas situaciones donde, por los motivos que hemos discutido, el método perturbativo (con una sola iteración) no es suficientemente preciso para reproducir las soluciones exactas.

En la figura 6.6 volvemos al modelo de plasma esférico para la siguiente configuración. $\nu = 80\text{Mhz}$, $n_0 = 300\text{cm}^{-3}$, $r_0 = 1\text{kpc}$, $\sigma_v = 180\text{km/s}$, $\eta = 0.3$, $\theta_E = 0.555\text{arcsec}$ (línea verde), $\theta_E^p = 0.381\text{arcsec}$ (línea negra), $z_l = 0.04$, $z_s = 0.1$. Parámetros de la fuente (radio y posición donde se encuentra centrada): $\delta\beta_s = 0.06\theta_E$, $\delta\beta_{10} = 0.5\theta_E$, $\delta\beta_{20} = 0.0$. Utilizamos el modelo cosmológico estándar con parámetros: $\Omega_m = 0.314$, $h = 0.674$; mientras que los parámetros de ajuste son: $A = 2.003 \pm 0.002$, $B = 1.55 \pm 0.01$, $C = 1.47 \pm 0.01$. En dicha figura vemos la formación de las imágenes para las tres primeras iteraciones de nuestro método perturbativo. En gris se encuentra la *solución exacta* (o numérica propiamente dicha). Tanto para el caso de gravedad pura (líneas azules) como para el caso con plasma (líneas rojas) vemos que se forman dos imágenes: a la derecha un arco gravitacional que es una deformación tangencial de la solución a orden cero, y en lado izquierdo una imagen deformada en sentido radial, la cual ampliamos a fin de una mejor visualización. Las correcciones introducidas por la segunda y la tercera iteración se ponen claramente de manifiesto en la región ampliada donde vemos cómo mejora sustancialmente la precisión del método perturbativo, mientras que la corrección en el arco gravitacional no parece cambiar demasiado a simple vista. En este caso el efecto del plasma es relevante en la precisión del método tanto porque estamos trabajando con una frecuencia de observación relativamente baja de 80Mhz como así también porque estamos considerando una densidad electrónica relativamente alta de 300cm^{-3} en comparación con los casos que veníamos analizando hasta ahora.

Por otro lado analizamos también las correcciones iterativas del método perturbativo para el disco de plasma visto de lado con decaimiento Gaussiano en la dirección z . En este caso repetimos la misma configuración de parámetros que utilizamos en la figura 6.5 y en particular nos vamos a concentrar en las últimas dos subfiguras de la derecha que corresponden a frecuencias de observación de 140Mhz y 130Mhz, respectivamente. En ambos casos veremos cómo una tercera iteración del método perturbativo produce correcciones significativas del método perturbativo. Dichas correcciones las podemos ver en las figuras 6.7 para la frecuencia de 140Mhz, y 6.8 para la frecuencia de 130Mhz. Iteraciones de orden más alto no muestran correcciones significativas.

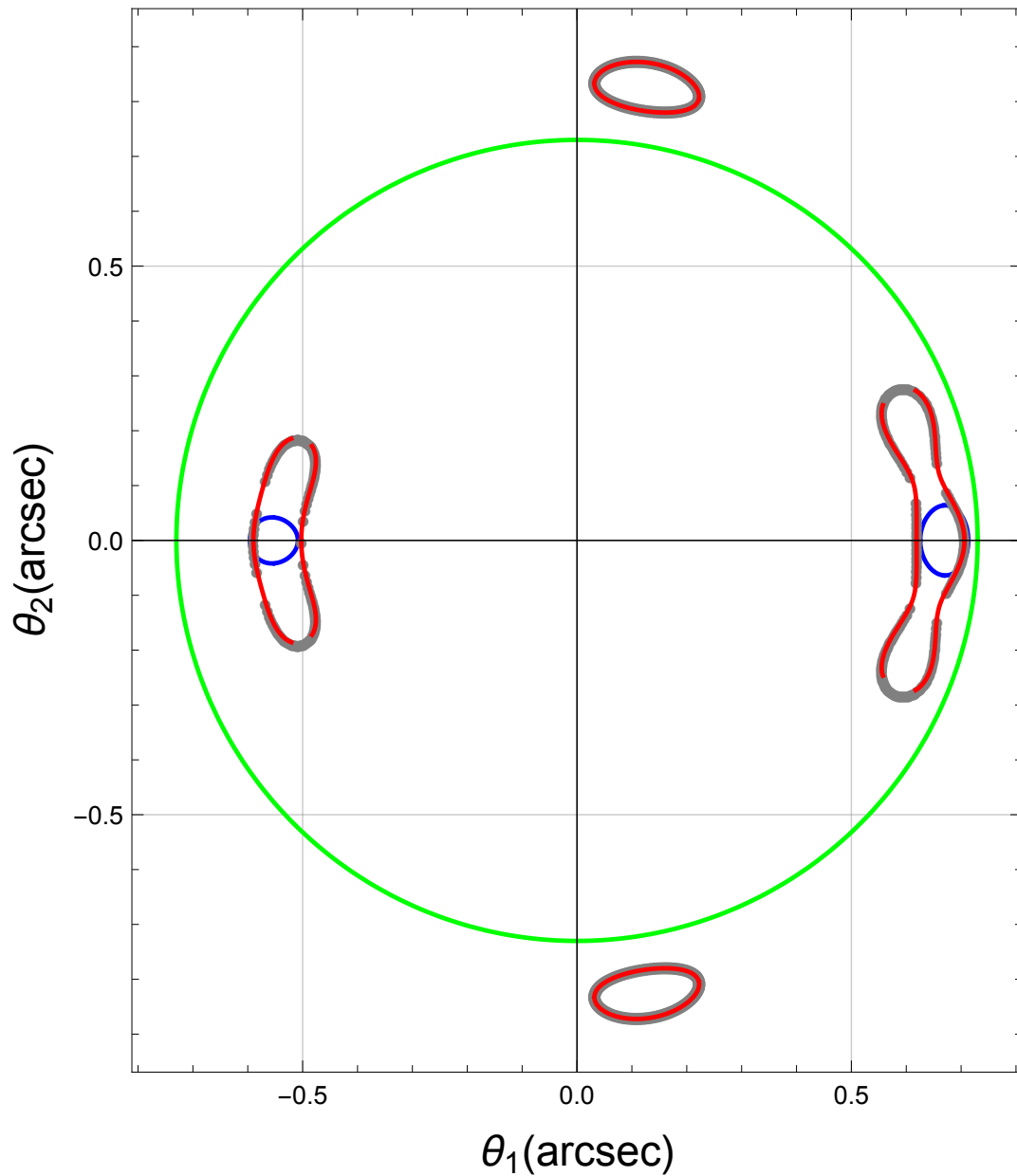


FIGURA 6.7: Modelo SIE para un disco de plasma con decaimiento Gaussiano en la dirección z , repitiendo la configuración de la figura 6.5 con frecuencia de observación $\nu = 140\text{MHz}$. Tercera iteración.

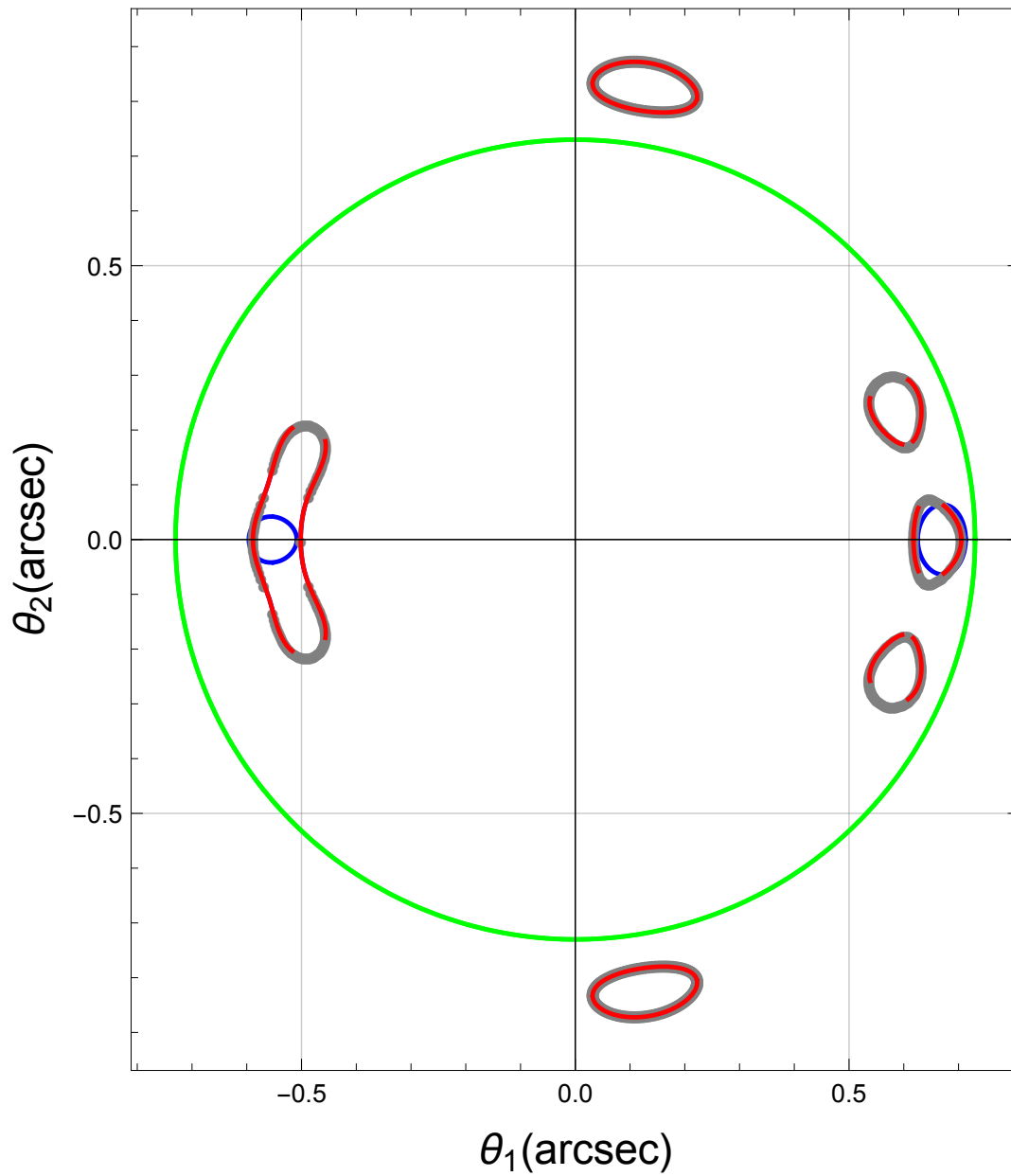


FIGURA 6.8: Modelo SIE para un disco de plasma con decaimiento Gaussiano en la dirección z , repitiendo la configuración de la figura 6.5 con frecuencia de observación $\nu = 130\text{MHz}$. Tercera iteración.

De esta forma mostramos gráficamente para algunos ejemplos particulares cómo las correcciones iterativas del método perturbativo resultan útiles a fin de reproducir la posición de las imágenes de forma más fidedigna. Resaltamos que en todos los casos correcciones de orden cuatro o superiores no resultaron necesarias. Por otro lado, si bien es posible mostrar cómo son las soluciones analíticas para las diferentes iteraciones dichas expresiones son bastante engorrosas y carecen de carácter ilustrativo alguno, y por ese motivo decidimos realizar sólo un análisis gráfico de las mismas.

6.4. Curvas críticas, cáusticas y magnificación

Como vimos en la sección 6.2.2, para ciertos perfiles de plasma, en particular para un disco de plasma visto de lado con decaimiento tanto exponencial como Gaussiano en la dirección perpendicular al disco, el plasma tiene un efecto claro en la multiplicidad de las imágenes respecto del mismo caso en gravedad pura (ver figuras 6.4 y 6.5). Lejos de ser el objetivo de esta sección establecer un criterio general o condiciones necesarias que nos permitan predecir el número de imágenes dado un determinado perfil de plasma, vamos a analizar el efecto del plasma en las curvas críticas y cáusticas asociadas a la figura 6.5, la cual corresponde al modelo con decaimiento Gaussiano en la dirección z . Un efecto similar tendrá el plasma sobre las curvas críticas y cáusticas asociadas a la figura 6.4 aunque en este caso, debido a que el potencial de lente no es diferenciable en $z = 0$, las mismas deben ser calculadas con mayor cuidado cerca de dicha zona.

Las *curvas críticas*, que son aquellas curvas definidas a partir de la condición $J = 0$ en el plano de la lente, donde $J = \det \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}}$ es el determinante de la matriz Jacobiana, tienen una importancia significativa debido a que están relacionadas a dos de los efectos más notorios de la teoría de lentes gravitacionales: la magnificación de imágenes y la multiplicidad de las mismas (este último, propio de lentes gravitacionales fuertes). Debido al efecto de magnificación, la imagen de una fuente infinitesimalmente pequeña situada en una posición $\vec{\theta}$ se iluminará o se oscurecerá por un factor $|\mu(\vec{\theta})|$ donde μ se conoce como *magnificación* (o magnificación puntual) y está definido por $\mu = \frac{1}{j}$. De esta forma, vemos que las curvas críticas son aquellas regiones en el plano de la lente donde la magnificación de las imágenes es infinita. Esta divergencia indica que la aproximación de óptica geométrica falla en esta región. Sin embargo, al tratar en la práctica con fuentes extendidas la magnificación se calcula promediando la magnificación puntual sobre la fuente y a su vez, pesándola y normalizándola por el brillo superficial de la misma. Para una discusión detallada de este tema nos referimos a [169].

En la figura 6.9 vemos las curvas críticas asociadas a la figura 6.5 para varias frecuencias de observación. En verde graficamos el anillo de Einstein mientras que en azul y rojo se presentan las curvas críticas para el caso de gravedad pura y para el caso con plasma, respectivamente. Podemos ver que incluso para frecuencias de 320MHz, la influencia del plasma es notoria y que su principal influencia, al menos en este perfil que estamos considerando, se da a lo largo del eje horizontal definido por $z = 0$ en el plano de la lente, debido a que el mismo coincide con el disco de plasma visto de lado. Si bien dichas curvas también pudieron ser obtenidas a partir de un enfoque perturbativo, decidimos estudiar numéricamente tanto las curvas críticas como cáusticas a fin de evitar cualquier sesgo que una solución perturbativa pudiera introducir.

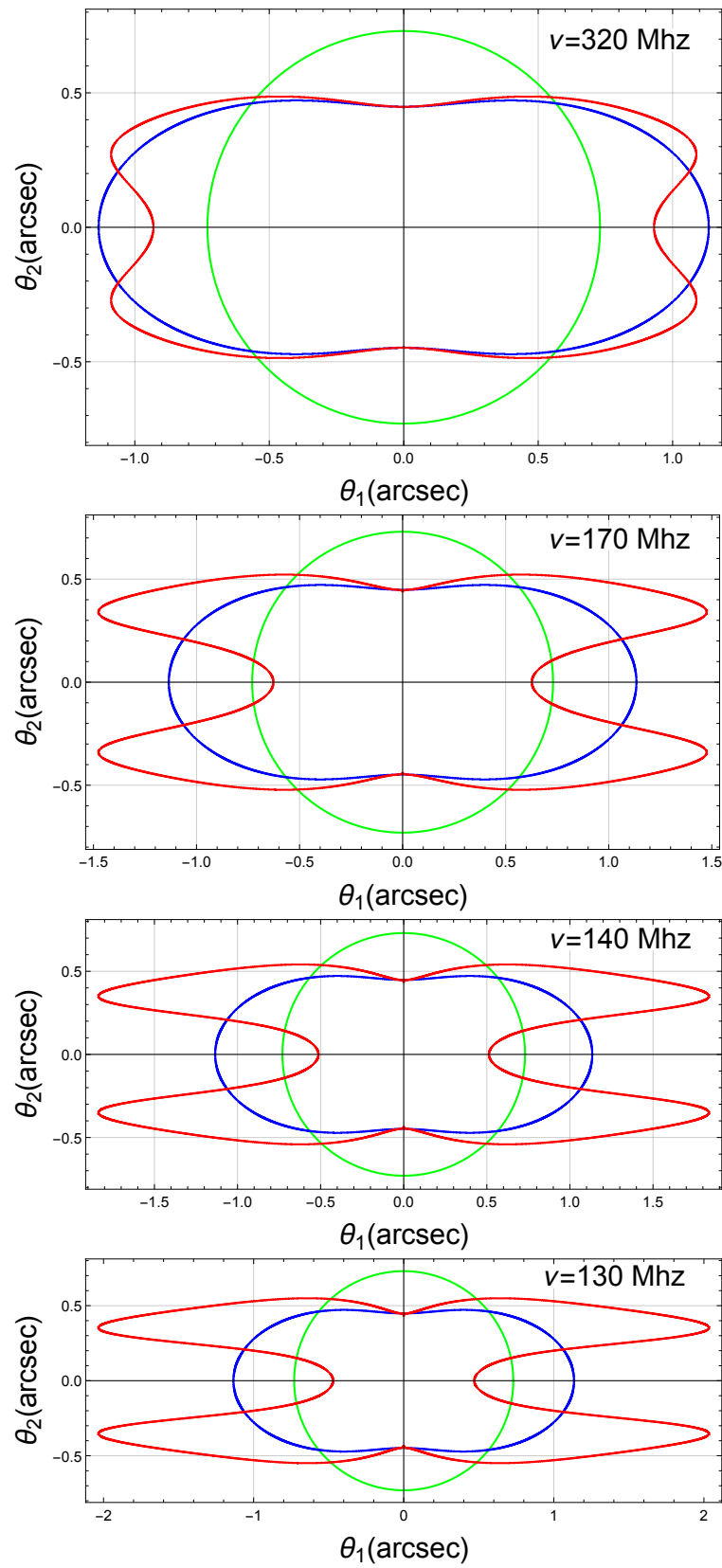


FIGURA 6.9: Curvas críticas asociadas a la figura 6.5.

