

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales

Tesis Doctoral



Modelación Computacional de la Micromecánica de  
Materiales Compuestos Reforzados con Fibras

Autor: Ing. Néstor Darío BARULICH

Director: Prof. Dr. Luis Augusto GODOY

Marzo de 2017



# Modelación Computacional de la Micromecánica de Materiales Compuestos Reforzados con Fibras

*por*

Ing. Néstor Darío BARULICH

Prof. Dr. Luis Augusto GODOY

Director

COMISIÓN ASESORA:

Prof. Dr. Luis Augusto GODOY

FCEFYN - UNC, IDIT CONICET-UNC

Prof. Dra. Patricia Mónica DARDATI

FRC - UTN

Prof. Dr. Diego Javier CELENTANO

CIEN - UC

Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba para cumplimentar los requerimientos de obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina  
Marzo de 2017







**ACTA DE EXAMENES**

Libro: 00001      Acta: 03797      Hoja 01/01  
LLAMADO: 1      17/03/2017  
CATEDRA - MESA:

DI002 TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NUMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO INGRESO COND.	NOTA	FIRMA
33587494	BARULICH, Néstor Dario	DNI: 33587494 2012 T	APROBADA	

CASTELLO, Walter Braulio - OLLER MARTINEZ, Sergio - LUCCIONI, Bibiana - SANCHEZ, Pablo - GIUSTI, Seba

Observaciones:

WALTER B. CASTELLO

Córdoba, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a:

1      -      1      -      1  
Inscriptos   Ausentes   Examinados   Reprobados   Aprobados



*A mis abuelos*

*Dominga y Nicolás*

*Inés y Florentino*



## **Agradecimientos**

Quiero expresar mis más sinceros agradecimientos a mi director de tesis el Dr. Luis A. Godoy quien me brindó su invaluable experiencia y conocimientos, pero fundamentalmente agradezco su incondicional apoyo y permanente aliento durante el desarrollo de esta tesis, los cuales hicieron posible la finalización de esta etapa.

Agradezco el constante apoyo de mi Comisión Asesora de tesis constituida por la Dra. Patricia M. Dardati y el Dr. Diego J. Celentano. Sus consejos han orientado esta tesis, su paciencia me permitió concretarla, y sus enseñanzas han sido un preciado obsequio que perdurará por siempre. Una especial mención merece la Dra. P. Dardati quien desde el inicio ha guiado mi carrera y me ha concedido la gratificante oportunidad de desarrollarme en el ámbito académico.

Quiero agradecer al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), entidad que financió mi estudio doctoral a través de la beca de postgrado y los proyectos de investigación. También agradezco a la Universidad Nacional de Córdoba (UNC), al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva y a la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba (UTN-FRC) por los recursos otorgados a través de proyectos de investigación. El personal del Departamento de Ingeniería Mecánica de la UTN-FRC y del Grupo de Investigación y Desarrollo en Mecánica Aplicada (GIDMA), en particular quien dirige dicho Grupo el Ing. J. Salomone, merecen un distinguido agradecimiento ya que me han proporcionado el espacio de trabajo y el equipamiento necesario para llevar a cabo mi trabajo, sin dejar de mencionar las innumerables experiencias vividas que hicieron aún más ameno el trabajo diario.

La investigación llevada a cabo por el Dr. Ever J. Barbero en el campo de los materiales compuestos ha conformado la base de esta tesis. En particular, el Capítulo 5 está basado en ideas compartidas entre el Dr. Barbero y el Dr. Godoy. Las investigaciones del Dr. M. Pando, sobre daño higrotérmico en compuestos de matriz polimérica, constituyen una fuerte motivación del Capítulo 4 de esta tesis. Finalmente, los trabajos del Dr. J. L. Pérez-Castellanos en micromecánica computacional utilizando nodos de control proveyeron los conceptos claves empleados en el Capítulo 3 de este trabajo. Quiero agradecer a estos autores por haber inspirado aspectos de esta tesis.

Agradezco a mis amigos Matías, Cristian, César, Diego, Agustín, Horacio, Germán, Darío, Adrián y Francisco por las agradables charlas e inolvidables momentos vividos.

El agradecimiento a mi familia es de los más profundos. Ellos son quienes brindaron su comprensión, compañía e interminable paciencia durante este tiempo. Quiero mencionar a mis hermanas Daniela, Agustín y Lautaro, mi más cálida compañía. Por último, mi mejor ejemplo de trabajo, esfuerzo, constancia y cariño lo brindaron mis padres Rosa y Néstor. Mis eternos agradecimientos para ellos.

Córdoba, 14 de diciembre de 2016

Néstor Darío Barulich



# Resumen

Los materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras (FRP, por sus siglas en inglés) son cada vez más utilizados en la industria debido a sus excelentes relaciones resistencia-peso y rigidez-peso. Su empleo depende, entre otros aspectos, de la certeza en el conocimiento de su comportamiento mecánico. La micromecánica computacional provee un marco de análisis apropiado en el que, en una escala microscópica, se tienen en cuenta los detalles de la microestructura y, en la escala macroscópica se representa un material homogéneo equivalente. En esta tesis se presenta una metodología de post-proceso para el cálculo de tensiones macroscópicas a partir de modelos de micromecánica computacional con microestructuras sometidas a deformaciones finitas (MPP-DF) con materiales constituyentes no lineales. Se utiliza el principio de Hill-Mandel, o la igualdad de potencias entre las escalas microscópica y macroscópica, para obtener fórmulas que permiten calcular las tensiones macroscópicas evitando el empleo de algoritmos de integración numérica. La MPP-DF es implementada mediante el método de elementos finitos (MEF) convencional a través de la utilización de nodos de control en las condiciones de borde en la celda unitaria (CU). Esta nueva técnica es aplicada, en primer lugar, a la evaluación del comportamiento elástico de un FRP con daño en la interfaz fibra-matriz. Con el fin de evaluar el módulo de Young transversal cuando el FRP está sometido a tensiones de tracción y de compresión, se representa el daño en una CU tridimensional incluyendo un modelo de contacto. Se obtienen ecuaciones analíticas para las propiedades elásticas de un FRP unidireccional con daño a través del método de los mínimos cuadrados y se utilizan en un modelo de placa en la escala macroscópica. Esto permite realizar un análisis macroscópico incluyendo variables microscópicas. La MPP-DF se aplica, en segundo lugar, a la simulación del fenómeno de micropandeo en FRP unidireccionales. Se lleva a cabo un extenso estudio paramétrico modificando la fracción de volumen de fibra, el desalineamiento de las fibras y la tensión de fluencia de la matriz, entre otros. Se encontró que el micropandeo está dominado por la fracción de volumen de fibra y por la tensión de fluencia de la matriz sólo para pequeños ángulos de desalineamiento de fibra, mientras que, para grandes ángulos la tensión de fluencia es el parámetro dominante en el fenómeno. A través de las aplicaciones de la MPP-DF a los casos antes mencionados se muestra que la metodología desarrollada es una herramienta apropiada para evaluar el comportamiento mecánico de los FRP.

**Palabras Clave:** Micromecánica Computacional, Polímeros Reforzados con Fibra, Deformaciones Finitas.





# Abstract

Fiber-reinforced polymer matrix composites (FRPs) are increasingly used in industry because of their excellent strength-to-weight and stiffness-to-weight ratios. Its use depends, among other aspects, on the certainty in the knowledge of its mechanical behavior. Computational micromechanics provide an appropriate framework for analysis in which, on a microscopic scale, details of the microstructure are taken into account and an equivalent homogeneous material is represented on the macroscopic scale. This thesis presents a post-process methodology for the calculation of macroscopic stresses from computational micromechanics models with microstructures subjected to finite deformations (MPP-DF) with nonlinear material constituents. The Hill-Mandel principle, or the equality of powers between microscopic and macroscopic scales, is used to obtain formulas that allow the calculation of macroscopic stresses, avoiding the use of numerical integration algorithms. The MPP-DF is implemented using the conventional finite element method (FEM) through the use of control nodes on the boundary conditions in the unit cell (CU). This new technique is applied, first, to the evaluation of the elastic behavior of a FRP with damage in the fiber-matrix interface. In order to evaluate the transverse Young's modulus when the FRP is subjected to tensile and compression stresses, damage is represented in a three-dimensional CU including a contact model. Analytical equations are obtained for the elastic properties of a unidirectional FRP with damage through the least squares method and are used in a plate model on the macroscopic scale. This allows a macroscopic analysis including microscopic variables. The MPP-DF is applied, second, to the simulation of the micro-buckling phenomenon in unidirectional FRP. An extensive parametric study is carried out by modifying the fiber volume fraction, the misalignment of the fibers and the yield stress of the matrix, among others. It was found that the micro-buckling is dominated by the fiber volume fraction and by the yield stress of the matrix only for small fiber misalignment angles, whereas for large angles the yield stress of the matrix is the dominant parameter in the phenomenon. Through the applications of MPP-DF to the cases mentioned above it is shown that the developed methodology is an appropriate tool to evaluate the mechanical behavior of the FRP.

**Keywords:** Computacional Micromechanics, Fiber Reinforced Polymers, Finite Strains.



# Resumo

Os materiais compósitos de matriz polimérica reforçados com fibra (FRPs) são cada vez mais utilizados na indústria devido à sua excelente relação resistência-peso e rigidez em peso. Seu uso depende, entre outros aspectos, da certeza no conhecimento de seu comportamento mecânico. A micromecânica computacional fornece uma estrutura apropriada para a análise em que, a uma escala microscópica, os detalhes da microestrutura são levados em conta e um material homogêneo equivalente é representado na escala macroscópica. Nesta tese desenvolve-se uma metodologia para o cálculo das tensões macroscópicas baseada nos modelos de micromecânica computacional com microestruturas submetidas a deformações finitas (MPP-DF) com materiais constituintes não lineares. Utilizou-se o de Hill-Mandel, ou a igualdade de potência entre escalas microscópicas e macroscópicas, para obter fórmulas que permitem o cálculo das tensões macroscópicas, evitando o uso de algoritmos de integração numérica. O MPP-DF é implementado usando o método convencional de elementos finitos (FEM) através do uso de nós de controle nas condições de contorno na célula unitária (UC). Aplica-se a técnica, em primeiro lugar, na avaliação do comportamento elástico de um FRP com dano na interface fibra-matriz. Na avaliação do módulo de Young transversal, utilizou-se um modelo de dano com contato. Obtêm-se equações analíticas para as propriedades elásticas de FRP unidirecional com danos através do método dos mínimos quadrados e, seguidamente, são utilizadas em um modelo de placa na escala macroscópica. Isto permite uma análise macroscópica incluindo variáveis microscópicas. O MPP-DF é aplicado, em segundo lugar, à simulação do fenômeno de micro flambagem em FRP unidirecional. Realizou-se um extenso estudo paramétrico modificando a fração de volume, o desalinhamento das fibras e a tensão de cedência da matriz, entre outros. Encontrou-se que o micro flambagem é dominado pela fração de volume da fibra e tensão de cedência da matriz apenas para pequenos ângulos de desalinhamento das fibras, enquanto que para ângulos grandes a tensão de cedência da matriz é o parâmetro dominante no fenômeno. Através das aplicações da MPP-DF aos casos mencionados acima, é mostrado que a metodologia desenvolvida é uma ferramenta adequada para avaliar o comportamento mecânico dos FRPs.

**Palavras-chave:** Micromecânica Computacional, Polímeros Reforçados com Fibra, Deformações Finitas.



# Índice General

<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Índice General</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvi</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>Símbolos, Acrónimos y Siglas</b>	<b>xxii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1.    Introducción .....	1
1.2.    Motivación .....	4
1.3.    Objetivos .....	6
1.4.    Alcance.....	6
1.5.    Contenido de esta tesis .....	7
<b>2. Aspectos fundamentales de la micromecánica computacional</b>	<b>9</b>
2.1.    Introducción .....	9
2.2.    Consideraciones generales .....	9
2.3.    Condiciones de borde .....	14
2.4.    Post-procesos para cálculo de tensiones macroscópicas .....	16
<b>3. Cálculo de tensiones macroscópicas</b>	<b>21</b>
3.1.    Introducción .....	21
3.2.    Geometría de celdas unitarias .....	22
3.3.    Condiciones de borde periódicas.....	23
3.4.    Formulación de la metodología propuesta para el cálculo de tensiones .....	26
3.5.    Resultados para corte simple.....	31
3.5.1.    Problema en pequeñas deformaciones .....	32
3.5.2.    Comparación con modelo analítico en deformaciones finitas.....	33
3.5.3.    Comparación con integración numérica en deformaciones finitas.....	36

---

3.6.	Resultados para estado uniaxial.....	38
3.6.1.	Comparación con modelo analítico en deformaciones finitas .....	38
3.6.2.	Comparación con integración numérica en deformaciones finitas .....	41
3.6.3.	Problemas de CU con fisuras internas .....	42
3.6.4.	Problemas que involucran contacto en la CU.....	44
3.6.5.	Problemas que involucran plasticidad en la CU.....	46
3.7.	Comentarios finales .....	49
<b>4.</b>	<b>Evaluación de propiedades elásticas en GFRP con daño en la interfaz</b> .....	<b>51</b>
4.1.	Introducción.....	51
4.2.	Revisión bibliográfica.....	52
4.3.	Metodología.....	55
4.4.	Celdas unitarias con daño en la interfaz fibra-matriz .....	57
4.5.	Resultados y discusión.....	60
4.5.1.	Verificación para casos extremos .....	60
4.5.2.	Estudios paramétricos.....	64
4.5.3.	Formas analíticas de las constantes elásticas.....	66
4.6.	Aplicación a la teoría clásica de laminado .....	74
<b>5.</b>	<b>Pandeo de fibras en GFRP unidireccionales</b> .....	<b>79</b>
5.1.	Introducción.....	79
5.2.	Revisión bibliográfica.....	80
5.3.	Metodología.....	82
5.3.1.	Cálculo de tensiones macroscópicas.....	83
5.4.	Geometría de ondulación de fibra y celda unitaria curva .....	86
5.5.	Resultados y discusión.....	88
5.5.1.	Trayectorias de equilibrio.....	89
5.5.2.	Tensiones en los constituyentes.....	96
5.5.3.	Estudios paramétricos.....	99
5.5.4.	Comparación con un modelo simplificado .....	105

---

<b>6. Conclusiones</b>	<b>109</b>
6.1. Introducción .....	109
6.2. Conclusiones .....	109
6.3. Aportes originales .....	112
6.4. Posibilidades para trabajo futuro.....	113
<b>Referencias</b>	<b>115</b>
<b>Apéndice A: Condiciones de borde periódicas mediante restricciones multipunto</b>	<b>125</b>
<b>Apéndice B: Expresiones analíticas para propiedades elásticas de lámina</b>	<b>130</b>

# Índice de Tablas

<b>Tabla 3.1.</b> Comparación de módulo de corte $G_{12}$ .....	33
<b>Tabla 3.2.</b> Propiedades materiales .....	37
<b>Tabla 4.1.</b> Desplazamiento en el centro de la placa, normalizado con respecto al valor sin daño $w^0 = 2.107$ mm, para regiones de diferentes tamaños y con diferentes ubicaciones. Los parámetros de daño microscópicos son $l_d = p_d = 1$ . .....	76
<b>Tabla 4.2.</b> Desplazamiento en el centro de la placa, normalizado con respecto al valor sin daño $w^0 = 2.107$ mm, para regiones de diferentes tamaños y con diferentes ubicaciones. Los parámetros de daño microscópicos son $l_d = 0.4$ y $p_d = 0.7$ .....	77
<b>Tabla 5.1.</b> Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga A (sin restricción) y $\sigma_y = 48.26$ MPa. ....	92
<b>Tabla 5.2.</b> Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga A (sin restricción) y $\sigma_y = 100$ MPa. ....	93
<b>Tabla 5.3.</b> Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga B (con restricción) y $\sigma_y = 48.26$ MPa. ....	94
<b>Tabla 5.4.</b> Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga B (con restricción) y $\sigma_y = 100$ MPa. ....	95
<b>Tabla 5.5.</b> Tensiones límite normalizadas con respecto a las cargas de bifurcación de Rosen [39]. Resultados para $\alpha = 0.01^\circ$ . ....	107
<b>Tabla A.1.</b> Vectores $\mathbf{P}_v$ de diferentes pares de puntos de caras de la celda unitaria octaedro truncado. ....	128
<b>Tabla A.2.</b> Vectores $\mathbf{P}_v$ de diferentes pares de puntos de aristas de la celda unitaria octaedro truncado. ....	128
<b>Tabla A.3.</b> Vectores $\mathbf{P}_v$ de diferentes pares de puntos de vértices de la celda unitaria octaedro truncado.....	129
<b>Tabla A.4, A.5 y A.6.</b> Vectores $\mathbf{P}_v$ de diferentes pares de puntos de caras, aristas y vértices de la celda unitaria prismática y curva.....	129
<b>Tabla B.1.</b> Coeficientes de ecuaciones para módulos de corte y coeficientes de Poisson. ....	131
<b>Tabla B.2.</b> Coeficientes de ecuaciones para módulos transversales.....	131



# Índice de Figuras

<b>Figura 1.1:</b> Laminado de material compuesto reforzado con fibras: (a) láminas unidireccionales, (b) laminado. ...	2
<b>Figura 1.2:</b> Escalas de análisis en modelos multiescala: (a) escala microscópica, (b) escala macroscópica. ....	4
<b>Figura 2.1:</b> Ejemplo de elemento de volumen representativo con detalles de la microestructura. ....	11
<b>Figura 3.1:</b> Vectores de Periodicidad en celdas unitarias de un compuesto reforzado con fibras: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado. ....	23
<b>Figura 3.2:</b> Vista frontal de las celdas unitarias utilizadas: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado. ....	23
<b>Figura 3.3:</b> Ejemplo de puntos correspondientes en un material periódico. ....	24
<b>Figura 3.4:</b> Malla de octaedro truncado para el caso de pequeñas deformaciones. ....	33
<b>Figura 3.5:</b> Mallas para ordenamiento de fibra cuadrado Sq y $V_f = 30\%$ : (a) configuración inicial, (b) configuración deformada para $F_{23} = 1$ . ....	36
<b>Figura 3.6:</b> Tensión de Cauchy en [MPa] para compuesto hiperelástico bajo corte transversal simple: comparación entre MPP-DF y modelo analítico. ....	36
<b>Figura 3.7:</b> Mallas para ordenamiento de fibra hexagonal Hx y $V_f = 60\%$ : (a) configuración inicial, (b) configuración deformada con $F_{23} = 1$ . ....	38
<b>Figura 3.8:</b> Tensión de Cauchy en [GPa] para compuesto hiperelástico bajo corte transversal simple: Comparación entre MPP-DF e integración numérica. ....	38
<b>Figura 3.9:</b> Tensión de Cauchy en [GPa] para compuesto hiperelástico bajo estado uniaxial de tensión: comparación entre MPP-DF y el modelo analítico. ....	41
<b>Figura 3.10:</b> Tensión de Cauchy en [GPa] para compuesto hiperelástico bajo estado tensional uniaxial: Comparación entre MPP-DF e integración numérica. ....	42
<b>Figura 3.11:</b> Celda unitaria de un FRP con una fisura con forma de arco de circunferencia en la interfaz fibra-matriz. ....	43
<b>Figura 3.12:</b> Componente del tensor constitutivo macroscópico $C_{2222}$ , normalizada con respecto a $C_{2222}^M$ , obtenido mediante la MPP-DF y Kushch <i>et al.</i> [30] en función de la fracción de volumen de fibra $V_f$ . Se considera ordenamiento cuadrado (Sq) y diversos valores del parámetro de daño en el perímetro $p_d$ . ....	44
<b>Figura 3.13:</b> Celdas unitarias de material compuesto con daño completo en la interfaz fibra-matriz bajo: (a) tracción y (b) compresión. ....	44
<b>Figura 3.14:</b> Tensión de Cauchy $\sigma_{33}$ [ $\times 10^{-3}$ GPa] en la celda unitaria sometida a compresión. ....	45
<b>Figura 3.15:</b> Tensión de Cauchy $\sigma_{22}$ [ $\times 10^{-3}$ GPa] en la celda unitaria sometida a tracción. ....	46
<b>Figura 3.16:</b> Módulo de Young transversal $E_{33}$ , normalizado con respecto al módulo de la matriz $E^M$ , en función de la fracción de volumen de fibra, Teng [37]. Resultados para compuestos con unión perfecta y con despegue en la interfaz fibra-matriz bajo estado tensional uniaxial de tracción y de compresión. ....	46
<b>Figura 3.17:</b> Tensión de Cauchy macroscópica en la dirección 3 normalizada con la tensión de fluencia de la matriz $\sigma_y^M$ . Comparación entre los resultados de la MPP-DF y los de Michel <i>et al.</i> [76] para un compuesto periódico hexagonal con matriz y fibras elasto-plásticas perfectas. ....	47

<b>Figura 3.18:</b> Tensiones de Cauchy $\sigma_{33}$ expresadas en [GPa $\times 10^{-3}$ ] correspondientes a los estados de deformación A, B, C y D indicados en la Figura 3.17. ....	48
<b>Figura 4.1:</b> Ejemplos de mallas de elementos finitos en celdas unitarias: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado. ....	57
<b>Figura 4.2:</b> Posición y dimensiones de las celdas unitarias con daño en la interfaz fibra-matriz: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado.....	58
<b>Figura 4.3:</b> Distribución de daño provista por las dos celdas unitarias: octaedro truncado y prisma. ....	60
<b>Figura 4.4:</b> Densificación localizada en celdas unitarias con forma de prisma: (a) celda unitaria sin cargas, (b) estado deformado de celda unitaria sometida a tracción en dirección 2 con los desplazamientos aumentados 200 veces, (c) vista en corte de mallado, (d) detalle de un extremo de fisura.....	61
<b>Figura 4.5:</b> Comparación de microestructuras de modelos de materiales sin daño. Ambos modelos representan el mismo material: (a) modelo bidimensional (2D) y (b) modelo tridimensional (3D). ....	62
<b>Figura 4.6:</b> Comparación de microestructuras de modelos de materiales con daño. Ambos modelos representan el mismo material: (a) modelo bidimensional (2D) y (b) modelo tridimensional (3D). ....	62
<b>Figura 4.7:</b> Módulo de corte transversal $G_{23}$ para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra $V_f$ con $p_d = 1$ y ordenamiento Sq. ....	62
<b>Figura 4.8:</b> Módulo de corte transversal $G_{23}$ para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra $V_f$ con $p_d = 0.5$ y ordenamiento Sq. ....	63
<b>Figura 4.9:</b> Módulo de Young transversal en compresión $E_{3C}$ para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra $V_f$ con $p_d = 1$ y ordenamiento Sq. ....	63
<b>Figura 4.10:</b> Módulo de Young transversal en compresión $E_{3C}$ para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra $V_f$ con $p_d = 0.5$ y ordenamiento Sq. ....	64
<b>Figura 4.11:</b> Influencia de la distribución de daño en el módulo de Young transversal normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente a un material sin daño; se considera ordenamiento Hx y $V_f = 50\%$ . ....	65
<b>Figura 4.12:</b> Influencia de la relación de aspecto $\beta$ en el módulo de Young transversal normalizado con respecto al módulo de la matriz para un compuesto con ordenamiento Sq, $V_f = 70\%$ , y $l_d = 0.99$ . ....	65
<b>Figura 4.13:</b> Influencia del ordenamiento de fibra en el módulo transversal normalizado con respecto a los valores de módulos correspondientes a materiales sin daño para cada ordenamiento de fibras. Resultados para $V_f = 60\%$ , y $\beta = 5$ . ....	66
<b>Figura 4.14:</b> Influencia de la fracción de volumen de fibra en el módulo transversal normalizado con respecto al módulo de la matriz. Resultados para ordenamiento Sq, $p_d = 1$ , and $\beta = 5$ . ....	67
<b>Figura 4.15:</b> Módulo de Young $E_{3C}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente a un material sin daño del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f = 70\%$ y $\beta = 5$ . ....	68
<b>Figura 4.16:</b> Módulo de Young $E_{2C}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente a un material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f = 70\%$ y $\beta = 5$ . ....	68
<b>Figura 4.17:</b> Módulo de Young $E_{2T}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f = 70\%$ y $\beta = 5$ . ....	69

<b>Figura 4.18:</b> Módulo de Young $E_{3T}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	69
<b>Figura 4.19:</b> Módulo de corte $G_{23}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	70
<b>Figura 4.20:</b> Módulo de corte $G_{13}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	70
<b>Figura 4.21:</b> Módulo de corte $G_{12}$ normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	71
<b>Figura 4.22:</b> Relación de Poisson $v_{23C}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	71
<b>Figura 4.23:</b> Relación de Poisson $v_{23T}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	72
<b>Figura 4.24:</b> Relación de Poisson $v_{23T}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	72
<b>Figura 4.25:</b> Relación de Poisson $v_{21C}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	73
<b>Figura 4.26:</b> Relación de Poisson $v_{21T}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	73
<b>Figura 4.27:</b> Relación de Poisson $v_{31C}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	74
<b>Figura 4.28:</b> Relación de Poisson $v_{31T}$ normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño $l_d$ y $p_d$ con ordenamiento Sq, $V_f=70\%$ y $\beta=5$ .	74
<b>Figura 4.29:</b> Placas con regiones dañadas de distintos tamaños y diferentes ubicaciones. Placa cuadrada de lado $a = 2$ m. (a): región dañada de tamaño $a/4 \times a/4$ ubicada en el centro de la placa, (b) región dañada de tamaño $a/2 \times a/2$ ubicada en el centro de la placa, (c) región dañada de tamaño $a/4 \times a/4$ ubicada en una esquina de la placa, (d) región dañada de tamaño $a/2 \times a/2$ ubicada en una esquina de la placa.	76
<b>Figura 4.30:</b> Desplazamiento en el centro de la placa, normalizado con respecto al valor sin daño $w^0 = 2.107$ mm, en función de los parámetros de daño $p_d$ y $l_d$ .	77

<b>Figura 4.31:</b> Desplazamiento en dirección $z$ en la placa expresado en [mm]. Región dañada de tamaño $a/2 \times a/2$ ubicada en el centro de la placa. Ambas láminas [0/90] están dañadas con valores de los parámetros de daño en la interfaz fibra-matriz $l_d = 1$ y $p_d = 1$ .....	78
<b>Figura 5.1:</b> (a): Dimensiones de celda unitaria. (b): Secciones transversales (ordenamiento de fibras). (c) Mallado de celdas unitarias curvas. ....	86
<b>Figura 5.2:</b> Líneas de ondulación: (a) ondulación bidimensional (2D), (b) ondulación tridimensional (3D).....	88
<b>Figura 5.3:</b> Trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 4 en función del ángulo de desalineamiento $\alpha$ . Resultados para $\sigma_y = 48.26$ MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	90
<b>Figura 5.4:</b> Detalle de trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 4 en función del ángulo de desalineamiento $\alpha$ . Resultados para $\sigma_y = 48.26$ MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	91
<b>Figura 5.5:</b> Tensión límite en función de la relación $\beta = L_f/D_f$ . Resultados para casos de carga restringido B, $\sigma_y = 48.26$ MPa, imperfección 3D, ordenamiento Hx (Grupos 1, 7, 13 y 19). ....	93
<b>Figura 5.6:</b> Detalle de trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 19 en función del ángulo de desalineamiento $\alpha$ . (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.....	94
<b>Figura 5.6 (continuación):</b> Detalle de trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 19 en función del ángulo de desalineamiento $\alpha$ . (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	95
<b>Figura 5.7:</b> Tensiones de Cauchy macroscópicas para casos 2A y 4A. ....	96
<b>Figura 5.8:</b> Tensiones de von Mises en [ $10^{-3}$ GPa] para la matriz en el caso 4A ( $V_f = 70\%$ , 2D, Sq), $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c y d corresponden a los puntos de la Figura 5.7. ....	96
<b>Figura 5.8 (continuación):</b> Tensiones de von Mises en [ $10^{-3}$ GPa] para la matriz en el caso 4A ( $V_f = 70\%$ , 2D, Sq), $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c y d corresponden a los puntos de la Figura 5.7.....	97
<b>Figura 5.9:</b> Tensiones de von Mises en [ $10^{-3}$ GPa] en la matriz. Caso 2A ( $V_f = 70\%$ , 3D, Sq), $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c, d, e y f corresponden a los puntos de la Figura 5.7. ....	97
<b>Figura 5.9 (continuación):</b> Tensiones de von Mises en [ $10^{-3}$ GPa] en la matriz. Caso 2A ( $V_f = 70\%$ , 3D, Sq), $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c, d, e y f corresponden a los puntos de la Figura 5.7. ....	98
<b>Figura 5.10:</b> Tensiones de Cauchy $\sigma_{11}$ en [ $10^{-3}$ GPa] para la fibra en el caso 4A ( $V_f = 70\%$ , 2D, Sq), $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c y d corresponden a los puntos de la Figura 5.7. ....	98
<b>Figura 5.11:</b> Tensiones de Cauchy $\sigma_{11}$ en [ $10^{-3}$ GPa] para la fibra en el caso 2A ( $V_f = 70\%$ , 3D, Sq), $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c, d, e y f corresponden a los puntos de la Figura 5.7. ....	99
<b>Figura 5.12:</b> Influencia de ordenamiento de fibras cuadrado (Sq) y hexagonal (Hx) sobre el factor $\eta$ , para imperfecciones 3D (Grupos 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19 y 20) con $\sigma_y = 48.26$ MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	100
<b>Figura 5.13:</b> Sensibilidad de micro pandeo. Factor $\eta$ para ondulación 3D y ordenamiento Hx (Grupos 1, 7, 13 y 19) con $\sigma_y = 48.26$ MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción... 101	
<b>Figura 5.14:</b> Influencia del tipo de imperfección: bidimensional (2D) y tridimensional (3D). Factor $\eta$ para Grupos 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19 y 21 (ordenamiento Hx y $\sigma_y = 100$ MPa). (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	102