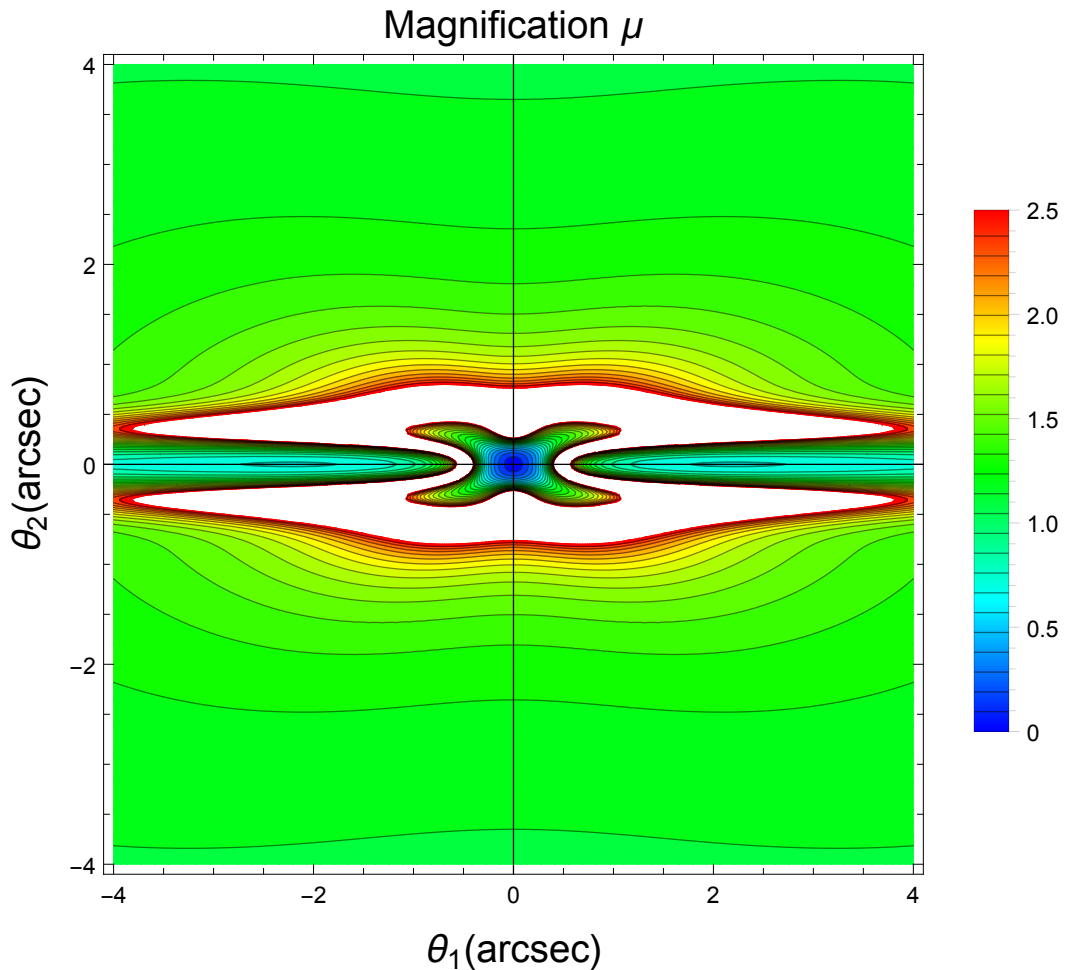


FIGURA 6.10: Curvas de nivel asociadas a la magnificación para la misma configuración de 6.5 con frecuencia de observación $\nu = 130\text{Mhz}$.

Para la frecuencia de 130Mhz podemos ver además en la figura 6.10 las curvas de nivel asociadas a la magnificación en el plano de la lente hasta un valor de $\mu = 2.5$ apreciando de esta forma cómo el valor de la magnificación es mayor en las regiones próximas a las curvas críticas.

Por otro lado, como mencionamos previamente las curvas críticas también están relacionadas con la multiplicidad de imágenes, aunque de una forma indirecta ya que la evaluación de la ecuación de lente a lo largo de estas curvas nos da lo que se conoce como *curvas cáusticas*, y la posición relativa de la fuente con respecto a estas nuevas curvas es lo que nos dará información acerca de la multiplicidad de las imágenes. Dicho de otro modo, aquellas fuentes que generan imágenes localizadas a lo largo de curvas críticas en el plano de la lente, se encuentran situadas a lo largo de curvas cáusticas en el plano de la fuente. Un ejemplo sencillo de esto se da en el caso de una lente y una fuente puntuales alineada esta última con la línea de la visual. La imagen que se produce en este caso es un anillo de Einstein que a su vez coincide con una curva crítica, y por lo tanto la curva cáustica será en este caso el punto donde se encuentra localizada la fuente.

En la figura 6.11 podemos ver las curvas cáusticas asociadas a la figura 6.5. En azul vemos las curvas cáusticas para el caso de gravedad pura con forma de *astroide* mientras que en rojo se muestran las curvas cáusticas para el caso con plasma para

las distintas frecuencias de observación que estamos considerando. En negro podemos ver la posición relativa de la fuente respecto a estas curvas. Es notable el efecto que tiene el plasma para frecuencias cada vez más bajas, lo cual tiene su correlato con las imágenes que se forman en el plano de la lente. Para la frecuencia de 320Mhz vemos que si bien el efecto del plasma en las curvas cáusticas es apreciable, las imágenes cambian muy poco debido a que la fuente se encuentra relativamente alejada de las mismas. Sin embargo para frecuencias cada vez más bajas vemos efectos sustanciales en las imágenes formadas a lo largo del eje $z = 0$ en el plano de la lente, situación que se condice con una aproximación cada vez mayor entre la fuente y las curvas cáusticas. Para la frecuencia de 130Mhz podemos ver incluso que el plasma produce un cambio en la multiplicidad de las imágenes perfectamente distinguible coincidiendo con un solapamiento entre la fuente y las curvas cáusticas en múltiples lugares. Finalmente en la figura 6.12 vemos en simultáneo las imágenes que se forman (subfigura de abajo) para distintas posiciones relativas de la fuente respecto de las curvas cáusticas (subfigura de arriba). De esta forma es posible apreciar mejor la importancia de las curvas cáusticas en la morfología y multiplicidad de las imágenes en el plano de la lente.

6.5. Resumen del capítulo

En este capítulo hemos utilizado el método perturbativo introducido por Alard en [161], originalmente presentado para el caso de gravedad pura y extendido en esta tesis al caso de plasma, a fin de estudiar el efecto que tiene un plasma frío y no magnetizado en la formación de las imágenes en el régimen de lentes gravitacionales fuertes. Estudiamos el efecto que tiene el mismo en los anillos de Einstein, arcos gravitacionales y sistemas de imágenes múltiples desde un enfoque analítico, gráfico y numérico; este último a fin de poder corroborar la precisión del método perturbativo. Implementamos también una corrección iterativa de este método y estudiamos cómo mejoraba la precisión del mismo hasta la tercera iteración.

La distribución de materia fue caracterizada por un modelo de lente SIE, comúnmente utilizado para modelar halos de materia oscura en galaxias tanto en el contexto de lentes gravitacionales como en estudios de dinámica estelar. Para la distribución de electrones en el plasma nos enfocamos en dos modelos: uno esféricamente simétrico con decaimiento exponencial, y otro donde los electrones se encuentran distribuidos a lo largo de un disco visto tanto de lado como de frente, con dos tipos de decaimiento diferentes: uno exponencial y otro Gaussiano.

Por último, estudiamos el efecto del plasma en la estructura de las curvas críticas, cáusticas y en la magnificación. En particular, estudiando el disco de plasma visto de lado con un decaimiento Gaussiano, vemos que la posición relativa de la fuente respecto de las curvas cáusticas en el plano de la fuente explican el cambio en la multiplicidad de las imágenes producido por la presencia del plasma debido a que en algunas situaciones la posición de la fuente se solapa con la de las curvas cáusticas en uno o varios lugares. Para dicho modelo mostramos a su vez los diferentes tipos de imágenes que se obtienen para distintas posiciones donde se encuentra centrada la fuente.

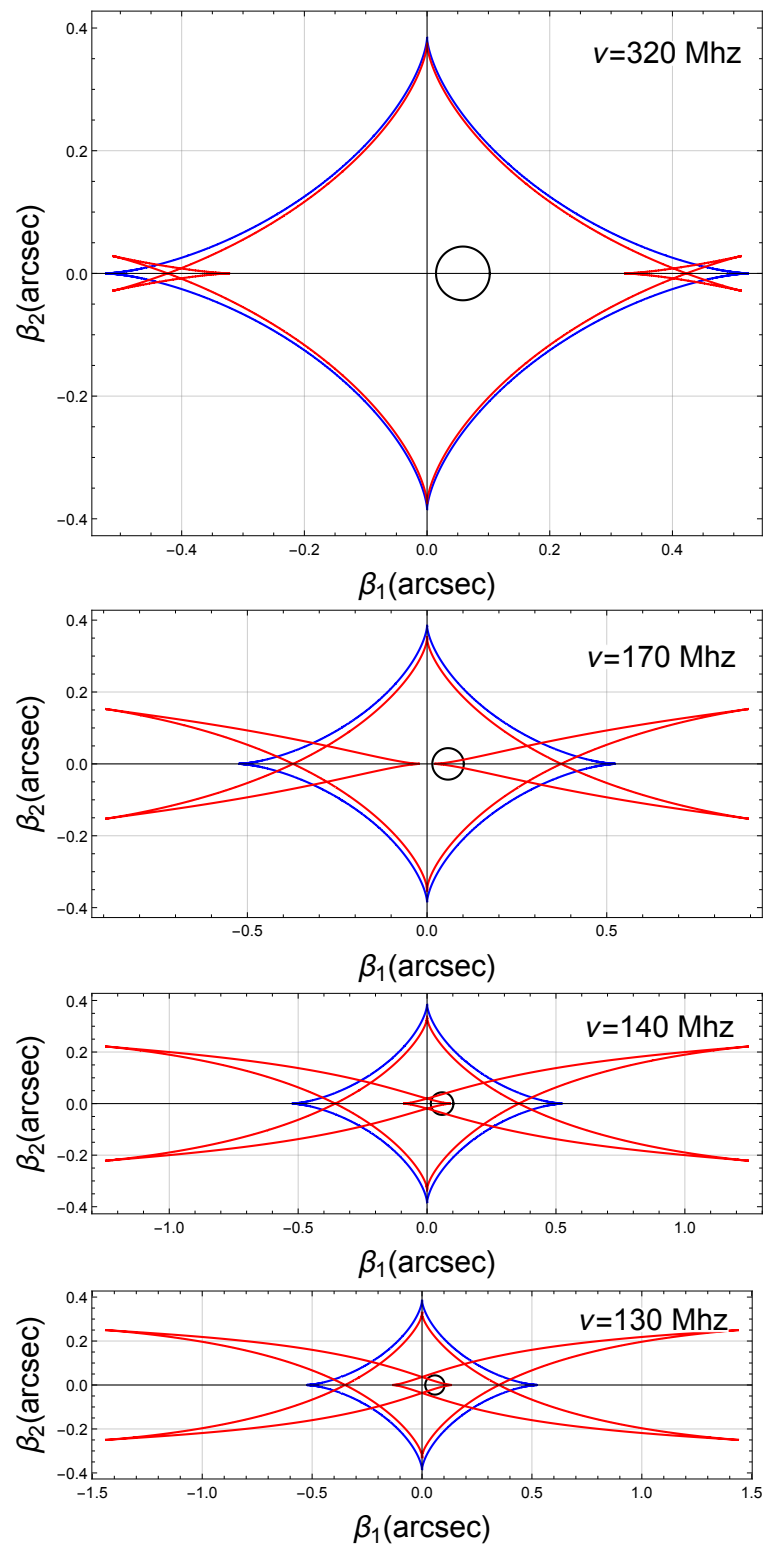


FIGURA 6.11: Curvas cáusticas asociadas a la figura 6.5.

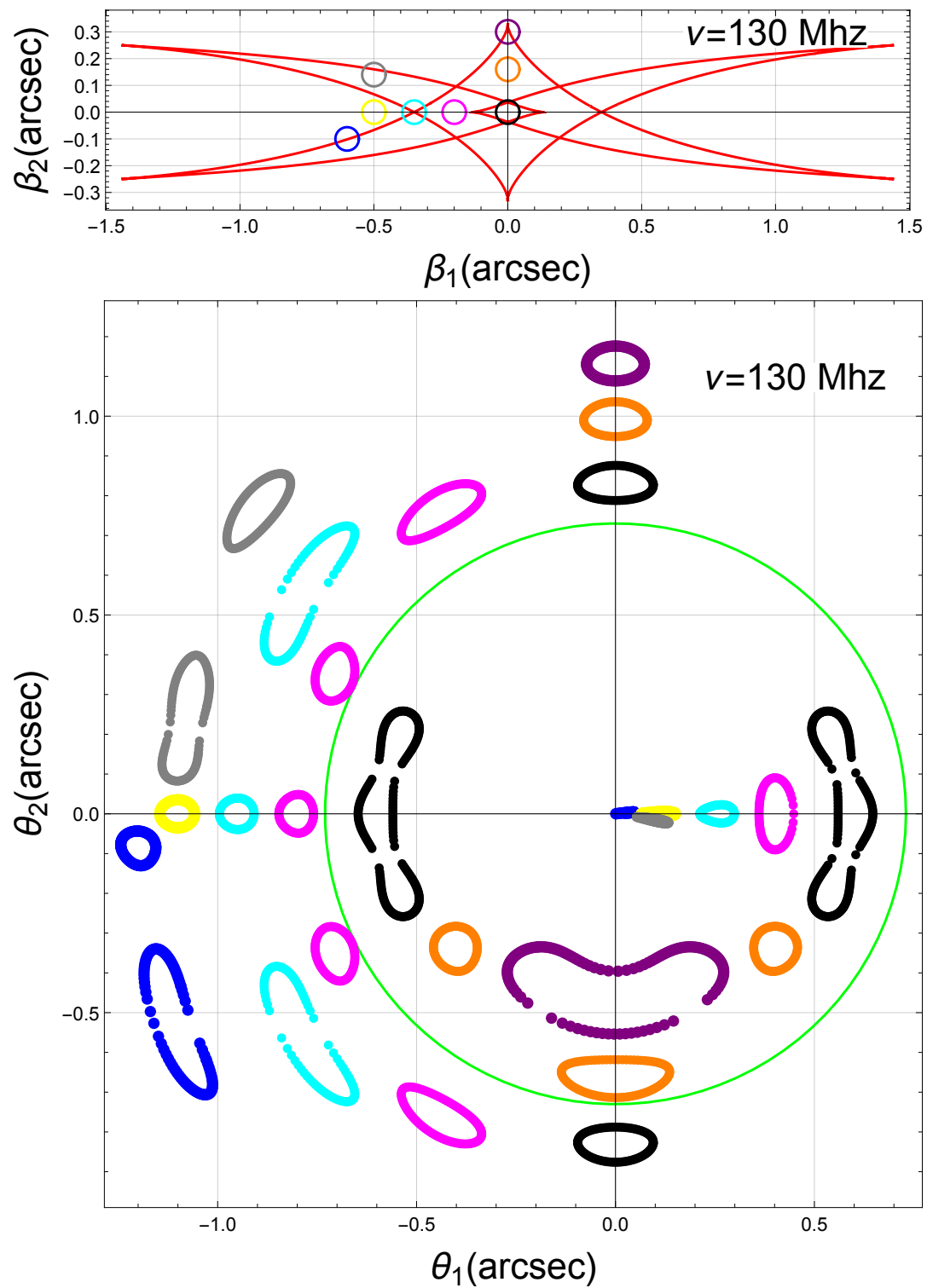


FIGURA 6.12: Imágenes para distintas posiciones de la fuente respecto de las curvas cáusticas para la misma configuración de 6.5 con frecuencia de observación $\nu = 130$ Mhz.

Capítulo 7

Conclusión

En esta tesis doctoral hemos abordado el estudio de la influencia que tienen los plasmas astrofísicos fríos y no magnetizados en la desviación de la luz, estudiando principalmente su influencia sobre el ángulo de deflexión por ser éste no sólo una cantidad indirectamente observable a escala del sistema solar sino porque a partir de él y de la ecuación de lente se pueden estudiar otros observables de relevancia como el shear, la convergencia, los anillos de Einstein, los arcos gravitacionales, los sistemas de imágenes múltiples, etc.; todos ellos abordados en este trabajo.

La herramienta central que hemos utilizado en este trabajo (excepto en el capítulo 6) a fin de estudiar la influencia del plasma ha sido el uso del teorema de Gauss-Bonnet para determinar el ángulo de deflexión, en el régimen de lente débil, de una manera sencilla en términos de cantidades geométricas e independiente del sistema de coordenadas utilizado, lo cual constituye un cambio significativo respecto de los métodos tradicionales. Dicho método que fue originalmente presentado por Gibbons y Werner para calcular el ángulo de deflexión en el caso de gravedad pura, fue extendido en este trabajo permitiendo tener en cuenta la influencia de un medio dispersivo por el cual se propagaran los rayos de luz. Pudimos llevar a cabo esta generalización tanto para espaciotiempos estáticos y esféricamente simétricos como para espaciotiempos estacionarios y axialmente simétricos.

Otro de los temas abordados en este trabajo, y para el cual nos hicimos nuevamente con el teorema de Gauss-Bonnet, fue el efecto que tienen las correcciones por distancias finitas en la estimación del ángulo de deflexión teniendo en cuenta además el efecto del plasma. Es decir, estimar cuánto influyen las distancias finitas lente-fuente y lente-observador en la desviación de los rayos de luz que se propagan a través del plasma. Vimos que el uso del teorema de Gauss-Bonnet permite llevar a cabo diferentes definiciones de ángulo de deflexión en este caso, algunas de las cuales ni siquiera coinciden con expresiones clásicas y bien probadas en astrometría de alta precisión. Por nuestro lado, propusimos una nueva definición que coincide con expresiones clásicas y rebatimos otras que a nuestro entender eran desacertadas. En este contexto discutimos la forma de llevar a cabo el procedimiento de Eddington para medir el ángulo de deflexión a escala del sistema solar teniendo en cuenta la presencia de un medio dispersivo, y estudiamos en detalle un modelo de plasma para la parte más externa de la corona solar (modelando el Sol como una lente de Schwarzschild) mostrando cómo influye la distancia (finita) Tierra-Sol en el ángulo de deflexión para distintas frecuencias.

Complementamos este enfoque con el método basado en tetradas nulas e introdujimos una métrica de tipo Gordon para poder incluir los efectos del plasma en la desviación de los rayos de luz, obteniendo de esta forma expresiones, incluso a segundo orden, para el ángulo de deflexión, el shear y la convergencia en términos de escalares de curvatura asociados al tensor de Ricci y de Weyl. La ventaja de este método es que también nos permite escribir cantidades ópticas en términos

de cantidades geométricas con un significado claro e independiente del sistema de coordenadas utilizado. A su vez, con ambos métodos pudimos obtener expresiones para estas mismas cantidades ópticas en términos de las componentes del tensor energía-momento, la frecuencia de observación y la distribución de electrones en el plasma.

El teorema de Gauss-Bonnet nos permitió también estudiar de una manera sencilla la deflexión que sufren las partículas masivas sujetas únicamente al campo gravitatorio vía una identificación entre el movimiento de éstas y el de fotones propagándose en un plasma homogéneo bajo el mismo campo gravitacional. Como vimos, en este trabajo fuimos capaces de establecer una nueva correspondencia, esta vez entre la propagación partículas masivas y cargadas en un campo gravitacional y bajo la acción de un campo eléctrico externo, y la propagación de fotones en un plasma inhomogéneo particular. Con esta identificación, y a través del teorema de Gauss-Bonnet, pudimos estudiar la deflexión que experimentan estas partículas masivas y cargadas, en dicha situación, de una manera sencilla.

Otra ventaja que presenta este método es que nos permite calcular de una manera bastante directa el ángulo de deflexión a ordenes superiores, tanto para fotones propagándose en un espaciotiempo esféricamente simétrico o axialmente simétrico para distintos perfiles de plasma como para partículas masivas en gravedad pura. En todos los casos fuimos capaces de obtener el ángulo de deflexión incluso hasta tercer orden sobre el espaciotiempo de Kerr.

En cuanto al estudio de la influencia del plasma en el régimen de lente fuerte nos enfocamos principalmente en el efecto que tiene el mismo sobre la posición, la forma y la multiplicidad de las imágenes, estudiando tanto anillos de Einstein como arcos gravitacionales y sistemas de imágenes múltiples. Para ello llevamos a cabo un enfoque perturbativo (y cuando se requirió numérico también) de la ecuación de la lente utilizando un método originalmente propuesto por Alard para el caso de gravedad pura, y el cual fue extendido en este trabajo para incluir los efectos del plasma. A su vez estudiamos el efecto del plasma en las curvas críticas y cáusticas así como también en la magnificación. Por último implementamos una corrección iterativa de este método a fin de obtener soluciones analíticas de la ecuación de lente tan precisas como necesitemos.

Vale destacar, que las técnicas desarrolladas en este trabajo no se limitan a medios plasmáticos, sino que siguen siendo válidas para otros medios dispersivos y no dispersivos, incluso en ausencia de gravedad, por lo cual las técnicas presentadas también pueden resultar útiles para estudios en el límite de óptica geométrica en condiciones de laboratorio donde los efectos de la gravedad puedan ser considerados despreciables.

Lejos de ser el objetivo de esta tesis llevar a cabo un análisis completo de todos los efectos asociados al *plasma lensing*, creemos haber contribuido a un mejor entendimiento de los fenómenos ópticos asociados al mismo tanto con resultados nuevos y originales como así también con la introducción de nuevos métodos, propios de la geometría diferencial como son los basados en el teorema de Gauss-Bonnet o el formalismo de tetradas nulas a través de la identificación de órbitas de rayos de luz (no geodésicas) en espaciotiempos físicos con órbitas provenientes de geodésicas nulas en métricas ópticas 4-dimensionales tipo Gordon. Métodos que nos permiten obtener y/o simplificar a través de invariantes geométricos el cálculo de una de las cantidades ópticas más relevantes en el formalismo de lentes gravitacionales: el ángulo de deflexión.

Apéndice A

Ángulo de deflexión para modelos de plasma particulares

Por completitud, en este apéndice calcularemos explícitamente el ángulo de deflexión para dos modelos de plasma inhomogéneos diferentes bajo la aproximación $\frac{\omega_e}{\omega_\infty} \ll 1$.

A.1. Modelo de plasma con perfil $N(r) = N_0 r^{-h}$, $h > 0$ en el espaciotiempos de Schwarzschild

Consideraremos una lente gravitacional rodeada por un plasma inhomogéneo con densidad electrónica,

$$N(r) = N_0 r^{-h}, \quad h > 0, \quad (\text{A.1})$$

sobre un espaciotiempo de Schwarzschild con métrica (2.43). En este caso el índice de refracción viene dado como sigue,

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{K_e N_0}{r^h \omega_\infty^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

mientras que la métrica óptica asociada esta dado por lo siguiente,

$$d\sigma^2 = \frac{r(\omega_\infty^2 - K_e N_0 r^{-h} + 2m N_0 K_e r^{-(1+h)})}{\omega_\infty^2 (r - 2m)} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\varphi^2 \right), \quad (\text{A.3})$$

con determinante g^{opt} ,

$$g^{\text{opt}} = \frac{(r^{h+1} \omega_\infty^2 - K_e N_0 r + 2m K_e N_0)^2 r^3}{(r - 2m)^3 r^{2h} \omega_\infty^4}, \quad (\text{A.4})$$

y curvatura Gaussiana como sigue,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & -\frac{1}{2} \frac{\omega_\infty^2}{r^3 (r^{h+1} \omega_\infty^2 - K_e N_0 r + 2K_e N_0 m)^3} \times \{ 8\omega_\infty^2 m^3 K_e N_0 (h - \frac{1}{2})(h + 3)r^{2h+1} \\ & - 12\omega_\infty^2 m^2 K_e N_0 (\frac{5}{3}h + h^2 - \frac{3}{2})r^{2h+2} + 6\omega_\infty^2 m K_e N_0 (h + \frac{3}{2})(h - \frac{2}{3})r^{2h+3} \\ & - r^{2h+4} K_e N_0 h^2 \omega_\infty^2 + 8m [\frac{1}{2} r^{3h+3} \omega_\infty^4 - \frac{3}{4} m r^{3h+2} \omega_\infty^4 + (m^3 r^h - \frac{3}{2} m^2 r^{h+1} \\ & + \frac{3}{4} m r^{h+2} - \frac{1}{8} r^{h+3}) K_e^2 N_0^2 (h - 2)] \}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A fin de comparar con expresiones del ángulo de deflexión obtenidas con otros métodos, sólo tomaremos en cuenta términos lineales en m y N_0 , y despreciaremos aquellos proporcionales al producto mN_0 ,

$$\mathcal{K}dS = \left(-\frac{2m}{r^2} + \frac{h^2 r^{-(h+1)} K_e N_0}{2\omega_\infty^2} \right) dr d\varphi + \mathcal{O}(m^2, N_0^2, mN_0). \quad (\text{A.6})$$

Por otro lado, necesitamos calcular k_g y $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ a lo largo de la curva C_R asociada a la métrica óptica (A.3),

$$\kappa_g = \frac{R^{\frac{h-3}{2}} \omega_\infty |4K_e N_0 (h-2) (m - \frac{R}{2})^2 + 6R^{h+1} \omega_\infty^2 (\frac{R}{3} - m)|}{(2R^{h+1} \omega_\infty^2 - K_e N_0 R + 2mK_e N_0)^{3/2}}, \quad (\text{A.7})$$

y

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|_{C_R} = \frac{R}{\omega_\infty} \sqrt{\frac{\omega_\infty^2 R - R^{1-h} K_e N_0 + 2R^{-h} K_e N_0 m}{R - 2m}}. \quad (\text{A.8})$$

A partir de estas expresiones podemos verificar que,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \kappa_g \left. \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|_{C_R} = 1. \quad (\text{A.9})$$

Finalmente, obtenemos el ángulo de deflexión,

$$\alpha = \frac{4m}{b} - \frac{K_e N_0 \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{h}{2} + \frac{1}{2})}{\omega_\infty^2 b^h \Gamma(\frac{h}{2})} + \mathcal{O}(m^2, N_0^2, mN_0). \quad (\text{A.10})$$

La expresión (A.10) coincide con la fórmula derivada por Bisnovaty-Kogan y Tsupko en [22].

A.2. Modelo de plasma con perfil $N(r) = N_0 e^{-r/r_0}$ en el espaciotiempo de Schwarzschild

Consideremos una métrica de Schwarzschild con una densidad electrónica del plasma dada por,

$$N(r) = N_0 e^{-r/r_0}. \quad (\text{A.11})$$

El índice de refracción nos queda,

$$n(r) = \sqrt{1 - \frac{K_e N_0 e^{-r/r_0}}{\omega_\infty^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (\text{A.12})$$

mientras que la métrica óptica,

$$d\sigma^2 = \frac{r[\omega_\infty^2 - \omega_e^2(r)] + 2m\omega_e^2(r)}{(r-2m)\omega_\infty^2} \left(\frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\varphi^2 \right), \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\omega_e^2(r) = K_e N_0 e^{-r/r_0}. \quad (\text{A.14})$$

El determinante g^{opt} de la métrica óptica (A.13) viene dado como sigue,

$$g^{\text{opt}} = \frac{[\omega_\infty^2 r - \omega_e^2(r)(r - 2m)]^2 r^3}{(r - 2m)^3 \omega_\infty^4}, \quad (\text{A.15})$$

y la curvatura Gaussiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{\omega_\infty^2}{2r_0^2 r^3 [(\omega_\infty^2 - \omega_e^2(r))r + 2\omega_e^2(r)m]^3} \times \{r(r - 2m)\omega_\infty^2 \omega_e^2(r)[r^4 - (4m + r_0)r^3 \\ & + (4m^2 - mr_0)r^2 + 6mr_0(r_0 + m)r - 6m^2 r_0^2] - r_0[\omega_e^4(r)(r - 2m)^3(m(2r_0 + r) \\ & - r^2) + 2\omega_\infty^4 mr_0 r^2(2r - 3m)]\}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A orden lineal en m

$$\mathcal{K} dS = \left(-\frac{2m}{r^2} + \frac{\omega_e^2(r)[\omega_\infty^2(r - r_0) + r_0 \omega_e^2(r)]}{2r_0^2(\omega_\infty^2 - \omega_e^2(r))^2} \right) dr d\varphi + \mathcal{O}(m^2, N_0 m). \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, la curvatura geodésica de C_R se lee,

$$\kappa_g = \frac{\sqrt{(R - 2R_0)(R - 2m)^2 \omega_e^2(R) + 2\omega_\infty^2 r_0 R(R - 3m)}}{2\omega_\infty^{-1} r_0 R^{3/2} [(\omega_\infty^2 - \omega_e^2(R))R + 2m\omega_e^2(R)]^{3/2}}. \quad (\text{A.18})$$

mientras que,

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|_{C_R} = \frac{R}{\omega_\infty} \left\{ \frac{[\omega_\infty^2 - \omega_e^2(R)]R + 2m\omega_e^2(R)}{R - 2m} \right\}^{1/2}, \quad (\text{A.19})$$

y por lo tanto podemos verificar que se satisface el límite,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \kappa_g \left. \frac{d\sigma}{d\varphi} \right|_{C_R} = 1. \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, obtenemos el ángulo de deflexión,

$$\alpha = \frac{4m}{b} - \frac{bK_e N_0}{r_0 \omega_\infty^2} K_0\left(\frac{b}{r_0}\right) + \mathcal{O}(m^2, N_0^2, mN_0); \quad (\text{A.21})$$

donde K_0 es la función de Bessel modificada de segundo tipo. Una expresión similar obtenida utilizando otros métodos puede ser consultada en [41].

Apéndice B

Comparación explícita de las fórmulas (3.4), (3.8) y (3.9)

En este apéndice usaremos un ejemplo particular para ilustrar cómo las expresiones alternativas para el ángulo de deflexión dadas por las ecuaciones (3.4), (3.8) y (3.9) dan el mismo resultado. Concentrémonos en la métrica de Schwarzschild escrita en coordenadas isotrópicas,

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \left[dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 \right) \right], \quad (\text{B.1})$$

y restrinjamos nuestra atención al plano definido por $\vartheta = \pi/2$. Vamos a calcular el ángulo de deflexión a segundo orden en la masa m . Sin embargo, por el momento escribiremos relaciones exactas. La métrica óptica asociada en este caso viene dada como sigue,

$$d\sigma^2 = \frac{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6}{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2} \left(dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right); \quad (\text{B.2})$$

mientras que la curvatura Gaussiana se escribe,

$$\mathcal{K} = -\frac{128mr^3(4r^2 - 2rm + m^2)}{(2r + m)^8}. \quad (\text{B.3})$$

El elemento de superficie es,

$$dS = \sqrt{\det(g_{ij}^{\text{opt}})} drd\varphi = \frac{(2r + m)^6}{16r^3(2r - m)^2} drd\varphi. \quad (\text{B.4})$$

Luego, a segundo orden en la masa,

$$\mathcal{K}dS = \left(-\frac{2m}{r^2} + \frac{m^2}{r^3} \right) drd\varphi + \mathcal{O}(m^3), \quad (\text{B.5})$$

la cual puede ser reescrita en términos de la variable $u = 1/r$ como,

$$\mathcal{K}dS = \left(2m - m^2u \right) dud\varphi + \mathcal{O}(m^3). \quad (\text{B.6})$$

Ahora usaremos la ecuación (3.9) para calcular el ángulo de deflexión. Para llevar a cabo esto debemos integrar sobre una región \tilde{D}_r acotada por las curvas radiales γ_R , γ_S , la geodésica $\tilde{\gamma}_\ell$ y el segmento de arco γ_C . Las curvas radiales γ_R y γ_S están dadas por $\varphi = \varphi_R$ y $\varphi = \varphi_S$, respectivamente. En términos de la coordenada u , γ_C está definida por $u = 1/r_C = \text{constante}$, y finalmente la geodésica espacial $\tilde{\gamma}_\ell$ que

describe la órbita de los rayos de luz entre la fuente y el obserador está dada como sigue,

$$u_\ell = \frac{\sin(\varphi)}{b} + \frac{2m(1 - \cos(\varphi))}{b^2} + \frac{15m^2 \cos(\varphi)(\tan(\varphi) - \varphi)}{4b^3} + \mathcal{O}(m^3). \quad (\text{B.7})$$