<b>Figura 5.15:</b> Influencia del ángulo $\delta$ (orientación del plano de la ondulación 2D). Factor $\eta$ para Grupos 3, 5, 9, 11, 15, 17, 21 y 23 (ondulación 3D, $\sigma_y = 48.26$ MPa y ordenamiento Hx) para $\delta = 0^\circ$ y $30^\circ$ . (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	103
<b>Figura 5.16:</b> Influencia de la resistencia de la matriz en la tensión límite para los casos 4 y 22 (imperfección 2D y ordenamiento Sq) (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	104
<b>Figura 5.17:</b> Influencia de la resistencia de la matriz en el factor de reducción $\eta$ para los casos 4, 16 y 22 (imperfección 2D y ordenamiento Sq) (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	104
<b>Figura 5.17 (continuación):</b> Influencia de la resistencia de la matriz en el factor de reducción $\eta$ para los casos 4, 16 y 22 (imperfección 2D y ordenamiento Sq) (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	105
<b>Figura 5.18:</b> Comparación con resultados analíticos. Curvas de sensibilidad para Grupos 11 y 1 (ondulación 3D y ordenamiento Hx) y ecuación analítica por Barbero [1] (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción. ....	106
<b>Figura A.1:</b> Identificación de caras, aristas y vértices en una celda unitaria prismática. ....	125
<b>Figura A.2:</b> Identificación de caras, aristas y vértices en una celda unitaria curva. ....	125
<b>Figura A.3:</b> Identificación de caras, aristas y vértices en una celda unitaria octaedro truncado. ....	126
<b>Figura A.4:</b> Vectores $\mathbf{P}_v$ en aristas E1, E4 y E25. ....	126

## Símbolos, Acrónimos y Siglas

EVR	Elemento de volumen representativo.
MEF	Método de elementos finitos
SEM	Microscopía de barrido de electrones (por sus siglas en inglés).
CU	celda unitaria
GFRP	Plástico reforzado con fibra de vidrio (por sus siglas en inglés).
XCT	Tomografía computada de rayos X (por sus siglas en inglés).
CBP	Condiciones de bordes periódicas
TCL	Teoría clásica de laminado
FRP	Polímero reforzado con fibras (por sus siglas en inglés)
DNA	Análisis numérico directo (por sus siglas en inglés)
DL	Condiciones de borde de desplazamiento lineales
TU	Condiciones de borde de tracción uniforme
CBP	Condiciones de borde periódicas
MRC	Condiciones de borde de mínima restricción cinemática
MPP-DF	Metodología de post-proceso para deformaciones finitas
Sq	Ordenamiento de fibras cuadrado
Hx	Ordenamiento de fibras hexagonal
$(\cdot)^m$	Variable perteneciente al dominio microscópico
$(\cdot)^F$	Característica perteneciente a la fibra
$(\cdot)^M$	Característica perteneciente a la matriz
$\nabla(\cdot)$	Operador gradiente
$\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{ij}$	Tensor de pequeñas deformaciones
$V$	Volumen del dominio microscópico en el estado inicial
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	Tensor de tensiones de Cauchy
$\mathbf{u}(\mathbf{X}), u_i$	Vector desplazamiento de un punto de coordenadas ( $\mathbf{X}$ )
$w_i$	Desplazamiento de nodo de control
$\mathbf{X}$	Coordenadas de referencia
$\mathbf{x}$	Coordenadas actuales
$\mathbf{t}(\mathbf{X})$	Vector tracción
$\mathbf{n}(\mathbf{X})$	Normal saliente a una superficie
$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$	Vectores de periodicidad de celdas unitarias
$V_f$	Fracción de volumen de fibra
$R_f$	Radio de fibra
$l_f$	Longitud de fibra
$p_d$	Parámetro de daño en el perímetro de la sección transversal de la fibra
$l_d$	Parámetro de daño a lo largo de la longitud de la fibra
$\beta$	Relación de aspecto de celda unitaria
$\mathbf{F}$	Gradiente de deformación
$J$	Determinante del gradiente de deformación $\mathbf{F}$

---

$\dot{\mathbf{F}}$	Derivada respecto al tiempo del gradiente de deformación
$\mathbf{P}$	Primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff
$P_{int}$	Potencia interna o tasa de trabajo mecánico interno
$P_{ext}$	Trabajo externo
$\lambda_i$	Estiramiento principal
$\alpha_u$	Factor unitario de homogeneización de unidades
$W$	Densidad de energía de deformación
$E_f$	Módulo de elasticidad de Young de la fibra
$E_m$	Módulo de elasticidad de Young de la matriz
$\nu_f$	Coefficiente de Poisson de la fibra
$\nu_m$	Coefficiente de Poisson de la matriz
$G_{12}, G_{13}$	Módulos elásticos de corte axial de un material ortótropo
$G_{23}$	Módulos elásticos de corte transversal de un material ortótropo
$E_{2T}, E_{3T}$	Módulos transversales elásticos a tracción
$E_{2C}, E_{3C}$	Módulos transversales elásticos a compresión
$F_6$	Tensión de falla a corte axial
$\sigma_y$	Tensión de fluencia de la matriz
$\sigma_L$	Tensión límite de micropandeo
$\alpha$	Ángulo de desalineamiento máximo de fibra
$\delta$	Ángulo de orientación del plano del defecto sinusoidal





## Introducción

### 1.1. Introducción

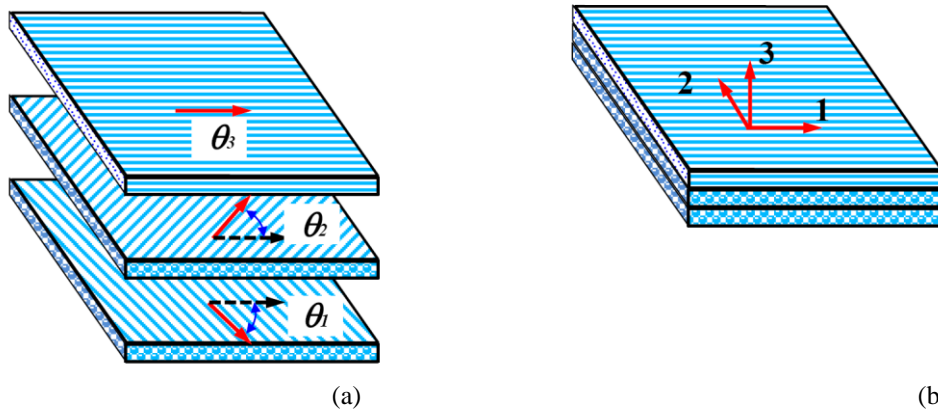
En la actualidad, los materiales compuestos, o simplemente compuestos, son reconocidos por la mayoría de las personas y forman parte de diversas estructuras de la vida cotidiana, ya sean embarcaciones, estructuras civiles, aviones, artículos para deportes, etc. Un material compuesto está formado por más de un material con el fin de obtener un nuevo material con propiedades mejoradas [1]. Los materiales que forman un compuesto reciben también los nombres de fases o constituyentes microscópicos. Son muchos los materiales que se pueden catalogar como compuestos, incluyendo materiales naturales, como la madera o tejidos biológicos, el hormigón empleado en construcciones civiles y compuestos cerámicos aplicados en turbinas de aeronaves para soportar altas temperaturas, entre otros. Una de las características comunes en la mayoría de los compuestos es la existencia de un material que constituye la matriz y otro material que actúa como refuerzo. La matriz provee la forma geométrica a la pieza final, transfiere cargas al refuerzo y lo protege contra ataques de agentes externos presentes en el medio ambiente en el que se encuentra, mientras que el material de refuerzo provee rigidez y resistencia al material compuesto. Esta tesis se focaliza en materiales formados por una matriz polimérica reforzada con fibras. Las fibras son el refuerzo más resistente y esto se debe a que un material en forma de fibra tiene una menor cantidad de defectos que cuando el mismo material toma otras formas. Generalmente, los materiales compuestos son fabricados como un ensamble de capas o láminas, con las fibras orientadas a distintos ángulos, para formar un laminado (Figura 1.1).

Debido a la gran variedad de compuestos que existen su clasificación no es sencilla, pero se pueden mencionar los principales factores que determinan una clasificación:

- (i) La matriz: polimérica, metálica y cerámica.
- (ii) El refuerzo:
  - fibras largas: unidireccional, bidireccional, orientación aleatoria.

- fibras cortas: orientación aleatoria, orientación preferencial.
- partículas o pastillas (*whiskers*): orientación aleatoria, orientación preferencial.

(iii) Configuración de laminado: unidireccional, laminado.



**Figura 1.1:** Laminado de material compuesto reforzado con fibras: (a) láminas unidireccionales, (b) laminado.

Las principales ventajas tradicionalmente reconocidas de los materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras (FRP, por sus siglas en inglés) son sus excelentes relaciones resistencia-peso y rigidez estructural-peso comparadas con las de otros materiales. Estas características siguen motivando la aplicación de FRP en el transporte en general y en la industria aeroespacial en particular, entre otros sectores [1]. En otras aplicaciones se aprovechan propiedades como por ejemplo la resistencia a la corrosión, la reducción de número de partes, la transparencia a ondas electromagnéticas, la mayor vida útil de fatiga, la alta o baja conductividad térmica, la baja expansión térmica, la aislación térmica o acústica, la protección contra el efecto erosivo de gases de propulsión, etc. [2]. Estas propiedades se consiguen principalmente adecuando la microestructura del material compuesto [3].

Las técnicas experimentales para el análisis de las microestructuras resultan de gran importancia. A través del tratamiento de imágenes obtenidas mediante microscopía de barrido electrónico (SEM, por sus siglas en inglés) se evalúan variables tales como la fracción de volumen de refuerzo, la geometría de las inclusiones, las dimensiones de poros, el tamaño de fisuras, etc. La tomografía computada de rayos X (XCT, por sus siglas en inglés) se ha utilizado para llevar a cabo un escaneo tridimensional de la microestructura capturando detalles tales como la longitud y orientación de fibras (ver por ejemplo,

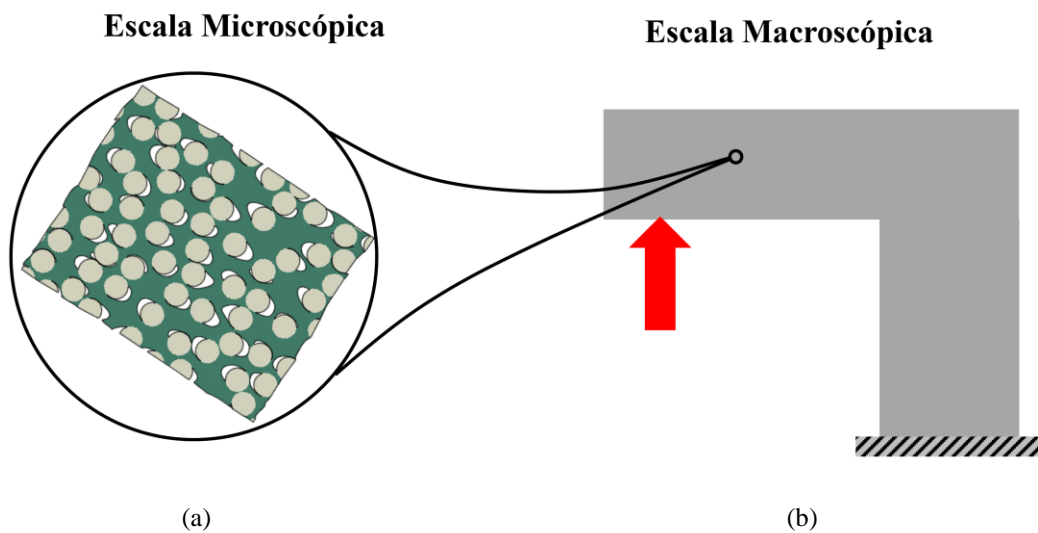
[4] y [5]). También existen técnicas tales como la indentación a nivel micrométrico y nanométrico para evaluar propiedades elásticas y plásticas a nivel microestructural [6].

En términos de mercado, el sector aeronáutico es el sector más importante en el que se emplean estos compuestos. En aeronaves como el Boeing 787 y el Airbus A350 XWB el material compuesto constituye alrededor del 50% de su peso [7]. Ambas compañías Boeing (Chicago, Illinois) y Airbus (Toulouse, Francia) pronostican construir más de 33.000 nuevas aeronaves en los próximos 20 años [8]. Las aplicaciones de materiales compuestos en ingeniería civil varían desde combinaciones de materiales convencionales con FRP a estructuras fabricadas completamente de FRP ([9], [10] y [11]). El mercado de las construcciones civiles aún está en crecimiento, por ejemplo, en Estados Unidos se realizaron varios cambios regulatorios sobre el uso de materiales FRP en reemplazo de materiales convencionales [12]. En el campo de la ingeniería mecánica los compuestos no están tan establecidos como en los campos antes mencionados. Sin embargo, desde hace ya varios años el 75% de la producción mundial de fibras de carbono es consumido por la industria automovilística y la industria energética; se espera que este sector sea el de mayor crecimiento en el consumo de fibras de carbono [13]. En el contexto local, se está incentivando la investigación y desarrollo tecnológico de materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras para su inserción en el sector autopartista [14]. Entre las motivaciones del uso de FRP en vehículos se destaca el ahorro de energía ya que el 75% del consumo de combustible se debe directamente al peso del vehículo [15].

Entre las desventajas de los FRP se puede mencionar que el costo de la materia prima necesaria para su manufactura es relativamente alto [16]. La rigidez y la baja resistencia en la dirección transversal a la dirección longitudinal de la fibra, que involucran principalmente a las propiedades de la matriz, pueden constituir también un punto débil en los FRP. Otra característica de los FRP que suele desalentar a los diseñadores es que la matriz polimérica y las fibras suelen estar sometidas a degradación debida a agentes ambientales diversos, con consecuencias devastadoras sobre las propiedades mecánicas finales [17]. Además, los modos de falla de un FRP son específicos de estos materiales, y por lo tanto, la correcta predicción de la ocurrencia de daño y de su evolución hasta la falla final del compuesto constituye un gran desafío. Incluso en la actualidad existen modelos de falla en competencia [18].

Existen dos enfoques principales para el modelado del comportamiento mecánico del FRP: (i) el modelado fenomenológico y (ii) el modelado multiescala [19]. El modelado fenomenológico es el más

comúnmente usado en la industria debido a su simplicidad pero tiene la desventaja de no poder representar comportamientos complejos [1]. Un enfoque más sofisticado es el estudio multiescala en el que se tiene en cuenta, por un lado, la microestructura del material compuesto y su evolución en un dominio o escala microscópica y, por otro lado, el problema global de la pieza con las cargas en un dominio denominado escala macroscópica (Figura 1.2) [20]. Esta técnica tiene la capacidad de considerar la interacción entre los componentes del FRP y de diferenciar la falla de cada componente [16]. Los mecanismos de deformación microscópicos también se pueden estudiar en detalle mediante este enfoque y, a su vez, éstos ayudan a la explicación del comportamiento macroscópico.



**Figura 1.2:** Escalas de análisis en modelos multiescala: (a) escala microscópica, (b) escala macroscópica.

## 1.2. Motivación

Reducir la cantidad de ensayos experimentales durante el desarrollo de una nueva estructura, o durante la evaluación del comportamiento de un elemento estructural bajo nuevas condiciones de servicio es una necesidad siempre presente en la ingeniería ya que de esta manera se reducen los costos y tiempos involucrados. Las técnicas computacionales son una buena alternativa para la predicción del comportamiento mecánico en estos casos y, por lo tanto, lograr la disminución de la cantidad de pruebas en condiciones de servicio ([19] y [3]).

Técnicas de simulación como la micromecánica computacional [3] permiten incluir un mayor nivel de detalle del fenómeno estudiado dando lugar a mejores predicciones tanto a nivel de la microestructura como a nivel macroscópico. Por ejemplo, esta técnica ayuda a la comprensión de los

mecanismos microestructurales de deformación y puede dar lugar al diseño de nuevos materiales como así también de nuevos métodos de predicción basados en los resultados de modelos multiescala [16]. Las capacidades de cálculo disponibles en la actualidad, en términos de hardware y de software, permiten la realización de este tipo de estudios computacionales que, en general, demandan muchos recursos computacionales y algoritmos especializados. Sin embargo, aún hoy se requiere simplificar los métodos de cálculo para una utilización más eficiente de los recursos disponibles.

Las técnicas para el cálculo de las tensiones macroscópicas en modelos de micromecánica computacional mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) implican, en ocasiones, el uso de recursos de almacenamiento computacional, como por ejemplo el almacenamiento del valor de las tensiones en muchos puntos del dominio microscópico ([21], [1]). Además, la implementación de estas técnicas es laboriosa en algunos casos. Si tales técnicas utilizaran menos recursos y se hicieran más sencillas de implementar, se podrían destinar tales recursos al estudio de problemas más detallados y se podrían implementar en códigos computacionales comerciales. Esto ayudará a que estas técnicas más avanzadas sean utilizadas en la industria. Pero esto sólo podrá llevarse a cabo a través de una mayor comprensión del rol de las variables puestas en juego en modelos de micromecánica computacional.

Por otro lado, en la predicción del comportamiento de los FRP también existen en la actualidad algunos aspectos a mejorar. Por ejemplo, en FRP de matriz epoxi y fibras de vidrio se ha detectado daño en la interfaz fibra-matriz cuando el compuesto es sometido a condiciones de humedad y temperatura elevadas ([22], [23] y [24]). Los modelos disponibles para la predicción del comportamiento elástico del FRP con este daño no tienen en cuenta detalles de las fisuras observables en la microestructura y, por lo tanto, se desconoce la influencia de tal daño ([25] - [37]), tanto en la escala microscópica como en las variables macroscópicas.

Otro ejemplo de comportamiento de FRP que requiere revisión es el fenómeno de micropandeo de fibras en FRP unidireccionales cuando se aplica un estado de compresión en la dirección de las fibras. Este fenómeno involucra la pérdida de capacidad de carga del material, por ello es importante identificar las variables que tienen influencia en dicha capacidad de carga [1]. Las técnicas de predicción de las tensiones límites de micropandeo están basadas en modelos bidimensionales donde se supone que la fibra forma una curva plana ([38] - [44]), sin tener en cuenta la posibilidad de que la fibra forme una curva tridimensional. Además, en ensayos experimentales [45] se reportan valores de desviación de fibras mayores a los que se evaluaron mediante modelos predictivos [46]. Surgen

entonces los interrogantes: ¿Se modifican las cargas de micropandeo al considerar a la fibra formando una curva tridimensional? ¿Cómo se modifica el fenómeno de micropandeo cuando el desalineamiento es tan grande como el reportado en ensayos experimentales? ¿Cómo intervienen las demás variables ante estas situaciones?

### 1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es:

- Explicar el comportamiento mecánico de materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras a partir de los detalles de su microestructura mediante técnicas computacionales.

Los objetivos específicos de esta tesis son:

- Establecer una relación entre las variables de la implementación computacional, como fuerzas y desplazamientos, y las variables macroscópicas en el contexto de la micromecánica computacional.
- Explicitar la dependencia entre las ecuaciones de las condiciones de borde periódicas de celdas unitarias en modelos de micromecánica computacional.
- Evaluar las propiedades elásticas de compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras de vidrio con daño en la interfaz fibra-matriz.
- Acoplar las escalas microscópica y macroscópica incluyendo el comportamiento elástico del material compuesto con daño en la interfaz fibra-matriz.
- Evaluar las cargas de micropandeo en compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras de vidrio considerando detalles de la microestructura.
- Identificar el papel de cada variable microestructural sobre la tensión de micropandeo.

### 1.4. Alcance

En esta tesis se utiliza el principio de Hill-Mandel ([47] y [48]) para establecer una relación entre las variables del modelo micromecánico y la tensión macroscópica. Para esto se emplea la micromecánica computacional incluyendo modelos de medios continuos y técnicas computacionales determinísticas. En los Capítulos 4 y 5 se estudian en detalle materiales compuestos de matriz epoxy

reforzados con fibras de vidrio (GFRP, por sus siglas en inglés). La microestructura analizada en el Capítulo 5 es aquella obtenida después del proceso de fabricación del compuesto y de curado de la matriz polimérica y, en el Capítulo 4 se utiliza la microestructura resultante de un proceso de envejecimiento por temperatura y humedad. La metodología empleada en esta tesis, llamada Micromecánica Computacional, pertenece a las técnicas de homogeneización denominadas de *primer orden*, en las que la información proveniente del nivel macroscópico incluye sólo al tensor de deformaciones (finitas o infinitesimales) despreciando el gradiente de dicho tensor [49], en contraste a las teorías de homogeneización de orden superior ([50], [51] y [52]).

### **1.5. Contenido de esta tesis**

Se dedica el Capítulo 2 al análisis de los modelos y técnicas existentes en la literatura sobre micromecánica computacional. Se describen los procedimientos y conceptos generales de dicha técnica en el contexto de la teoría de homogeneización. En la Sección 2.4 se presentan y discuten los procedimientos disponibles en la literatura para el cálculo de las tensiones macroscópicas en modelos de micromecánica computacional.

El Capítulo 3 está dedicado al desarrollo de una nueva metodología de post-proceso para el cálculo de tensiones macroscópicas bajo deformaciones finitas (MPP-DF) en modelos de micromecánica computacional. En esta parte de la tesis se obtienen las ecuaciones para el cálculo de la tensión macroscópica a partir de principios fundamentales de la teoría de homogeneización. Para el desarrollo de estas ecuaciones es vital contar con la implementación de las condiciones de borde del dominio microestructural, o celda unitaria (CU), expresadas en términos de nodos de control. En el Apéndice A se explica la implementación de las condiciones de borde periódicas para celdas unitarias con forma de prisma y de octaedro truncado utilizando nodos de control y la técnica llamada restricciones multipunto. Se comparan los resultados de la MPP-DF en diversos problemas con los resultados de modelos numéricos y analíticos reportados en la literatura.

En el Capítulo 4 se evalúan las propiedades elásticas de materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras largas con daño en la interfaz fibra-matriz. En este capítulo se presentan las CU tridimensionales y la metodología de cálculo empleadas. Se muestran y discuten los valores calculados de las propiedades elásticas de un material ortótropo equivalente. Los resultados logrados mediante micromecánica computacional se expresan en forma de expresiones analíticas,

detalladas en el Apéndice B, para las propiedades elásticas de un FRP con daño usando el método de los mínimos cuadrados. Finalmente, el acoplamiento de las escalas microscópica y macroscópica se logra a través de la utilización de las ecuaciones obtenidas en un modelo de elementos finitos de una placa laminada de FRP con daño en diferentes regiones de la misma.

En el Capítulo 5 se aborda el problema del micropandeo en compuestos reforzados con fibras sometidos a cargas de compresión en la dirección de la fibra utilizando la micromecánica computacional. Se detallan las características de la CU curva tridimensional empleada en este capítulo y se muestra que la metodología desarrollada en el Capítulo 3 también es aplicable a este tipo de problemas. Se presenta un estudio paramétrico sobre la tensión de micropandeo incluyendo variables tales como fracción de volumen de fibra, ángulo de desalineamiento de fibras, tensión de fluencia de la matriz polimérica, ordenamiento de fibras; también se modifican características tales como el tipo de ondulación de fibras (bidimensional y tridimensional) y el tipo de estado de carga de compresión (tensión uniaxial y deformación uniaxial). Se comparan los resultados obtenidos en este capítulo con los resultados de modelos disponibles en la literatura logrando, además, la identificación de la importancia de cada variable en la carga de micropandeo de fibras.

Las conclusiones obtenidas de esta tesis se exponen en el Capítulo 6. Por último, se enumeran los aportes originales y las líneas propuestas de futuras investigaciones.



# Aspectos fundamentales de la micromecánica computacional

### 2.1. Introducción

En este capítulo se presentan y analizan los conceptos fundamentales de la micromecánica computacional, técnica de homogeneización utilizada a lo largo de esta tesis, partiendo desde las consideraciones generales en la Sección 2.2, hasta las condiciones de borde empleadas en el problema de valores de frontera del elemento de volumen representativo (EVR) en la Sección 2.3. La Sección 2.4 se dedica a la revisión y discusión de las metodologías para el cálculo de tensiones macroscópicas reportadas en la literatura. Se hace énfasis en esta última sección ya que la temática tratada en la misma está íntimamente vinculada con el primer objetivo específico, establecido en la Sección 1.3.

### 2.2. Consideraciones generales

La teoría de homogeneización tiene por objetivo conocer el comportamiento macroscópico de un material, considerado heterogéneo en alguna escala de análisis, teniendo en cuenta el comportamiento de cada constituyente y su ordenamiento geométrico. Considérese el problema de una estructura construida de un material heterogéneo y solicitado a ciertas cargas. Para resolverlo se podría utilizar una técnica numérica para discretizar toda la geometría incluyendo detalles microestructurales en un único modelo; en la literatura esto se denomina análisis numérico directo (DNA por sus siglas en inglés). Sin embargo, este enfoque tiene algunos inconvenientes. Por un lado, las capacidades actuales de hardware y software restringen este tipo de análisis debido a: (i) la dificultad para representar a la vez la geometría de la microestructura y la pieza; (ii) el tiempo y recursos computacionales requeridos cuando el problema es no lineal. Por otro lado, si fuese resuelto tal modelo no sería sencillo interpretar la gran cantidad de información en los resultados [3]. Es así que surge la idea de separar el problema según las escalas de análisis (o niveles de análisis): en la escala microscópica se representa el comportamiento y la geometría de los constituyentes y en la escala macroscópica se representa la

estructura y las cargas. En general, se aplica la hipótesis de medio continuo a nivel de la escala microscópica de forma tal que el material de las fibras de un compuesto y el de su matriz son considerados mediante la teoría de sólidos continuos.

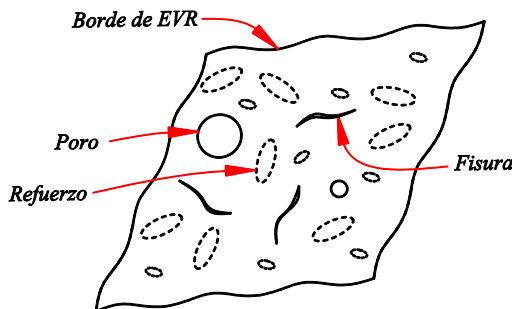
Dentro de la teoría de homogeneización se puede identificar, al menos, tres enfoques: (i) la homogeneización analítica o matemática, (ii) la homogeneización numérica, también denominada micromecánica computacional, y (iii) la homogeneización computacional [20]. En esta clasificación, el primer enfoque tiene el menor costo computacional mientras que los demás enfoques involucran mayores recursos computacionales. La homogeneización analítica está usualmente limitada a geometrías simples, modelos sencillos. Numerosos ejemplos de este enfoque se pueden encontrar en el libro de Nemat-Nasser y Hori [47]. En la literatura se encuentran los modelos más sencillos, como la regla de las mezclas, hasta llegar a los modelos más complejos, tales como las cotas (límites) de orden superior para constantes elásticas disponibles en Torquato [53]. Los resultados de este tipo de homogeneización suelen servir como referencia para evaluar los resultados de las técnicas más costosas en términos de recursos computacionales. En el otro extremo de la clasificación antes mencionada se encuentra la homogeneización computacional en la que se discretizan los dominios de ambas escalas microscópica y macroscópica. En este enfoque se resuelven los problemas de valores de frontera de las dos escalas en forma simultánea. Un importante caso particular de modelos de homogeneización computacional es el denominado FEM<sup>2</sup>, descrito en [46], en el que se emplea el método de elementos finitos en ambas escalas. La ventaja principal de la homogeneización computacional es que permite tener en cuenta la evolución de la microestructura durante el proceso de carga y la influencia de estos cambios en los resultados del nivel estructural. Este enfoque, el más costoso de los tres en términos de recursos computacionales requeridos, también se denomina análisis multiescala.

A lo largo de esta tesis se utiliza el enfoque llamado micromecánica computacional. En esta técnica, en primer lugar se obtiene el comportamiento del material mediante la simulación explícita de la microestructura y, en segundo lugar, se realiza la simulación de la estructura en el nivel macroscópico. La micromecánica computacional puede tener como objetivo la obtención del comportamiento macroscópico del material heterogéneo, funcionando como un modelo constitutivo. Pero también se pueden emplear para obtener los mecanismos de deformación en el nivel microscópico con el fin de mejorar la comprensión del fenómeno analizado.

En la micromecánica computacional se pueden identificar al menos dos etapas. La primera es la resolución del problema de valores de frontera mediante una técnica numérica tal como el método de elementos finitos. La segunda etapa es el post-proceso donde, a partir de los resultados obtenidos en la escala microscópica se calculan los valores buscados en la escala macroscópica, tales como tensiones macroscópicas. Dado que esta última etapa es de mayor interés en esta tesis, se dedica la Sección 2.4 a la revisión y análisis de las diferentes formas de post-proceso reportadas en la literatura.

Los ingredientes básicos para la teoría de homogeneización, para cualquiera de los enfoques antes mencionados, fueron listados por Nguyen *et al.* [20] y pueden identificarse en la mayoría de los trabajos relativos a dicha teoría. Entre los ingredientes necesarios se puede nombrar a los siguientes: el elemento de volumen representativo, el principio de separación de escalas, los teoremas de deformación promedio, el principio de Hill-Mandel, las condiciones de borde, la obtención de tensiones o propiedades constitutivas macroscópicas y el comportamiento de los constituyentes microscópicos. A continuación se da una breve descripción de cada uno de ellos. Las condiciones de borde se detallan en la Sección 2.3.

El EVR es una porción del material bajo estudio que incluye la información de la microestructura de dicho material. En el caso de los compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras, tal información incluye la geometría del material de refuerzo, el comportamiento mecánico de los constituyentes, la presencia de defectos, poros y fisuras, etc. (ver Figura 2.1). El EVR puede ser construido a partir de un relevamiento experimental mediante técnicas de tratamientos de imágenes (ver, por ejemplo, [6] y [54]), como así también en forma sintética a través de programas computacionales controlando algunos parámetros de la geometría [55].