Esta expresión para u_ℓ sigue de resolver la ecuación (3.42) a segundo orden en la masa,

$$\left(\frac{du_\ell}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - u_\ell^2 + \frac{4mu_\ell}{b^2} + \frac{15m^2 u_\ell^2}{2b^2}, \quad (\text{B.8})$$

con la condición asintótica

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} u_\ell(\varphi) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Notemos sin embargo que a fin de calcular la integral de la curvatura Gaussiana sólo necesitamos considerar los primeros dos términos de (B.7) debido a que $\mathcal{K}dS$ ya es una cantidad de al menos orden m . Luego, para el primer término en (3.9) obtenemos,

$$\begin{aligned} - \int \int_{\tilde{D}_r} \mathcal{K}dS &= \int_{\varphi_S}^{\varphi_R} \int_{1/r_C}^{\frac{\sin(\varphi)}{b} + \frac{2m(1-\cos(\varphi))}{b^2}} \left(2m - m^2 u\right) dud\varphi + \mathcal{O}(m^3) \\ &= \frac{2m}{b} \left[\cos(\varphi_S) - \cos(\varphi_R) + \frac{b}{r_C}(\varphi_S - \varphi_R) \right] \\ &\quad + \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\varphi_R - \varphi_S) + \sin(2\varphi_R) - \sin(2\varphi_S) + 32(\sin(\varphi_S) - \sin(\varphi_R)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4b^2}{r_C^2}(\varphi_R - \varphi_S) \right] + \mathcal{O}(m^3). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

También debemos calcular los otros dos términos en la ecuación (3.9). El último término se calcula en el espacio Euclídeo y por lo tanto está dado simplemente por la ecuación (3.6). A fin de calcular el segundo término necesitamos primero conocer la curvatura geodésica de $\tilde{\gamma}_C$ definida por $r = r_C = \text{constante}$. El valor exacto de esta curvatura está dado por,

$$\tilde{\kappa}_{\tilde{\gamma}_C} = \frac{4r_C[4r_C(r_C - 2m) + m^2]}{(2r_C + m)^4}, \quad (\text{B.11})$$

y por lo tanto, el segundo término en (3.9) viene dado por lo siguiente,

$$\begin{aligned} - \int_{\tilde{\gamma}_C(S \rightarrow R)} \tilde{\kappa} d\tilde{\sigma} &= \int_{\varphi_R}^{\varphi_S} \tilde{\kappa}_{\tilde{\gamma}_C} \sqrt{g_{\varphi\varphi}^{\text{opt}}} d\varphi = \int_{\varphi_R}^{\varphi_S} \left(1 - \frac{2}{r_C} + \frac{m^2}{2r_C^2}\right) d\varphi + \mathcal{O}(m^3) \\ &= \varphi_S - \varphi_R + \frac{2m}{r_C}(\varphi_R - \varphi_S) + \frac{m^2}{2r_C^2}(\varphi_R - \varphi_S) + \mathcal{O}(m^3). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

A partir de las ecuaciones (3.6), (B.10) y (B.12), y reemplazándolas en la fórmula (3.9) obtenemos finalmente el ángulo de deflexión,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2m}{b} \left[\cos(\varphi_S) - \cos(\varphi_R) \right] + \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\varphi_R - \varphi_S) + \sin(2\varphi_R) - \sin(2\varphi_S) \right. \\ &\quad \left. + 32(\sin(\varphi_S) - \sin(\varphi_R)) \right] + \mathcal{O}(m^3), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

el cual coincide con nuestras expresiones previas dadas por (3.84) y (3.85) obtenidas usando directamente la ecuación (3.4).

Ahora repetiremos el cálculo pero usando la expresión dada en (3.8). Para llevar a cabo este cálculo debemos calcular la suma de ángulos en la región D_r sobre el espacio Euclídeo y también en la región \tilde{D}_r sobre la variedad óptica.

En el espacio Euclídeo, la suma de los ángulos interiores viene dada simplemente por,

$$\sum_i \epsilon_i = 2\pi + \varphi_R - \varphi_S, \quad (\text{B.14})$$

mientras que para la región \tilde{D}_r en la variedad óptica tenemos

$$\sum_i \tilde{\epsilon}_i = \pi + \tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2; \quad (\text{B.15})$$

siendo $\tilde{\epsilon}_1$ y $\tilde{\epsilon}_2$ los ángulos formados por la curva $\tilde{\gamma}_\ell$ y las curvas radiales $\tilde{\gamma}_R$ y $\tilde{\gamma}_S$, respectivamente. Como queremos calcular el ángulo de deflexión a segundo orden en la masa necesitamos usar la expresión para la ecuación de la órbita que describe $\tilde{\gamma}_\ell$ con todos los términos que aparecen en (B.7).

El ángulo $\tilde{\epsilon}_1$ puede ser calculado a partir de la siguiente relación (ver figura (3.2)),

$$\tan \tilde{\epsilon}_1 = - \left[\frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}^{\text{opt}}}}{\sqrt{g_{rr}^{\text{opt}}}} \frac{d\varphi}{dr} \right] \Big|_{\tilde{\gamma}_\ell(\varphi_R)} = - \left[r \frac{d\varphi}{dr} \right] \Big|_{\tilde{\gamma}_\ell(\varphi_R)} = u(\varphi_R) \frac{d\varphi}{du} \Big|_{\varphi=\varphi_R}, \quad (\text{B.16})$$

y similarmente, $\tilde{\epsilon}_2 = \pi - \tilde{\chi}_2$ con $\tilde{\chi}_2$ siendo el ángulo suplementario a $\tilde{\epsilon}_2$ el cual satisface,

$$\tan \tilde{\chi}_2 = - \left[\frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}^{\text{opt}}}}{\sqrt{g_{rr}^{\text{opt}}}} \frac{d\varphi}{dr} \right] \Big|_{\tilde{\gamma}_\ell(\varphi_S)} = - \left[r \frac{d\varphi}{dr} \right] \Big|_{\tilde{\gamma}_\ell(\varphi_S)} = u(\varphi_S) \frac{d\varphi}{du} \Big|_{\varphi=\varphi_S}. \quad (\text{B.17})$$

Usando (B.7) obtenemos,

$$\begin{aligned} \tan \tilde{\epsilon}_1 &= \tan(\varphi_R) - \frac{2m}{b} \frac{1 - \cos(\varphi_R)}{\cos^2(\varphi_R)} \\ &+ \frac{m^2}{8b^2} \frac{15(\sin(2\varphi_R) - 2\varphi_R) \cos(\varphi_R) - 16 \sin(2\varphi_R) + 32 \sin(\varphi_R)}{\cos^3(\varphi_R)}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Luego, al orden considerado,

$$\tilde{\epsilon}_1 = \varphi_R - \frac{2m}{b}(1 - \cos(\varphi_R)) - \frac{m^2}{8b^2}(30\varphi_R + \sin(2\varphi_R) - 32 \sin(\varphi_R)) + \mathcal{O}(m^3), \quad (\text{B.19})$$

y repitiendo para $\tilde{\chi}_2$, el cual obtenemos a partir de (B.17), obtenemos

$$\tilde{\chi}_2 = \varphi_S - \frac{2m}{b}(1 - \cos(\varphi_S)) - \frac{m^2}{8b^2}(30\varphi_S + \sin(2\varphi_S) - 32 \sin(\varphi_S)) + \mathcal{O}(m^3). \quad (\text{B.20})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \sum_i \tilde{\epsilon}_i &= 2\pi + \tilde{\epsilon}_1 - \tilde{\chi}_2 \\
 &= 2\pi + \varphi_R - \varphi_S + \frac{2m}{b}(\cos(\varphi_R) - \cos(\varphi_S)) + \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\varphi_S - \varphi_R) + \sin(2\varphi_S) \right. \\
 &\quad \left. - \sin(2\varphi_R) + 32(\sin(\varphi_R) - \sin(\varphi_S)) \right].
 \end{aligned}
 \tag{B.21}$$

Finalmente, reemplazando las ecuaciones (B.14) y (B.21) en la definición del ángulo de deflexión dada por la ecuación (3.8), recuperamos la fórmula (B.13).

Como comentario final notemos que Ishihara *et al* también expresa el ángulo de deflexión en términos de dos ángulos Ψ_S y Ψ_R y un ángulo coordenado $\varphi_{RS} = \varphi_R - \varphi_S$. El ángulo de deflexión en este caso se expresa como [60],

$$\alpha = \Psi_R - \Psi_S + \varphi_{RS}. \tag{B.22}$$

Por otro lado, los ángulos interiores $\tilde{\epsilon}_1$ y $\tilde{\epsilon}_2$ utilizados están relacionados a los ángulos Ψ_S y Ψ_R como sigue,

$$\tilde{\epsilon}_1 = \pi - \Psi_R, \tag{B.23}$$

$$\tilde{\epsilon}_2 = \Psi_S. \tag{B.24}$$

Luego, teniendo en cuenta las relaciones (B.14) y (B.15), podemos ver que la definición (3.8) la cual se basa en la suma de ángulos interiores de regiones cuadriláteras finitas coincide con la fórmula (B.22), la cual no hace mención a ninguna región.

Apéndice C

Relación entre las diferentes coordenadas angulares y el ángulo de elongación

En este apéndice haremos una discusión general sobre las expresiones para el ángulo de deflexión, la ecuación de la órbita y la relación con el ángulo de elongación θ_I cuando uno usa diferentes coordenadas angulares azimutales, con la restricción que ellas definen el mismo campo vectorial de Killing rotacional y por lo tanto sólo pueden diferir en una constante δ .

Consideremos la figura (C.1) la cual es básicamente la misma figura que (3.2) pero con la diferencia que ahora hemos introducido dos sistemas de coordenadas angulares diferentes con respecto a los ejes polares A_{axis} y δ_{axis} .

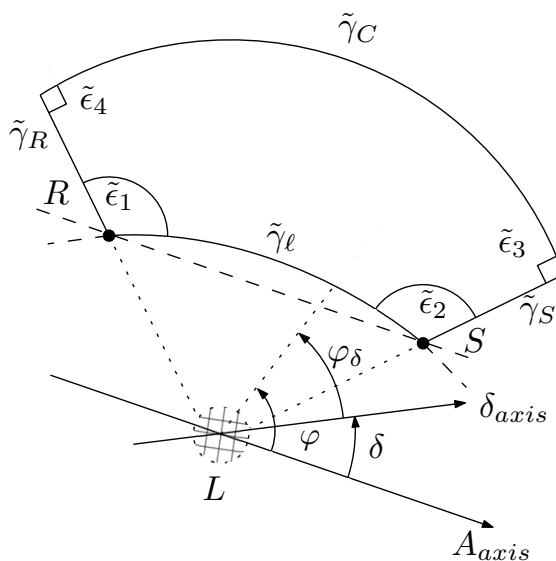


FIGURA C.1: Relación entre coordenadas angulares azimutales en términos de la separación angular δ entre los respectivos ejes polares.

Nombramos estas coordenadas como φ y φ_δ , respectivamente. Como podemos ver en la figura (C.1), ellas están relacionadas por,

$$\varphi = \varphi_\delta + \delta. \quad (C.1)$$

Asumamos que la fuente se encuentra suficientemente alejada de la lente y del observador. Entonces, cada una de estas coordenadas angulares azimutales pueden ser identificadas por el ángulo φ_S que el rayo de luz conectando la fuente S

con el observador R toma en este límite. Denotaremos este ángulo por Δ , esto es, $\lim_{S \rightarrow \infty} \varphi_{\delta S} = \Delta$, donde el límite se toma a lo largo del rayo de luz desde la fuente hasta el observador. Por ejemplo, la coordenada angular $\hat{\varphi}$ utilizada por Ishihara *et al* y también por Arakida es tal que el punto de mínimos acercamiento del rayo de luz a la lente se encuentra en $\hat{\varphi}_{\min} = \pi/2$, o equivalentemente, dada la simetría de la trayectoria de los rayos de luz alrededor de la dirección radial definida por $\hat{\varphi}_{\min}$ podemos codificar la misma información tomando $\Delta = -\alpha_{\infty}/2$. Otra posibilidad natural fue considerada en el cuerpo de este trabajo donde tomamos una variable angular tal que para una fuente lejana $\lim_{S \rightarrow \infty} \varphi_S = 0$.

Queremos escribir expresiones para el ángulo de deflexión y el ángulo de elongación que sean válidas para cualquier coordenada angular azimutal definida por diferentes valores de Δ . Una manera de llevar a cabo esto es comenzar eligiendo un eje polar particular A_{axis} donde la correspondiente coordenada angular φ es tal que $\lim_{S \rightarrow \infty} \varphi_S = 0$. Por lo tanto, como hemos dicho antes, cualquier otro eje polar δ_{axis} puede ser identificado por un ángulo Δ (ver figura (C.2) la cual es básicamente la misma figura (C.1) pero rotada de tal forma que ahora el eje polar A_{axis} queda graficado de forma horizontal).

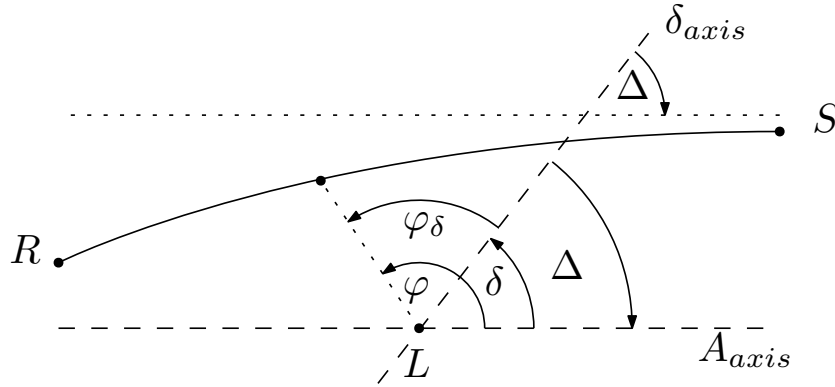


FIGURA C.2: Elección particular para la coordenada φ de tal forma que para una fuente lejana S , $\varphi_S \rightarrow 0$. Cualquier otra coordenada azimutal φ_{δ} tal que $\varphi_{\delta S} \rightarrow \Delta$ para una fuente lejana está relacionada a φ por $\delta = -\Delta$.

Notemos también que por construcción el corrimiento δ está dado simplemente por $\delta = -\Delta$, y como conocemos las expresiones para la órbita, en coordenadas isotrópicas, para el ángulo de deflexión y para el ángulo de elongación en las coordenadas asociadas al eje polar A_{axis} , podemos directamente escribir las expresiones para las mismas cantidades en otros sistemas de coordenadas relacionados por (C.1).

Comencemos con el ángulo de elongación θ_I . El mismo está dado en la coordenada φ de la figura (C.2) por $\theta_I = \pi - \varphi_R + \delta\theta$ y por lo tanto en términos de la coordenada azimutal φ_{δ} estará dado por,

$$\theta_I = \pi - (\varphi_{\delta R} - \Delta) + \delta\theta. \quad (\text{C.2})$$

En particular, si el eje polar δ_{axis} se elige de tal forma que $\Delta = -\alpha_{\infty}/2$ (por ejemplo, este es el caso en los trabajos de Ishihara *et al* y de Arakida) tenemos el siguiente

resultado,

$$\begin{aligned}\Theta_I &= \pi - \hat{\varphi}_R - \overbrace{\frac{\alpha_\infty}{2}}^{\mathcal{O}(m)} + \delta\theta \\ &= \pi - \hat{\varphi}_R + \mathcal{O}(m);\end{aligned}\tag{C.3}$$

De forma similar podemos proceder con la ecuación de la órbita y con el ángulo de deflexión. En particular, para la métrica de Schwarzschild escrita en coordenadas isotrópicas la ecuación de la órbita a orden lineal en la masa está dada por los dos primeros términos de la ecuación (B.7), y por lo tanto para cualquier otra elección de coordenada azimutal tenemos que u está dado por,

$$u_\ell(\varphi_\delta) = \frac{\sin(\varphi_\delta - \Delta)}{b} + \frac{2m(1 - \cos(\varphi_\delta - \Delta))}{b^2} + \mathcal{O}(m^2).\tag{C.4}$$

Por otro lado, como conocemos las expresiones para el ángulo de deflexión en las coordenadas asociadas al eje A_{axis} (B.13), podemos calcular el ángulo de deflexión para cualquier otra elección de coordenada angular azimutal (por simplicidad continuaremos escribiendo expresiones para el caso donde la fuente se encuentra suficientemente alejada de la lente, es decir $\varphi_S = 0$ y $\varphi_{\delta S} = \Delta$),

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2m}{b} \left[1 - \cos(\varphi_{\delta R} - \Delta) \right] + \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\varphi_{\delta R} - \Delta) + \sin(2(\varphi_{\delta R} - \Delta)) \right. \\ &\quad \left. - 32(\sin(\varphi_{\delta R} - \Delta)) \right] + \mathcal{O}(m^3).\end{aligned}\tag{C.5}$$

Esta expresión es válida para cualquier valor de Δ , pero en el caso del trabajo de Ishihara *et al* la coordenada $\hat{\varphi}$ fue elegida de tal forma que $\Delta = -\alpha_\infty/2$, una cantidad de al menos $\mathcal{O}(m)$ y por lo tanto la expresión se puede re-expandir como fue explicado en (3.3.1.2).