**Figura 2.1:** Ejemplo de elemento de volumen representativo con detalles de la microestructura.

Un EVR está asociado a un punto del dominio de la escala macroscópica; en un modelo FEM<sup>2</sup> el EVR estará asociado a un punto de integración de Gauss. En el caso de materiales compuestos reforzados, la cantidad de partículas o fibras originan dominios microestructurales denominados celdas unitarias y celdas multipartícula [21]. La definición adecuada del tamaño de dicho dominio microscópico ha sido objeto de estudio a lo largo de los años y se ha mostrado que depende del fenómeno representado, de la propiedad analizada, de las condiciones de carga, de las condiciones de borde impuestas y de la localización de bandas de deformaciones, entre otros. En algunos casos, el comportamiento macroscópico del material puede calcularse como el promedio del comportamiento de varias celdas multipartícula; esto suele aplicarse en microestructuras con ordenamiento aleatorio de inclusiones. En este caso, el concepto de EVR es más amplio y está compuesto por varias celdas multipartícula. Por otro lado, en modelos simplificados, se suelen emplear celdas unitarias para representar el comportamiento macroscópico a las que, frecuentemente, se le aplican condiciones de borde periódicas.

Otra cuestión importante en la teoría de homogeneización es el principio de separación de escalas; mediante este principio se supone que el EVR utilizado es suficientemente pequeño como para que las variaciones a lo largo de la escala microscópica de las cantidades macroscópicas, tensión y deformación, puedan ser consideradas despreciables. Además, debido a esta separación, se desprecian los efectos de las fuerzas de inercia y fuerzas de cuerpo dado que no producen grandes cambios en los resultados a nivel microscópico y macroscópico.

El teorema de deformación promedio establece, para pequeñas deformaciones, la relación entre la deformación en la escala microscópica  $\varepsilon_{ij}^m$  y la deformación en la escala macroscópica  $\varepsilon_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^m dV \quad (2.1)$$

donde  $V$  es el volumen del EVR. Para grandes deformaciones se utilizan otras medidas de deformación, pero tienen una estructura similar. La ecuación (2.1) provee una de las vinculaciones entre las dos escalas.

El principio de Hill-Mandel establece que la potencia mecánica desarrollada en un instante de tiempo dado durante el proceso de deformación en el EVR, debe ser igual a la potencia mecánica

desarrollada en el punto del dominio de la escala macroscópica asociado ([47] y [48]). Tal igualdad se puede expresar de varias formas; una de ellas, válida para casos de grandes deformaciones, se utiliza en el Capítulo 3. En algunos modelos, utilizando el principio de Hill-Mandel y condiciones de borde que cumplan con el teorema de la deformación promedio, se puede obtener la forma de la ecuación para el cálculo de la tensión asociada (ver ecuación (3) en [20]). Por ejemplo, para pequeñas deformaciones la tensión en la escala macroscópica  $\sigma_{ij}$  se expresa a partir de la tensión en la escala microscópica  $\sigma_{ij}^m$  como

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^m dV \quad (2.2)$$

En algunos modelos de homogeneización reportados en la literatura, la mayoría de los componentes de la teoría surgen de asunciones independientes entre sí. Sin embargo, existen trabajos donde se suponen algunos de los ingredientes y los demás son obtenidos a partir de ellos y de los principios fundamentales. Por ejemplo, en el procedimiento utilizado en [50], denominado por los autores *Method of Multiscale Virtual Power*, se adopta el comportamiento cinemático del material de las escalas microscópica y macroscópica, y también el vínculo cinemático entre ellas. Luego, es posible identificar las cantidades energéticamente conjugadas (tensiones y otras cantidades conjugadas tales como fuerzas), obtener la definición del problema de equilibrio microscópico a resolver y hallar las ecuaciones de homogeneización para el cálculo de tensiones macroscópicas. Esta técnica tiene la importante ventaja de generar modelos consistentes.

Finalmente, el comportamiento mecánico de los constituyentes del material es de gran importancia en un modelo de homogeneización. El enfoque más sencillo es suponer que el comportamiento en la escala microscópica de un constituyente es idéntico al que presentaría un material de una probeta en la escala macroscópica. Sin embargo, en la mayoría de los casos es difícil conseguir una probeta construida de un único material. En estos casos se utilizan análisis inversos para determinar el comportamiento de un material en la escala microscópica a través del conocimiento del comportamiento del material en la escala macroscópica. En otros casos, para predecir el comportamiento de dicho material, se utilizan ensayos experimentales y técnicas numéricas desarrolladas para tal fin; como por ejemplo, la utilización de indentaciones micrométricas y nanométricas en el trabajo de Fernandino *et al.* [6].

### 2.3. Condiciones de borde

Existen diversas condiciones de borde que se pueden imponer al EVR o a la CU. Entre las condiciones de borde más utilizadas en la literatura se pueden nombrar las siguientes: de desplazamiento lineales (DL), tracción uniforme (TU), periódicas (CBP) y de mínima restricción cinemática (MRC) [56]. Aunque son menos utilizadas, en la literatura se reportan las llamadas condiciones de borde mixtas en las cuales hay especificación tanto de desplazamientos como de vectores tracción [57].

Las dos primeras condiciones, DL y TU, son de las más fáciles de implementar en un código de elementos finitos tradicional. Básicamente, las condiciones de desplazamiento lineal, DL, implican que el desplazamiento  $\mathbf{u}$ , ubicado en la coordenada  $\mathbf{X}$  en el borde del EVR  $\partial V$ , cumpla la ecuación

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{X} \quad (2.3)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones macroscópicas. Su implementación en un programa de elementos finitos es trivial, ya que a cada punto del borde se le debe imponer dicho desplazamiento. Las condiciones TU exigen que el vector tracción  $\mathbf{t}$  cumpla con la ecuación

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}(\mathbf{X}) \quad (2.4)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy macroscópico y  $\mathbf{n}(\mathbf{X})$  es la normal saliente a la superficie del borde del EVR. En el método de elementos finitos la implementación de las condiciones de borde TU es directa. Para algunas microestructuras, las condiciones DL y TU proveen el límite superior e inferior para las propiedades macroscópicas. Sin embargo, dichas condiciones generan un comportamiento que puede estar alejado del comportamiento real del material, tanto a nivel microscópico como macroscópico. Por ejemplo, las condiciones de borde DL exigen que los bordes rectos permanezcan rectos durante la deformación, haciendo que el comportamiento macroscópico estimado mediante ciertas condiciones se aleje del resultado real.

Por otro lado, las condiciones de borde periódicas (CBP) tienen como fin poder predecir el comportamiento de un arreglo infinito de celdas iguales, ya sean unitarias o multipartícula, mediante el uso de una única celda. Este arreglo infinito de celdas se denomina microestructura periódica. Además

las restricciones impuestas al EVR no son tan severas como en los casos de las condiciones de borde DL y TU. Las condiciones de borde periódicas se detallan en la Sección 3.3 del siguiente capítulo, ya que son utilizadas en los modelos de esta tesis.

Las condiciones de borde periódicas, implementadas en su forma usual, requieren que la discretización del EVR se realice de manera tal que los nodos situados en los bordes ocupen posiciones específicas, tales mallas se denominan mallas periódicas. En general, en geometrías microestructurales sencillas tales como fibras o partículas, es fácil obtener mallas de elementos finitos que cumplan con dicha condición. Sin embargo, en los casos en los que la geometría es compleja, como por ejemplo en estructuras granulares o en aleaciones con varias fases y distribución espacial aleatoria, conseguir una malla periódica suele ser el problema más difícil de resolver. Este inconveniente fue abordado en la literatura mediante técnicas en las cuales las condiciones de borde periódicas se expresan en forma débil ya sea a través de aproximaciones mediante polinomios [58], combinaciones lineales de funciones de forma [59], una formulación variacional mixta con discretización del vector tracción en el borde de la celda [60], restricciones entre superficies de los bordes de la celda [61] y [62], restricciones lineales multipunto entre superficies adicionales y el borde del EVR [63], entre otros (ver por ejemplo, [64]).

Existen estudios sobre las constantes elásticas de un compuesto heterogéneo con EVR de distintos tamaños y condiciones de borde DL, TU y CBP [65]. Analizando diferentes compuestos con ordenamiento de constituyentes aleatorio, se concluyó que los valores de propiedades elásticas y energía elástica obtenidos utilizando CBP resultaron comprendidos entre los obtenidos con las condiciones de borde de DL y TU.

Otras condiciones de borde son las de MRC. Estas condiciones se expresan en forma de integrales de contorno, en lugar de hacerlo punto por punto como en el caso de las condiciones de borde antes mencionadas. De esta manera se puede prescindir de una malla periódica u otros requerimientos para la malla del EVR. Dado un tensor de deformaciones infinitesimales macroscópicos,  $\varepsilon_{ij}$ , las condiciones de borde de MRC se pueden expresar como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (2.5)$$

Algunos autores argumentan que, para condiciones de carga de corte, las CBP imponen una restricción que muestra al material más rígido de lo que realmente es. Para microestructuras granulares se han reportado diferencias en el módulo de corte del orden del 6 a 7% entre las CBP y las MRC [56]. Sin embargo, tales diferencias pueden ser consideradas, en muchos casos, despreciables.

## 2.4. Post-procesos para cálculo de tensiones macroscópicas

Como ya se comentó en la Sección 2.2, el post-proceso de un problema de micromecánica computacional es la etapa en la cual, a partir de los resultados numéricos del problema de valores de frontera microestructural, se calculan las cantidades macroscópicas tales como los tensores de tensiones y de deformaciones, en los casos de problemas gobernados por deformación o tensión, respectivamente. Eventualmente, se suelen utilizar estos tensores para obtener propiedades del material de interés, utilizando las relaciones constitutivas asociadas a la escala macroscópica. A continuación se revisan y analizan las metodologías de cálculo de tensiones macroscópicas más relevantes para el propósito de esta tesis.

El tensor de tensiones de Cauchy macroscópico [47],  $\boldsymbol{\sigma}$ , para pequeñas deformaciones, se puede expresar como

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}^m dV \quad (2.6)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}^m$  es el tensor de tensiones de Cauchy en la escala microscópica, y  $V$  es el volumen del EVR. Para grandes deformaciones la expresión de la tensión macroscópica es similar en la que el dominio de integración y el volumen corresponden a la configuración actual o deformada [48]. A partir la expresión (2.6) se pueden derivar distintas formas de evaluar la tensión macroscópica.

En el contexto de las pequeñas deformaciones y dado un EVR en el que, por medio del método de los elementos finitos, se han calculado las tensiones en los puntos de Gauss, es posible calcular la tensión efectiva por medio de una cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^k V_k \quad (2.7)$$



donde  $\sigma_{ij}^k$  es la componente  $ij$  del tensor de tensiones de Cauchy en el punto de Gauss  $k$  en la malla de elementos finitos con la que se discretiza el EVR;  $V_k$  es el peso de integración (en términos del volumen asociado al punto de Gauss  $k$ ) para una malla con  $N$  puntos de Gauss. La implementación de esta ecuación se puede ver en Barbero [66], Barbero *et al.* [67] y en Caporale *et al.* [68]. Abadi [69] implementó una ecuación similar a (2.7) pero válida para deformaciones finitas:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \sigma_{ij}^k v_k \quad (2.8)$$

donde  $v_k$  es el peso de integración en términos del volumen asociado al punto de Gauss  $k$ , pero en este caso correspondiente a la configuración deformada.

La integral de volumen de la expresión (2.6) puede transformarse en una integral de superficie mediante el teorema de Gauss resultando

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \mathbf{X} \otimes \mathbf{t} dS \quad (2.9)$$

donde  $\partial V$  es el contorno del EVR,  $\mathbf{X}$  es la coordenada de un punto en  $\partial V$ ,  $\mathbf{t}$  es el vector tracción que actúa en el mismo punto de  $\partial V$ , y las componentes cartesianas del producto tensorial entre los vectores  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{t}$  se expresan como

$$[\mathbf{X} \otimes \mathbf{t}]_{ij} = X_i t_j \quad (2.10)$$

donde  $X_i$  y  $t_j$  son las componentes cartesianas de  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{t}$ . Se puede implementar una aproximación de la ecuación (2.9) con una cuadratura sobre la superficie del borde ([68], [70]). Tanto la integración numérica en el volumen, ecuación (2.6), como la integración numérica en la superficie, ecuación (2.9), pueden utilizarse en problemas que involucran fisuras en el EVR y en problemas bajo deformaciones finitas.

Zahr-Viñuela y Pérez-Castellanos [21] implementaron dos procesos de homogeneización para el cálculo de la tensión macroscópica en problemas bajo deformaciones finitas, llamados por los autores

“medida exterior” y “medida interior”. Las metodologías fueron aplicadas al cálculo de tensiones en compuestos de matriz metálica reforzados con partículas. En [21] la implementación de las condiciones de borde fue realizada mediante el uso de nodos de control, es decir, nodos adicionales que sirven para aplicar las deformaciones al EVR. En la “medida exterior” se calcula la tensión macroscópica como

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \frac{f_{ii}}{\prod_{k \neq i} (L_0 + c_{kk})} & \text{si } i = j \\ \frac{f_{ij}}{\prod_{k \neq j} (L_0 + c_{kk})} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.11)$$

donde  $L_0$  es la longitud de la arista del EVR con forma de paralelepípedo rectangular en la configuración de referencia y  $c_{ij}$  es el desplazamiento del nodo de control  $i$  en la dirección  $j$ ;  $f_{ij}$  es la fuerza de reacción en el nodo de control  $i$  en la dirección  $j$ . De esta forma, el denominador en la ecuación (2.11) es el área transversal en la configuración actual. Esta técnica para calcular la tensión macroscópica resulta menos dependiente de la cantidad de elementos del EVR al utilizar la fuerza en el nodo de control sin realizar integración como en las ecuaciones (2.7) y (2.8). Un procedimiento similar fue utilizado por Bonora y Ruggiero para compuestos de matriz metálica en [71] y [72] y para función nodular ferrítica en [73], donde se obtiene una fuerza como un promedio de las fuerzas del borde del EVR y luego se obtiene la tensión usando el área correspondiente del EVR. A pesar de que esta metodología podría aplicarse para EVR con fisuras internas, no ha sido empleada en tales problemas. Por otro lado, Zahr-Viñuela y Pérez-Castellanos [21] se concentran en EVR con forma de paralelepípedo rectangular, lo cual genera una limitación si interesa considerar otra forma para el EVR.

El procedimiento llamado “medida interior”, presentado en [21], es la aproximación de la integral (2.6) mediante la ecuación (2.8) que es adecuado para EVR con grandes deformaciones, al igual que las implementaciones de Guo *et al.* [70] y Abadi [69], entre otros.

En el trabajo de Li y Wongsto [74], se define una metodología para calcular la tensión macroscópica mediante una única ecuación obtenida a partir de la equivalencia energética entre la escala microscópica y la macroscópica (principio de Hill-Mandel, ver Nemat-Nasser y Hori [47]) que no requiere de integración numérica. Li y Wongsto [74] aplican la metodología a problemas de

compuestos reforzados con partículas, usando diversos EVR con formas que permiten modelar distintos empaquetamientos de las partículas de refuerzo. Sun y Vaidya [75] habían presentado una idea similar pero no se aplicó a EVR con formas complejas. A pesar de que en las Referencias [74] y [75] se evita el cálculo de una integración, tanto Li y Wongsto como Sun y Vaidya expresan sus formulaciones en deformaciones infinitesimales.

Algunas técnicas han logrado unir las etapas de solución del EVR y post-proceso en una única etapa de solución [76] y [49]. El llamado “método de los grados de libertad macroscópicos” fue presentado en [76] y empleado en [77] y [78] para compuestos reforzados con partículas, en [79] para esponjas metálicas solidificadas, entre otros. En este método se agregan nodos adicionales a la conectividad de cada elemento finito de la microestructura y, luego, al grado de libertad de dicho nodo se le asigna la deformación macroscópica. De esta manera en el nivel ensamblado del vector de fuerzas aparecerá la tensión macroscópica. Esta metodología evita el cálculo de la tensión por integración numérica ya que, al resolver el problema de valores de frontera en el nivel microscópico, se obtienen las tensiones macroscópicas como reacción a la deformación impuesta. La desventaja de aplicar este método reside en que se requiere modificar el elemento finito agregando un nodo a su formulación.

Más recientemente, van Dijk [49] ha presentado una formulación e implementación para un problema de homogeneización computacional que emplea el método de los multiplicadores de Lagrange en la implementación de las condiciones de borde periódicas para imponer las deformaciones. Las tensiones macroscópicas surgen naturalmente como reacciones a las deformaciones aplicadas, de manera similar a la metodología presentada en [76]. La formulación permite tratar problemas gobernados por tensión o por deformación. En la formulación se utilizan los tensores de deformación de Green-Lagrange y el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Se debe resaltar que esta metodología evita la evaluación de una integral pero, por otro lado, está limitada a condiciones de borde periódicas y a una implementación particular mediante multiplicadores de Lagrange.

Por último, en [50] se han utilizado multiplicadores de Lagrange para expresar la equivalencia energética, lo que ha revelado la naturaleza reactiva de las tensiones macroscópicas en respuesta a las restricciones cinemáticas impuestas en dicho problema. Este aspecto reactivo de las tensiones macroscópicas se puede identificar también en los trabajos de Michel *et al.* [76] y van Dijk [49] ya que en estas últimas formulaciones las que las tensiones macroscópicas son obtenidas en conjunto con la solución del EVR.



# Cálculo de tensiones macroscópicas

### 3.1. Introducción

En la micromecánica computacional, los valores de las tensiones macroscópicas se pueden evaluar en un proceso de cálculo, denominado post-proceso, que se realiza después de resolver el problema de valores de frontera en el EVR. En general, esta evaluación se lleva a cabo por medio de una integración numérica realizada ya sea en el contorno o en el volumen del EVR. Existen trabajos en la literatura, revisados en la Sección 2.4, que proponen metodologías más sencillas para realizar el cálculo de tensiones. En este capítulo se presenta una metodología de post-proceso para el cálculo de las tensiones en el nivel macroscópico de un problema de micromecánica computacional. Partiendo de principios fundamentales se establece su campo de aplicación. Aun cuando el ahorro de tiempo y recursos computacionales pueda no resultar relevante con respecto al tiempo requerido para la solución del problema de valores de frontera del EVR, esta metodología evita la implementación y el cálculo de una integral numérica. Además, esta metodología tiene un amplio rango de aplicación, siendo válida para problemas cuasi-estáticos con plasticidad o hiperelasticidad, problemas de EVR con fisuras internas que entran en contacto, problemas con no linealidades geométricas e incluso en CU de formas complejas. Finalmente, se verifica el desempeño de la metodología comparando los resultados numéricos de la misma con resultados disponibles en la literatura, tanto numéricos como analíticos. La metodología desarrollada en este capítulo ha sido publicada en [80].

En la Sección 3.2 se presenta la geometría de las celdas unitarias empleadas en este y en los capítulos siguientes. En La Sección 3.3 se detallan las condiciones de borde periódicas utilizadas para todos los modelos de esta tesis. La formulación de la metodología presentada en este capítulo es desarrollada en la Sección 3.4. Finalmente, en las Secciones 3.5 y 3.6 se presentan los casos numéricos considerados para verificar dicha metodología.

### 3.2. Geometría de celdas unitarias

En esta tesis se utilizan dos tipos de CU tridimensionales: el prisma con base en forma de paralelogramo de lados iguales y el octaedro truncado (Figura 3.1). El octaedro truncado ha sido empleado en la literatura para representar una gran variedad de materiales entre los que se puede mencionar los materiales compuestos reforzados con partículas [74], las estructuras cristalinas [81] y los materiales de células abiertas tales como esponjas metálicas [82]. En esta tesis, ambas formas de CU se utilizan para representar un material compuesto reforzado con fibras unidireccionales en el que la fibra se ubica en la dirección 1 según puede verse en la Figura 3.1.

Para modelar la microestructura en un material periódico es posible emplear el concepto de vector de periodicidad (Oller *et al.* [83]). En este trabajo se utilizaron tres vectores de periodicidad para cada CU, como se muestra en la Figura 3.1; para la CU prismática se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= l_f \mathbf{i} \\ \mathbf{P}_2 &= 2b \mathbf{j} \\ \mathbf{P}_3 &= 2b \cos(\theta) \mathbf{j} + 2b \sin(\theta) \mathbf{k}\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $l_f$  es la longitud de la fibra, mientras que las cantidades  $\theta$  y  $b$  se muestran en la Figura 3.2 y se relacionan con la fracción de volumen de fibra  $V_f$  por medio de la expresión

$$b = R_f \sqrt{\frac{\pi}{4V_f \sin(\theta)}}\tag{3.2}$$

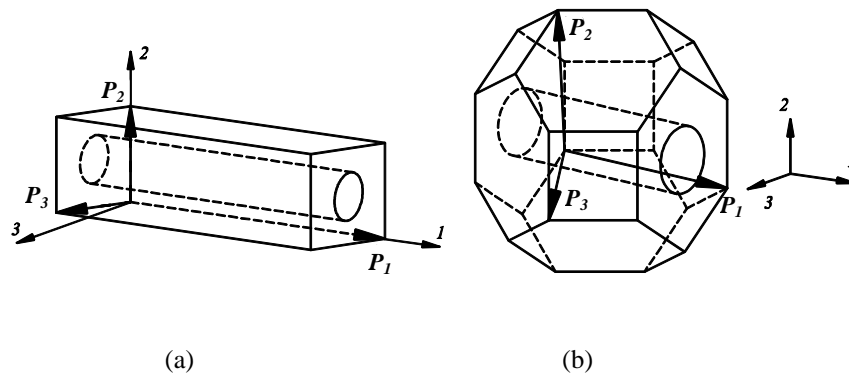
donde  $R_f$  es el radio de la fibra. El ángulo  $\theta$  toma valores de  $60^\circ$  para la configuración hexagonal (Hx) y de  $90^\circ$  para la configuración cuadrada (Sq). Los vectores de periodicidad utilizados para el octaedro truncado son

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 &= l_f \mathbf{i} \\ \mathbf{P}_2 &= \frac{l_f}{3} \mathbf{i} + l_f \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{3} l_f \mathbf{k} \\ \mathbf{P}_3 &= \frac{2}{3} l_f \mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3} l_f \mathbf{k}\end{aligned}\tag{3.3}$$

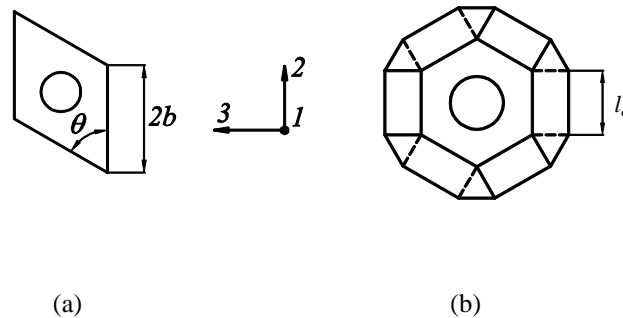
donde la longitud de la fibra  $l_f$  es obtenida a partir de la expresión

$$l_f = \sqrt{6} l_e; \quad \text{con} \quad l_e = R_f \sqrt{\frac{\pi\sqrt{3}}{8V_f}} \quad (3.4)$$

siendo  $l_e$  la longitud de arista del octaedro truncado (Figura 3.2b).



**Figura 3.1:** Vectores de Periodicidad en celdas unitarias de un compuesto reforzado con fibras: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado.

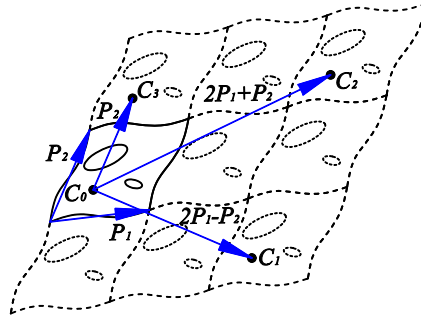


**Figura 3.2:** Vista frontal de las celdas unitarias utilizadas: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado.

### 3.3. Condiciones de borde periódicas

Las condiciones de borde periódicas (CBP) utilizadas en la micromecánica computacional para deformaciones finitas han sido ampliamente tratadas en la literatura (ver por ejemplo [69] y [84]). A continuación se describen las CBP y la forma de implementación llevada a cabo en esta tesis.

Siguiendo la nomenclatura adoptada por Zhar-Viñuela y Pérez-Castellanos [21], dos puntos en una microestructura periódica son llamados “puntos correspondientes” si la posición de uno de ellos puede ser obtenida como la suma de la posición del otro más una combinación lineal de vectores de periodicidad siendo los coeficientes de dicha combinación números enteros. Para ilustrar el concepto en la Figura 3.3 se muestran los vectores de periodicidad  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  y los pares de puntos correspondientes:  $(C_0; C_1)$ ,  $(C_0; C_2)$  y  $(C_0; C_3)$ .



**Figura 3.3:** Ejemplo de puntos correspondientes en un material periódico.

Las condiciones de borde son relaciones que involucran fuerzas y desplazamientos en el borde de la CU [84]. Si los vectores tracción en un punto del borde y su correspondiente son  $\mathbf{t}^+$  y  $\mathbf{t}^-$  respectivamente, entonces la siguiente condición debe ser satisfecha en todos los pares de puntos correspondientes del contorno de la CU

$$\mathbf{t}^+ = -\mathbf{t}^- \quad (3.5)$$

La condición (3.5) se denomina anti periódica. Suponiendo que las posiciones, en la configuración deformada, de los puntos del borde son  $\mathbf{x}^+$  y las de sus puntos correspondientes  $\mathbf{x}^-$ , entonces la condición

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = \mathbf{F}(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \quad (3.6)$$

aplica a todos los puntos del borde [84], donde  $\mathbf{X}^+$  y  $\mathbf{X}^-$  son las posiciones de los puntos en la configuración de referencia. En la ecuación (3.6),  $\mathbf{F}$  es el gradiente de deformación macroscópica que se desea imponer en la CU. A continuación, la ecuación (3.6) se expresa en función de los



desplazamientos de los nodos del borde para así poder implementarla en el código comercial ABAQUS [85] mediante el comando \*EQUATION. Sabiendo que

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{U} + \mathbf{I} \quad (3.7)$$

donde  $\nabla \mathbf{U}$  es el gradiente de desplazamiento macroscópico en la configuración de referencia,  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad y las componentes del operador  $\nabla$  son

$$[\nabla(\cdot)]_{ij} = \frac{\partial(\cdot)_i}{\partial X_j} \quad (3.8)$$

se puede expresar la ecuación (3.6) como

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^- = \nabla \mathbf{U}(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) + \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \quad (3.9)$$

y, teniendo en cuenta que el desplazamiento de un punto se puede obtener como la diferencia de la coordenada actual menos la de referencia, se puede expresar

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \nabla \mathbf{U} \mathbf{P}_v \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{P}_v$  es un vector de periodicidad (o una combinación lineal de ellos) que satisface la condición

$$\mathbf{P}_v = \mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^- \quad (3.11)$$

Para una CU modelada con elementos finitos sólo es necesario especificar las condiciones (3.10) para los desplazamientos. Las condiciones anti periódicas (3.5) para las fuerzas de borde son automáticamente satisfechas ya que se usa una formulación variacional basada en desplazamientos, como explican Li y Wongsto [74] y Caporale *et al.* [68].

En esta tesis las condiciones (3.10) fueron implementadas por medio de restricciones multipuntos lineales. Básicamente, siguiendo (3.10), debe cumplirse la ecuación escalar siguiente

$$u_i^+ - u_i^- - \frac{1}{\alpha_u} w_i^1 P_{vx} - \frac{1}{\alpha_u} w_i^2 P_{vy} - \frac{1}{\alpha_u} w_i^3 P_{vz} = 0 \quad (3.12)$$

para  $i = 1, 2, 3$ , donde  $w_i^j$  son las componentes de desplazamientos en la dirección  $i$  del nodo adicional  $j$  que ha sido incluido como nodo de control. Se utilizan tres nodos de control y se asigna una condición de borde a cada uno de ellos en términos de las componentes macroscópicas del gradiente de desplazamiento a imponer a la CU

$$w_i^j = \alpha_u [\nabla \mathbf{U}]_{ij} \quad (3.13)$$

Las ecuaciones (3.12) y (3.13) incluyen un factor  $\alpha_u$  con unidades de longitud para homogeneizar unidades. Las ecuaciones (3.10) son, entonces, implementadas por medio de la ecuación (3.12) y las condiciones de borde (3.13). Estas ecuaciones son válidas para cualquier forma de EVR o UC. Los detalles de la implementación en ABAQUS usando el comando \*EQUATION se presentan en el Apéndice A.

Cuando se aplican las condiciones de periodicidad mediante las ecuaciones (3.12) y (3.13), se tienen tres nodos de control a los que se les puede imponer desplazamientos, a partir de un cierto gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  macroscópico adoptado. Por lo tanto, en los nodos de control donde se especifique un desplazamiento aparecerán fuerzas de reacción como resultado del modelo de elementos finitos. Estas fuerzas y desplazamientos en los nodos de control son utilizados en el post-proceso de homogeneización presentado en esta tesis, cuyas ecuaciones se obtienen en la siguiente sección.

### 3.4. Formulación de la metodología propuesta para el cálculo de tensiones

Se considera un material heterogéneo modelado mediante micromecánica computacional con nodos de control y condiciones de borde periódicas, como se indica en la sección anterior. Los materiales de las fases constituyentes podrán tener una ley constitutiva arbitraria y la microestructura podrá tener características tales como inclusiones, fisuras u otros defectos.

La idea principal de la formulación de la metodología de cálculo de tensiones macroscópicas que se propone en esta tesis es utilizar el principio de Hill-Mandel involucrando variables de la

implementación computacional tales como fuerzas y desplazamientos en nodos de control. La potencia en la escala macroscópica se expresa mediante la tensión y deformación en dicha escala, mientras que la potencia desarrollada en el nivel microscópico se expresa por medio de la fuerza y velocidad en los nodos de control. A partir de la igualdad de potencias se obtiene una ecuación para el cálculo de la tensión correspondiente a cada estado de deformación impuesto al EVR.

Bajo un estado de deformación dado, se induce un campo de tensiones en el EVR. La potencia interna o la derivada respecto al tiempo del trabajo mecánico interno, identificado como  $P_{int}(t)$ , es un escalar asociado al campo de tensión actuando en el EVR en la configuración de referencia  $V$  en un instante de tiempo  $t$ . Siguiendo a Holzapfel [86],  $P_{int}(t)$  está dado por

$$P_{int}(t) = \int_V \mathbf{P}^m : \dot{\mathbf{F}}^m dV \quad (3.14)$$

donde  $\mathbf{P}^m$  es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\dot{\mathbf{F}}^m$  es la derivada respecto al tiempo del gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ . El supra índice  $m$  indica que la cantidad es perteneciente al dominio microscópico.  $P_{int}(t)$  se expresa en unidades de potencia. El doble producto punto entre dos tensores de segundo orden es

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij} \quad (3.15)$$

El primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff satisface la igualdad

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.16)$$

donde  $J = \det(\mathbf{F})$  es el Jacobiano de  $\mathbf{F}$ . La derivada respecto al tiempo del gradiente de deformación es

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla(\mathbf{Vel}(\mathbf{X}, t)) \quad (3.17)$$

donde  $\mathbf{Vel}$  es el vector velocidad escrito en términos de la configuración de referencia  $\mathbf{X}$  y para el tiempo  $t$ .

Para un EVR, la condición de Hill-Mandel puede ser escrita como [48]

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{P}^m : \dot{\mathbf{F}}^m dV \quad (3.18)$$

donde  $\mathbf{P}^m$  y  $\mathbf{P}$  son el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en las escalas microscópica y macroscópica, respectivamente;  $\dot{\mathbf{F}}^m$  y  $\dot{\mathbf{F}}$  son las derivadas respecto al tiempo del gradiente de deformación, nuevamente, pertenecientes a las escalas microscópica y macroscópica. Las fuerzas de volumen y los efectos de inercia no han sido incluidos en este trabajo ya que se considera el principio de separación de escalas; estos efectos sí se tuvieron en cuenta en el trabajo [87].

Luego, la potencia resulta en

$$P_{int}(t) = V \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (3.19)$$

Para el caso particular de corte simple, en el que se aplica un gradiente de deformación

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_f t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

para  $0 \leq t \leq 1$  [seg], se tiene

$$P_{int}(t)_{corte} = V \sigma_{12} \gamma_f \quad (3.21)$$

Es importante notar que para el caso de corte se debe aplicar un tensor de corte simple en lugar de uno de corte puro ya que este último generaría una potencia interna en la que intervendría más de una componente de la tensión macroscópica.

Para el caso particular de tensión uniaxial, se aplica el estiramiento principal  $\lambda_1$  en la dirección 1 y se calculan  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  para que se cumpla  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  a través del gradiente de deformación

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

con el estiramiento principal para  $0 < t < 1$  [seg] expresado como

$$\lambda_1(t) = 1 + (\lambda_{1F} - 1)t \quad (3.23)$$

donde  $\lambda_{1F}$  es el estiramiento final aplicado, la potencia se reduce a la expresión

$$P_{int}(t)_{uniaxial} = V \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_{1F} - 1) \sigma_{11} \quad (3.24)$$

nuevamente, a excepción de  $V$ , todas las cantidades son dependientes del tiempo  $t$ .

En el caso de deformación uniaxial, en el que durante el proceso de carga  $\lambda_2 = 1$  y  $\lambda_3 = 1$ , la potencia queda expresada por la expresión

$$P_{int}(t)_{uniaxial} = V (\lambda_{1F} - 1) \sigma_{11} \quad (3.25)$$

Si la variación de energía cinética en el EVR es nula, entonces se está frente a un problema cuasi-estático, donde las cantidades asociadas pueden aún ser dependientes del tiempo. Luego, la ecuación de balance de energía mecánica resulta

$$P_{ext}(t) = P_{int}(t) \quad (3.26)$$

donde  $P_{ext}(t)$  es la potencia mecánica externa, o la derivada respecto al tiempo de trabajo mecánico externo (ver ecuación 4.102 en Holzapfel [86]), y se define como la potencia desarrollada por las fuerzas externas en una región de volumen  $V$  en un instante  $t$ .

En un modelo de elementos finitos de un EVR, con nodos de control, se realiza trabajo externo sólo a través de las fuerzas que actúan en los nodos de control. Por lo tanto, la potencia externa para cada uno de los casos de carga considerados será el producto de la fuerza (reacción) por la velocidad en

la dirección de la fuerza. Esta forma de expresar la potencia externa es una de las principales diferencias entre la formulación presentada en esta tesis y las encontradas en la literatura. Para corte simple se escribe

$$P_{ext}(t)_{corte} = \alpha_u R_{12} \gamma_f \quad (3.27)$$

donde  $R_{12}$  es la fuerza en la dirección 1 actuando en el nodo de control 2; mientras que para el estado de tensión o deformación uniaxial resulta

$$P_{ext}(t)_{uniaxial} = \alpha_u R_{11} (\lambda_{1F} - 1) \quad (3.28)$$

en la cual  $R_{11}$  es la fuerza en la dirección 1 actuando en el nodo de control 1.

Ahora, considerando el balance de energía (3.26), y las ecuaciones (3.21) y (3.27) para el estado de corte simple, se obtienen la tensión macroscópica de Cauchy  $\sigma_{12}$

$$\sigma_{12} = \frac{\alpha_u R_{12}}{V} \quad (3.29)$$

Por otro lado, para el estado uniaxial (tensión o deformación), la tensión de Cauchy  $\sigma_{11}$ , se puede obtener mediante las ecuaciones (3.24), (3.26) y (3.28), quedando

$$\sigma_{11} = \frac{\alpha_u R_{11}}{V \lambda_2 \lambda_3} \quad (3.30)$$

Es importante recordar que en las ecuaciones (3.29) y (3.30), a excepción del volumen en la configuración de referencia  $V$ , todas las cantidades son dependientes del tiempo  $t$ .

De esta manera el procedimiento de cálculo de las tensiones macroscópicas se resume en: (i) una vez obtenidos los desplazamientos en el EVR para el tiempo  $t$  se calcula la fuerza ( $R_{11}$  o  $R_{12}$ ) en el nodo de control; (ii) se calculan los estiramientos principales macroscópicos  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  a partir de

$$\lambda_2(t) = 1 + \frac{1}{\alpha_u} w_2^2 \quad (3.31)$$

$$\lambda_3(t) = 1 + \frac{1}{\alpha_u} w_3^3 \quad (3.32)$$

donde  $w_2^2$  y  $w_3^3$  son los desplazamientos de los nodos de control 2 y 3 en las direcciones 2 y 3, respectivamente; (iii) se aplica la ecuación correspondiente, (3.29) o (3.30), para obtener la componente del tensor de tensiones de Cauchy macroscópico.

Las ecuaciones para el cálculo de la tensión macroscópica bajo estados de deformación de corte simple en una dirección distinta a la de la ecuación (3.29) se obtienen con un razonamiento similar al utilizado para dicha ecuación, resultando en

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{\alpha_u R_{13}}{V} \\ \sigma_{23} &= \frac{\alpha_u R_{23}}{V} \end{aligned} \quad (3.33)$$

para las componentes de corte; mientras que para las restantes componentes normales se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= \frac{\alpha_u R_{22}}{V \lambda_1 \lambda_3} \\ \sigma_{33} &= \frac{\alpha_u R_{33}}{V \lambda_1 \lambda_2} \end{aligned} \quad (3.34)$$

### 3.5. Resultados para corte simple

Para verificar los resultados de la MPP-DF para corte simple se resuelven distintos casos usando ABAQUS [85]. Para los casos con materiales incompresibles o material plástico, se emplearon elementos finitos lineales, disponibles en la librería de ABAQUS; los análisis de convergencia fueron realizados aumentando la densidad de la malla alcanzando, en casos con plasticidad, los 200,000 elementos finitos, aproximadamente.

### 3.5.1. Problema en pequeñas deformaciones

Como un ejemplo inicial, se resuelve un caso de pequeñas deformaciones reportado en la literatura (ejemplos 6.2 y 6.3 en [66]). El problema consiste en la evaluación del módulo de corte axial  $G_{12}$ , de un compuesto periódico de matriz polimérica reforzada con fibras de carbono. La CU adoptada por Barbero [66] es un paralelepípedo rectangular en el cual las fibras tienen una distribución hexagonal. Se considera a la matriz y a la fibra como materiales elásticos lineales isótropos con valores del módulo de Young para la fibra  $E^F = 241$  GPa, el coeficiente de Poisson  $\nu^F = 0.2$ , y para la matriz:  $E^M = 3.12$  GPa,  $\nu^M = 0.38$ ; la fracción de volumen de fibra es del 40%.

A partir del gradiente de deformación macroscópica aplicado, el gradiente de desplazamiento expresado en la configuración de referencia es (ecuación 2.45 en [86])

$$\nabla \mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (3.35)$$

Bajo deformaciones infinitesimales, el gradiente de desplazamiento en la descripción inicial (ecuación (3.35)) y en la descripción deformada son aproximadamente iguales. Luego, el tensor de deformaciones infinitesimales se puede obtener como la parte simétrica del gradiente, ecuación (3.35) (ver, por ejemplo [88] , ecuación 5.6.4)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (3.36)$$

En este ejemplo se aplicó un gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  del tipo (3.20) con  $\gamma_f = 1 \times 10^{-4}$ . Luego, el tensor de pequeñas deformaciones queda

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \times 10^{-5} & 0 \\ 5 \times 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

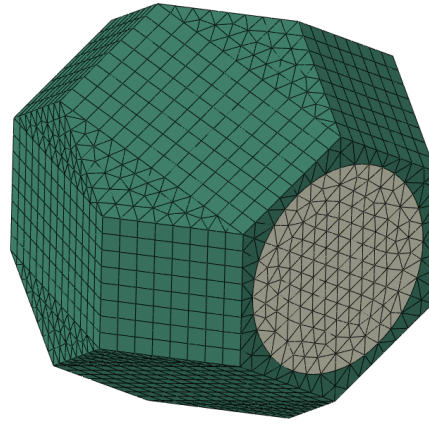
Finalmente, se realiza el cálculo del módulo de corte  $G_{12}$  por medio del cociente entre la tensión de Cauchy, obtenida por medio de ecuación (3.29), y la componente correspondiente del tensor de deformaciones infinitesimales. En la Figura 3.4 se muestra la malla de 15.974 elementos cuadráticos



tipo cuña (*wedge*) y tetraedros. En la Tabla 3.1 se aprecia la buena concordancia entre los resultados de Barbero [66] y los obtenidos con la presente metodología utilizando una CU con forma de octaedro truncado.

**Tabla 3.1.** Comparación de módulo de corte  $G_{12}$ .

	Barbero [66]	MPP-DF
$G_{12}$ [GPa]	2.579	2.583



**Figura 3.4:** Malla de octaedro truncado para el caso de pequeñas deformaciones.

### 3.5.2. Comparación con modelo analítico en deformaciones finitas

Para evaluar la respuesta de la MPP-DF bajo deformaciones finitas de corte se comparan los resultados obtenidos mediante la metodología desarrollada en esta tesis con los resultados del modelo analítico utilizado por Abadi [69] para compuestos de fibra y matriz hiperelásticos del tipo Neo-Hookeanos incompresibles. La densidad de energía de deformación  $W$  en un material hiperelástico Neo-Hookeano incompresible se puede expresar como [86]

$$W(t) = C_{10}(I_1(t) - 3) \quad (3.38)$$

donde  $C_{10}$  es una constante del material y el primer invariante de deformación  $I_1$  es

$$I_1(t) = \text{tr} \left[ \mathbf{F}(t)^T \mathbf{F}(t) \right] \quad (3.39)$$

La traza de un tensor de segundo orden  $\mathbf{A}$  se define como

$$\text{tr}[\mathbf{A}] = A_{ii} \quad (3.40)$$

Cuando el compuesto es sometido a una deformación de corte simple transversal o axial, la densidad de energía de deformación  $W^c$  en un material compuesto de matriz y fibra hiperelásticos incompresibles ( $J=1$ ) se expresa como [69]

$$W^c(t) = C_{10}^c (I_1(t) - 3) \quad (3.41)$$

donde la constante material del compuesto  $C_{10}^c$  se obtiene mediante la fórmula

$$C_{10}^c = \frac{(1+V_f)C_{10}^f + (1-V_f)C_{10}^m}{(1-V_f)C_{10}^f + (1+V_f)C_{10}^m} \quad (3.42)$$

donde  $C_{10}^f$  y  $C_{10}^m$  son las constantes materiales de la fibra y la matriz, respectivamente. Para el caso particular de un compuesto sometido a una deformación de corte transversal simple, con un gradiente de deformación dado por

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_f t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

la densidad de energía de deformación en el compuesto, ecuación (3.41), se reduce a

$$W^c(t) = C_{10}^c \gamma_f^2 t^2 \quad (3.44)$$

y, la derivada respecto al tiempo de la densidad de energía resulta

$$\frac{dW^c(t)}{dt} = 2C_{10}^c \gamma_f^2 t \quad (3.45)$$

Por otro lado, al expresar la derivada respecto al tiempo de la densidad de energía en función de la tensión y de la derivada respecto al tiempo del gradiente de deformación que actúan se tiene

$$\frac{dW(t)}{dt} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \quad (3.46)$$

que para el caso de deformación de corte particular y teniendo en cuenta (3.16), se reduce a

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sigma_{23} \dot{\gamma}_f \quad (3.47)$$

Igualando (3.45) y (3.47) la tensión de Cauchy resulta

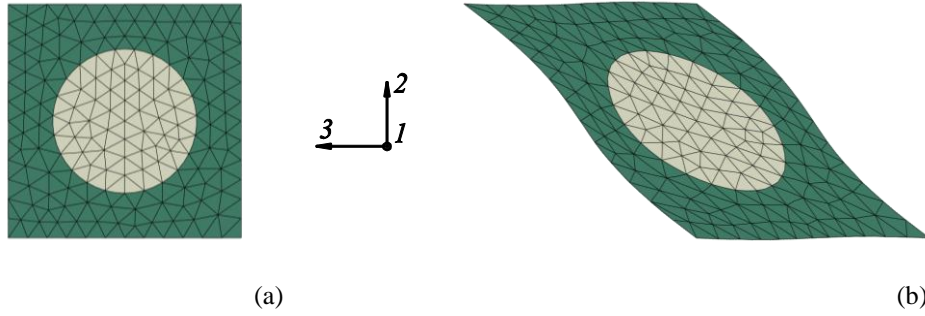
$$\sigma_{23} = 2C_{10}^c \dot{\gamma}_f t \quad (3.48)$$

Finalmente, se obtiene la expresión de la tensión de Cauchy

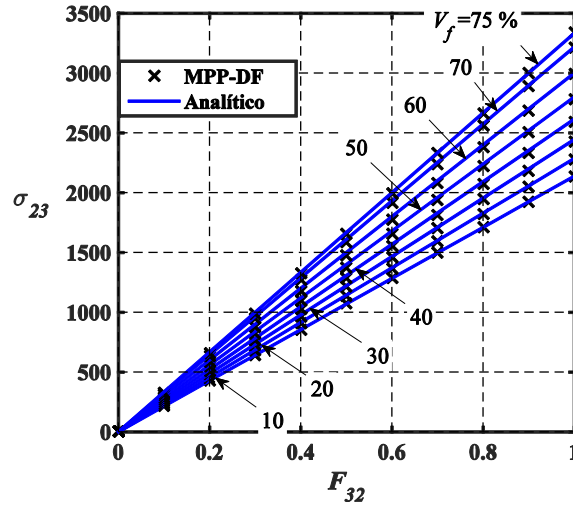
$$\sigma_{23} = 2C_{10}^c F_{23} \quad (3.49)$$

Para comparar resultados numéricos, se considera un compuesto reforzado con fibras en una CU con un ordenamiento de fibras cuadrado ( $\theta = 90^\circ$  que puede verse en la Figura 3.2a), constantes materiales  $C_{10}^f = 2C_{10}^m = 2$  MPa y diversos valores de fracciones de volumen de fibra. Se emplearon mallas con 400 elementos tridimensionales tipo cuña (Figura 3.5). Se impone un gradiente de deformación (3.43) y para el cálculo de la tensión macroscópica se aplica la ecuación (3.33).

En la Figura 3.6 se contrastan los resultados de la tensión de Cauchy macroscópica obtenidos mediante la metodología presentada en esta tesis y la ecuación analítica (3.49) en función de la componente  $F_{23}$  del gradiente de deformación macroscópico impuesto. Se puede notar que, bajo este estado de corte transversal simple en grandes deformaciones, la metodología desarrollada muestra un muy buen desempeño.



**Figura 3.5:** Mallas para ordenamiento de fibra cuadrado  $S_q$  y  $V_f = 30\%$ : (a) configuración inicial, (b) configuración deformada para  $F_{23} = 1$ .



**Figura 3.6:** Tensión de Cauchy en [MPa] para compuesto hiperelástico bajo corte transversal simple: comparación entre MPP-DF y modelo analítico.

### 3.5.3. Comparación con integración numérica en deformaciones finitas

La presente metodología ha sido aplicada a un compuesto reforzado con fibras continuas con ordenamiento hexagonal utilizando una CU prismática con  $\theta = 60^\circ$  (Figura 3.2a) y  $0.1 \leq V_f \leq 0.67$ . Se supone que la fibra y la matriz tienen comportamiento hiperelástico incompresible con modelos Neo-Hookeano (3.38) y de Ogden (3.50), respectivamente [86]. Para el modelo de Ogden se tiene

$$W(t) = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 \right] \quad (3.50)$$

donde  $\mu_i$  y  $\alpha_i$  son constantes del material,  $N$  es el número de términos del modelo y  $\lambda_i$  son los estiramientos principales del gradiente de deformación que actúa en el material. El módulo de corte inicial,  $\mu_0^F$ , del modelo Neo-Hookeano está dado por

$$\mu_0^F = 2C_{10} \quad (3.51)$$

mientras que para el material con modelo de Ogden, el módulo de corte inicial del material de la matriz,  $\mu_0^M$ , es

$$\mu_0^M = \sum_{i=1}^N \mu_i \quad (3.52)$$

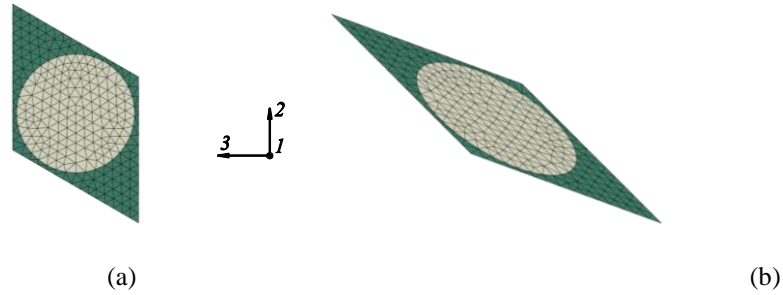
Los parámetros materiales para el modelo de Ogden se muestran en la Tabla 3.2 mientras que para el modelo de Neo-Hookeano se tiene  $C_{10} = 2112.5$  kPa. La relación entre el módulo inicial de corte de la fibra y el de la matriz es aproximadamente  $\mu_0^F / \mu_0^M = 6.8$ . En la Figura 3.7 se muestran las mallas de 462 elementos finitos lineales tipo cuña para una  $V_f = 60\%$ .

La deformación impuesta a la UC es un corte transversal simple, con un gradiente de deformación igual al del ejemplo anterior, ecuación (3.43). Se aplicó la ecuación (3.33) para el cálculo de la tensión de Cauchy.

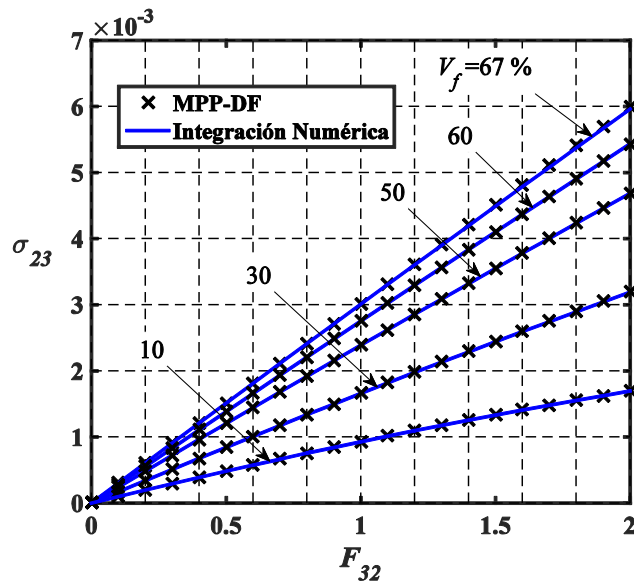
En la Figura 3.8 se muestran los valores de tensión de Cauchy en función de la componente  $F_{23}$  del gradiente de deformación impuesto, obtenidos con la MPP-DF y con la integración numérica (2.8). Los resultados obtenidos por ambos métodos están en muy buen acuerdo.

**Tabla 3.2.** Propiedades materiales

Matriz: Ogden	
$\mu_i$ [N/m <sup>2</sup> ]	$\alpha_i$
$6.3 \times 10^5$	1.3
$0.012 \times 10^5$	5
$-0.1 \times 10^5$	-2



**Figura 3.7:** Mallas para ordenamiento de fibra hexagonal Hx y  $V_f = 60\%$ : (a) configuración inicial, (b) configuración deformada con  $F_{23} = 1$ .



**Figura 3.8:** Tensión de Cauchy en [GPa] para compuesto hiperelástico bajo corte transversal simple: Comparación entre MPP-DF e integración numérica.

### 3.6. Resultados para estado uniaxial

#### 3.6.1. Comparación con modelo analítico en deformaciones finitas

En esta sección los resultados obtenidos con la regla de las mezclas son comparados con los de la MPP-DF. La teoría de las mezclas, obtenida a partir de principios termodinámicos, como discuten Martínez y Oller [16], permite escribir el tensor de tensiones macroscópico para  $N$  materiales constituyentes en la escala microscópica como

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^N V_{fi} \boldsymbol{\sigma}_i \quad (3.53)$$

donde  $V_{fi}$  es la fracción de volumen del componente  $i$  y  $\boldsymbol{\sigma}_i$  es el tensor de tensiones en el material o componente microestructural  $i$ -ésimo. La ecuación (3.53) es aplicable a materiales heterogéneos con cualquier ley constitutiva en la escala microscópica. Además, es muy precisa en la determinación de propiedades macroscópicas en la dirección de la fibra en compuestos de fibras largas [16].

Para ilustrar el comportamiento de la MPP-DF, en este caso se considera una CU prismática (Figura 3.2a) con un ordenamiento de fibras cuadrado ( $\theta = 90^\circ$ ) bajo un estado de tensión uniaxial, dado por la ecuación (3.22). El material de la matriz y el de la fibra se consideraron hiperelásticos con las mismas propiedades que las utilizadas en la Sección 3.5.2. En la homogeneización se utilizó la ecuación (3.30).

Para este compuesto la ecuación (3.53), en la dirección de la fibra, queda

$$\sigma_{11} = V_f \sigma_f + (1 - V_f) \sigma_m \quad (3.54)$$

donde  $\sigma_f$  y  $\sigma_m$  son las tensiones normales de Cauchy en la dirección de la fibra que actúan en la fibra y en la matriz, respectivamente. A continuación se obtienen dichas tensiones a partir de los modelos hiperelásticos y de la deformación impuesta.

Para la fibra se puede expresar la densidad de energía de deformación por medio de la ecuación (3.38),  $W(t) = C_{10}(I_1(t) - 3)$

Al estado de tensión uniaxial (donde  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) de un material incompresible le corresponde un gradiente de deformación

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Es importante notar que  $J = \det(\mathbf{F}) = 1$ . Luego, el primer invariante de deformación  $I_1$  es

$$I_1 = \text{tr}[\mathbf{F}^T \mathbf{F}] \quad (3.56)$$

en función del estiramiento principal queda

$$I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} \quad (3.57)$$

La densidad de energía de deformación queda expresada por

$$W = C_{10} \left( \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} - 3 \right) \quad (3.58)$$

En un material con modelo hiperelástico cuya densidad de energía de deformación está expresada en función de los estiramientos principales ( $\lambda_a$ ), se pueden calcular las tensiones principales de Cauchy mediante (ver ecuación 6.45 [86])

$$\sigma_a = J^{-1} \lambda_a \frac{\partial W}{\partial \lambda_a} \quad (3.59)$$

finalmente, la tensión en la fibra resulta en

$$\sigma_f = 2\lambda_1 C_{10} \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \quad (3.60)$$

Procediendo de forma similar para el material de la matriz, con un modelo de Ogden, la densidad de energía de deformación es

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 \right] \quad (3.61)$$



que, bajo un estado de tensión uniaxial, se reduce a

$$W = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} + 2\lambda_1^{-\frac{\alpha_i}{2}} - 3 \right] \quad (3.62)$$

Luego, considerando las ecuaciones (3.59) y (3.62), la tensión de Cauchy para la matriz resulta

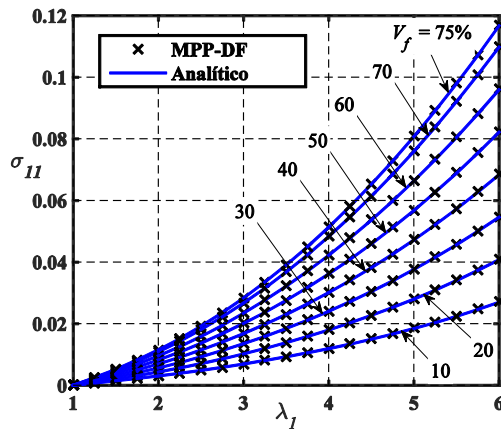
$$\sigma_m = \sum_{i=1}^3 \frac{2\mu_i}{\alpha_i} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} - \lambda_1^{-\frac{\alpha_i}{2}} \right] \quad (3.63)$$

El modelo analítico utilizado para la verificación presentada en esta sección, ecuación (3.54), se completa con las tensiones de la fibra y la matriz, ecuaciones (3.60) y (3.63), respectivamente.

En la Figura 3.9 se muestran los resultados de las ecuaciones (3.30) y (3.54) para valores de fracción de volumen de fibra  $V_f$  desde 10% hasta 75%. Los resultados muestran muy buen acuerdo.

### 3.6.2. Comparación con integración numérica en deformaciones finitas

Los resultados obtenidos con la MPP-DF son comparados con los calculados con la integración numérica realizada mediante la ecuación (2.8) para un compuesto sometido a un estado de tensión uniaxial transversal a la dirección de la fibra:



**Figura 3.9:** Tensión de Cauchy en [GPa] para compuesto hiperelástico bajo estado uniaxial de tensión: comparación entre MPP-DF y el modelo analítico.

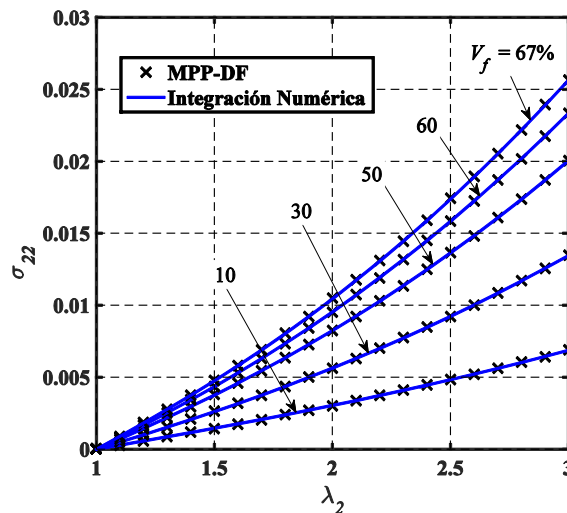
$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

donde  $\lambda_2$  es impuesto y  $\lambda_1$  y  $\lambda_3$  se calculan de modo tal que se cumpla  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ , es decir, que exista un estado de tensión uniaxial en la dirección 2. Las propiedades de los materiales son las mismas que en la sección 3.5.3. Se aplicó la ecuación (3.34) para el cálculo de la tensión de Cauchy.

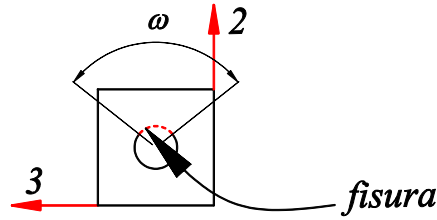
En la Figura 3.10 se comparan los valores de tensión de Cauchy  $\sigma_{22}$ , en función de la componente  $F_{22} = \lambda_2$  del gradiente de deformación impuesto, obtenidos con la ecuación (3.34) presentada en esta tesis y con la integración numérica (2.8). Las dos metodologías muestran resultados muy similares.

### 3.6.3. Problemas de CU con fisuras internas

En esta sección se comparan los resultados obtenidos mediante la MPP-DF y los reportados por Kushch *et al.* [30] para la componente  $C_{2222}$  del tensor constitutivo macroscópico de un FRP con un despegue en la interfaz fibra-matriz. El material está representado por una CU periódica bidimensional con ordenamiento cuadrado (Sq) incluyendo una fisura en forma de arco de circunferencia (Figura 3.11). Cabe destacar que en este ejemplo no se estudia el proceso de crecimiento del despegue.



**Figura 3.10:** Tensión de Cauchy en [GPa] para compuesto hiperelástico bajo estado tensional uniaxial: Comparación entre MPP-DF e integración numérica.



**Figura 3.11:** Celda unitaria de un FRP con una fisura con forma de arco de circunferencia en la interfaz fibra-matriz.