De todas formas, incluso cuando obtuvimos todas las cantidades de una manera muy fácil a partir de expresiones conocidas en coordenadas relacionadas al eje A_{axis} , las mismas pueden también ser explícitamente obtenidas a partir de la ecuación de la órbita en coordenadas isotrópicas y la definición de ángulo de deflexión. A saber, resolvemos directamente la ecuación (B.8) con la condición asintótica,

$$\lim_{\varphi_\delta \rightarrow \Delta} u(\varphi_\delta) = 0.\tag{C.6}$$

Para hacer esto elegimos el *ansatz*

$$u(\varphi_\delta) = \frac{\sin(\varphi_\delta - \Delta)}{b} + \frac{2mu_1(\varphi_\delta)}{b} + \mathcal{O}(m^2),\tag{C.7}$$

donde el primer término describe la órbita plana sin perturbar en este sistema de coordenadas. A partir de (B.8) obtenemos que a primer orden en la masa m , $u_1(\varphi_\delta)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial,

$$b \cos(\varphi_\delta - \Delta) \frac{du_1}{d\varphi_\delta} + \sin(\varphi_\delta - \Delta)(bu_1 - 1) = 0.\tag{C.8}$$

La solución general de esta ecuación viene dada por,

$$u_1(\varphi_\delta) = \frac{1}{b} + C \cos(\varphi_\delta - \Delta);\tag{C.9}$$

siendo C una constante de integración que queda fija a partir de implementar la condición asintótica (C.6), resultando en $C = -1/b$. Por lo tanto a orden lineal en m la ecuación de la órbita queda,

$$u(\varphi_\delta) = \frac{\sin(\varphi_\delta - \Delta)}{b} + \frac{2m(1 - \cos(\varphi_\delta - \Delta))}{b^2} + \mathcal{O}(m^2); \quad (\text{C.10})$$

la cual coincide con la expresión obtenida previamente. Usando esta expresión para la órbita y repitiendo el mismo procedimiento que en la ecuación (B.10) del apéndice B obtenemos la siguiente expresión para el ángulo de deflexión,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left[\cos(\varphi_{\delta S} - \Delta) - \cos(\varphi_{\delta R} - \Delta) \right] + \frac{m^2}{8b^2} \left[30(\varphi_{\delta R} - \varphi_{\delta S}) + \sin(2(\varphi_{\delta R} - \Delta)) - \sin(2(\varphi_{\delta S} - \Delta)) + 32(\sin(\varphi_{\delta S} - \Delta) - \sin(\varphi_{\delta R} - \Delta)) \right] + \mathcal{O}(m^3); \quad (\text{C.11})$$

el cual para una fuente suficientemente alejada $\varphi_{\delta S} = \Delta$, coincide con la expresión (C.16).

Finalmente, escribimos el ángulo de deflexión en términos del ángulo de elongación θ_I . A partir de las expresiones (C.2) y (C.5) se sigue que a orden lineal en m , el ángulo de deflexión está dado como esperábamos por la fórmula de Shapiro (3.21), con $\gamma = 1$. A fin de calcular el ángulo de deflexión a partir de (C.5) a segundo orden en θ_I debemos tener en cuenta que,

$$\delta\theta = \alpha_{S_\infty}^{(1)} + \mathcal{O}(m^2) = \frac{2m}{b} \left[1 + \cos(\theta_I) \right] + \mathcal{O}(m^2). \quad (\text{C.12})$$

Por lo tanto reemplazando,

$$\varphi_{\delta R} - \Delta = \pi - \theta_I + \delta\theta, \quad (\text{C.13})$$

en la ecuación (C.5) y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_{\delta R} - \Delta) &= \cos(\pi - \theta_I + \delta\theta) \\ &= -\cos(\theta_I) - \frac{m}{b} \left[2\sin(\theta_I) + \sin(2\theta_I) \right] + \mathcal{O}(m^2), \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

y además, que el segundo término en (C.5) se puede expresar en términos de θ_I como,

$$\frac{m^2}{8b^2} \left[30(\pi - \theta_I) - \sin(2\theta_I) - 32\sin(\theta_I) \right]; \quad (\text{C.15})$$

podemos escribir el ángulo de deflexión en términos de θ_I como sigue,

$$\alpha = \frac{2m}{b} \left[1 + \cos(\theta_I) \right] + \frac{15m^2}{4b^2} \left[\pi - \theta_I + \sin(\theta_I) \cos(\theta_I) \right] + \mathcal{O}(m^3); \quad (\text{C.16})$$

el cual coincide con la relación más general dada por las expresiones (3.31) y (3.32) para el caso particular donde todos los parámetros PPN son iguales a 1 y $J_2 = 0$.

Apéndice D

Espaciotiempo de Schwarzschild con una densidad de plasma de la forma $N(r) = N_0 h r^{-h}$. Casos particulares

A fin de calcular la contribución al ángulo de deflexión debida a la presencia de la corona solar, necesitamos calcular la forma explícita de α_3 para los casos particulares $h = 2, 6, 16$, y con las respectivas constantes numéricas N_{02} , N_{06} y N_{016} . En términos de funciones trigonométricas estándar tenemos que,

$$\begin{aligned}
 h = 2 : \alpha_3 &= \frac{K_e N_{02}}{2b^2 \omega_0^2} \left[\varphi_S - \varphi_R + \cos(\varphi_R) \sin(\varphi_R) - \cos(\varphi_S) \sin(\varphi_S) \right], \\
 h = 6 : \alpha_3 &= \frac{K_e N_{06}}{64b^6 \omega_0^2} \left[60(\varphi_S - \varphi_R) + 45 \left(\sin(2\varphi_R) - \sin(2\varphi_S) \right) \right. \\
 &\quad \left. + 9 \left(\sin(4\varphi_S) - \sin(4\varphi_R) \right) + \sin(6\varphi_R) - \sin(6\varphi_S) \right], \\
 h = 16 : \alpha_3 &= \frac{K_e N_{016}}{458752b^{16} \omega_0^2} \left[720720(\varphi_S - \varphi_R) + 640640 \left(\sin(2\varphi_R) - \sin(2\varphi_S) \right) \right. \\
 &\quad + 224224 \left(\sin(4\varphi_S) - \sin(4\varphi_R) \right) + 81536 \left(\sin(6\varphi_R) - \sin(6\varphi_S) \right) \\
 &\quad + 25480 \left(\sin(8\varphi_S) - \sin(8\varphi_R) \right) + 6272 \left(\sin(10\varphi_R) - \sin(10\varphi_S) \right) \\
 &\quad + 1120 \left(\sin(12\varphi_S) - \sin(12\varphi_R) \right) + 128 \left(\sin(14\varphi_R) - \sin(14\varphi_S) \right) \\
 &\quad \left. + 7 \left(\sin(16\varphi_S) - \sin(16\varphi_R) \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{D.1}$$

Apéndice E

Ángulo de deflexión de partículas de prueba masivas y cargadas en el espaciotiempo de Reissner-Nordström: solución de la ecuación de la órbita

En este apéndice calcularemos el ángulo de deflexión asociado a partículas de prueba masivas y cargadas en el espaciotiempo de Reissner-Nordström integrando directamente la ecuación de la órbita espacial a fin de corroborar la validez del método basado en el teorema de Gauss-Bonnet al utilizar otro método completamente distinto. Como hemos visto en 4.1, la ecuación de la órbita viene dada como sigue,

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C(r)}{B(r)} \left(\frac{p_t^2 C(r)n^2(r)}{p_\varphi^2 A(r)} - 1\right), \quad (\text{E.1})$$

donde A , B y C son las componentes de la métrica mientras que p_φ y p_t son constantes asociadas a los campos vectoriales de Killing axial y temporal, respectivamente. En general, se suelen identificar dichas constantes con el momento angular J y la energía E de una partícula de prueba la cual medida por un observador asintótico se reduce a (4.171). Entonces,

$$\frac{p_t^2}{p_\varphi^2} = \frac{1}{v^2 b^2}. \quad (\text{E.2})$$

Por otro lado, para el espaciotiempo de Reissner-Nordström tenemos que,

$$A(r) = B^{-1}(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad C(r) = r^2. \quad (\text{E.3})$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1/r$ y tomando en cuenta la ecuación (4.175), la ecuación de la órbita (E.1) se puede reescribir como sigue,

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{1}{b^2} + \left(m(1-v^2) - \frac{qQ}{\mu} \sqrt{1-v^2}\right) \frac{2u}{b^2 v^2} - \left(1 - \frac{Q^2(1-v^2)}{b^2 \mu^2 v^2} (\mu^2 - q^2)\right) u^2 \\ &\quad + 2mu^3 - Q^2 u^4, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A diferencia del método de Gauss-Bonnet, si queremos calcular el ángulo de deflexión a orden $\mathcal{O}(\beta, \gamma, \delta, \beta^2, \gamma^2, \delta^2, \beta\delta)$ debemos resolver la ecuación de la órbita al

mismo orden. Consideremos entonces el siguiente *ansatz* en términos de los parámetros adimensionales definidos en (4.177),

$$u(\varphi) = u_0 + u_1(\varphi)\beta + u_2(\varphi)\delta + u_3(\varphi)\gamma + u_4(\varphi)\beta\delta + u_5(\varphi)\beta^2 + u_6(\varphi)\delta^2 + \mathcal{O}(\gamma^2, \beta^3, \delta^3, \delta\beta^2, \beta\gamma, \beta\delta^2, \delta\gamma), \quad (\text{E.5})$$

donde $u_0 = \frac{\sin\varphi}{b}$ e impongamos la condición asintótica,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} u_i(\varphi) = 0. \quad (\text{E.6})$$

Se sigue que cada una de las funciones $u_i(\varphi)$ ($i = 1..6$) debe satisfacer una ecuación diferencial de la forma,

$$\cos\varphi \frac{du_i(\varphi)}{d\varphi} + \sin\varphi u_i(\varphi) = F_i(\varphi, u_j(\varphi)), \quad (\text{E.7})$$

con $j \neq i$. Explícitamente, las funciones F_i están dadas como sigue,

$$F_1(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{b} \left(\frac{1}{v^2} - \cos^2\varphi \right), \quad (\text{E.8})$$

$$F_2(\varphi) = -\frac{\sin\varphi}{\mu v^2} \sqrt{1-v^2}, \quad (\text{E.9})$$

$$F_3(\varphi) = \frac{1}{2b} \left(\frac{\sin^2\varphi}{v^2} - \cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi - 2 \right), \quad (\text{E.10})$$

$$F_4(\varphi, u_1(\varphi), u_2(\varphi)) = u_2(\varphi) \left(3\sin^2\varphi + \frac{1}{v^2} - 1 \right) \quad (\text{E.11})$$

$$- bu_1(\varphi) \frac{\sqrt{1-v^2}}{\mu v^2} - b \left(u_1(\varphi)u_2(\varphi) + \frac{du_1}{d\varphi} \frac{du_2}{d\varphi} \right), \quad (\text{E.12})$$

$$F_5(\varphi, u_1(\varphi)) = u_1(\varphi) \left(2 + \frac{1}{v^2} - 3\cos^2\varphi \right) - \frac{b}{2} \left[u_1^2(\varphi) + \left(\frac{du_1}{d\varphi} \right)^2 \right] \quad (\text{E.13})$$

$$F_6(\varphi, u_2(\varphi)) = -\frac{b}{2\mu^2 v^2} \left\{ \sin^2\varphi(1-v^2) + 2\mu\sqrt{1-v^2}u_2(\varphi) \quad (\text{E.14}) \right.$$

$$\left. + \left[u_2^2(\varphi) + \left(\frac{du_2}{d\varphi} \right)^2 \right] \mu^2 v^2 \right\}. \quad (\text{E.15})$$

Por lo tanto, podemos resolver las primeras tres ecuaciones para $u_1(\varphi)$, $u_2(\varphi)$, $u_3(\varphi)$, fijando las respectivas constantes de integración a través de la condición asintótica (E.6), y luego podemos resolver las siguientes ecuaciones para $u_4(\varphi)$, $u_5(\varphi)$ y $u_6(\varphi)$ usando las expresiones obtenidas para $u_1(\varphi)$ y $u_2(\varphi)$, y fijando las demás constantes de integración con la condición asintótica.

Haciendo esto obtenemos la solución de la ecuación de la órbita en términos de los parámetros físicos como sigue,

$$\begin{aligned}
 u(\varphi) = & \frac{1}{b} \left[\sin \varphi + \left((1 - \cos \varphi) + v^2 (\cos^2 \varphi - \cos \varphi) \right) \frac{m}{bv^2} + \left((2 + v^2) \varphi \cos \varphi \right. \right. \\
 & - 2 \sin \varphi - v^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \left. \left. \right) \frac{Q^2}{4b^2v^2} - \left(3v^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi - [8 \sin \varphi (1 + v^2) \right. \right. \\
 & - (12 + 3v^2) \varphi] \cos \varphi + 2 \sin \varphi (v^2 - 2) \left. \left. \right) \frac{m^2}{4b^2v^2} - (1 - \cos \varphi) \sqrt{1 - v^2} \frac{qQ}{bv^2\mu} \right. \\
 & - (\sin \varphi - 3\varphi \cos \varphi + 2 \cos \varphi \sin \varphi) \sqrt{1 - v^2} \frac{qQm}{b^2v^2\mu} - (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) (1 - v^2) \\
 & \left. \times \frac{q^2Q^2}{2b^2v^2\mu^2} \right].
 \end{aligned} \tag{E.16}$$

En este punto es importante señalar que si hubiéramos calculado el ángulo de deflexión usando el método de Gauss-Bonnet sólo hubiéramos necesitado calcular las funciones u_1 y u_2 . Si bien tendríamos que calcular además la 2-forma $\mathcal{K}dS$ al mismo orden, esto suele ser mucho mas sencillo que calcular las funciones u_i ($i = 3, 4, 5, 6$).

Finalmente, podemos calcular el ángulo de deflexión α como sigue,

$$\alpha \approx \tan \alpha = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)}, \tag{E.17}$$

donde el punto significa derivada respecto de φ y

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \tag{E.18}$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi. \tag{E.19}$$

Notemos que en principio deberíamos calcular el límite de φ yendo a $\pi + \alpha$ en vez de π . Sin embargo, se puede chequear que si en la ecuación (E.17) tomamos el límite $\varphi \rightarrow \pi + \Delta$ donde Δ se asume que es una cantidad compuesta de términos de orden β, γ , y δ , éstos contribuirán al ángulo de deflexión con términos de orden superior a los deseados, y por lo tanto es consistente tomar el límite $\varphi \rightarrow \pi$.

Por último, utilizando la relación (E.17) obtenemos,

$$\begin{aligned}
 \alpha = & \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) - \frac{2qQ}{bv^2} \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\mu} + \frac{3\pi m^2}{4b^2} \left(1 + \frac{4}{v^2} \right) - \frac{\pi Q^2}{4b^2} \left(1 + \frac{2}{v^2} \right) \\
 & - \frac{3\pi qQm}{b^2v^2} \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\mu} + \frac{\pi q^2 Q^2}{2b^2v^2} \frac{1 - v^2}{\mu^2}.
 \end{aligned} \tag{E.20}$$

Usando la ecuación (4.171) para la energía de la partícula podemos ver que esta última expresión para el ángulo de deflexión concide con la expresión obtenida en (4.181).

Apéndice F

Ángulo de deflexión a tercer orden en el espaciotiempo de Kerr: integración de la ecuación de la órbita

Como validación de nuestra expresión obtenida para el ángulo de deflexión dada por la ecuación (5.86) integraremos directamente la ecuación de la órbita a través de una extensión que haremos del método presentado por Aazami, Keeton, Petters y Hansen en [156] originalmente introducido para estudiar geodésicas nulas.