Para realizar la comparación se define un parámetro de daño en el perímetro definido como  $p_d = \frac{\omega}{2\pi}$ , ver Figura 3.11. En [30] se consideró a la fibra y a la matriz como materiales elásticos lineales con las propiedades:  $E^F = 107.848$  GPa,  $\nu^F = 0.22$  para la fibra y  $E^M = 6.453$  GPa y  $\nu^M = 0.35$  para el material de la matriz. La deformación impuesta es nula con excepción de la componente  $\varepsilon_{22}$  (deformación uniaxial). La ecuación constitutiva en el nivel macroscópico es

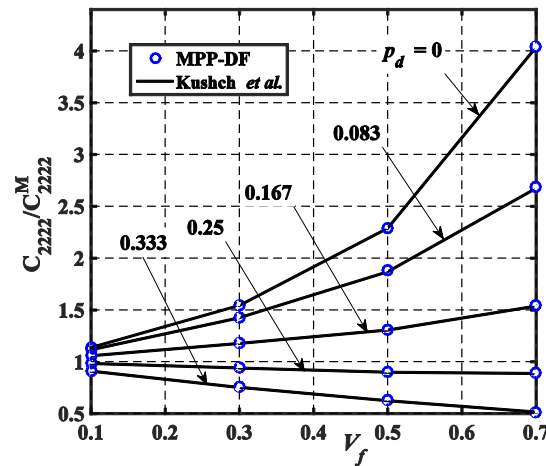
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.65)$$

Considerando la deformación impuesta y la tensión resultante, se obtiene

$$C_{2222} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} \quad (3.66)$$

Es importante destacar que debido al ordenamiento cuadrado, a la orientación de la fisura y a la pequeña deformación impuesta el problema no involucra contacto entre las superficies de la fisura. En otras palabras, las superficies de la fisura siempre se abren.

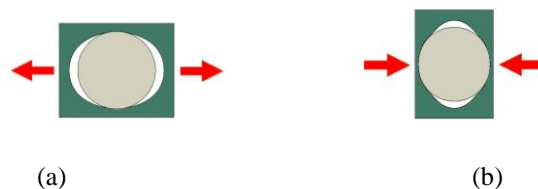
En la Figura 3.12, se comparan los resultados de la MPP-DF con aquellos reportados en [30] en función de la fracción de volumen de fibra y para diversos valores del parámetro de daño. Los resultados están normalizados con respecto a la componente  $C_{2222}^M = 10.37$  GPa, que es una componente del tensor constitutivo del material de la matriz. Se identifica un excelente acuerdo entre los resultados de la metodología desarrollada en esta tesis y los de Kushch *et al.*



**Figura 3.12:** Componente del tensor constitutivo macroscópico  $C_{2222}^M$ , normalizada con respecto a  $C_{2222}^M$ , obtenido mediante la MPP-DF y Kushch *et al.* [30] en función de la fracción de volumen de fibra  $V_f$ . Se considera ordenamiento cuadrado (Sq) y diversos valores del parámetro de daño en el perímetro  $p_d$ .

### 3.6.4. Problemas que involucran contacto en la CU

En esta sección se contrastan los resultados de problemas de homogeneización que involucran contacto en un problema de pequeñas deformaciones. El interés en este tipo de problemas surge debido a que si sobre la dirección perpendicular a las superficies de la interfaz fibra-matriz despegada actuara un estado tensional de tracción, las superficies se separarían sin ofrecer ninguna resistencia (Figura 3.13a). En cambio, al aplicar tensiones de compresión (Figura 3.13b) entre las superficies se desarrollará un estado tensional resultado de la imposibilidad de la interpenetración entre dichas superficies, originando una transferencia de carga entre las mismas [37]. Cuando un compuesto tiene daño en la interfaz fibra-matriz presenta distinto módulo de Young a tracción que a compresión y esto suele ser denominado como comportamiento bimodular. El problema de contacto se resuelve con la técnica mencionada en la Sección 4.3.

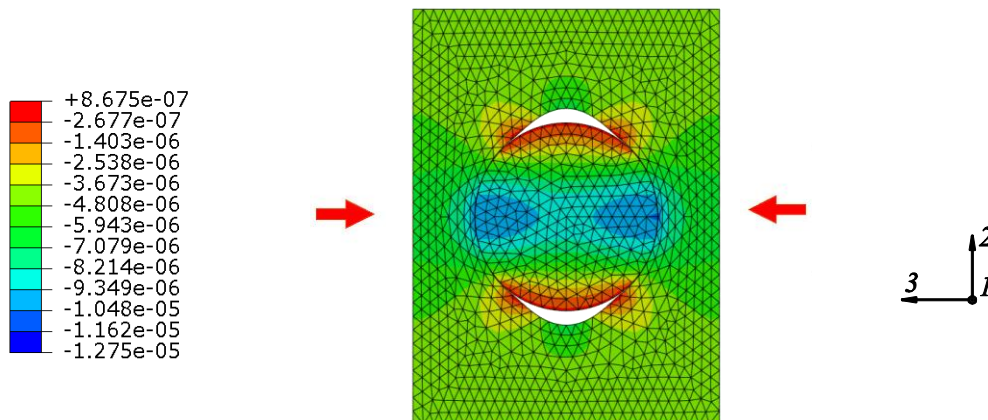


**Figura 3.13:** Celdas unitarias de material compuesto con daño completo en la interfaz fibra-matriz bajo: (a) tracción y (b) compresión.

Este problema fue estudiado por Teng [37], entre otros, para un compuesto con fracción de volumen de fibra desde 10% hasta 70% usando un EVR con una distribución de fibras cuadrada de 10x10 fibras. Los materiales se consideraron elásticos lineales e isotrópicos con propiedades:  $E^F = 80$  GPa,  $\nu^F = 0.2$ , y  $E^M = 4$  GPa y  $\nu^M = 0.35$ . Teng [37] utilizó condiciones de borde de tracción uniforme y logró representar un material cercano a uno periódico mediante el EVR con 100 fibras. Para estudiar los módulos elásticos iniciales del compuesto se utilizó una deformación transversal de valor bajo ( $\epsilon_{33} = 0.1\%$ )

La MPP-DF se utilizó en una CU bidimensional con ordenamiento cuadrado de fibras. Se utilizó una formulación de deformación plana generalizada que permite, entre otras características, imponer una tensión uniaxial en la dirección 3 (perpendicular a la dirección de la fibra). Se aplicó la ecuación (3.34) para el cálculo de la tensión de Cauchy y se emplearon condiciones de borde periódicas. Tanto en el trabajo de Teng [37] como en el presente, el contacto entre fibra y matriz se considera sin fricción ni cohesión. En las Figuras 3.14 y 3.15 se muestran las tensiones  $\sigma_{33}$  y  $\sigma_{22}$ , respectivamente, con los desplazamientos amplificados 175 veces para facilitar la interpretación de los resultados. Se puede notar que sobre la zona de contacto existen tensiones de compresión.

En la Figura 3.16 se comparan los resultados para compuestos con unión perfecta y con despegue en la interfaz, bajo un estado tensional uniaxial de tracción y otro de compresión. Se puede ver que hay un buen acuerdo entre los resultados de ambos modelos. Las pequeñas discrepancias podrían obedecer a la diferencia de condiciones de borde utilizadas en ambas metodologías.



**Figura 3.14:** Tensión de Cauchy  $\sigma_{33}$  [ $\times 10^{-3}$  GPa] en la celda unitaria sometida a compresión.

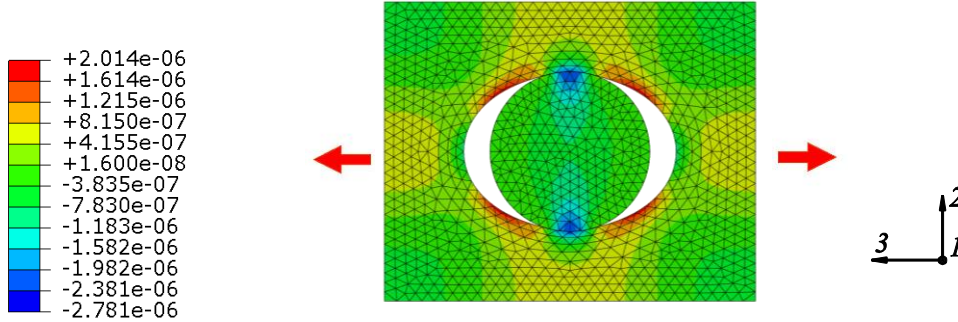


Figura 3.15: Tensión de Cauchy  $\sigma_{22}$  [ $\times 10^{-3}$  GPa] en la celda unitaria sometida a tracción.

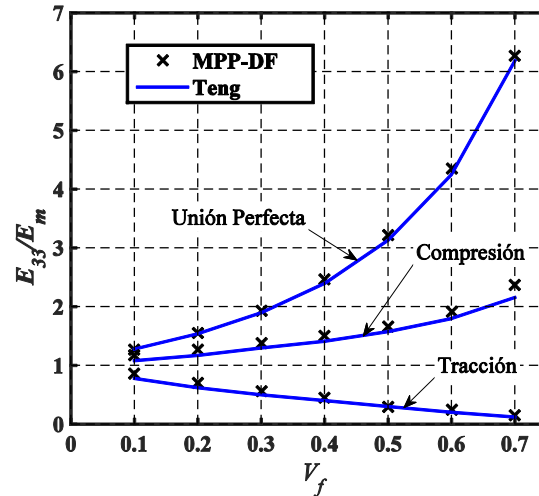


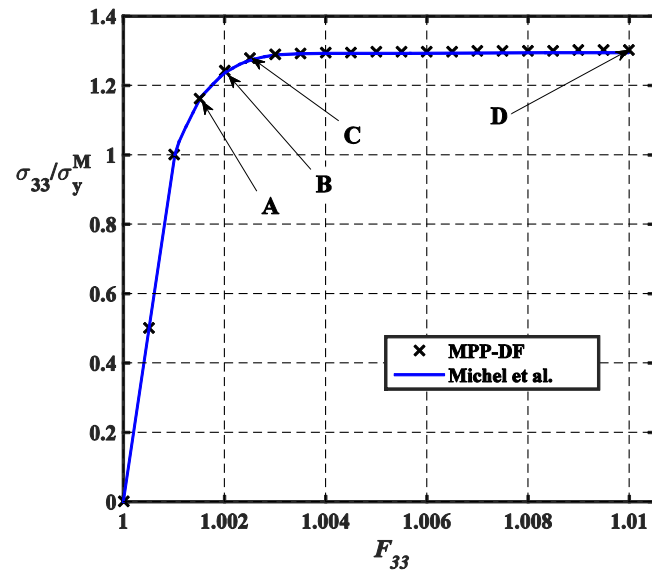
Figura 3.16: Módulo de Young transversal  $E_{33}$ , normalizado con respecto al módulo de la matriz  $E^M$ , en función de la fracción de volumen de fibra, Teng [37]. Resultados para compuestos con unión perfecta y con despegue en la interfaz fibra-matriz bajo estado tensional uniaxial de tracción y de compresión.

### 3.6.5. Problemas que involucran plasticidad en la CU

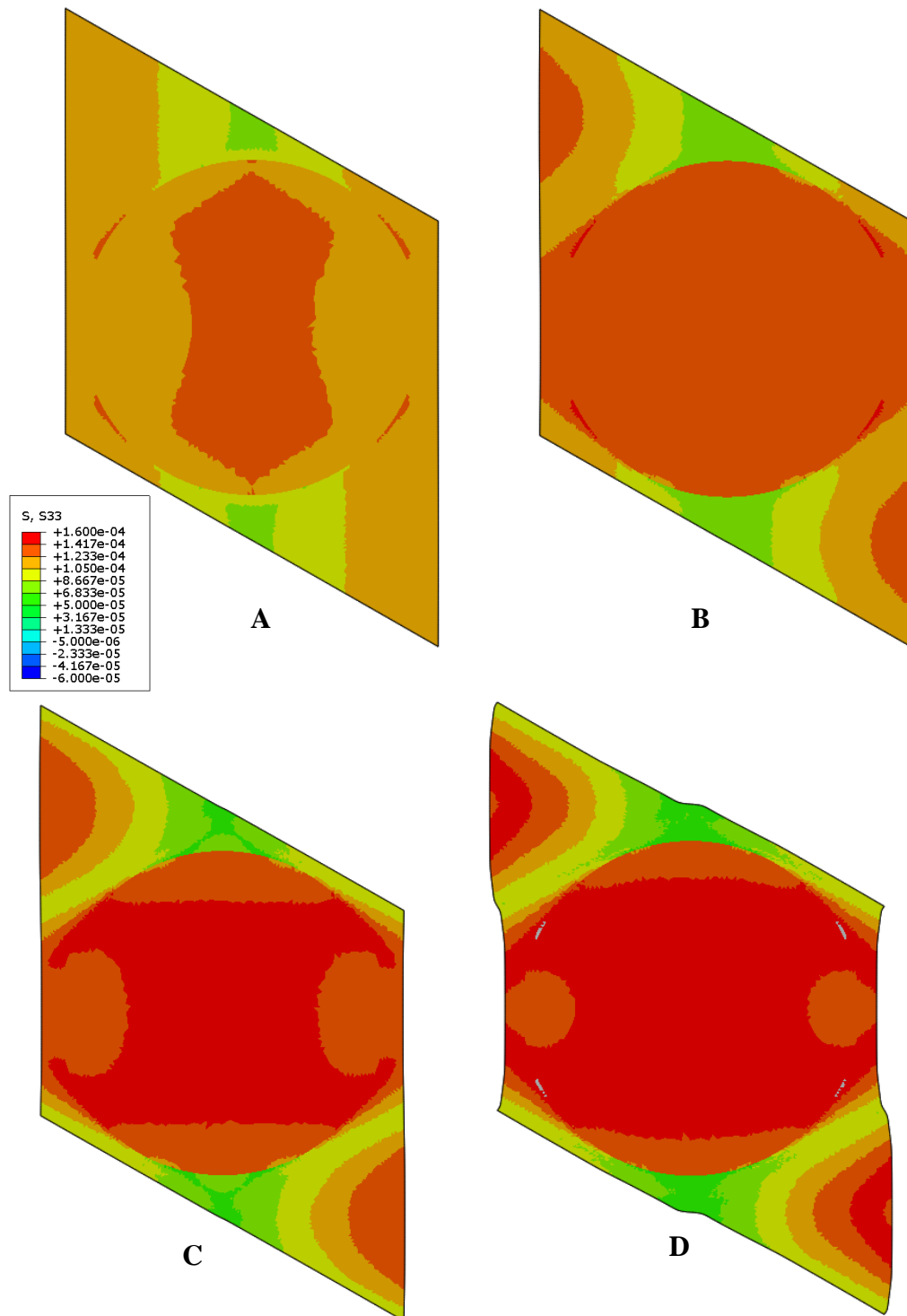
Michel *et al.* [76], consideraron la tensión de Cauchy macroscópica en la dirección 3 (perpendicular a la dirección de la fibra) en un compuesto periódico con ordenamiento de fibras hexagonal incluyendo plasticidad. La matriz y la fibra se consideran materiales elásticos-perfectamente plásticos con propiedades:  $E^M = E^F = 100$  GPa para el módulo de Young,  $\nu^M = \nu^F = 0.25$  para la relación de Poisson y  $\sigma_y^M = 100$  MPa,  $\sigma_y^F = 500$  MPa para la tensión de fluencia según el criterio de fluencia de von Mises y una regla de flujo asociada. La fracción de volumen de fibra es de 56.25% en una CU tridimensional. Se utilizó la CU prismática con un  $\theta = 60^\circ$ . Se aplica la ecuación (3.34) para la

homogeneización. Se impone una deformación correspondiente a un estado tensional uniaxial en la dirección 3, por lo tanto, el gradiente de deformación impuesto está dado por la ecuación (3.22). De forma similar a los casos anteriores de tensión uniaxial, se impone  $\lambda_3$  y se calcula  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de manera tal que las tensiones normales en las direcciones 1 y 2 sean nulas.

En la Figura 3.17 se muestran los resultados de Michel *et al.* [76] junto a los obtenidos con la MPP-DF. En la Figura 3.18, con los desplazamientos ampliados 5 veces, se muestran las tensiones  $\sigma_{33}$  en la CU correspondientes a los estados de deformación de los puntos A, B, C y D indicados en la Figura 3.17. Al igual que en los ejemplos anteriores, los resultados evidencian el buen desempeño de la nueva metodología, incluso en casos con plasticidad.



**Figura 3.17:** Tensión de Cauchy macroscópica en la dirección 3 normalizada con la tensión de fluencia de la matriz  $\sigma_y^M$ . Comparación entre los resultados de la MPP-DF y los de Michel *et al.* [76] para un compuesto periódico hexagonal con matriz y fibras elasto-plásticas perfectas.



**Figura 3.18:** Tensiones de Cauchy  $\sigma_{33}$  expresadas en  $[\text{GPa} \times 10^{-3}]$  correspondientes a los estados de deformación A, B, C y D indicados en la Figura 3.17.



### 3.7. Comentarios finales

La principal ventaja de la MPP-DF, presentada en este capítulo, es que evita la implementación de rutinas de integración numérica disminuyendo, por lo tanto, la complejidad de la implementación y el tiempo requerido para el post-proceso. Debido a que no se requiere la tensión en la escala microscópica este procedimiento requiere de menor espacio de almacenamiento que las metodologías de integración reportadas en la literatura. Ya que es obtenida a partir del balance de energía mecánica, ecuación (3.26), la MPP-DF aplica a todos los problemas mecánicos cuasi-estáticos incluso a aquellos que presenten no linealidades tanto materiales como geométricas. Esta metodología es adecuada para todas las condiciones de borde que puedan ser implementadas mediante nodos de control, como por ejemplo las condiciones de borde de desplazamientos lineales. Por último, es importante resaltar que la MPP-DF no tiene restricciones en cuanto a la forma de EVR que puede emplearse.

Es importante remarcar que la presente metodología sólo puede abordar los estados de tensión o deformación uniaxial y estado de corte simple, con los cuales se pueden obtener los tensores constitutivos tangentes efectivos asociados a dichos estados de tensión.



# Evaluación de propiedades elásticas en GFRP con daño en la interfaz

### 4.1. Introducción

El análisis de estructuras de materiales compuestos reforzados con fibras es comúnmente realizado usando lo que se conoce como la Teoría Clásica de Laminado (TCL, [1] y [104]) o bien teorías de orden superior [89], más sofisticadas, en las cuales el material heterogéneo fibra-matriz es reducido a un material equivalente ortótropo en el nivel macroscópico. Con el incremento de las capacidades de hardware y software ha sido posible simular el comportamiento mecánico en el nivel microscópico; este enfoque es adecuado para representar detalles en el nivel microscópico tales como fisuras, poros y otros defectos a través del uso de un modelo tridimensional de celdas unitarias. Sin embargo, para recuperar la visión completa del problema es necesario acoplar los niveles microscópico y macroscópico, y este puede ser un proceso costoso cuando ambos niveles son modelados mediante elementos finitos en un análisis no lineal. Este capítulo, cuyos resultados ya han sido publicados en [90], se enfoca en el modelado computacional de la micromecánica de un GFRP con daño localizado en la interfaz fibra-matriz, utilizando la metodología para el cálculo de tensiones macroscópicas presentada en el Capítulo 3. El objetivo es identificar la influencia del daño y otras características microscópicas en las propiedades macroscópicas, pero también, derivar funciones analíticas para dichas propiedades macroscópicas en términos de los parámetros de daño en el nivel microscópico. Tales expresiones pueden ser fácilmente incorporadas al nivel macroscópico por medio de la TCL o de una discretización de elementos finitos de la estructura con un esquema *off-line* (o precalculado), es decir, sin la necesidad de realizar cálculos en el nivel microscópico durante la solución del problema estructural en el nivel macroscópico. Es importante mencionar que en esta tesis no se estudia el crecimiento de este daño en la interfaz fibra-matriz.

En la Sección 4.2 se analizan los antecedentes reportados en la literatura, mientras que en la Sección 4.3 se presenta la metodología empleada en este capítulo. En la Sección 4.4 se detallan las características de las celdas unitarias con daño. Los resultados de las propiedades elásticas se resumen y discuten en la Sección 4.5. Finalmente, se presenta una aplicación a una estructura macroscópica en la Sección 4.6.

## 4.2. Revisión bibliográfica

La ocurrencia de daño en la interfaz fibra-matriz en GFRP ha sido detectada en estructuras sometidas a ambientes con humedad y temperatura elevada [17]. La evidencia de tal daño también ha sido provista por ensayos de laboratorio. En el trabajo reportado por Kajorncheappunngam *et al.* [91] se sumergieron muestras de resina y material compuesto a temperatura ambiente y a 60 °C, en varias soluciones de agua por cinco meses. Estos autores concluyeron que el módulo elástico del GFRP no fue afectado por el proceso higrotérmico, pero se identificaron significativas reducciones en su resistencia debido a que aparecieron fisuras en la matriz y en la interfaz fibra-matriz. El daño en la escala microscópica fue observado mediante SEM. En un estudio de degradación higrotérmica a 80 °C de resina y compuestos de turbinas eólicas, Faguaga *et al.* [23] encontraron significativos niveles de degradación en la matriz y en la interfaz fibra-matriz mediante la observación de las superficies de fractura. Para fibras orientadas aleatoriamente se reportó una reducción del 20% en el módulo de elasticidad. De la Osa *et al.* [92] estudiaron una matriz de vinil-éster y sus compuestos con fibras de vidrio largas bajo tiempos de exposición de 5 horas en agua destilada a 80 °C. La influencia del envejecimiento sobre el comportamiento a flexión fue estudiada mediante ensayos experimentales, siguiendo la norma ASTM D790-93, para diversas orientaciones de fibra: unidireccional, bidireccional y aleatoria. Se reportaron reducciones desde 13% hasta un 30% en el módulo de elasticidad a flexión. Kotani *et al.* [93] ensayaron una única fibra en matriz para medir las consecuencias de la degradación higrotérmica en agua desionizada a 80 °C durante 1000 horas. Los autores, que también proponen un modelo numérico, mostraron que hubo una pérdida de resistencia derivada de la degradación de la interfaz fibra-matriz. El módulo de elasticidad no se vio afectado, muy probablemente debido a que los ensayos de tracción fueron realizados con la carga en la dirección de las fibras.

Existen técnicas experimentales avanzadas que han sido también empleadas para identificar daño en el nivel microscópico. La tomografía computada de rayos X fue usada en [4] para llevar a cabo un escaneo tridimensional de la microestructura de compuestos de fibras cortas, mientras que en [5] se

relevó la geometría de tejidos 3D. La técnica XCT es capaz de capturar detalles de la microestructura tales como la longitud y orientación de fibras.

Las observaciones y ensayos como los antes descritos no son suficientes para explicar los mecanismos que originan las fisuras. Dependiendo del tiempo de exposición, de la temperatura, del tipo de compuesto y del tipo de agente de envejecimiento empleado se pueden presentar dos tipos principales de degradación: (i) a corto plazo se presenta la degradación física cuyos efectos sobre el comportamiento macroscópico suelen ser reversibles y (ii) la degradación química, manifestada a largos tiempos de exposición, con daños severos e irreversibles en las propiedades del compuesto, incluyendo reacciones químicas y fisuras visibles a nivel microscópico [17]. Una de las principales reacciones químicas es la hidrólisis [94] y algunos estudios indican que podría ser la causa de las fisuras encontradas en la escala microscópica [91]. Se han reportado modelos numéricos acoplado dicha reacción química y la difusión de agua en el polímero [95]. A pesar de que los resultados del modelo numérico tienen muy buen acuerdo con los resultados experimentales, dicho modelo no tiene aún la capacidad de predecir la generación de fisuras por hidrólisis, sino que sólo predice una etapa temprana de la reacción química (ver [96], [97] y [94]).

Debido a la limitación actual en el conocimiento sobre el origen de las fisuras no es posible predecir su nucleación y crecimiento. Por lo tanto, los modelos creados para predecir propiedades mecánicas de FRP envejecidos suponen que las fisuras ya han sido introducidas en el nivel microscópico, sin considerar la causa de la aparición de dicho daño. En estos modelos, el interés se centra en los cambios producidos en el comportamiento mecánico del material compuesto con respecto al estado inicial o sin envejecimiento. Modelos de daño de este tipo fueron desarrollados por Kaminski [25] en los que el daño se representa como vacíos semi-circulares en la interfaz fibra-matriz y el radio y el número de vacíos son variables del modelo. Un enfoque similar fue llevado a cabo por Godoy *et al.* [26] para identificar redistribuciones de tensiones causadas por daño en la interfaz fibra-matriz de la celda unitaria. Teng [27] evaluó el módulo de corte axial y longitudinal ( $G_{12}$  y  $G_{13}$ ) de un compuesto con un arreglo simétrico de fisuras arriba y debajo de cada fibra. El parámetro de daño en este caso es el ángulo que abarca el despegue entre la fibra y la matriz, con valores desde 0 hasta  $2\pi$ . Los resultados mostraron que hubo una pérdida inicial de la isotropía transversal del material. El módulo de corte axial en un compuesto con daño en la interfaz fibra-matriz fue investigado en la Referencia [28] usando una distribución estadística de tamaños de daño y teniendo en cuenta que las fibras pueden o no

tener daño en la interfaz fibra-matriz. Se encontró que la mayor reducción en el módulo de corte elástico ocurrió para una fracción de volumen de fibra del 80%. Kim *et al.* [29] investigaron una configuración con fisuras en la interfaz con orientación y tamaño aleatorios para evaluar el módulo de Young transversal y el módulo de corte transversal. En la celda unitaria considerada, cada fibra tiene una fisura en la interfaz fibra-matriz. Los resultados obtenidos por medio del método auto consistente (*Self-Consistent Method*) se compararon con resultados del MEF sobre una CU con condiciones de borde de TU. Se reportó una reducción del valor de los módulos mayor al 50% para un 30% de fracción de volumen de fibra. Los estudios reportados por Kushch *et al.* [30] a nivel de la celda unitaria incluyendo daño en la interfaz fibra-matriz permitieron la evaluación del tensor constitutivo elástico a nivel macroscópico para valores de fracción de volumen de fibra desde un 10% hasta 70%. Los autores utilizaron un modelo analítico de una CU con condiciones de borde periódicas y fue resuelto mediante una aproximación numérica. Los resultados están basados en un trabajo previo de los mismos autores [31] para un compuesto con fisuras abiertas, es decir sin considerar la posibilidad de que las superficies de la fisura entren en contacto entre sí. Otra manera de modelar daño en la interfaz fibra-matriz es por medio de una capa que rodea la fibra con propiedades basadas en los mecanismos de transferencia de carga entre la fibra y la matriz. Este modelo es capaz de representar interfaces fuertes o débiles [32 - 34], pero no puede tener en cuenta las interacciones de las superficies de la fisura.

El contacto entre las superficies de la fisura tiene una gran importancia en el comportamiento del FRP a nivel macroscópico. Existen muy pocos estudios que consideran tal fenómeno de contacto en la fisura. En la Referencia [35] se evaluó la influencia del despegue completo de las fibras en las propiedades elásticas transversales de un compuesto con matriz metálica unidireccional. Por medio de aproximaciones con expresiones analíticas los autores evaluaron los módulos transversales a tracción y compresión, lo que se conoce en la literatura como comportamiento bimodular. Shan y Chou [36] incluyeron la posibilidad de comportamiento bimodular considerando la separación y el contacto en la interfaz fibra-matriz para modelar el módulo transversal, el módulo de corte transversal y la relación de Poisson transversal. Teng [37] representó un despegue completo en la interfaz fibra-matriz en un compuesto reforzado con fibras mediante un EVR con 100 fibras con ordenamiento cuadrado. El modelo bidimensional del EVR fue resuelto mediante el MEF con condiciones de tracción uniforme. El número de fibras con daño fue incrementado hasta que todas las fibras mostraron daño. Se reportaron los módulos transversales a tracción, a compresión y la relación de Poisson transversal en función de la fracción de volumen de fibra, del número de fibras con daño.

Los modelos antes revisados tienen diversas limitaciones. En primer lugar, la mayoría de dichos modelos son bidimensionales con estados de deformación plana y, por lo tanto, supone que el daño en la interfaz fibra-matriz se encuentra a lo largo de toda longitud de la fibra. Es importante tener en cuenta esta configuración de daño ya que representa un caso extremo del tamaño de las fisuras. Sin embargo, esta configuración de daño no es observada en ensayos experimentales, sino que dicho daño se localiza en una porción de la longitud de las fibras. De aquí surge la necesidad de evaluar el comportamiento elástico del FRP con la interfaz fibra-matriz parcialmente despegada. En segundo lugar, empleando un modelo de CU de un FRP con la posibilidad de ocurrencia de contacto entre las superficies de la fisura, se tendrá la posibilidad de evaluar el comportamiento bimodular del FRP bajo tensiones normales de tracción y compresión. Además, un modelo de CU tridimensional permite no sólo representar las características de la fisura en forma más cercana a la realidad, sino también permite evaluar el comportamiento elástico en todas las direcciones. Esta forma de evaluar las propiedades macroscópicas constituye el cálculo *off-line* y permite derivar ecuaciones analíticas para las constantes elásticas de un material homogéneo equivalente en función de los parámetros de daño de la escala microscópica para su implementación posterior en modelos macroscópicos como se explica en la Sección 4.6. Es importante destacar que en esta tesis no se estudia el proceso de propagación de este daño en la interfaz fibra-matriz.

### 4.3. Metodología

En esta sección se presenta la metodología general utilizada para la obtención de las expresiones analíticas y el estudio paramétrico de las propiedades macroscópicas. El dominio al nivel microscópico es modelado mediante la micromecánica computacional. Se utilizaron celdas unitarias tridimensionales con daño localizado en la interfaz fibra-matriz, presentada en detalle en la siguiente sección. Se utilizaron condiciones de borde periódicas, como se explica en la Sección 3.3, para lograr representar un material periódico.

La evaluación de las propiedades elásticas se realiza a partir de las componentes apropiadas de tensión y deformación macroscópicas obtenidas con la metodología presentada en la Sección 3. Los módulos de Young transversales se obtienen como

$$E_2 = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} \quad (4.1)$$

y el módulo de corte  $G_{13}$  es

$$G_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2\varepsilon_{13}} \quad (4.2)$$

Los coeficientes de Poisson se calculan como

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ii}} \quad (4.3)$$

donde  $\varepsilon_{ii}$  es la deformación impuesta, y  $\varepsilon_{ij}$  es la deformación resultante (ecuación 4.32 en Ref. [1]).

En la celda unitaria se considera contacto sin fricción para modelar la fisura en la interfaz fibra-matriz y se implementa usando un enfoque de penalización. En la formulación de ABAQUS empleada en esta tesis, la superficie de la fisura se divide en una superficie maestra y una esclava, que están asociadas a la fibra y a la matriz, respectivamente. El modelo empleado para representar el comportamiento en la dirección normal a las superficies de contacto, conocido como “contacto duro”, establece

$$\begin{aligned} p &= 0 & \text{para } h < 0 & \text{ (abierta), y} \\ h &= 0 & \text{para } p > 0 & \text{ (cerrada)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

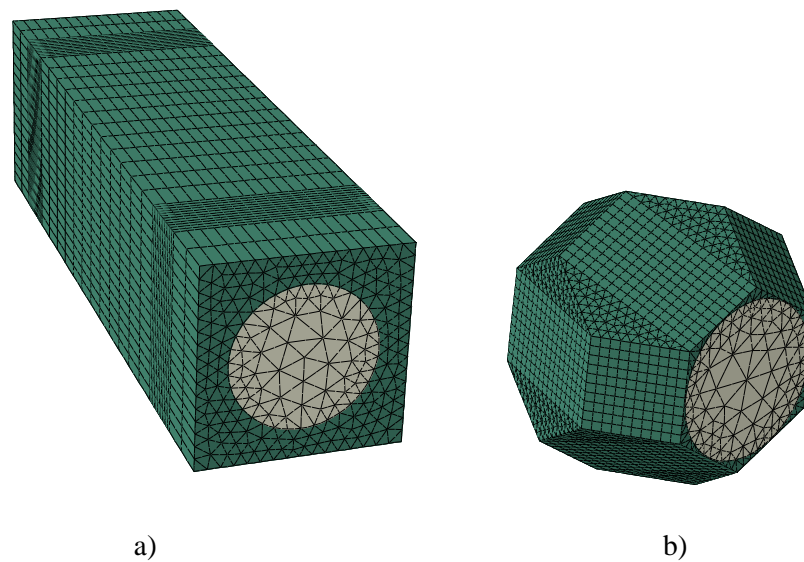
donde  $h$  es la longitud de penetración de un nodo esclavo en la superficie maestra, y  $p$  es la presión de contacto asociada a ese nodo. Entonces, el contacto entre las superficies de la fisura sólo incluyen tensiones normales de compresión en dichas superficies.

El programa de elementos finitos de propósito general ABAQUS [85] fue utilizado en los cálculos a nivel microscópico usando elementos cuadráticos de 15 y 10 nodos identificados como C3D15 y C3D10 en la nomenclatura de ABAQUS (ver Figura 4.1). Se utilizan mallas de 30,000 elementos finitos ya que al aumentar el número de elementos más del doble (82,000 elementos) las propiedades elásticas presentaron cambios menores al 0.1%. Para asegurarse de que el modelo de contacto presente un comportamiento que esté dentro de lo estipulado se aumentó el valor del parámetro de penalización. El valor de dicho parámetro en ABAQUS es igual 10 veces la mayor rigidez de un elemento finito en



el modelo. Se multiplicó ese penalizador por  $10^6$  y no se observaron cambios significativos en las propiedades macroscópicas.

Con los resultados numéricos de las propiedades elásticas en términos de los parámetros de daño se utilizó la técnica de mínimos cuadrados para expresar dichas propiedades elásticas como funciones analíticas. Tales relaciones analíticas son luego utilizadas para modelar daño en la escala macroscópica como propiedades modificadas pre-definidas. En general, se utilizaron ecuaciones polinomiales lineales en los coeficientes con algunas excepciones en las cuales se utilizaron ecuaciones no lineales en los coeficientes. Las ecuaciones fueron ajustadas usando el método de Levenberg - Marquardt descrito en la Referencia [98] (pág. 624 - 625). La metodología para la obtención de la forma final de las ecuaciones se presenta en el Apéndice B en conjunto con las ecuaciones y los valores de los coeficientes asociados.



**Figura 4.1:** Ejemplos de mallas de elementos finitos en celdas unitarias: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado.

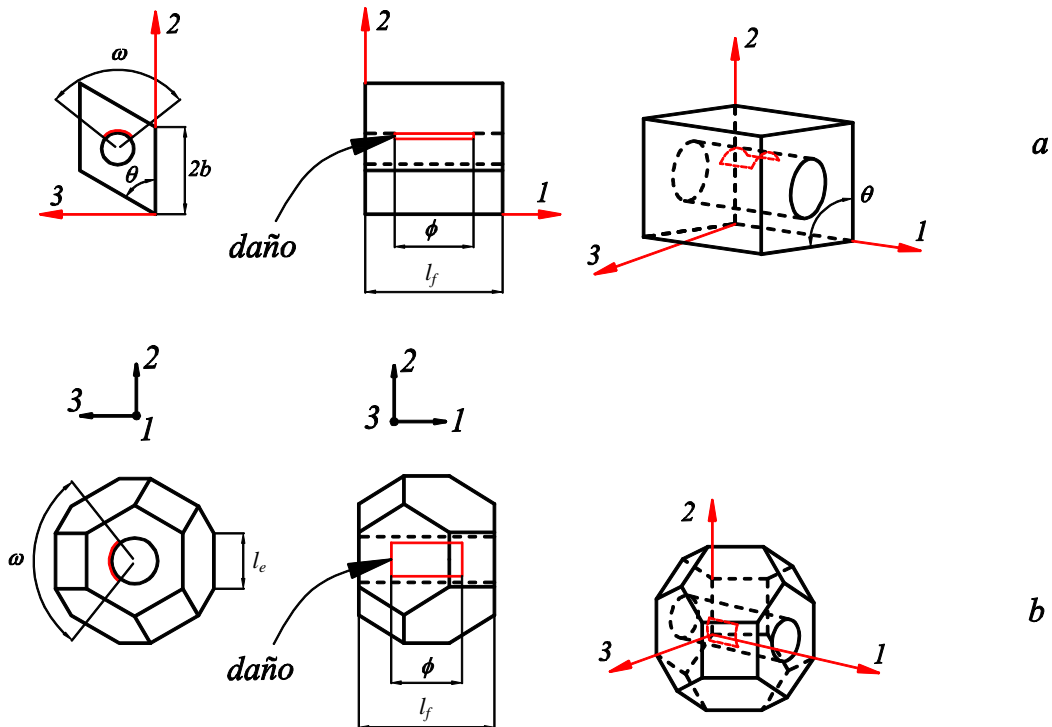
#### 4.4. Celdas unitarias con daño en la interfaz fibra-matriz

Es este capítulo se utilizaron las mismas formas de celda unitaria empleadas en el capítulo anterior, prismática y octaedro truncado, con la diferencia de que en este caso se considera daño en la interfaz fibra-matriz (ver Figura 4.2). Se usaron los mismos vectores de periodicidad del capítulo anterior. Para la CU prismática se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_1 &= 2\beta R_f \mathbf{i} \\
 \mathbf{P}_2 &= 2b \mathbf{j} \\
 \mathbf{P}_3 &= 2b \cos(\theta) \mathbf{j} + 2b \sin(\theta) \mathbf{k}
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

donde  $R_f$  y  $l_f$  son el radio y la longitud de la fibra; la relación de aspecto de la CU es  $\beta = l_f/D_f$ ;  $\theta$  y  $b$  se muestran en la Figura 4.2a. Mientras que para el octaedro truncado se tienen los vectores de periodicidad

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}_1 &= l_f \mathbf{i} \\
 \mathbf{P}_2 &= \frac{l_f}{3} \mathbf{i} + l_f \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{3} l_f \mathbf{k} \\
 \mathbf{P}_3 &= \frac{2}{3} l_f \mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3} l_f \mathbf{k}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$



**Figura 4.2:** Posición y dimensiones de las celdas unitarias con daño en la interfaz fibra-matriz: (a) Prisma; (b) Octaedro truncado.

Para construir la CU con forma de octaedro truncado se utilizan como datos de entrada a  $R_f$  y  $V_f$ . El dominio prismático tiene como datos de entrada  $R_f$ ,  $V_f$ ,  $\beta$ , y  $\theta$ , a partir de los cuales se evalúan los valores de  $l_f$  y  $b$ . El ángulo  $\theta$  toma valores de  $\theta = 60^\circ$  para configuraciones hexagonales (Hx), o  $\theta = 90^\circ$  en configuraciones cuadradas (Sq). En teoría, se establecen límites superiores para  $V_f$  cuando la fibra entra en contacto con las aristas de la CU. Para el dominio prismático,  $V_f^{Max} = \pi/4 \cdot \text{sen}(\theta)$  originando  $V_f^{Max} = 0.785$  para la configuración Sq, y  $V_f^{Max} = 0.68$  para Hx. Para el octaedro truncado,

$$V_f^{Max} = \frac{3\sqrt{3}}{32}\pi \cong 0.51 \quad (4.7)$$

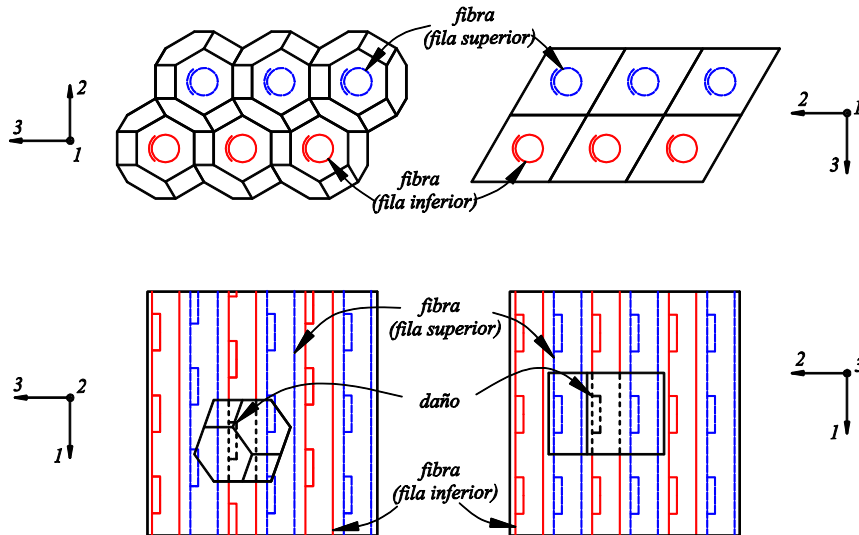
En este capítulo se representa el daño en la interfaz fibra-matriz como un despegue o separación de la misma y por lo tanto, dicho daño, siempre es una superficie cilíndrica. En otras palabras, la curva generatriz de las superficies del daño es un arco de circunferencia y la generatriz es un segmento. La ubicación del daño se muestra en la Figura 4.2, donde los dos planos de simetría del daño son paralelos a los planos coordenados 1-2 y 2-3 en la celda prismática y a los planos 2-3 y 1-3 en el octaedro truncado. Se utilizan dos parámetros adimensionales para cuantificar la cantidad de daño:  $p_d$  es el parámetro de daño que indica la fracción del perímetro y  $l_d$  es el parámetro de daño que representa la fracción de longitud de fibra despegada. Los parámetros  $p_d$  y  $l_d$  se evalúan con las medidas de daño de la Figura 4.2

$$l_d = \frac{\phi}{l_f}; \quad p_d = \frac{\omega}{2\pi} \quad (4.8)$$

donde  $\omega$  es expresado en radianes. Ambos parámetros toman valores desde 0 (cero) hasta 1 (uno), donde 0 (cero) se refiere a la configuración sin daño y 1 (uno) corresponde al máximo nivel de daño. Es importante notar que cuando alguno de los dos parámetros de daño es nulo el modelo representa un material sin daño.

Para  $\theta = 60^\circ$ , ambos tipos de CU representan el mismo ordenamiento hexagonal de fibras pero están asociadas a dos distribuciones de daño distintas, como se aprecia en la Figura 4.3 para la misma relación de aspecto  $\beta$ . Para comparar las propiedades elásticas provistas por ambas CU, se debe orientar las CU como se muestra en la Figura 4.3 de manera tal que el daño esté ubicado de forma similar en ambos dominios. Por lo tanto, debido a la posición del daño utilizada en esta tesis, las

propiedades a lo largo del eje 2 en la CU prismática son comparables a las propiedades a lo largo del eje 3 del octaedro truncado.



**Figura 4.3:** Distribución de daño provista por las dos celdas unitarias: octaedro truncado y prisma.

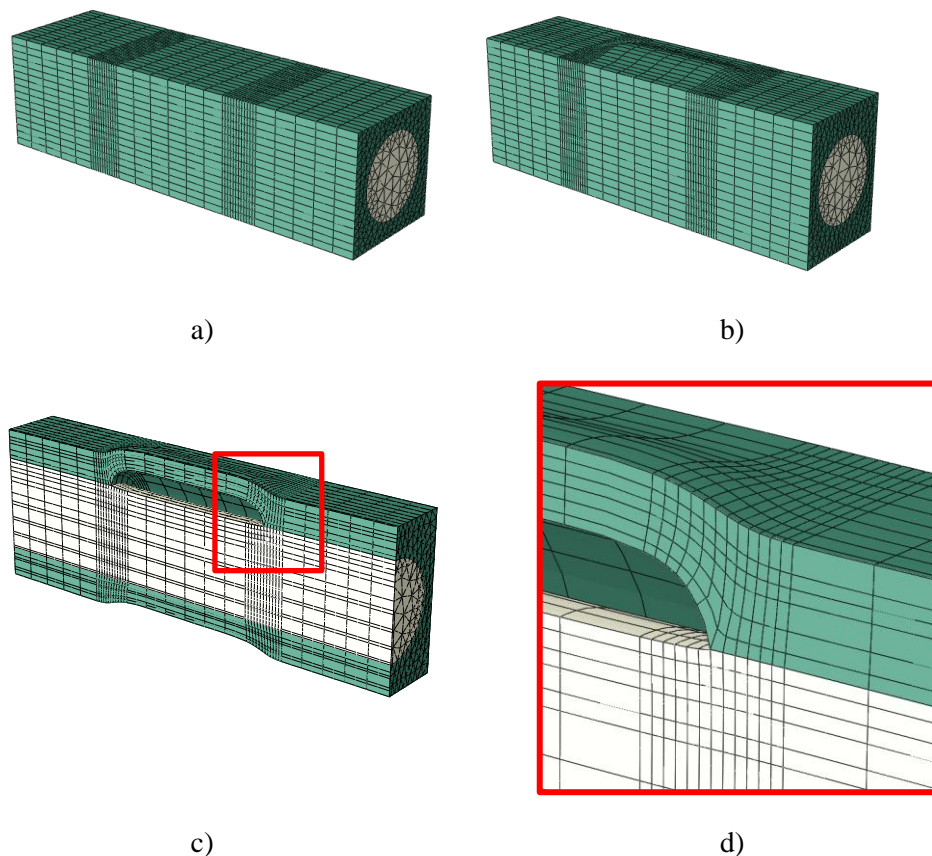
En la literatura está reportado (ver por ejemplo, la revisión de Comninou [99]) que al evaluar las tensiones en puntos cercanos a un extremo de fisura, situada en una interfaz entre dos materiales elásticos, los valores de las tensiones tienden a infinito cuando el punto de análisis tiende al extremo de fisura; esto suele denominarse singularidad de tensión. Sin embargo, se ha demostrado que tales valores sólo son elevados en las cercanías de dicho extremo [99]. Para tener en cuenta estos valores elevados de tensiones en el modelo de propiedades elásticas macroscópicas presentado en este capítulo se utiliza una mayor densidad de malla de elementos finitos en las cercanías de los extremos de fisura (Figura 4.4). De esta manera, las celdas unitarias con forma de prisma se discretizaron hasta obtener convergencia en la malla analizando las propiedades elásticas macroscópicas resultantes.

## 4.5. Resultados y discusión

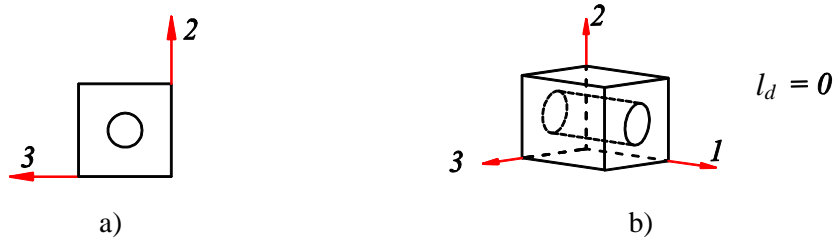
### 4.5.1. Verificación para casos extremos

Como ya se discutió en la Sección 4.2, en un modelo bidimensional (2D) con daño en la interfaz fibra-matriz se supone que el daño abarca toda la longitud de la fibra. De hecho, en todo modelo 2D, con o sin daño, se considera que todas las características (formas geométricas, propiedades mecánicas,

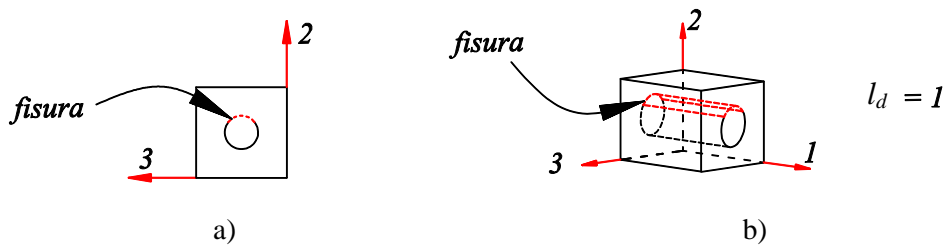
cargas, etc.) no se modifican a lo largo de la fibra. Por otro lado, un modelo tridimensional (3D) tiene la posibilidad de representar un daño localizado en zonas particulares que no necesariamente abarcan toda la longitud de la fibra. De esta manera, es posible identificar a los modelos 2D, con y sin daño, como casos extremos de un modelo 3D. En otras palabras, el modelo 3D presentado en la sección anterior, con  $l_d = 0$ , recupera la geometría de un modelo 2D sin daño (Figura 4.5), mientras que si se utiliza  $l_d = 1$  se obtiene una geometría idéntica a la de un modelo 2D con daño (Figura 4.6). Así, los resultados de los modelos 2D y 3D, para estos valores de  $l_d$  en particular, deben ser iguales. Por lo tanto, es de esperar que cuando en un modelo 3D el parámetro  $l_d$  tienda a los valores extremos (uno y cero), los valores de las propiedades elásticas del modelo 3D también tiendan a los valores del modelo 2D. Esto se utiliza en esta sección para verificar los resultados del modelo 3D comparados con los resultados del modelo 2D utilizado en la Sección 3.6.3.



**Figura 4.4:** Densificación localizada en celdas unitarias con forma de prisma: (a) celda unitaria sin cargas, (b) estado deformado de celda unitaria sometida a tracción en dirección 2 con los desplazamientos aumentados 200 veces, (c) vista en corte de mallado, (d) detalle de un extremo de fisura.

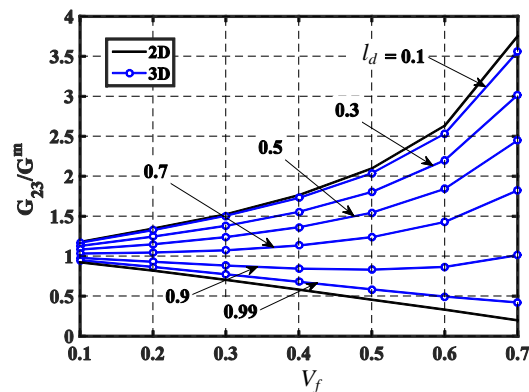


**Figura 4.5:** Comparación de microestructuras de modelos de materiales sin daño. Ambos modelos representan el mismo material: (a) modelo bidimensional (2D) y (b) modelo tridimensional (3D).

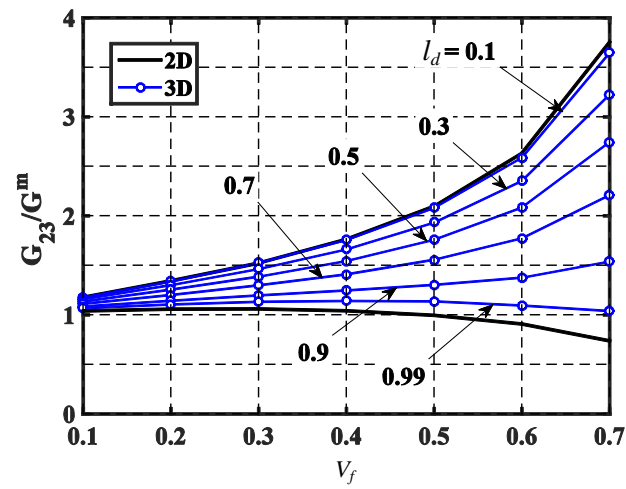


**Figura 4.6:** Comparación de microestructuras de modelos de materiales con daño. Ambos modelos representan el mismo material: (a) modelo bidimensional (2D) y (b) modelo tridimensional (3D).

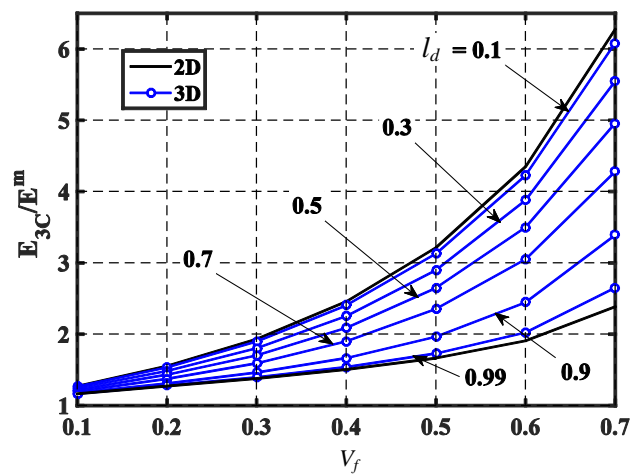
Para esta verificación se adoptan valores de  $\beta = 5$ ,  $E^F = 80$  GPa,  $\nu^F = 0.2$ ,  $E^M = 4$  GPa y  $\nu^M = 0.35$ . En las Figuras 4.7 y 4.8 se grafica el valor del módulo de corte transversal  $G_{23}$ , mientras que el módulo elástico a compresión  $E_{3C}$  es graficado en las Figuras 4.9 y 4.10. Puede notarse que cuando  $l_d$  se aproxima a los valores 1 (uno) y 0 (cero), los resultados del modelo 3D tienden a los del 2D lo cual indica que el modelo 3D tiene buen comportamiento.



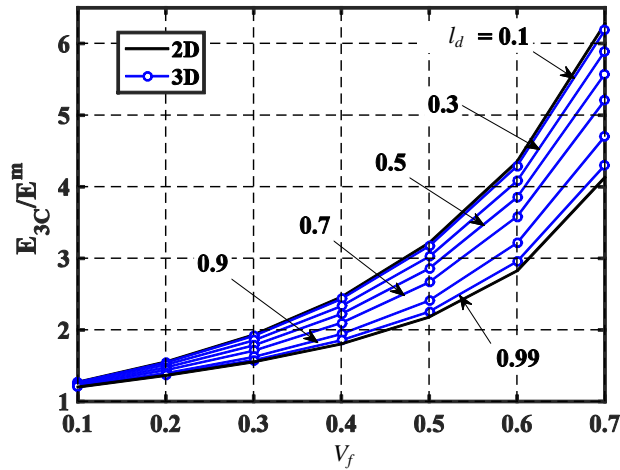
**Figura 4.7:** Módulo de corte transversal  $G_{23}$  para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra  $V_f$  con  $p_d = 1$  y ordenamiento Sq.



**Figura 4.8:** Módulo de corte transversal  $G_{23}$  para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra  $V_f$  con  $p_d = 0.5$  y ordenamiento Sq.



**Figura 4.9:** Módulo de Young transversal en compresión  $E_{3C}$  para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra  $V_f$  con  $p_d = 1$  y ordenamiento Sq.



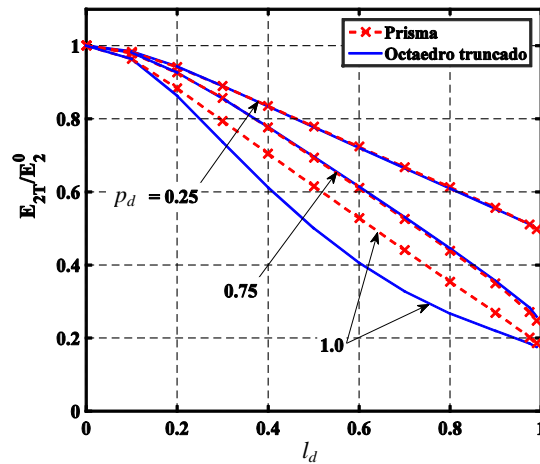
**Figura 4.10:** Módulo de Young transversal en compresión  $E_{3C}$  para los modelos 3D y 2D en función de la fracción de volumen de fibra  $V_f$  con  $p_d = 0.5$  y ordenamiento Sq.

#### 4.5.2. Estudios paramétricos

Para estudiar la influencia de cada una de las características microscópicas del material en las propiedades macroscópicas del mismo, se analiza un compuesto particular con  $E^F = 80$  GPa,  $\nu^F = 0.2$ ,  $E^M = 4$  GPa y  $\nu^M = 0.35$  en el que tanto el material de la fibra como el de la matriz son modelados como elásticos lineales e isótropos. La Figura 4.11 muestra el módulo elástico transversal a tracción  $E_{2T}$  normalizado con respecto al mismo módulo pero del material sin daño para dos configuraciones de fibras Hx pero con distribuciones tridimensionales distintas. Dichas distribuciones son las mostradas en la Figura 4.3 para la CU prismática y el octaedro truncado. Ambas CU tienen la misma relación de aspecto  $\beta$  y una  $V_f = 50\%$ .

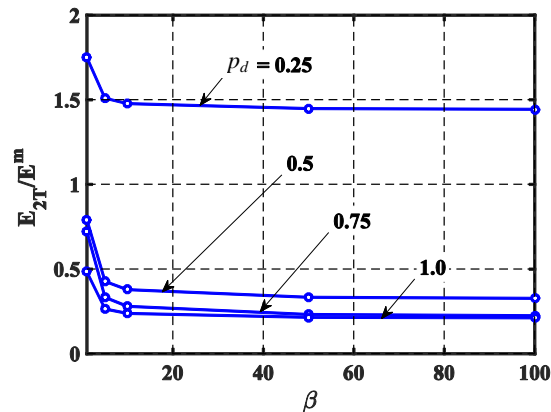
Para pequeños valores de  $p_d$ , ambas configuraciones predicen los mismos valores; sin embargo, se encuentran algunas diferencias para  $p_d = 1$  y  $0.2 \leq l_d \leq 0.9$ . Para  $l_d$  cercano a 1 (uno), ambas distribuciones arrojan similares valores de  $E_{2T}$ ; esto indica que el módulo de ambos modelos 3D se acercan al módulo de un modelo 2D.





**Figura 4.11:** Influencia de la distribución de daño en el módulo de Young transversal normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente a un material sin daño; se considera ordenamiento Hx y  $V_f=50\%$ .

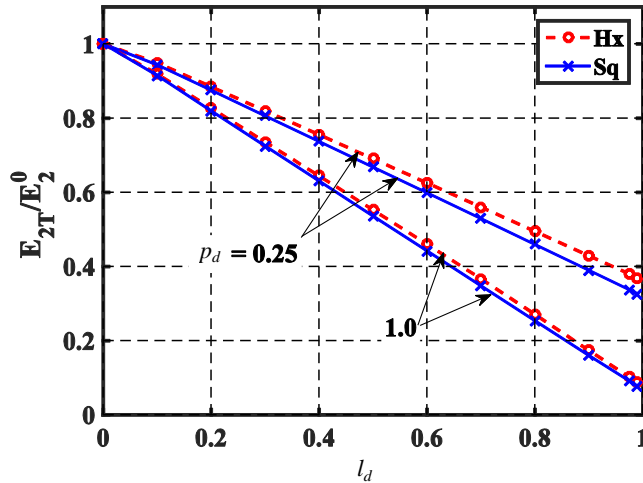
Respecto a la influencia de la relación de aspecto, en la Figura 4.12 se muestran los resultados de  $E_{2T}$  para compuestos con  $1 \leq \beta \leq 100$ ,  $V_f = 70\%$ , una configuración de fibras Sq,  $l_d = 0.99$  y varios valores de  $p_d$ . Los resultados muestran pequeñas variaciones en función de  $\beta$  aunque, para valores menores a  $\beta = 5$ , se presentan módulos  $E_{2T}$  con valores más grandes.



**Figura 4.12:** Influencia de la relación de aspecto  $\beta$  en el módulo de Young transversal normalizado con respecto al módulo de la matriz para un compuesto con ordenamiento Sq,  $V_f = 70\%$ , y  $l_d = 0.99$ .

La influencia de la configuración de fibra (ya sea Sq o Hx) en el  $E_{2T}$ , de un material con daño, normalizado con respecto al de un material sin daño  $E_2^0 = 13.87$  GPa para Hx y  $E_2^0 = 17.4$  GPa para Sq

se muestra en la Figura 4.13. Para los cálculos se consideraron valores de  $V_f = 60\%$  y  $\beta = 5$ . Puede verse que hay una reducción casi lineal en el módulo  $E_{2T}$  respecto de  $l_d$ . Los resultados muestran que, para el mismo daño, el módulo del material con la configuración Sq es el más afectado.