La ecuación de la órbita tanto para trayectorias prógradas ($s = +1$) como retrógradas ($s = -1$) en el plano ecuatorial puede ser expresada como sigue,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{s\sqrt{r}b(r - 2MF)}{[a^2 + r(r - 2M)]\sqrt{r^3 + b^2(2MF^2 - Gr) + 2M\Gamma r^2}}, \quad (\text{F.1})$$

donde

$$F \equiv 1 - s\frac{a}{bv} = 1 - s\hat{a}\frac{M}{bv}, \quad (\text{F.2})$$

$$G \equiv 1 - \frac{a^2}{b^2} = 1 - \hat{a}^2\frac{M^2}{b^2}, \quad (\text{F.3})$$

$$\Gamma = \frac{1 - v^2}{v^2}. \quad (\text{F.4})$$

La expresión (F.1) se reduce a la ecuación (B14) de [156] en el caso de geodésicas nulas ($\Gamma = 0$). El ángulo de deflexión se obtiene de la forma usual,

$$\alpha = 2 \int_{r_0}^{\infty} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| dr - \pi, \quad (\text{F.5})$$

donde r_0 es el valor de la coordenada radial en la distancia de menor acercamiento a la lente. La relación entre r_0 y el parámetro de impacto b sigue de requerir que

$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r_0} = 0$, lo cual implica a partir de (F.1) la siguiente relación,

$$r_0^3 + b^2(2MF^2 - Gr_0) + 2m\Gamma r_0^2 = 0. \quad (\text{F.6})$$

La solución real positiva de esta ecuación es,

$$b = \frac{\sqrt{r_0 + 2M\Gamma}}{\sqrt{G - \frac{2M}{r_0}F^2}}. \quad (\text{F.7})$$

Al substituir la ecuación (F.7) en (F.1), y cambiando la variable de integración r en la ecuación (F.5) por $x = \frac{r_0}{r}$, el ángulo de deflexión se obtiene a partir de la siguiente expresión,

$$\alpha = 2 \int_0^1 \frac{(1 - 2hx + \hat{a}^2 h^2 x^2)^{-1} \sqrt{1 + 2\Gamma h}(1 - 2hFx)}{\left\{ G(1 - x^2) - 2F^2 h(1 - x^3) + \Gamma(1 - x)h[2Gx - 4x(1 + x)F^2 h] \right\}^{1/2}} dx - \pi; \quad (\text{F.8})$$

donde $h = M/r_0$.

Asumiendo que $h \ll 1$, podemos hacer una expansión de Taylor en h del integrando en (F.8), la cual luego de la integración y conservando términos de tercer orden en h nos queda,

$$\alpha = b_0\pi + a_1h + (a_2 + b_2\pi)h^2 + (a_3 + b_3\pi)h^3 + \mathcal{O}(h^4); \quad (\text{F.9})$$

donde

$$b_0 = \left(\frac{1}{G^{1/2}} - 1 \right), \quad (\text{F.10})$$

$$a_1 = \frac{2\{2[G(1 - F) + F^2] + \Gamma G\}}{G^{3/2}}, \quad (\text{F.11})$$

$$a_2 = -a_1 \frac{F^2 + \Gamma G}{G}, \quad (\text{F.12})$$

$$b_2 = \frac{15F^4 - 4G(F - 1)(3F^2 + 2G) - 2\hat{a}^2 G^2 + 4\Gamma G[3F^2 + 2G(1 - F)]}{4G^{5/2}}, \quad (\text{F.13})$$

$$a_3 = \frac{1}{3G^{7/2}} \left\{ 122F^6 - 90F^4(F - 1)G - 16F^2(-4 + \hat{a}^2 + 4F)G^2 + 8(4 + \hat{a}^2(F - 2) - 4F)G^3 \right. \\ \left. + \Gamma[12G^2(1 - F)(9F^2 + 4G) + 153F^4G - 12\hat{a}^2G^3] + \Gamma^2(30G^3(1 - F) + 48G^2F^2) \right. \\ \left. + 7\Gamma^3G^3 \right\}, \quad (\text{F.14})$$

$$b_3 = -2b_2 \frac{F^2 + \Gamma G}{G}. \quad (\text{F.15})$$

Estas expresiones generalizan los resultados obtenidos en [156] al caso de partículas de prueba con masa. Podemos también escribir el ángulo de deflexión en términos de una expansión en $\gamma = M/b$ usando que h puede ser obtenida perturbativamente a partir de (F.7),

$$h = \frac{1}{\sqrt{G}}\gamma + \frac{F^2 + \Gamma G}{G^2}\gamma^2 + \frac{5F^4 + \Gamma G(6F^2 + \Gamma G)}{2G^{7/2}}\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4). \quad (\text{F.16})$$

En términos de γ el ángulo de deflexión se escribe como,

$$\alpha = A_0\pi + A_1\gamma + A_2\gamma^2 + A_3\gamma^3 + \mathcal{O}(\gamma^4), \quad (\text{F.17})$$

donde

$$A_0 = b_0, \quad (\text{F.18})$$

$$A_1 = \frac{a_1}{\sqrt{G}}, \quad (\text{F.19})$$

$$A_2 = \frac{a_1(F^2 + \Gamma G) + G(a_2 + b_2\pi)}{G^2}, \quad (\text{F.20})$$

$$A_3 = \frac{1}{2G^{7/2}} \left\{ \left[6a_1\Gamma F^2 + 4F^2(a_2 + b_2\pi) \right] G \right. \\ \left. + \left[\Gamma(\Gamma a_1 + 4a_2 + 4b_2\pi) + 2(a_3 + b_3\pi) \right] G^2 \right. \\ \left. + 5a_1F^4 \right\} \quad (\text{F.21})$$

Como F y G son ya funciones de γ , los coeficientes A_i deben ser expandidos en γ , y luego de esto, al reemplazar en la ecuación (F.17) recuperamos el ángulo de deflexión dado por la ecuación (5.86) con el término lineal en \hat{a} multiplicado por s .

Bibliografía

- [1] Henk Hoekstra y col. «Masses of galaxy clusters from gravitational lensing». En: *Space Sci. Rev.* 177 (2013), págs. 75-118. DOI: [10.1007/s11214-013-9978-5](https://doi.org/10.1007/s11214-013-9978-5). arXiv: [1303.3274](https://arxiv.org/abs/1303.3274) [[astro-ph.CO](#)].
- [2] R. Mandelbaum. «Galaxy Halo Masses from Weak Gravitational Lensing». En: *Galaxy Masses as Constraints of Formation Models*. Ed. por M. Cappellari y S. Courteau. Vol. 311. IAU Symposium. 2015, págs. 86-95. DOI: [10.1017/S1743921315003452](https://doi.org/10.1017/S1743921315003452). arXiv: [1410.0734](https://arxiv.org/abs/1410.0734).
- [3] Carlo Giocoli y col. «Mass and Concentration estimates from Weak and Strong Gravitational Lensing: a Systematic Study». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 440.2 (2014), págs. 1899-1915. DOI: [10.1093/mnras/stu303](https://doi.org/10.1093/mnras/stu303). arXiv: [1311.1205](https://arxiv.org/abs/1311.1205) [[astro-ph.CO](#)].
- [4] Antony Lewis; Anthony Challinor. «Weak gravitational lensing of the CMB». En: *Physics Reports* 429 (1 2006). DOI: [10.1016/j.physrep.2006.03.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2006.03.002).
- [5] Avery E. Broderick y col. «Modeling Seven Years of Event Horizon Telescope Observations with Radiatively Inefficient Accretion Flow Models». En: *Astrophys. J.* 820.2 (2016), pág. 137. DOI: [10.3847/0004-637X/820/2/137](https://doi.org/10.3847/0004-637X/820/2/137). arXiv: [1602.07701](https://arxiv.org/abs/1602.07701) [[astro-ph.HE](#)].
- [6] A. Cava y col. «The nature of giant clumps in distant galaxies probed by the anatomy of the cosmic snake». En: *Nature Astronomy* 2 (ene. de 2018), págs. 76-82. DOI: [10.1038/s41550-017-0295-x](https://doi.org/10.1038/s41550-017-0295-x). arXiv: [1711.03977](https://arxiv.org/abs/1711.03977).
- [7] D. O. Muhleman e I. D. Johnston. «Radio Propagation in the Solar Gravitational Field». En: *Phys. Rev. Lett.* 17 (8 1966), págs. 455-458. DOI: [10.1103/PhysRevLett.17.455](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.455). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.17.455>.
- [8] D. O. Muhleman, R. D. Ekers y E. B. Fomalont. «Radio Interferometric Test of the General Relativistic Light Bending Near the Sun». En: *Phys. Rev. Lett.* 24 (24 1970), págs. 1377-1380.
- [9] D. O. Muhleman, P. B. Esposito y J. D. Anderson. «The electron density profile of the outer corona and the interplanetary medium from Mariner-6 and Mariner-7 time-delay measurements». En: *Astrophysical Journal* 211 (feb. de 1977), págs. 943-957.
- [10] G. Leonard Tyler y col. «The Viking Solar Corona Experiment». En: *Journal of Geophysical Research* 82 (28 1977), págs. 4335-4340.
- [11] Slava G. Turyshev y Viktor T. Toth. «The Pioneer Anomaly». En: *Living Reviews in Relativity* 13.1 (sep. de 2010), pág. 4. DOI: [10.12942/lrr-2010-4](https://doi.org/10.12942/lrr-2010-4). URL: <https://doi.org/10.12942/lrr-2010-4>.
- [12] R. A. Breuer y J. Ehlers. «Propagation of High-Frequency Electromagnetic Waves Through a Magnetized Plasma in Curved Space-Time. I». En: *Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences* 370 (1742 mar. de 1980).

- [13] R. A. Breuer y J. Ehlers. «Propagation of high-frequency electromagnetic waves through a magnetized plasma in curved space-time. II - Application of the asymptotic approximation». En: *Proceedings of the Royal Society of London Series A* (374 ene. de 1981).
- [14] R. A. Breuer y J. Ehlers. «Propagation of electromagnetic waves through magnetized plasmas in arbitrary gravitational fields». En: *Astronomy & Astrophysics* (96 mar. de 1981).
- [15] Volker Perlick. *Ray Optics, Fermat's Principle, and Applications to General Relativity*. first. Lecture Notes in Physics 61. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000. ISBN: 978-3-540-66898-5,978-3-540-46662-8.
- [16] G. Swarup. «An International Telescope for Radio Astronomy». En: *Current Science, Vol. 60, NO.2/JAN25, P.106*, 1991 60 (ene. de 1991), pág. 106.
- [17] M. P. van Haarlem y col. «LOFAR: The LOw-Frequency ARray». En: *Astron. Astrophys* 556, A2 (ago. de 2013), A2. DOI: [10.1051/0004-6361/201220873](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220873). arXiv: [1305.3550](https://arxiv.org/abs/1305.3550) [astro-ph.IM].
- [18] C.J. Lonsdale, R. J. Cappallo y Morales. «The Murchison Widefield Array: Design Overview». En: *IEEE Proceedings* 97 (ago. de 2009), págs. 1497-1506. DOI: [10.1109/JPROC.2009.2017564](https://doi.org/10.1109/JPROC.2009.2017564). arXiv: [0903.1828](https://arxiv.org/abs/0903.1828) [astro-ph.IM].
- [19] A. Budianu y col. «Swarm-to-Earth communication in OLFAR». En: *Elsevier Science. Acta Astronáutica* 107 (2015), págs. 14-19.
- [20] Mark J. Bentum, Luca Bonetti y Alessandro D. A. M. Spallicci. «Dispersion by pulsars, magnetars, fast radio bursts and massive electromagnetism at very low radio frequencies». En: *Adv. Space Res.* 59 (2017), págs. 736-747. DOI: [10.1016/j.asr.2016.10.018](https://doi.org/10.1016/j.asr.2016.10.018). arXiv: [1607.08820](https://arxiv.org/abs/1607.08820) [astro-ph.IM].
- [21] G. S. Bisnovatyi-Kogan y O. Yu. Tsupko. «Gravitational radiospectrometer». En: *Grav. Cosmol.* 15 (2009), págs. 20-27. DOI: [10.1134/S020228930901006X](https://doi.org/10.1134/S020228930901006X). arXiv: [0809.1021](https://arxiv.org/abs/0809.1021) [astro-ph].
- [22] G. S. Bisnovatyi-Kogan y O. Yu. Tsupko. «Gravitational lensing in a non-uniform plasma». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 404 (2010), págs. 1790-1800. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2010.16290.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16290.x). arXiv: [1006.2321](https://arxiv.org/abs/1006.2321) [astro-ph.CO].
- [23] Oleg Yu Tsupko y Gennady S. Bisnovatyi-Kogan. «Gravitational lensing in plasma: Relativistic images at homogeneous plasma». En: *Phys. Rev. D* 87.12 (2013), pág. 124009. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.124009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.124009). eprint: [1305.7032](https://arxiv.org/abs/1305.7032).
- [24] O. Yu. Tsupko y G. S. Bisnovatyi-Kogan. «Influence of Plasma on Relativistic Images of Gravitational Lensing». En: *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 17.4 (2014), págs. 455-457.
- [25] O. Yu. Tsupko y G. S. Bisnovatyi-Kogan. «Gravitational lensing in the presence of plasmas and strong gravitational fields». En: *Grav. Cosmol.* 20.3 (2014), págs. 220-225. DOI: [10.1134/S0202289314030153](https://doi.org/10.1134/S0202289314030153).
- [26] Volker Perlick, Oleg Yu. Tsupko y Gennady S. Bisnovatyi-Kogan. «Influence of a plasma on the shadow of a spherically symmetric black hole». En: *Phys. Rev. D* 92.10 (2015), pág. 104031. DOI: [10.1103/PhysRevD.92.104031](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.104031). arXiv: [1507.04217](https://arxiv.org/abs/1507.04217) [gr-qc].
- [27] G. S. Bisnovatyi-Kogan y O. Yu. Tsupko. «Gravitational Lensing in Plasmic Medium». En: (2015). [Plasma Phys. Rep.41,562(2015)]. DOI: [10.1134/S1063780X15070016](https://doi.org/10.1134/S1063780X15070016). arXiv: [1507.08545](https://arxiv.org/abs/1507.08545) [gr-qc].

- [28] Volker Perlick y Oleg Yu. Tsupko. «Light propagation in a plasma on Kerr spacetime: Separation of the Hamilton-Jacobi equation and calculation of the shadow». En: *Phys. Rev. D* 95.10 (2017), pág. 104003. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.104003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.104003). arXiv: [1702.08768](https://arxiv.org/abs/1702.08768) [gr-qc].
- [29] Gennady Bisnovaty-Kogan y Oleg Tsupko. «Gravitational Lensing in Presence of Plasma: Strong Lens Systems, Black Hole Lensing and Shadow». En: *Universe* 3.3 (2017), pág. 57. DOI: [10.3390/universe3030057](https://doi.org/10.3390/universe3030057).
- [30] V. S. Morozova, B. J. Ahmedov y A. A. Tursunov. «Gravitational lensing by a rotating massive object in a plasma». En: *Astrophysics and Space Science* 346 (2013), págs. 513-520. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013Ap%26SS.346..513M>.
- [31] A. Abdujabbarov y col. «Shadow of rotating wormhole in plasma environment». En: *Astrophysics and Space Science* 361, 226 (2016), pág. 226. DOI: [10.1007/s10509-016-2818-9](https://doi.org/10.1007/s10509-016-2818-9).
- [32] A. Abdujabbarov y col. «Shadow of the rotating black hole with quintessential energy in the presence of plasma». En: *International Journal of Modern Physics D* 26, 1750051-239 (2017), págs. 1750051-239. DOI: [10.1142/S0218271817500511](https://doi.org/10.1142/S0218271817500511).
- [33] A. Abdujabbarov y col. «Gravitational lensing by regular black holes surrounded by plasma». En: *International Journal of Modern Physics D* 26, 1741011-187 (2017), págs. 1741011-187. DOI: [10.1142/S0218271817410115](https://doi.org/10.1142/S0218271817410115).
- [34] A. Abdujabbarov y col. «Optical properties of a braneworld black hole: Gravitational lensing and retrolensing». En: *Phys. Rev. D* 96.8, 084017 (2017), pág. 084017. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.084017](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.084017).
- [35] B. Turimov y col. «Gravitational lensing by magnetized compact object in the presence of plasma». En: *ArXiv: 1802.03293* (2018). arXiv: [1802.03293](https://arxiv.org/abs/1802.03293) [gr-qc].
- [36] Adam Rogers. «Frequency-dependent effects of gravitational lensing within plasma». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 451.1 (2015), págs. 17-25. DOI: [10.1093/mnras/stv903](https://doi.org/10.1093/mnras/stv903). arXiv: [1505.06790](https://arxiv.org/abs/1505.06790) [gr-qc].
- [37] Adam Rogers. «Escape and Trapping of Low-Frequency Gravitationally Lensed Rays by Compact Objects within Plasma». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 465.2 (2017), págs. 2151-2159. DOI: [10.1093/mnras/stw2829](https://doi.org/10.1093/mnras/stw2829). arXiv: [1611.01269](https://arxiv.org/abs/1611.01269) [gr-qc].
- [38] Adam Rogers. «Gravitational Lensing of Rays through the Levitating Atmospheres of Compact Objects». En: *Universe* 3 (2017), pág. 3. DOI: [10.3390/universe3010003](https://doi.org/10.3390/universe3010003). arXiv: [1701.05693](https://arxiv.org/abs/1701.05693) [gr-qc].
- [39] X. Er y A. Rogers. «Two families of astrophysical diverging lens models». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 475 (mar. de 2018), págs. 867-878. DOI: [10.1093/mnras/stx3290](https://doi.org/10.1093/mnras/stx3290). arXiv: [1712.06900](https://arxiv.org/abs/1712.06900).
- [40] Gabriel Crisnejo y Emanuel Gallo. «Weak lensing in a plasma medium and gravitational deflection of massive particles using the Gauss-Bonnet theorem. A unified treatment». En: *Phys. Rev. D* 97.12 (2018), pág. 124016. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.124016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.124016). arXiv: [1804.05473](https://arxiv.org/abs/1804.05473) [gr-qc].
- [41] Xinzhong Er y Shude Mao. «Effects of plasma on gravitational lensing». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 437.3 (2014), págs. 2180-2186. DOI: [10.1093/mnras/stt2043](https://doi.org/10.1093/mnras/stt2043). arXiv: [1310.5825](https://arxiv.org/abs/1310.5825) [astro-ph.CO].