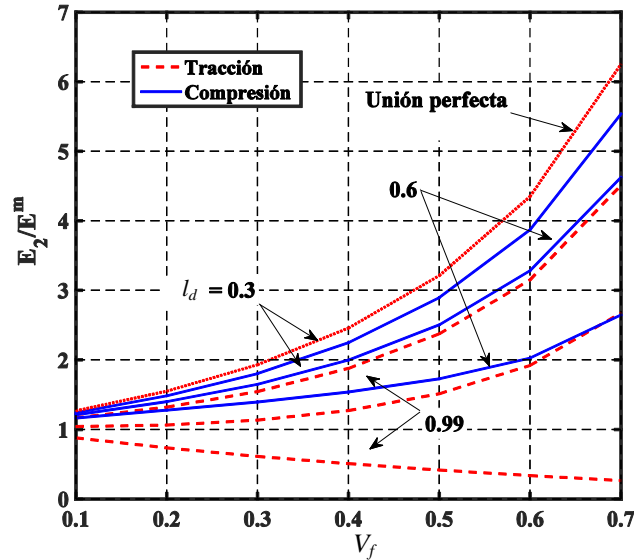
**Figura 4.13:** Influencia del ordenamiento de fibra en el módulo transversal normalizado con respecto a los valores de módulos correspondientes a materiales sin daño para cada ordenamiento de fibras. Resultados para  $V_f = 60\%$ , y  $\beta = 5$ .

La influencia de  $V_f$  en el módulo  $E_2$  ha sido estudiada para la configuración  $\beta = 5$  y  $p_d = 1$ . En la Figura 4.14 se grafican los valores de los  $E_2$  resultantes bajo tracción y compresión para  $l_d = 0.3, 0.6$  y  $0.99$ , en conjunto con los valores del módulo del compuesto con unión perfecta. El módulo de tracción muestra mayores cambios que el módulo de compresión; Teng [37] reportó tendencias similares para modelos con  $l_d = p_d = 1$ , identificando al material como bimodular. Los módulos transversales presentan reducciones respecto al módulo del material sin daño (unión perfecta) para todos los valores de  $V_f$  pero los efectos son más severos para grandes valores de  $V_f$ . Tal tendencia ha sido también reportada para módulos de corte en dirección axial en la Referencia [28] para  $l_d = 1$  (modelos bidimensionales).

### 4.5.3. Formas analíticas de las constantes elásticas

Los estudios paramétricos reportados en las secciones precedentes ilustran el comportamiento de una CU con daño; sin embargo, el propósito de este estudio no es sólo proveer los aspectos cualitativos de la respuesta sino también obtener expresiones analíticas de las propiedades elásticas, tal como se

usan en la TCL, modificadas para considerar los efectos en la escala macroscópica del daño en la interfaz fibra-matriz. Para lograr esto, los resultados son aproximados por funciones analíticas en términos de los parámetros de daño.



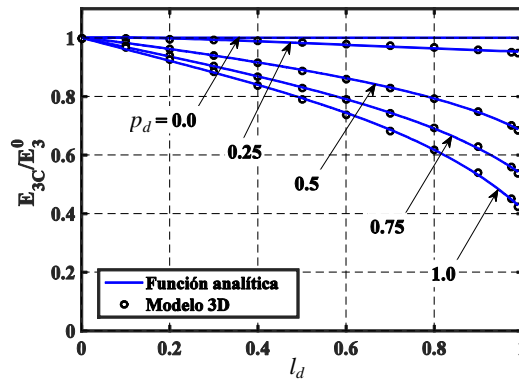
**Figura 4.14:** Influencia de la fracción de volumen de fibra en el módulo transversal normalizado con respecto al módulo de la matriz. Resultados para ordenamiento Sq,  $p_d = 1$ , and  $\beta = 5$ .

Para construir las funciones analíticas basadas en modelado 3D se utiliza la técnica de mínimos cuadrados. Las funciones están limitadas a  $V_f = 70\%$ , ordenamiento Sq y parámetros de daño  $p_d$  y  $l_d$  entre 0 (cero) y 1 (uno). Para realizar las aproximaciones, se utilizaron:  $E^F = 80$  GPa,  $\nu^F = 0.2$ ,  $E^M = 4$  GPa y  $\nu^M = 0.35$ , con  $R_f = 3.5 \times 10^{-6}$  m y  $\beta = 5$ . Los gráficos de los resultados analíticos y numéricos para los módulos elásticos normalizados con respecto al valor del módulo del material sin daño se muestran en las Figuras 4.15 a 4.23. Las expresiones analíticas son resumidas en el Apéndice B.

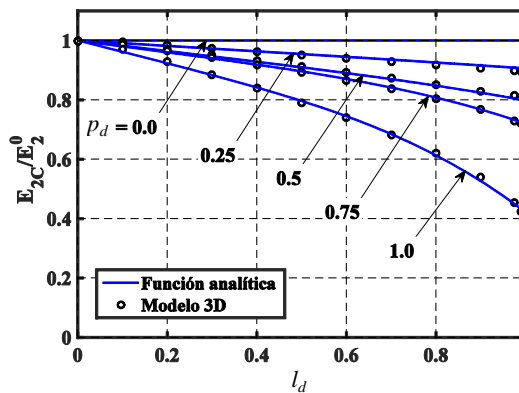
El módulo en la dirección de la fibra  $E_1$  no es significativamente afectado por el daño, resultando 57.23 GPa en compresión y 57.19 GPa en tracción para el máximo nivel de daño dado por  $p_d = 1$  y  $l_d = 0.99$ . Por lo que, esta propiedad elástica puede determinarse por medio de la regla de las mezclas con la que se obtiene 57.2 GPa.

Los módulos  $E_{3C}$  y  $E_{2C}$  (bajo compresión) mostraron las menores reducciones debidas al daño (ver Figuras 4.15 y 4.16). Estas propiedades muestran una pequeña no linealidad con respecto a  $l_d$ . Los módulos  $E_{3T}$  y  $E_{2T}$  en las Figuras 4.17 y 4.18, respectivamente, tienen una marcada disminución con el aumento del daño. Dicha reducción tiene un comportamiento casi lineal respecto a  $l_d$ .

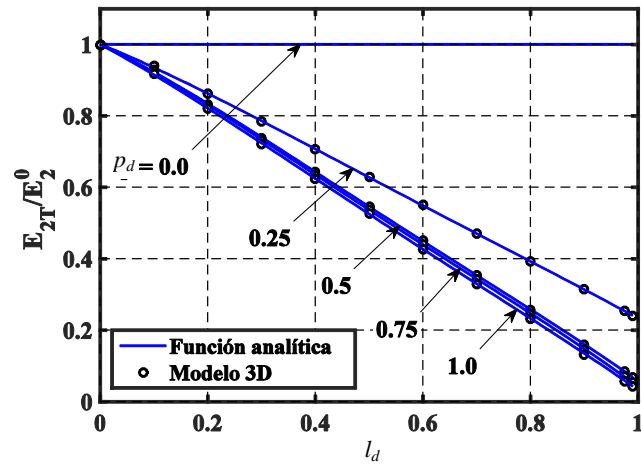
Los módulos  $G_{23}$ ,  $G_{12}$  y  $E_{2T}$ , presentan significativas reducciones con pequeños valores de  $p_d$  (por ejemplo  $p_d = 0.25$ ), mientras que, para los mismos valores de  $p_d$ , los módulos  $G_{13}$  y  $E_{3T}$  presentaron cambios menores al 4%. Esto ocurre debido a la orientación del despegue con respecto de la dirección de la carga; esta tendencia ha sido reportada para  $l_d = 1$ , en modelos bidimensionales, en la Ref. [27].



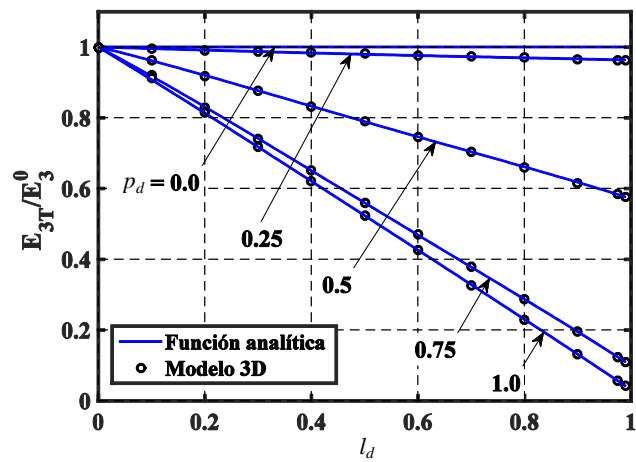
**Figura 4.15:** Módulo de Young  $E_{3C}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente a un material sin daño del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



**Figura 4.16:** Módulo de Young  $E_{2C}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente a un material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



**Figura 4.17:** Módulo de Young  $E_{2T}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



**Figura 4.18:** Módulo de Young  $E_{3T}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .

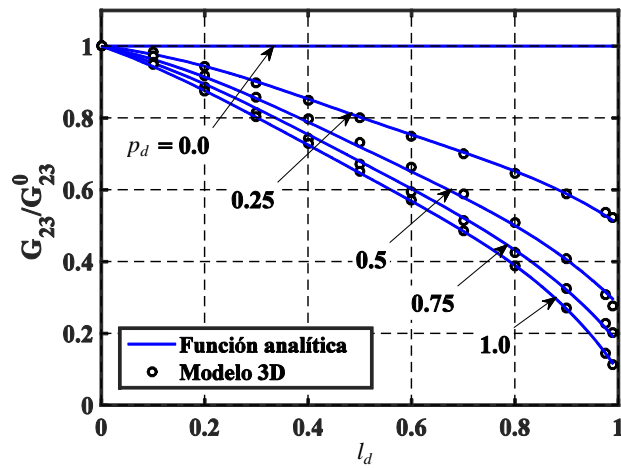


Figura 4.19: Módulo de corte  $G_{23}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .

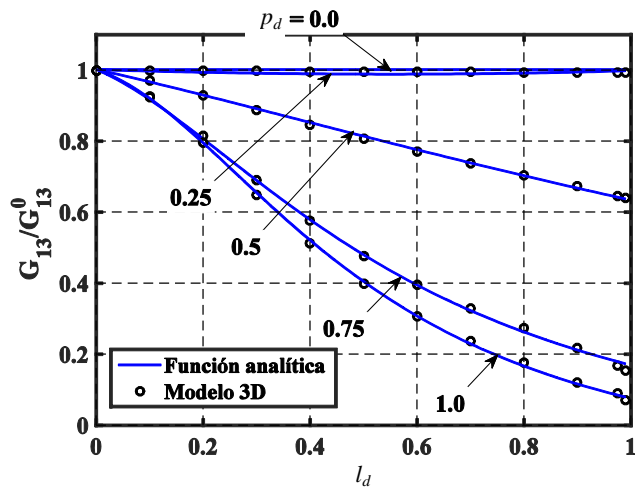
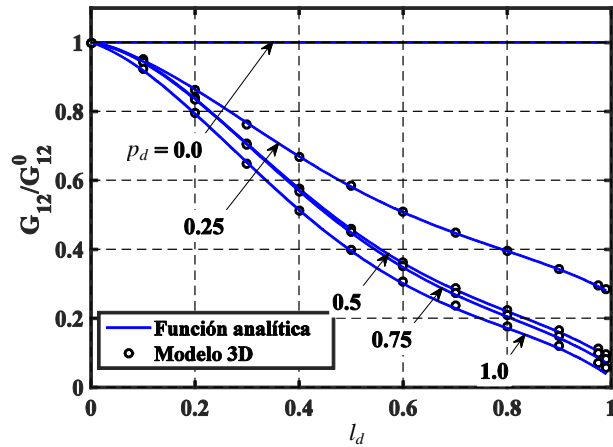
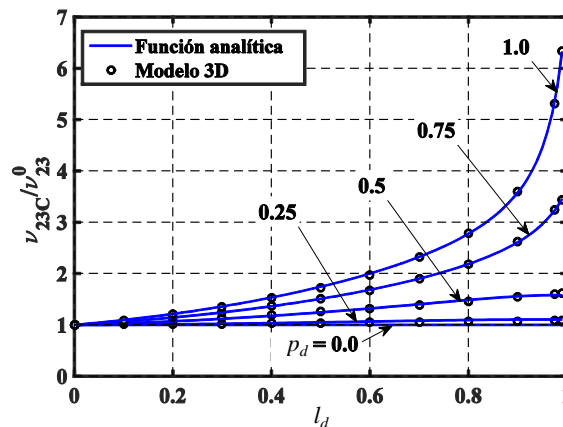


Figura 4.20: Módulo de corte  $G_{13}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



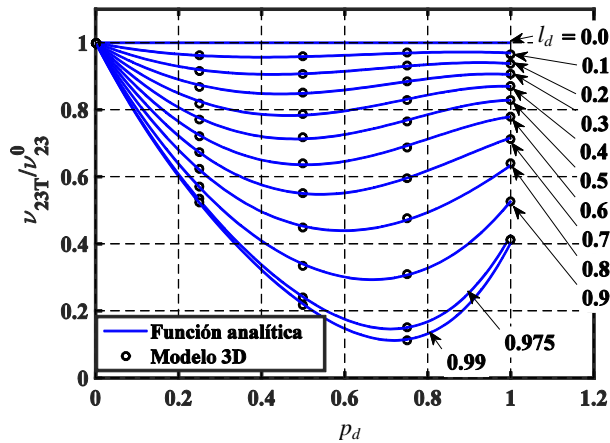
**Figura 4.21:** Módulo de corte  $G_{12}$  normalizado con respecto al valor del módulo correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .

La relación de Poisson  $\nu_{23C}$  se refiere a las deformaciones en la dirección 3 causada por la compresión en la dirección 2; los resultados para esta relación se presentan en la Figura 4.22. Se identifica un incremento de  $\nu_{23C}$  cuando se aumenta el nivel de daño. Debido al daño en la interfaz fibra-matriz la fibra no puede transferir carga a la matriz en las zonas donde la normal a la interfaz fibra-matriz es casi paralela a la dirección 3. En tales zonas, la fisura se abre incrementando la deformación macroscópica en la dirección 3 con respecto al valor de  $\nu_{23C}$  de un material sin daño.

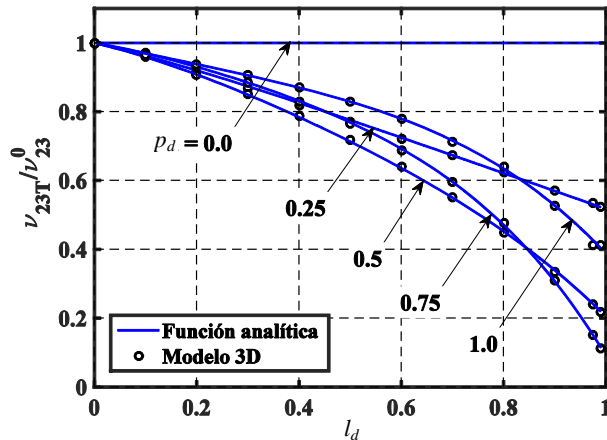


**Figura 4.22:** Relación de Poisson  $\nu_{23C}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .

La Figura 4.23 muestra el valor de la relación de Poisson  $\nu_{23T}$  en función del parámetro de daño  $p_d$ . En este caso, una deformación de tracción en la dirección 2 incrementa la deformación macroscópica en esta dirección debido a que la fisura se abre en las zonas donde la normal es paralela a la dirección 2. Sin embargo, para  $p_d = 1$  hay un pequeño incremento en  $\nu_{23T}$  causado por un incremento en la deformación macroscópica en la dirección 3 en comparación con la restricción debida a la fibra para  $p_d = 0.75$ . En la Figura 4.24 se muestra la relación de Poisson  $\nu_{23T}$  en función del parámetro  $l_d$ .



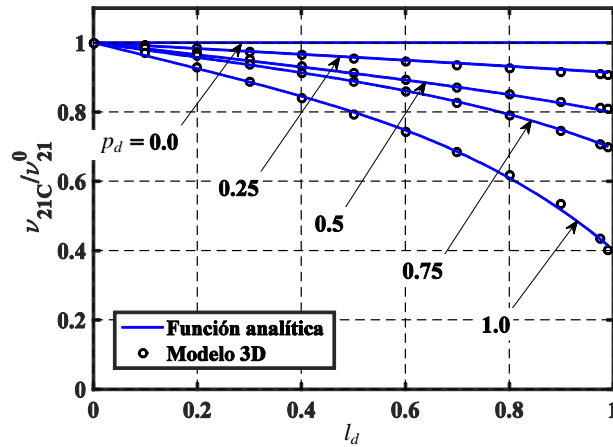
**Figura 4.23:** Relación de Poisson  $\nu_{23T}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



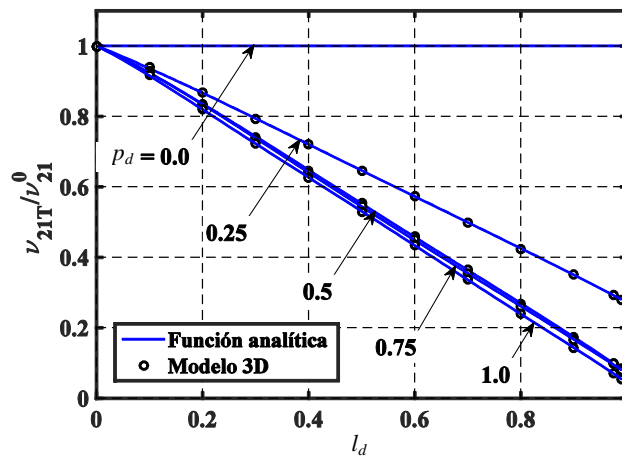
**Figura 4.24:** Relación de Poisson  $\nu_{23T}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



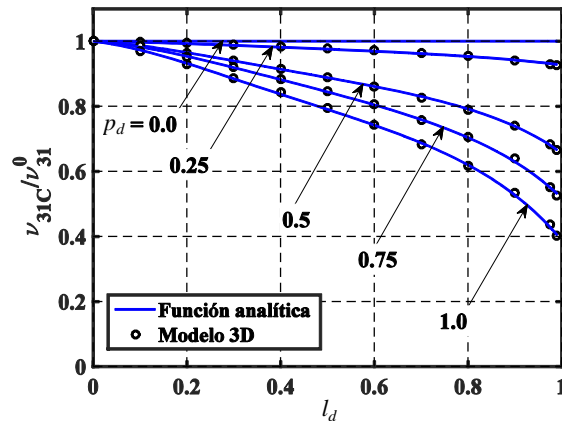
Las relaciones de Poisson  $\nu_{21C}$ ,  $\nu_{21T}$ ,  $\nu_{31C}$ , y  $\nu_{31T}$  son graficadas en las Figuras 4.25 a 4.28. Aquellos coeficientes correspondientes a tracción muestran cambios lineales respecto a  $l_d$ , mientras que los coeficientes correspondientes a compresión presentan una variación no lineal respecto a  $l_d$ . Las reducciones observadas se deben a que la fisura en la interfaz fibra-matriz no permite una efectiva transferencia de carga en la dirección 1.



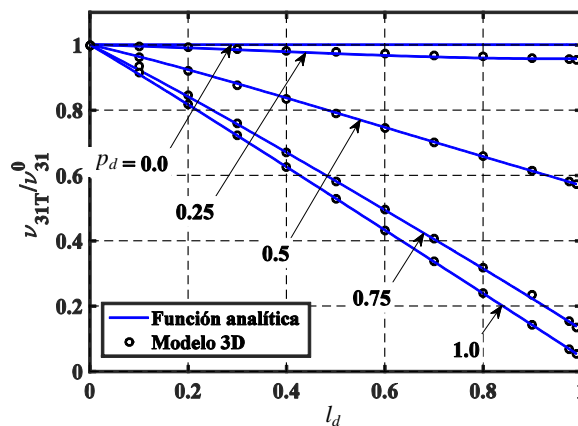
**Figura 4.25:** Relación de Poisson  $\nu_{21C}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



**Figura 4.26:** Relación de Poisson  $\nu_{21T}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



**Figura 4.27:** Relación de Poisson  $\nu_{31C}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .



**Figura 4.28:** Relación de Poisson  $\nu_{31T}$  normalizada con respecto al valor correspondiente al material sin daño, del modelo 3D y de la función analítica en términos de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  con ordenamiento Sq,  $V_f=70\%$  y  $\beta=5$ .

#### 4.6. Aplicación a la teoría clásica de laminado

Las ecuaciones para obtener las propiedades elásticas de la CU basadas en las características del daño en la interfaz fibra-matriz, reportadas en la sección anterior y detalladas en el Apéndice B, pueden ser usadas como parte de un análisis en el nivel macroscópico. Esta sección reporta una aplicación donde se obtiene el máximo desplazamiento en una placa plana laminada usando TCL [1] en un modelo de elementos finitos; esto permite realizar el análisis macroscópico teniendo en cuenta variables microscópicas y macroscópicas a la vez.

Se considera una placa laminada [0/90] con daño y por lo tanto con un material bimodular (ver Referencia [100]) simplemente apoyada, y con el origen del eje  $(x, y)$  ubicado en una esquina. Las condiciones de borde empleadas se expresan como

$$w=0 \text{ en } y=0; y=a; x=0; x=a \quad (4.9)$$

$$v=0 \text{ en } x=0, x=a \quad (4.10)$$

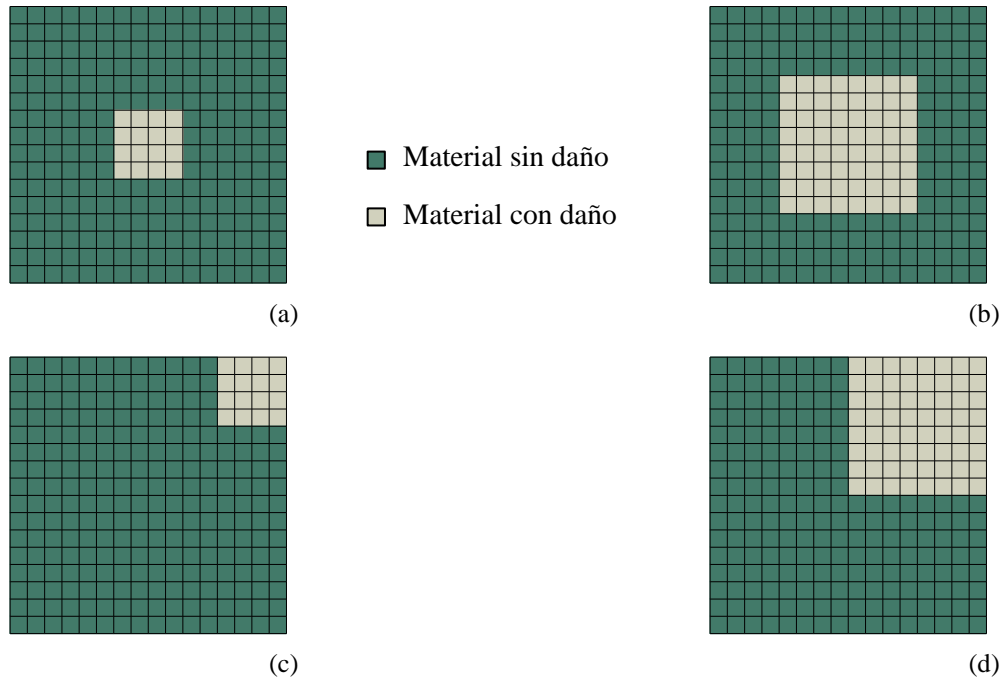
$$u=0 \text{ en } y=0, y=a \quad (4.11)$$

La placa está sometida a una presión dada por

$$q = -1[kPa] \times \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \quad (4.12)$$

El problema de la placa es resuelto con el MEF utilizando el programa ABAQUS. La placa cuadrada tiene un lado de  $a = 2$  m y cada lámina tiene 10 mm de espesor. Para la simulación se emplea una malla de  $16 \times 16$  elementos lineales tipo cáscara (elemento S4R en la nomenclatura de ABAQUS). Se tiene en cuenta las diferentes propiedades en tracción y compresión, de manera que la lámina en compresión en la dirección 2 (orientación  $0^\circ$ ) tiene un módulo  $E_{2C}$ , mientras que el laminado a  $90^\circ$  tiene un módulo  $E_{2T}$ .

Para investigar el comportamiento incluyendo daño se consideraron diversos escenarios. Se considera que la placa está dañada en una región cuadrada de la misma, que se ubica ya sea en una esquina o en el centro de la placa (Figura 4.29). Se supone que el daño afecta a la lámina superior ( $90^\circ$ ) o ambas. Las propiedades elásticas se evalúan para los valores de parámetros de daño  $l_d = 0.4$ ,  $p_d = 0.7$  y  $l_d = p_d = 1$  utilizando las ecuaciones desarrolladas en este Capítulo. En las Tablas 4.1 y 4.2 se presentan los resultados para el desplazamiento máximo de la placa. Como se esperaba, el incremento más severo en el desplazamiento ocurre cuando el daño afecta a la zona central y a todas las láminas y para valores de  $l_d = p_d = 1$ , con un incremento del 68% respecto a la configuración sin daño. Dado que el laminado [0/90] está en flexión los resultados reflejan, principalmente, la influencia de la degradación del módulo de Young transversal y, en menor medida, la degradación del módulo de corte.



**Figura 4.29:** Placas con regiones dañadas de distintos tamaños y diferentes ubicaciones. Placa cuadrada de lado  $a = 2$  m. (a): región dañada de tamaño  $a/4 \times a/4$  ubicada en el centro de la placa, (b) región dañada de tamaño  $a/2 \times a/2$  ubicada en el centro de la placa, (c) región dañada de tamaño  $a/4 \times a/4$  ubicada en una esquina de la placa, (d) región dañada de tamaño  $a/2 \times a/2$  ubicada en una esquina de la placa.

**Tabla 4.1.** Desplazamiento en el centro de la placa, normalizado con respecto al valor sin daño  $w^0 = 2.107$  mm, para regiones de diferentes tamaños y con diferentes ubicaciones. Los parámetros de daño microscópicos son  $l_d = p_d = 1$ .

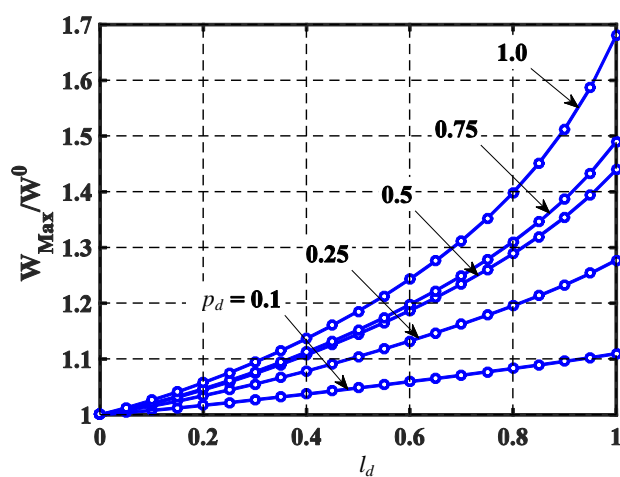
Lámina dañada	Tamaño de región dañada	Posición de región dañada	
		Esquina	Centro
$90^\circ$	$a/4 \times a/4$	1.107	1.205
$90^\circ$	$a/2 \times a/2$	1.267	1.415
$0^\circ$ y $90^\circ$	$a/4 \times a/4$	1.130	1.292
$0^\circ$ y $90^\circ$	$a/2 \times a/2$	1.399	1.684

Un segundo estudio consiste en el análisis de la influencia de los parámetros de daño  $l_d$  y  $p_d$  en la respuesta de la placa con una región dañada de dimensión  $a/2 \times a/2$  ubicada en la zona central. El desplazamiento en el punto central se grafica en la Figura 4.30 y muestra una respuesta no lineal con el incremento de los parámetros de daño. En la Figura 4.31 se muestra el desplazamiento en dirección z

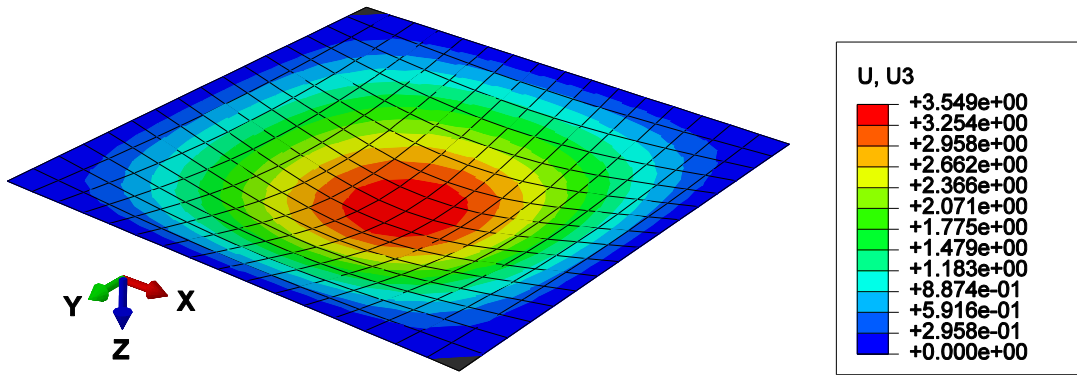
en toda la placa para el caso con mayor daño: ambas láminas con la zona central de tamaño  $a/2 \times a/2$  dañada con parámetros de daño  $l_d = p_d = 1$ .

**Tabla 4.2.** Desplazamiento en el centro de la placa, normalizado con respecto al valor sin daño  $w^0 = 2.107$  mm, para regiones de diferentes tamaños y con diferentes ubicaciones. Los parámetros de daño microscópicos son  $l_d = 0.4$  y  $p_d = 0.7$ .

Lámina dañada	Tamaño de región dañada	Posición de región dañada	
		Esquina	Centro
$90^\circ$	$a/4 \times a/4$	1.080	1.093
$90^\circ$	$a/2 \times a/2$	1.107	1.130
$0^\circ$ y $90^\circ$	$a/4 \times a/4$	1.090	1.089
$0^\circ$ y $90^\circ$	$a/2 \times a/2$	1.120	1.127



**Figura 4.30:** Desplazamiento en el centro de la placa, normalizado con respecto al valor sin daño  $w^0 = 2.107$  mm, en función de los parámetros de daño  $p_d$  y  $l_d$ .