- [42] Emanuel Gallo y Osvaldo M. Moreschi. «Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions». En: *Phys. Rev. D* 83 (8 2011), pág. 083007. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.083007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.083007).
- [43] Ezequiel F Boero y Osvaldo M Moreschi. «Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions in the cosmological framework». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 475.4 (2018), págs. 4683-4703. DOI: [10.1093/mnras/sty110](https://doi.org/10.1093/mnras/sty110). eprint: [/oup/backfile/content_public/journal/mnras/475/4/10.1093_mnras_sty110/1/sty110.pdf](http://oup/backfile/content_public/journal/mnras/475/4/10.1093_mnras_sty110/1/sty110.pdf). URL: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sty110>.
- [44] Gabriel Crisnejo y Emanuel Gallo. «Expressions for optical scalars and deflection angle at second order in terms of curvature scalars». En: *Phys. Rev. D* 97 (8 2018), pág. 084010. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.084010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.084010). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.084010>.
- [45] G. W. Gibbons y M. C. Werner. «Applications of the Gauss-Bonnet theorem to gravitational lensing». En: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), pág. 235009. DOI: [10.1088/0264-9381/25/23/235009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/23/235009). arXiv: [0807.0854](https://arxiv.org/abs/0807.0854) [gr-qc].
- [46] G. W. Gibbons y M. C. Werner. «Applications of the Gauss-Bonnet theorem to gravitational lensing». En: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), pág. 235009. DOI: [10.1088/0264-9381/25/23/235009](https://doi.org/10.1088/0264-9381/25/23/235009). arXiv: [0807.0854](https://arxiv.org/abs/0807.0854) [gr-qc].
- [47] Hermann Weyl. «Zur Gravitationstheorie». En: *Annalen der Physik* 359 (18 1917).
- [48] Kimet Jusufi. «Gravitational lensing by Reissner-Nordström black holes with topological defects». En: *Astrophys. Space Sci.* 361.1 (2016), pág. 24. DOI: [10.1007/s10509-015-2609-8](https://doi.org/10.1007/s10509-015-2609-8). arXiv: [1510.08526](https://arxiv.org/abs/1510.08526) [gr-qc].
- [49] Kimet Jusufi. «Light Deflection with Torsion Effects Caused by a Spinning Cosmic String». En: *Eur. Phys. J. C* 76.6 (2016), pág. 332. DOI: [10.1140/epjc/s10052-016-4185-7](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4185-7). arXiv: [1605.02781](https://arxiv.org/abs/1605.02781) [gr-qc].
- [50] Kimet Jusufi. «Quantum effects on the deflection of light and the Gauss-Bonnet theorem». En: *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 14.10 (2017), pág. 1750137. DOI: [10.1142/S0219887817501377](https://doi.org/10.1142/S0219887817501377). arXiv: [1611.00713](https://arxiv.org/abs/1611.00713) [gr-qc].
- [51] Kimet Jusufi. «Deflection angle of light by wormholes using the Gauss-Bonnet theorem». En: *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 14.12 (2017), pág. 1750179. DOI: [10.1142/S0219887817501791](https://doi.org/10.1142/S0219887817501791). arXiv: [1706.01244](https://arxiv.org/abs/1706.01244) [gr-qc].
- [52] Kimet Jusufi, Izzet Sakalli y Ali Övgün. «Effect of Lorentz Symmetry Breaking on the Deflection of Light in a Cosmic String Spacetime». En: *Phys. Rev. D* 96.2 (2017), pág. 024040. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.024040](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.024040). arXiv: [1705.06197](https://arxiv.org/abs/1705.06197) [gr-qc].
- [53] Kimet Jusufi, Ali Övgün y Ayan Banerjee. «Light deflection by charged wormholes in Einstein-Maxwell-dilaton theory». En: *Phys. Rev. D* 96.8 (2017). [Addendum: *Phys. Rev. D* 96, no. 8, 089904 (2017)], pág. 084036. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.084036](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.084036), [10.1103/PhysRevD.96.089904](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.089904).
- [54] Kimet Jusufi y col. «Deflection of light by black holes and massless wormholes in massive gravity». En: *Eur. Phys. J. C* 78.4 (2018), pág. 349.
- [55] Kimet Jusufi, Farook Rahaman y Ayan Banerjee. «Semiclassical gravitational effects on the gravitational lensing in the spacetime of topological defects». En: *Annals Phys.* 389 (2018), págs. 219-233. DOI: [10.1016/j.aop.2017.12.013](https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.12.013). arXiv: [1709.00227](https://arxiv.org/abs/1709.00227) [gr-qc].

- [56] Kimet Jusufi y col. «Gravitational lensing by wormholes supported by electromagnetic, scalar, and quantum effects». En: (ArXiv:1802.07680 (2018)). arXiv: [1802.07680 \[gr-qc\]](#).
- [57] Kimet Jusufi. «Conical Morris-Thorne Wormholes with a Global Monopole Charge». En: *Phys. Rev. D* 98.4 (2018), pág. 044016.
- [58] Izzet Sakalli, Kimet Jusufi y Ali Övgün. «Analytical Solutions in a Cosmic String Born-Infeld-dilaton Black Hole Geometry: Quasinormal Modes and Hawking Radiation». En: (Arxiv: 1803.10583 (2018)). arXiv: [1803.10583 \[gr-qc\]](#).
- [59] Hideyoshi Arakida. «Light Deflection and Gauss-Bonnet Theorem: Definition of Total Deflection Angle and its Applications». En: *Gen. Rel. Grav.* 50.5 (2018), pág. 48. DOI: [10.1007/s10714-018-2368-2](#). arXiv: [1708.04011 \[gr-qc\]](#).
- [60] Asahi Ishihara y col. «Gravitational bending angle of light for finite distance and the Gauss-Bonnet theorem». En: *Phys. Rev. D* 94.8 (2016), pág. 084015. DOI: [10.1103/PhysRevD.94.084015](#). arXiv: [1604.08308 \[gr-qc\]](#).
- [61] Asahi Ishihara y col. «Finite-distance corrections to the gravitational bending angle of light in the strong deflection limit». En: *Phys. Rev. D* 95.4 (2017), pág. 044017. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.044017](#). arXiv: [1612.04044 \[gr-qc\]](#).
- [62] Ali Övgün, Kimet Jusufi e Izzet Sakalli. «Exact traversable wormhole solution in bumblebee gravity». En: *Phys. Rev. D* 99.2 (2019), pág. 024042.
- [63] Ali Övgün, Kimet Jusufi e Izzet Sakalli. «Gravitational lensing under the effect of Weyl and bumblebee gravities: Applications of Gauss-Bonnet theorem». En: *Annals Phys.* 399 (2018), págs. 193-203. DOI: [10.1016/j.aop.2018.10.012](#). arXiv: [1805.09431 \[gr-qc\]](#).
- [64] Kimet Jusufi. «Gravitational deflection of relativistic massive particles by Kerr black holes and Teo wormholes viewed as a topological effect». En: *Phys. Rev. D* 98.6 (2018), pág. 064017.
- [65] Ali Övgün, Galin Gylchev y Kimet Jusufi. «Weak Gravitational lensing by phantom black holes and phantom wormholes using the Gauss-Bonnet theorem». En: *Annals Phys.* 406 (2019), págs. 152-172. DOI: [10.1016/j.aop.2019.04.007](#). arXiv: [1806.03719 \[gr-qc\]](#).
- [66] Ali Övgün. «Maxwell's Fisheye Lensing Effect by Black holes and Gauss-Bonnet Theorem». En: *arXiv:1806.05549* (2018). eprint: [1806.05549](#).
- [67] Ali Övgün, Izzet Sakalli y Joel Saavedra. «Weak gravitational lensing by Kerr-MOG Black Hole and Gauss-Bonnet theorem». En: *arXiv:1806.06453* (2018). arXiv: [1806.06453 \[gr-qc\]](#).
- [68] Toshiaki Ono, Asahi Ishihara e Hideki Asada. «Deflection angle of light for an observer and source at finite distance from a rotating wormhole». En: *Phys. Rev. D* 98.4 (2018), pág. 044047. DOI: [10.1103/PhysRevD.98.044047](#).
- [69] M. C. Werner. «Gravitational lensing in the Kerr-Randers optical geometry». En: *Gen. Rel. Grav.* 44 (2012), págs. 3047-3057. DOI: [10.1007/s10714-012-1458-9](#). arXiv: [1205.3876 \[gr-qc\]](#).
- [70] Kimet Jusufi y col. «Light Deflection by a Rotating Global Monopole Spacetime». En: *Phys. Rev. D* 95.10 (2017), pág. 104012. DOI: [10.1103/PhysRevD.95.104012](#). arXiv: [1702.05600 \[gr-qc\]](#).

- [71] Kimet Jusufi y Ali Övgün. «Light Deflection by a Quantum Improved Kerr Black Hole Pierced by a Cosmic String». En: (Arxiv: 1707.02824 (2017)). arXiv: [1707.02824](https://arxiv.org/abs/1707.02824) [gr-qc].
- [72] Kimet Jusufi y Ali Övgün. «Gravitational Lensing by Rotating Wormholes». En: *Phys. Rev. D* 97.2 (2018), pág. 024042. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.024042](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.024042). arXiv: [1708.06725](https://arxiv.org/abs/1708.06725) [gr-qc].
- [73] Kimet Jusufi y Ali Övgün. «Effect of the cosmological constant on the deflection angle by a rotating cosmic string». En: *Phys. Rev. D* 97.6 (2018), pág. 064030. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.064030](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.064030). arXiv: [1712.01771](https://arxiv.org/abs/1712.01771) [gr-qc].
- [74] Kimet Jusufi y col. «Deflection of light by rotating regular black holes using the Gauss-Bonnet theorem». En: *Phys. Rev. D* 97.12 (2018), pág. 124024. DOI: [10.1103/PhysRevD.97.124024](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.124024). arXiv: [1804.00643](https://arxiv.org/abs/1804.00643) [gr-qc].
- [75] Toshiaki Ono, Asahi Ishihara e Hideki Asada. «Gravitomagnetic bending angle of light with finite-distance corrections in stationary axisymmetric spacetimes». En: *Phys. Rev. D* 96.10 (2017), pág. 104037. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.104037](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.104037). arXiv: [1704.05615](https://arxiv.org/abs/1704.05615) [gr-qc].
- [76] Gabriel Crisnejo, Emanuel Gallo y Adam Rogers. «Finite distance corrections to the light deflection in a gravitational field with a plasma medium». En: *Phys. Rev. D* 99 (12 2019), pág. 124001.
- [77] Gabriel Crisnejo, Emanuel Gallo y José R. Villanueva. «Gravitational lensing in dispersive media and deflection angle of charged massive particles in terms of curvature scalars and energy-momentum tensor». En: *Phys. Rev. D* 100 (4 2019), pág. 044006. DOI: [10.1103/PhysRevD.100.044006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.044006). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.044006>.
- [78] Gabriel Crisnejo, Emanuel Gallo y Kimet Jusufi. «Higher order corrections to deflection angle of massive particles and light rays in plasma media for stationary spacetimes using the Gauss-Bonnet theorem». En: *Phys. Rev. D* 100 (10 2019), pág. 104045.
- [79] Ezequiel Boero y col. «Perturbative and numerical approach to plasma strong lensing». En: (In preparation).
- [80] Russell Kulsrud y Abraham Loeb. «Dynamics and gravitational interaction of waves in nonuniform media». En: *Phys. Rev. D* 45 (2 1992), págs. 525-531. DOI: [10.1103/PhysRevD.45.525](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.45.525). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.525>.
- [81] Avery Broderick y Roger Blandford. «Covariant magnetoionic theory — I. Ray propagation». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342.4 (jul. de 2003), págs. 1280-1290. ISSN: 0035-8711.
- [82] Evans L.C. *Partial Differential Equations. 2nd Edition*. American Mathematical Society, 2010.
- [83] John Lighton Synge. *Relativity: The special theory*. North Holland Publishing Co., 1956.
- [84] B. Chen y R. Kantowski. «Distance redshift from an optical metric that includes absorption». En: *Phys. Rev. D* 80 (4 2009), pág. 044019. DOI: [10.1103/PhysRevD.80.044019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.044019). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.044019>.

- [85] Karen Schulze-Koops, Volker Perlick y Dominik J. Schwarz. «Sachs equations for light bundles in a cold plasma». En: *Class. Quant. Grav.* 34.21 (2017), pág. 215006. DOI: [10.1088/1361-6382/aa8d46](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8d46). arXiv: [1705.04810](https://arxiv.org/abs/1705.04810) [gr-qc].
- [86] John Lighton Synge. *Relativity: The general theory*. North Holland Publishing Co., 1960.
- [87] W. Gordon. «Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie». En: *Annalen der Physik* 377 (22 1923).
- [88] V. Bozza y A. Postiglione. «Alternatives to Schwarzschild in the weak field limit of General Relativity». En: *JCAP* 1506.06 (2015), pág. 036. arXiv: [1502.05178](https://arxiv.org/abs/1502.05178) [gr-qc].
- [89] Takao Kitamura, Koki Nakajima e Hideki Asada. «Demagnifying gravitational lenses toward hunting a clue of exotic matter and energy». En: *Phys. Rev. D.* 87.2 (2013), pág. 027501. DOI: [10.1103/PhysRevD.87.027501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.027501). arXiv: [1211.0379](https://arxiv.org/abs/1211.0379) [gr-qc].
- [90] Emanuel Gallo y Osvaldo M. Moreschi. «Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions». En: *Phys. Rev. D* 83 (8 2011), pág. 083007. DOI: [10.1103/PhysRevD.83.083007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.083007).
- [91] Gabriel Crisnejo. *Aspectos teóricos de lentes gravitacionales*. Tesis de Licenciatura, FaMAF, UNC, 2017.
- [92] G. W. Gibbons. «The Jacobi-metric for timelike geodesics in static spacetimes». En: *Class. Quant. Grav.* 33.2 (2016), pág. 025004. DOI: [10.1088/0264-9381/33/2/025004](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/2/025004). arXiv: [1508.06755](https://arxiv.org/abs/1508.06755) [gr-qc].
- [93] A. Accioly y S. Ragusa. «Gravitational deflection of massive particles in classical and semiclassical general relativity». En: *Class. Quant. Grav.* 19 (2002). [Erratum: *Class. Quant. Grav.*20,4963(2003)], págs. 5429-5434. DOI: [10.1088/0264-9381/19/21/308](https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/21/308).
- [94] A. Bhadra, K. Sarkar y K. K. Nandi. «Testing gravity at the second post-Newtonian level through gravitational deflection of massive particles». En: *Phys. Rev. D*75 (2007), pág. 123004. DOI: [10.1103/PhysRevD.75.123004](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.123004). arXiv: [gr-qc/0610089](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0610089) [gr-qc].
- [95] Guansheng He y Wenbin Lin. «Gravitational deflection of light and massive particles by a moving Kerr-Newman black hole». En: *Classical and Quantum Gravity* 33.9 (2016), pág. 095007. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/33/i=9/a=095007>.
- [96] W. R. Ward. «General-Relativistic Light Deflection for the Complete Celestial Sphere». En: *The Astrophysical Journal* 162 (oct. de 1970), pág. 345. DOI: [10.1086/150661](https://doi.org/10.1086/150661).
- [97] Irwin Shapiro. «New Method for the Detection of Light Deflection by Solar Gravity». En: *Science* 18.3790 (1967), págs. 806-808.
- [98] Gary W. Richter y Richard A. Matzner. «Second-order contributions to gravitational deflection of light in the parametrized post-Newtonian formalism». En: *Phys. Rev.D* 26 (1982), págs. 1219-1224. DOI: [10.1103/PhysRevD.26.1219](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.26.1219).
- [99] Sophie Pireaux. «Light deflection experiments as a test of relativistic theories of gravitation». Tesis doct. Louvain U., 2002. URL: <http://cp3.phys.ucl.ac.be/upload/theses/phd/spireaux.pdf>.
- [100] C. W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co. Ed. por Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973.

- [101] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge, UK: Univ. Press. 1993. ISBN: 9780521439732.
- [102] Guansheng He y Wenbin Lin. «Gravitational deflection of light and massive particles by a moving Kerr–Newman black hole». En: *Class. Quant. Grav.* 33.9 (2016). [Addendum: *Class. Quant. Grav.* 34, no. 2, 029401 (2017)], pág. 095007. DOI: [10.1088/0264-9381/33/9/095007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/9/095007), [10.1088/1361-6382/aa5203](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa5203).
- [103] Fernando de Felice y col. «A general relativistic model for the light propagation in the gravitational field of the Solar System: The dynamical case». En: *Astrophys. J.* 653 (2006), págs. 1552-1565. DOI: [10.1086/508701](https://doi.org/10.1086/508701). arXiv: [astro-ph/0609073](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0609073) [astro-ph].
- [104] F. de Felice y col. «A General relativistic model of light propagation in the gravitational field of the Solar System: The Static case». En: *Astrophys. J.* 607 (2004), págs. 580-595. DOI: [10.1086/383244](https://doi.org/10.1086/383244). arXiv: [astro-ph/0401637](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0401637) [astro-ph].
- [105] D. E. Lebach y col. «Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry». En: *Phys. Rev. Lett.* 75 (8 1995), págs. 1439-1442. DOI: [10.1103/PhysRevLett.75.1439](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1439). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.75.1439>.
- [106] S. S. Shapiro y col. «Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999». En: *Physical Review Letters* 92 (12 mar. de 2004).
- [107] E. B. Fomalont y R. A. Sramek. «A confirmation of Einstein's general theory of relativity by measuring the bending of microwave radiation in the gravitational field of the sun». En: *Astrophysical Journal* 199 (ago. de 1975), págs. 749-755.
- [108] D. S. Robertson, W. E. Carter y W. H. Dillinger. «New measurement of solar gravitational deflection of radio signals using VLBI». En: *Nature* 349 (1991), págs. 768-770. DOI: <https://doi.org/10.1038/349768a0>.
- [109] S. B. Lambert y C. Le Poncin-Lafitte. «Determination of the relativistic parameter gamma using very long baseline interferometry». En: *Astron. Astrophys.* 499 (2009), pág. 331.
- [110] O. Titov. «Testing of General Relativity with Geodetic VLBI». En: *arXiv:1702.06647* (2017).
- [111] M. Froeschle, F. Mignard y F. Arenou. «Determination of the PPN Parameter gamma with the HIPPARCOS Data». En: *Hipparcos - Venice '97*. Ed. por R. M. Bonnet y col. Vol. 402. ESA Special Publication. Ago. de 1997, págs. 49-52.
- [112] D. Hobbs y col. «Determining PPN γ with Gaia's astrometric core solution». En: *Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis*. Ed. por S. A. Klioner, P. K. Seidelmann y M. H. Soffel. Vol. 261. IAU Symposium. Ene. de 2010, págs. 315-319. DOI: [10.1017/S1743921309990561](https://doi.org/10.1017/S1743921309990561).
- [113] Slava G. Turyshev. «Relativistic gravitational deflection of light and its impact on the modeling accuracy for the Space Interferometry Mission». En: *Astron. Lett.* 35 (2009), págs. 215-234. DOI: [10.1134/S106377370904001X](https://doi.org/10.1134/S106377370904001X). arXiv: [0809.1250](https://arxiv.org/abs/0809.1250) [gr-qc].
- [114] Titov, O. y col. «Testing general relativity with geodetic VLBI - What a single, specially designed experiment can teach us». En: *Astronomy and Astrophysics* 618 (2018), A8. DOI: [10.1051/0004-6361/201833459](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833459). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833459>.

- [115] F. Mignard y S. A. Klioner. «Gaia: Relativistic modelling and testing». En: *Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis*. Ed. por S. A. Klioner, P. K. Seidelmann y M. H. Soffel. Vol. 261. IAU Symposium. Ene. de 2010, págs. 306-314. DOI: [10.1017/S174392130999055X](https://doi.org/10.1017/S174392130999055X).
- [116] W. R. Ward. «General-Relativistic Light Deflection for the Complete Celestial Sphere». En: *Astrophysical Journal* 162 (oct. de 1970), pág. 345.
- [117] Will C.M. Poisson E. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. CUP, 2014. ISBN: 9781107032866.
- [118] A. Gould. «Deflection of light by the earth». En: *The Astrophysical Journal* 414 (sep. de 1993), págs. L37-L40. DOI: [10.1086/186990](https://doi.org/10.1086/186990).
- [119] Maria Teresa Crosta y F. Mignard. «Micro-arcsecond light bending by jupiter». En: *Class. Quant. Grav.* 23 (2006), págs. 4853-4871. DOI: [10.1088/0264-9381/23/15/006](https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/15/006). arXiv: [astro-ph/0512359](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0512359) [astro-ph].
- [120] Mustapha Azreg-Aïnou, Sebastian Bahamonde y Mubasher Jamil. «Strong Gravitational Lensing by a Charged Kiselev Black Hole». En: *Eur. Phys. J. C* 77.6 (2017), pág. 414.
- [121] Fernando de Felice y col. «General relativistic satellite astrometry. I. A Non-perturbative approach». En: *Astron. Astrophys.* 332 (1998), págs. 1133-1141.
- [122] Fernando de Felice y col. «General relativistic satellite astronomy II. Modelling parallax and proper motion». En: *Astron. Astrophys.* 373 (2001), págs. 336-344. DOI: [10.1051/0004-6361:20010499](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20010499).
- [123] Maria Teresa Crosta y col. «Some aspects of relativistic astrometry from within the Solar System». En: *Celestial Mech.* 87 (2003), págs. 209-218. DOI: [10.1023/A:1026136012485](https://doi.org/10.1023/A:1026136012485). arXiv: [astro-ph/0305399](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0305399) [astro-ph].
- [124] Clifford M. Will. «The Confrontation between General Relativity and Experiment». En: *Living Reviews in Relativity* 17.1 (2014), pág. 4. ISSN: 1433-8351. DOI: [10.12942/lrr-2014-4](https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4). URL: <https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4>.
- [125] Dmitri Lebedev y Kayll Lake. «On the influence of the cosmological constant on trajectories of light and associated measurements in Schwarzschild de Sitter space». En: (1308.4931 (2013)). arXiv: [ArXiv:1308.4931](https://arxiv.org/abs/1308.4931) [gr-qc].
- [126] Dmitri Lebedev y Kayll Lake. «Relativistic Aberration and the Cosmological Constant in Gravitational Lensing I: Introduction». En: (ArXiv:1609.05183 (2016)). arXiv: [1609.05183](https://arxiv.org/abs/1609.05183) [gr-qc].
- [127] Irwin I. Epstein Reuben; Shapiro. «Post-post-Newtonian deflection of light by the Sun». En: *Physical Review D* 22 (12 dic. de 1980). DOI: [10.1103/PhysRevD.22.2947](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.22.2947). URL: <http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1103/PhysRevD.22.2947>.
- [128] John Liu Murray Spiegel Seymour Lipschutz. *Mathematical handbook of formulas and tables*. 3.^a ed. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, 2008. ISBN: 0071548556,9780071548564,9780071548557. URL: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=1D01AA94A77B71B0581850350B876091>.
- [129] G. Giampieri. «Relativity Experiments in the Solar System». En: *General Relativity and Gravitational Physics*. Ed. por M. Carfora y col. 1996, pág. 181. eprint: [astro-ph/9504098](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9504098).
- [130] Bruno Bertotti; Giacomo Giampieri. «Solar Coronal Plasma in Doppler Measurements». En: *Solar Physics* 178 (1 feb. de 1998).

- [131] Slava G. Turyshev y Viktor T. Toth. «Scattering of light by plasma in the solar system». En: (ArXiv: 1805.00398 (2018)). arXiv: 1805.00398 [gr-qc].
- [132] Slava G Turyshev y Viktor T Toth. «Diffraction of light by plasma in the solar system». En: *Journal of Optics* 21.4 (2019), pág. 045601. ISSN: 2040-8986. DOI: 10.1088/2040-8986/ab05ad. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/2040-8986/ab05ad>.
- [133] Emanuel Gallo y Osvaldo Moreschi. «Peculiar anisotropic stationary spherically symmetric solution of Einstein equations». En: *Mod. Phys. Lett. A27* (2012), pág. 1250044. arXiv: 1111.0327 [gr-qc].
- [134] Sumanto Chanda, G. W. Gibbons y Partha Guha. «Jacobi-Maupertuis-Eisenhart metric and geodesic flows». En: *J. Math. Phys.* 58.3 (2017), pág. 032503. DOI: 10.1063/1.4978333. arXiv: 1612.00375 [math-ph].
- [135] Sumanto Chanda, G. W. Gibbons y Partha Guha. «Jacobi-Maupertuis metric and Kepler equation». En: *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 14.07 (2017), pág. 1730002. DOI: 10.1142/S0219887817300021. arXiv: 1612.07395 [math-ph].
- [136] Sumanto Chanda y col. «Jacobi-Maupertuis Randers-Finsler metric for curved spaces and the gravitational magnetoelectric effect». En: (Arxiv: 1903.11805 (2019)). arXiv: 1903.11805 [gr-qc].
- [137] Praloy Das, Ripon Sk y Subir Ghosh. «Motion of charged particle in Reissner-Nordström spacetime: a Jacobi-metric approach». En: *Eur. Phys. J. C77.11* (2017), pág. 735. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5295-6. arXiv: 1609.04577 [gr-qc].
- [138] Matthias Bartelmann. «Gravitational Lensing». En: *Class. Quant. Grav.* 27 (2010), pág. 233001. DOI: 10.1088/0264-9381/27/23/233001. arXiv: 1010.3829 [astro-ph.CO].
- [139] Stella Seitz, Peter Schneider y Jurgen Ehlers. «Light propagation in arbitrary space-times and the gravitational lens approximation». En: *Class. Quant. Grav.* 11 (1994), págs. 2345-2374. DOI: 10.1088/0264-9381/11/9/016. arXiv: astro-ph/9403056 [astro-ph].
- [140] Simonetta Frittelli, Thomas P. Kling y Ezra T. Newman. «Image distortion from optical scalars in nonperturbative gravitational lensing». En: *Phys. Rev. D63* (2001), pág. 023007. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.023007. arXiv: gr-qc/0011108 [gr-qc].
- [141] Karlo de Leon y Ian Vega. «Weak gravitational lensing by two-power-law densities using the Gauss-Bonnet theorem». En: (Arxiv: 1903.06951 (2019)). arXiv: 1903.06951. [gr-qc].
- [142] Xiankai Pang y Junji Jia. «Gravitational lensing of massive particles in Reissner-Nordström spacetime». En: *Class. Quant. Grav.* 36.6 (2019), pág. 065012.
- [143] Oleg Yu. Tsupko. «Unbound motion of massive particles in the Schwarzschild metric: Analytical description in case of strong deflection». En: *Phys. Rev. D* 89 (8 2014), pág. 084075.
- [144] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole». En: *Astrophys. J.* 875.1 (2019), pág. L1.
- [145] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation». En: *Astrophys. J.* 875.1 (2019), pág. L2.
- [146] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration». En: *Astrophys. J.* 875.1 (2019), pág. L3.

- [147] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole». En: *Astrophys. J.* 875.1 (2019), pág. L4.
- [148] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring». En: *Astrophys. J.* 875.1 (2019), pág. L5.
- [149] Kazunori Akiyama y col. «First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole». En: *Astrophys. J.* 875.1 (2019), pág. L6.
- [150] Arne Grenzebach, Volker Perlick y Claus Lämmerzahl. «Photon Regions and Shadows of Kerr-Newman-NUT Black Holes with a Cosmological Constant». En: *Phys. Rev.* D89.12 (2014), pág. 124004.
- [151] Bao D. Chern S.S. Shen Z. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. 1.^a ed. Graduate Texts in Mathematics 200. Springer-Verlag New York, 2000. ISBN: 9780387989488,038798948X. URL: <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=B9D448A12A8B1F01AD8E451228BF7613>.
- [152] Terzioglu Nazim. «Uber Finslersche Raume». En: (Wolf, Munchen (1936)).
- [153] Kimet Jusufi. «Deflection angle of charged massive particles in slowly rotating Kerr-Newman space-times via Gauss-Bonnet theorem and Hamilton-Jacobi method». En: (Arxiv: 1906.12186 (2019)). arXiv: [1906.12186 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1906.12186).
- [154] A. Edery y J. Godin. «Second order Kerr deflection». En: *General Relativity and Gravitation* 38.11 (2006), págs. 1715-1722.
- [155] Robert H. Boyer y Richard W. Lindquist. «Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric». En: *Journal of Mathematical Physics* 8.2 (1967), págs. 265-281. DOI: [10.1063/1.1705193](https://doi.org/10.1063/1.1705193). eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1705193>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1705193>.
- [156] Amir B. Aazami, Charles R. Keeton y A. O. Petters. «Lensing by Kerr Black Holes. II: Analytical Study of Quasi-Equatorial Lensing Observables». En: *J. Math. Phys.* 52 (2011), pág. 102501. DOI: [10.1063/1.3642616](https://doi.org/10.1063/1.3642616). arXiv: [1102.4304 \[astro-ph.CO\]](https://arxiv.org/abs/1102.4304).
- [157] Toshiaki Ono, Asahi Ishihara e Hideki Asada. «Deflection angle of light for an observer and source at finite distance from a rotating global monopole». En: *Phys. Rev.* D99.12 (2019), pág. 124030.
- [158] Savitri V. Iyer y Edward C. Hansen. «Strong and Weak Deflection of Light in the Equatorial Plane of a Kerr Black Hole». En: (Arxiv: 0908.0085 (2009)). arXiv: [0908.0085 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/0908.0085).
- [159] Dimitrios Psaltis. «THE INFLUENCE OF GAS DYNAMICS ON MEASURING THE PROPERTIES OF THE BLACK HOLE IN THE CENTER OF THE MILKY WAY WITH STELLAR ORBITS AND PULSARS». En: *The Astrophysical Journal* 759.2 (2012), pág. 130. ISSN: 1538-4357. DOI: [10.1088/0004-637x/759/2/130](https://doi.org/10.1088/0004-637x/759/2/130). URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637x/759/2/130>.
- [160] Tom Kimpson, Kinwah Wu y Silvia Zane. «Spatial dispersion of light rays propagating through a plasma in Kerr space-time». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 484.2 (ene. de 2019), págs. 2411-2419. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1093/mnras/stz138](https://doi.org/10.1093/mnras/stz138). eprint: <http://oup.prod.sis.lan/mnras/article-pdf/484/2/2411/27635824/stz138.pdf>. URL: <https://doi.org/10.1093/mnras/stz138>.

- [161] C. Alard. «Gravitational arcs as a perturbation of the perfect ring». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 382 (2007), pág. 58. DOI: [10.1111/j.1745-3933.2007.00391.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2007.00391.x). arXiv: 0706.0215 [astro-ph].
- [162] Artem V. Tuntsov y col. «Dynamic Spectral Mapping of Interstellar Plasma Lenses». En: *The Astrophysical Journal* 817.2 (2016), pág. 176. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/817/i=2/a=176>.
- [163] Yuta Habara y Kazuhiro Yamamoto. «Analytic approach to perturbed Einstein ring with elliptical NFW lens model». En: *International Journal of Modern Physics D* 20 (3 2011), págs. 371-400. ISSN: 0218-2718.
- [164] Oleg Yu. Tsupko y Gennady S. Bisnovatyi-Kogan. «Hills and holes in the microlensing light curve due to plasma environment around gravitational lens». En: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 491.4 (2020), págs. 5636-5649. DOI: [10.1093/mnras/stz3365](https://doi.org/10.1093/mnras/stz3365). arXiv: 1910.03457 [gr-qc].
- [165] John E. Gutiérrez Leonel; Beckman. «THE GALAXY-WIDE DISTRIBUTIONS OF MEAN ELECTRON DENSITY IN THE H II REGIONS OF M51 AND NGC 4449». En: *The Astrophysical Journal* 710 (1 2010), págs. L44-L48. ISSN: 0004-637X,1538-4357. DOI: [10.1088/2041-8205/710/1/L44](https://doi.org/10.1088/2041-8205/710/1/L44). URL: <http://doi.org/10.1088/2041-8205%2F710%2F1%2FL44>.
- [166] Lima-Costa, F. y col. «Spectroscopic study of the HII regions in the NGC 1232 galaxy». En: *A&A* 642 (2020), A203. DOI: [10.1051/0004-6361/202038088](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038088). URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038088>.
- [167] Rebecca L. Davies y col. «The KMOS3D Survey: Investigating the Origin of the Elevated Electron Densities in Star-forming Galaxies at $1 \lesssim z \lesssim 3$ ». En: *The Astrophysical Journal* 909.1 (2021), pág. 78. DOI: [10.3847/1538-4357/abd551](https://doi.org/10.3847/1538-4357/abd551). URL: <https://doi.org/10.3847/1538-4357/abd551>.
- [168] Tomás Andrés Ulla. *Efectos de entornos plasmáticos en el régimen de lente gravitacional fuerte*. Tesis de Licenciatura, FaMAF, UNC, 2022.
- [169] Peter Schneider, Jürgen Ehlers y Emilio E. Falco. *Gravitational Lenses*. 1992. DOI: [10.1007/978-3-662-03758-4](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03758-4).