**Figura 4.31:** Desplazamiento en dirección  $z$  en la placa expresado en [mm]. Región dañada de tamaño  $a/2 \times a/2$  ubicada en el centro de la placa. Ambas láminas  $[0/90]$  están dañadas con valores de los parámetros de daño en la interfaz fibra-matriz  $l_d = 1$  y  $p_d = 1$ .

# Pandeo de fibras en GFRP unidireccionales

### 5.1. Introducción

A diferencia de los materiales, tales como el cemento, que son más resistentes en compresión que en tracción, los compuestos reforzados con fibras son más débiles en compresión que en tracción. Debido a que casi ninguna estructura puede ser diseñada sin que una parte de ella experimente compresión es que el diseño de las estructuras construidas en material compuesto está frecuentemente controlado por el fenómeno de falla a compresión.

Hay un gran interés en predecir la resistencia de compuestos reforzados con fibras, en primer lugar debido a la dificultad y costo de los estudios experimentales y, en segundo lugar, para permitir el desarrollo de nuevos materiales. Para estos materiales la resistencia a compresión depende en gran parte de la ondulación interna de las fibras, que debido a limitaciones de manufactura se desvían de la configuración recta ideal. Tal desviación constituye una imperfección que ha sido reconocida como perjudicial a la resistencia a compresión del material (ver Rosen [39], Jones [104], Barbero [101] y [1]).

En el contexto de los materiales compuestos se utiliza el término micropandeo para referirse al pandeo de las fibras en el nivel microscópico. Todos los modelos reportados en la literatura para la simulación de este fenómeno utilizan una ondulación bidimensional (2D), mientras que en la realidad las fibras pueden presentar una ondulación tridimensional (3D). Por lo tanto, surge la pregunta de si una aproximación bidimensional de la ondulación es suficientemente representativa de la realidad.

En este capítulo se utiliza la micromecánica computacional para estudiar el efecto de las características microestructurales en GFRP unidireccionales sometidos a compresión. Se utiliza un modelo tridimensional explícito de la microestructura del compuesto con fibras onduladas en dos y en tres dimensiones y se emplea la metodología de cálculo de tensiones presentada en el Capítulo 3. Los dos tipos de ondulaciones se caracterizaron por medio de un ángulo de desalineamiento máximo, como

es usual en este campo de trabajo. Se evalúan dos tipos de estados de carga en los que se restringe o no la deformación transversal. Se consideran dos fuentes de no linealidad: en el material y en las relaciones deformación desplazamiento. Se presentan estudios paramétricos en términos de características de la microestructura, tales como tipo de imperfección, fracción de volumen de fibra, tensión de fluencia de la matriz, arreglo de fibras, orientación de ondulación 2D y ángulo de desalineamiento. En este capítulo el análisis se restringe al nivel microscópico.

Los resultados presentados en este capítulo se publicaron en [102]. Este capítulo está organizado como se indica a continuación: en la Sección 5.2 se revisan los antecedentes relativos al problema de micropandeo, su modelación y experimentación. En la Sección 5.3 se resume la metodología empleada, mientras que en la Sección 5.4 se detallan las características de las celdas unitarias utilizadas. Por último, en la Sección 5.5, se presentan y discuten los resultados obtenidos.

## 5.2. Revisión bibliográfica

Por analogía con el comportamiento estructural, el micropandeo de fibras es frecuentemente modelado como el pandeo de una columna soportada lateralmente por una matriz elástica; este problema ha atraído a varios investigadores desde el trabajo pionero de Rosen [39]. Hay dos maneras generales en las cuales la inestabilidad de una CU o EVR puede ocurrir, debido al pandeo elástico de la fibra involucrando deformaciones de la matriz (un problema usualmente llamado micropandeo), o por deformaciones plásticas (llamado pliegue o *kinking* en inglés), tal como reportaron Budiansky y Fleck [103]. Sun y Tsai [44], entre otros, hicieron una comparación entre ambos modos y concluyeron que a pesar de que son problemas distintos que involucran diferentes hipótesis, los valores de carga de *kinking* o micropandeo no son muy distintos.

El micropandeo puede ocurrir en dos modos: uno con deformaciones periódicas de las fibras involucrando corte en la matriz y con deformación transversal insignificante, llamado modo “en fase” (*in-phase*) y, por otro lado, el modo llamado “desfasado” (*out-of-phase*) en el cual el corte en la matriz es despreciable y el pandeo está dominado por deformaciones transversales en la misma, similar a los que ocurre con una viga en una fundación elástica. Ambos casos fueron discutidos por Rosen [39] y fueron revisados en el texto clásico de Jones [104]. En cuanto a la estabilidad de la trayectoria post-crítica, Maewal [38] anticipó un comportamiento de trayectoria post-crítica estable para el problema



“en fase”. Por otro lado, Yugartis y Sternstein [105] realizaron ensayos que mostraron la influencia perjudicial del desalineamiento de la fibra en el proceso de micropandeo.

Dentro de la teoría general de la estabilidad, Tomblin *et al.* [40] investigaron la sensibilidad del micropandeo de fibra a la imperfección causada por el desalineamiento de la fibra bajo compresión en la dirección de la misma. La influencia de la no linealidad del material fue introducida en las ecuaciones constitutivas de corte por medio de una relación hiperbólica y el EVR fue considerado para el modo “en fase”. Esto originó la identificación de un comportamiento de bifurcación inestable simétrico para un EVR sin desalineamiento, y además se encontró que una ley de potencia  $2/3$  caracteriza la sensibilidad a la imperfección causada por el desalineamiento de fibra. Tales resultados determinísticos teóricos indicaron la naturaleza del comportamiento esperado y fueron seguidos de estudios probabilísticos realizados por Tomblin y Barbero [41] y por Barbero [101].

La importancia de la secuencia de laminado en el micropandeo fue estudiada por Drapier *et al.* [42] con referencia a ensayos de flexión que se realizaron para identificar estados límites bajo compresión. En lugar de considerar una CU, estos autores emplearon un modelo bidimensional de un compuesto laminado homogeneizado. Para la misma configuración periódica de desalineamiento de fibras, bajo un modo “en fase”, Drapier *et al.* [43] utilizaron un modelo de elementos finitos no lineal para compuestos unidireccionales de fibra de carbono y matriz epoxi. Los resultados bajo compresión con desalineamiento mostraron una pérdida significativa de la capacidad de carga con alta sensibilidad a la imperfección. Este fue el primer estudio numérico para cuantificar el efecto de las imperfecciones en el micropandeo. En el trabajo [46], los autores reportan un modelo de FEM<sup>2</sup> para el cálculo de la resistencia a compresión. Se analizó la pérdida de estabilidad en las escalas microscópicas y macroscópicas. Sus resultados muestran un comportamiento con sensibilidad a la imperfección pero están basados en modelos microscópicos de dos dimensiones. Además, los valores del ángulo de desalineamiento van desde  $0.28^\circ$  hasta  $1.72^\circ$  aproximadamente, valores muy pequeños comparados con los observados en ensayos experimentales, que alcanzan los  $10^\circ$  [45].

Como puede notarse, los modelos disponibles consideran a la fibra con forma de curva plana. Esto hace que los modelos sean fácilmente tratados utilizando ecuaciones analíticas y que sean más económicos en el caso de modelos numéricos. Sin embargo, la fibra podría tomar también una forma de curva tridimensional tal como una hélice. Por otro lado, los valores de los desalineamientos utilizados para predecir el fenómeno de micropandeo en la literatura son muy pequeños comparados

con los valores reportados en ensayos experimentales. En otras palabras, no se ha evaluado el comportamiento a micropandeo para grandes ángulos de desalineamiento. Mediante el modelo de FRP con desalineamiento presentado en la sección siguiente se podrán evaluar las cargas de micropandeo considerando CU curvas con fibras de forma bidimensional y tridimensional, además de las variables que usualmente son evaluadas en micropandeo: fracción de volumen de fibra, resistencia de la matriz y ángulo de desalineamiento. Se evalúan las cargas de micropandeo para dos casos de carga de compresión con la deformación lateral restringida y con la deformación lateral libre. Con estos casos se intenta representar una lámina aislada o formando parte de un laminado o libre.

### 5.3. Metodología

En esta sección se presentan el modelo y metodología utilizados para realizar un análisis de la carga de micropandeo empleando la micromecánica computacional. La celda unitaria utilizada, presentada en la Sección 5.4, incluye la representación explícita de la geometría de la fibra con ondulación y condiciones de borde periódicas como se explica en la Sección 3.3 y en el Apéndice A. El cálculo de las tensiones macroscópicas se realiza utilizando la MPP-DF presentada en el Capítulo 3.

Bajo una compresión en la dirección 1, una lámina única puede deformarse libremente en la dirección transversal. Sin embargo, si ésta es usada como parte de un laminado entonces no puede deformarse transversalmente en la misma manera ya que las otras láminas producen un efecto de restricción transversal. Surge así la pregunta ¿esta restricción puede afectar a la carga de micropandeo? Para distinguir entre estas dos situaciones modelando una única fibra se consideraron dos casos de carga: uno con la deformación transversal restringida y otro sin dicha restricción. Es importante notar que el primer caso no es completamente representativo del estado de deformación de la lámina en un laminado, pero puede ser visto como una condición límite en el problema.

Ambos casos de carga incluyen deformaciones macroscópicas sin distorsiones, es decir, el tensor de deformación macroscópico tiene componentes nulas fuera de la diagonal y de compresión en la dirección 1. En un caso, identificado en lo que sigue como caso A, las componentes de deformación transversal no están especificadas, de tal manera que la CU puede expandirse en las direcciones transversales mientras es comprimida en la dirección 1. En el otro caso de carga, identificado como caso B, las componentes de deformación transversal son nulas, con la consecuencia de que no ocurre ninguna expansión lateral bajo compresión axial.

La implementación de estos casos de carga, A y B, se realiza por medio de las ecuaciones (3.12) y (3.13). Para el caso de carga B se especifican las nueve componentes del tensor de deformación macroscópico; en otras palabras, se especifican todos los desplazamientos de los tres nodos de control. Para el caso de carga A, se especifican los desplazamientos relacionados a la componente  $\varepsilon_{11}$  y a las componentes nulas fuera de la diagonal, mientras que los desplazamientos,  $w_2^2$  y  $w_3^3$ , relacionados a las componentes transversales  $\varepsilon_{22}$  y  $\varepsilon_{33}$ , son mantenidos como grados de libertad del modelo y pueden ser obtenidos de la solución numérica del EVR.

Con el objetivo de investigar la sensibilidad a la imperfección, este modelo incluye dos fuentes de no linealidad: la matriz epoxi es modelada como un material no lineal, y, por otro lado, las relaciones entre la deformación y el desplazamiento son geoméricamente no lineales. Las trayectorias de equilibrio no lineales son obtenidas usando el algoritmo de Riks disponible en ABAQUS [85].

Se considera un compuesto con fibras de vidrio y matriz epoxi donde  $Rf = 3.5 \times 10^{-6}$  m. Ambos materiales se consideran isótropos: la fibra se modela como material elástico lineal con módulo  $E^F = 84$  GPa, y  $\nu^F = 0.22$ , mientras que la matriz se modela como un material elástico perfectamente plástico con  $E^M = 4$  GPa,  $\nu^M = 0.38$ . Se consideran dos valores de tensiones de fluencia  $\sigma_y = 48.26$  MPa y  $\sigma_y = 100$  MPa. Se utiliza una regla de flujo asociada en conjunto con una superficie de fluencia de von Mises.

Aproximadamente 30.000 elementos (C3D8 en la librería de ABAQUS, un hexaedro lineal de ocho nodos) fueron usados en las mallas de elementos finitos. Este elemento no sufre el problema de bloqueo volumétrico cuando se simula un material con plasticidad. En el análisis de convergencia, realizado para algunos casos particulares, se utilizaron mallas de hasta 200,000 elementos. Las tensiones máximas tuvieron cambios inferiores al 0.7% respecto a los valores reportados en la Sección 5.5.

### 5.3.1. Cálculo de tensiones macroscópicas

En esta sección se muestra que las ecuaciones obtenidas en el Capítulo 3 de esta tesis para el cálculo de tensiones macroscópicas, particularmente la ecuación (3.30), puede ser utilizada en casos de micropandeo.

La trayectoria de equilibrio correspondiente al micropandeo, como ocurre en otros fenómenos de inestabilidad, puede involucrar deformaciones de compresión que varían en el tiempo presentando aumentos y disminuciones durante el proceso de carga. Sin embargo, la ecuación (3.30), para el cálculo de las tensiones macroscópicas, ha sido obtenida suponiendo una variación lineal de  $\lambda_i(t)$  respecto al tiempo, ver ecuación (3.23). A continuación se muestra que la ecuación (3.30) es también válida para casos en los que  $\lambda_i(t)$ , es una función arbitraria del tiempo.

Suponiendo que en el EVR actúa un gradiente de deformación macroscópico dado por

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

donde  $\lambda_i(t)$  son funciones arbitrarias del tiempo cuyas derivadas, dependientes a su vez del tiempo, se denotan como

$$\lambda'_i(t) = \frac{d}{dt} \lambda_i(t) \quad (5.2)$$

y, usando la igualdad (3.16), se puede expresar el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff como

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_3 \sigma_{11} & \lambda_1 \lambda_3 \sigma_{12} & \lambda_1 \lambda_2 \sigma_{13} \\ \lambda_2 \lambda_3 \sigma_{12} & \lambda_1 \lambda_3 \sigma_{22} & \lambda_1 \lambda_2 \sigma_{23} \\ \lambda_2 \lambda_3 \sigma_{13} & \lambda_1 \lambda_3 \sigma_{23} & \lambda_1 \lambda_2 \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Luego, la potencia interna para el instante de tiempo  $t$  puede calcularse utilizando la expresión (3.19) resultando en

$$P_{int}(t)_{unaxial} = V (\lambda_2 \lambda_3 \lambda'_1 \sigma_{11} + \lambda_1 \lambda_3 \lambda'_2 \sigma_{22} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda'_3 \sigma_{33}) \quad (5.4)$$

Si en el gradiente de deformaciones macroscópico aplicado se restringe la deformación lateral (deformación uniaxial) durante la compresión se tiene

$$\lambda'_2(t) = \lambda'_3(t) = 0 \quad (5.5)$$

Por otro lado, si no se restringe la deformación lateral (tensión uniaxial) se tendrá

$$\sigma_2(t) = \sigma_3(t) = 0 \quad (5.6)$$

Por lo tanto, cuando la deformación macroscópica en direcciones  $x_2$  y  $x_3$  está restringida o libre la potencia interna resulta en

$$P_{int}(t)_{uniaxial} = V \lambda_2 \lambda_3 \lambda'_1 \sigma_{11} \quad (5.7)$$

Considerando el desplazamiento en dirección  $x_1$  del nodo de control asociado:

$$w_1^1 = \alpha (\lambda_1(t) - 1) \quad (5.8)$$

la velocidad de dicho punto se expresa como

$$\frac{d}{dt} w_1^1 = \alpha \lambda'_1 \quad (5.9)$$

Luego, la potencia externa para el instante de tiempo  $t$  se puede expresar como el producto de la fuerza aplicada en el nodo y la velocidad del nodo, quedando

$$P_{ext}(t)_{uniaxial} = \alpha R_{11} \lambda'_1 \quad (5.10)$$

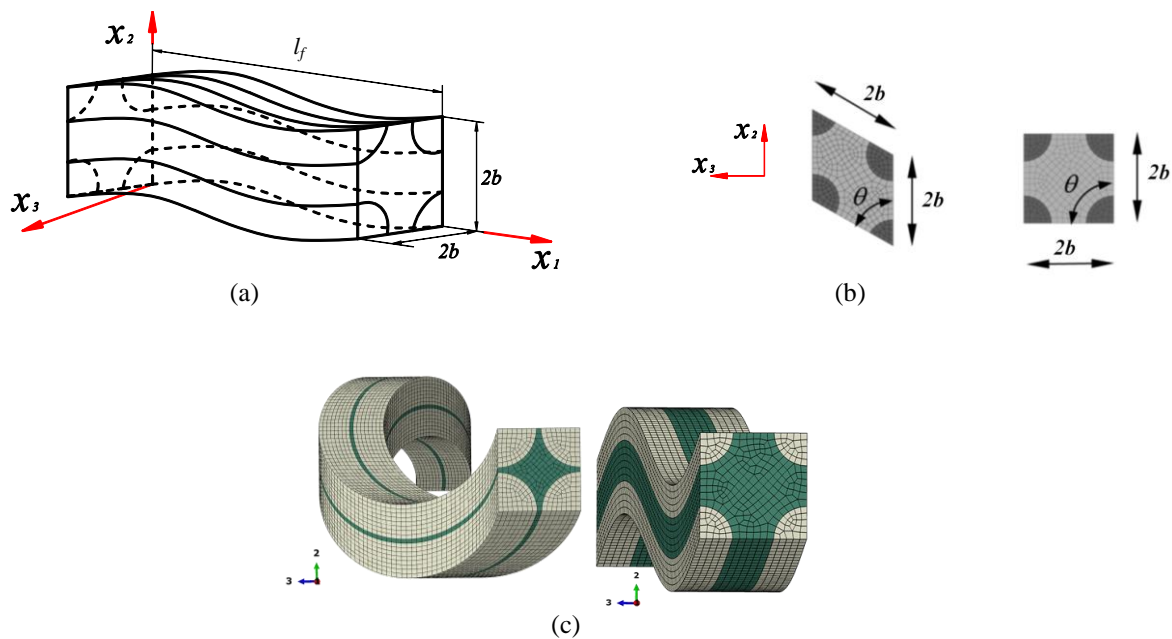
Si se igualan las expresiones de las potencias interna y externa para el tiempo  $t$  se puede obtener la misma expresión para el cálculo de la tensión macroscópica ya obtenida en el Capítulo 3:

$$\sigma_{11} = \frac{\alpha R_{11}}{V \lambda_2 \lambda_3} \quad (5.11)$$

Esto quiere decir que el cálculo de tensiones macroscópicas para un proceso de carga que involucra inestabilidad, como en el caso de micropandeo, se puede realizar mediante la ecuación (3.30) derivada en el Capítulo 3 de esta tesis.

#### 5.4. Geometría de ondulación de fibra y celda unitaria curva

Se construye un modelo de material compuesto periódico utilizando CU curvas. Las fibras de dichas celdas siguen líneas curvas u ondulaciones. La CU se obtiene por medio de un barrido con la sección transversal (ver Figura 5.1b), desplazando la misma sin rotación siguiendo la línea de la ondulación (Figura 5.2). Esta forma de crear la CU permite representar la ondulación y obtener una geometría que puede ser fácilmente mallada. Como se muestra en la Figura 5.1b, se construyeron modelos de elementos finitos con ordenamientos de fibras hexagonales (Hx) y cuadrados (Sq).



**Figura 5.1:** (a): Dimensiones de celda unitaria. (b): Secciones transversales (ordenamiento de fibras). (c) Mallado de celdas unitarias curvas.

Para un radio de fibra  $R_f$  las dimensiones de la celda unitaria se obtienen mediante la fracción de volumen de fibras  $V_f$  y la relación entre longitud de la CU  $l_f$  y diámetro de fibra  $D_f$ ,  $\beta = l_f/D_f$ . Dado que en esta tesis se utiliza una metodología de homogeneización de primer orden, las dimensiones

absolutas de la CU tales como  $R_f$  no afectarán los resultados. Para tener en cuenta tales efectos se requiere usar teorías de homogeneización de mayor orden, como explica van Dijk [49], entre otros. La longitud de la mitad de la arista se calcula como

$$b = R_f \sqrt{\frac{\pi}{4V_f \sin(\theta)}} \quad (5.12)$$

donde  $\theta$ , al igual que en la Sección 3.2, toma valores de  $60^\circ$  para la configuración hexagonal (Hx) y de  $90^\circ$  para la configuración cuadrada (Sq).

Se consideraron dos tipos de ondulaciones: (i) Tridimensional (3D), donde la fibra toma forma de hélice y (ii) Bidimensional (2D) en el que la fibra tiene la forma de una curva plana sinusoidal. En las posiciones iniciales se considera que las fibras están “en fase”. La imperfección 3D está contenida en un cilindro mientras que la 2D pertenece a un plano (Figura 5.2).

Con referencia a la Figura 5.2, el alineamiento perfecto estaría dado por una fibra ubicada en la dirección del eje  $x_1$ ; una ondulación 2D se ilustra en un plano que contiene al eje  $x_1$  y que forma un ángulo  $\delta$  medido respecto al plano  $x_1 - x_2$ ; en otras palabras,  $\delta$  define la orientación del plano donde se desarrolla la ondulación 2D. Siguiendo la definición usual en este campo de conocimiento, ambos tipos de ondulaciones tienen un ángulo máximo de desalineamiento ( $\alpha$ ) medido entre la fibra y el eje  $x_1$  (Figura 5.2).

Se debe enfatizar que los ángulos  $\alpha$  y  $\delta$  son distintos. La orientación del plano que contiene a la fibra ondulada en el modelo 2D es caracterizada por  $\delta$ , por lo tanto, sólo tiene sentido para dicho modelo. Mientras que  $\alpha$  es el máximo ángulo de la línea de la fibra respecto al eje  $x_1$  y se utiliza como parámetro en ambos modelos, 2D y 3D.

Las ecuaciones cartesianas de la línea de ondulación 2D están dadas por

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{l_f}{2\pi} \tan(\alpha) \cos(\delta) \sin\left(\frac{2\pi}{l_f} x_1\right) \\ x_3 &= \frac{l_f}{2\pi} \tan(\alpha) \sin(\delta) \sin\left(\frac{2\pi}{l_f} x_1\right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $l_f$  es una de las dimensiones de la CU (Figura 5.1a).

Las ecuaciones cartesianas para la línea de ondulación 3D son

$$\begin{aligned} x_2 &= r_c \sin\left(\frac{2\pi}{l_f} x_1\right) \\ x_3 &= r_c \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l_f} x_1\right)\right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde  $r_c$  es el radio del cilindro que contiene a la hélice. Este valor se obtiene como

$$r_c = \frac{l_f}{2\pi \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \quad (5.15)$$

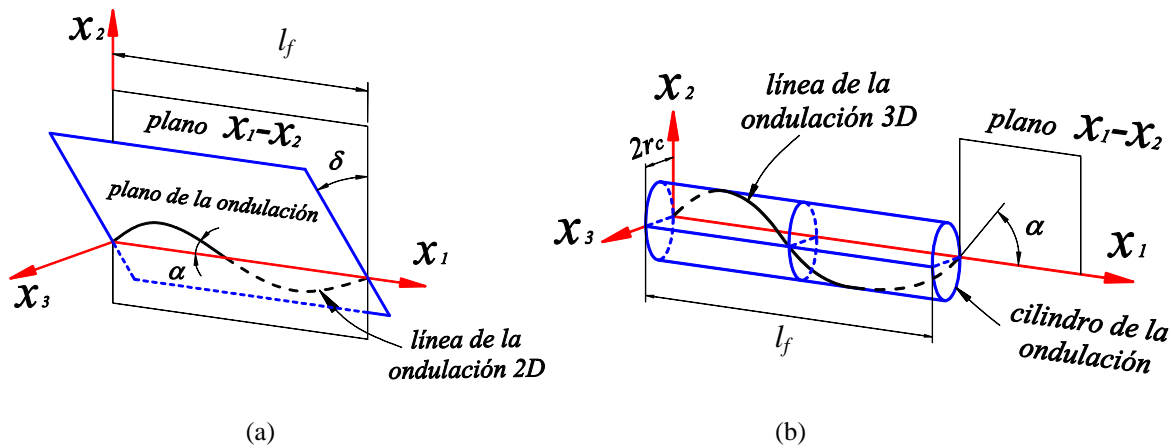


Figura 5.2: Líneas de ondulación: (a) ondulación bidimensional (2D), (b) ondulación tridimensional (3D).

## 5.5. Resultados y discusión

Se resolvieron 384 casos bajo la condición de carga A (sin restricción lateral) y 432 casos para la condición B (con restricción lateral). Los casos bajo estudio cubren los cambios en las variables de interés: tipo de ondulación (2D o 3D), ángulo de orientación de la ondulación 2D, ordenamiento de fibras, tensión de fluencia de la matriz, fracción de volumen de fibras  $V_f$  y ángulo de desalineamiento  $\alpha$ . Se utilizaron los valores de  $V_f = 10\%$ ,  $30\%$ ,  $50\%$  y  $70\%$  con ángulos de desalineamiento desde  $0.01^\circ$



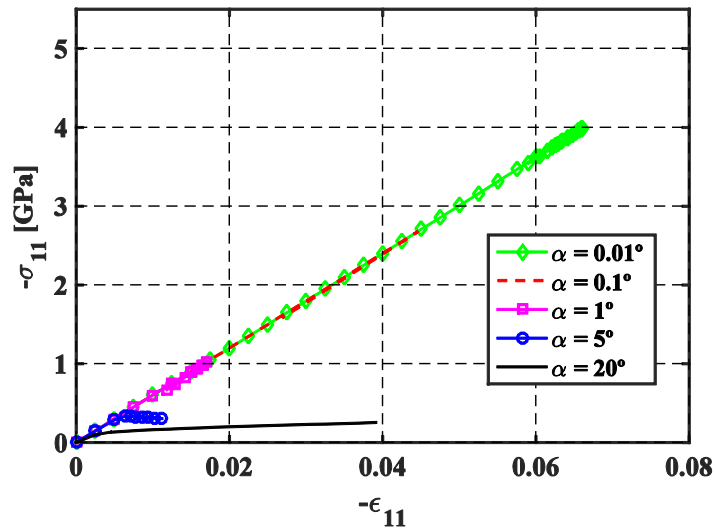
hasta  $20^\circ$  y  $\beta$  entre 12.5 y 200 para tener una amplia perspectiva del fenómeno de micropandeo, cubriendo de este modo los valores reportados en ensayos experimentales; por ejemplo, Jochum y Grandidier [45] midieron valores de  $\beta$  entre 20 y 50 con desalineamientos de hasta  $10^\circ$  en muestras de laboratorio.

Para facilitar la presentación de los resultados se identificó cada caso con un número de grupo que va desde el 1 al 24, una letra para distinguir el caso de carga (A o B), un ángulo de desalineamiento  $\alpha$  y la tensión de fluencia de la matriz. Los números de grupos corresponden a un valor de  $V_f$ , a un tipo de imperfección, a un ordenamiento de fibras específico y un ángulo  $\delta$  en los modelos 2D. Por ejemplo, el grupo 4 incluye casos con  $V_f = 70\%$ , ordenamiento cuadrado (Sq), ondulación 2D, y  $\delta = 0^\circ$ .

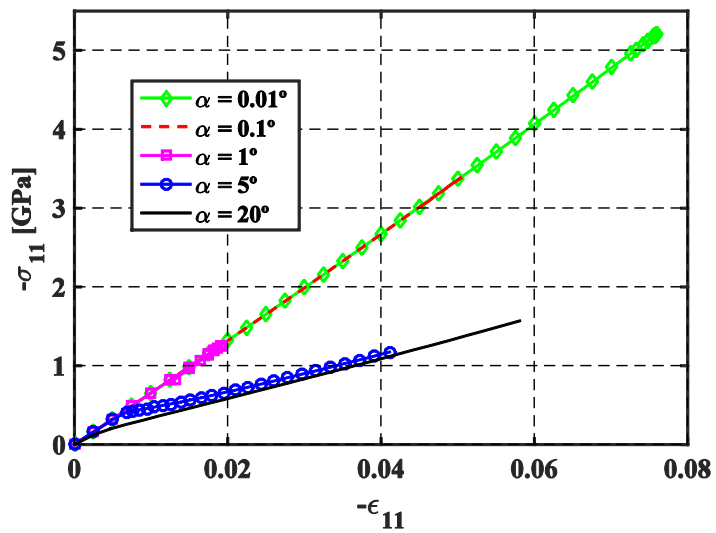
### 5.5.1. Trayectorias de equilibrio

En la Figura 5.3 se muestran las trayectorias de equilibrio para algunos casos de los grupos 4A y 4B ( $V_f = 70\%$ , 2D, Sq,  $\delta = 0^\circ$ ) y  $\sigma_y = 48.26$  MPa; los valores del ángulo de desalineamiento  $\alpha$  se muestran en cada caso. Dado que se investiga el comportamiento bajo compresión solamente se reportan valores negativos de tensión y deformación. Para pequeños ángulos de deformación, la trayectoria de equilibrio es casi lineal y alcanza un valor máximo en la carga de bifurcación; luego, la trayectoria cae en una trayectoria post-crítica. Esto concuerda con los resultados reportados en la Figura 8 de [46]. Para grandes ángulos de desviación, la trayectoria de equilibrio exhibe no linealidad hasta que se alcanza un máximo; este es un punto límite en la nomenclatura de la teoría de estabilidad elástica (ver Godoy [106]); a partir de allí, la trayectoria cae en un comportamiento inestable. En la Figura 5.4 se muestran las trayectorias de equilibrio para algunos casos de los grupos 4A y 4B en una gráfica con la escala ampliada respecto a la Figura 5.3 para apreciar los detalles de las curvas. Una comparación entre los casos de carga A y B muestra que la pendiente es ligeramente superior en los casos B debido a que la deformación transversal ha sido restringida a cero. Para configuraciones con valores de ondulaciones moderadas se producen máximos locales en las trayectorias de equilibrio. Pero para grandes valores de  $\alpha$  dichos máximos desaparecen, con la consecuencia de que la tensión aumenta con la deformación de compresión sin existir singularidades en la trayectoria; de esta manera, no ocurre micropandeo en tales casos sino que el problema pasa a ser de grandes desplazamientos. Este comportamiento en el que existe un valor de ángulo límite a partir del cual deja de existir un máximo,

ocurre en la mayoría de los casos estudiados en esta tesis y es típico de problemas de pandeo de cáscaras (Godoy [106]).

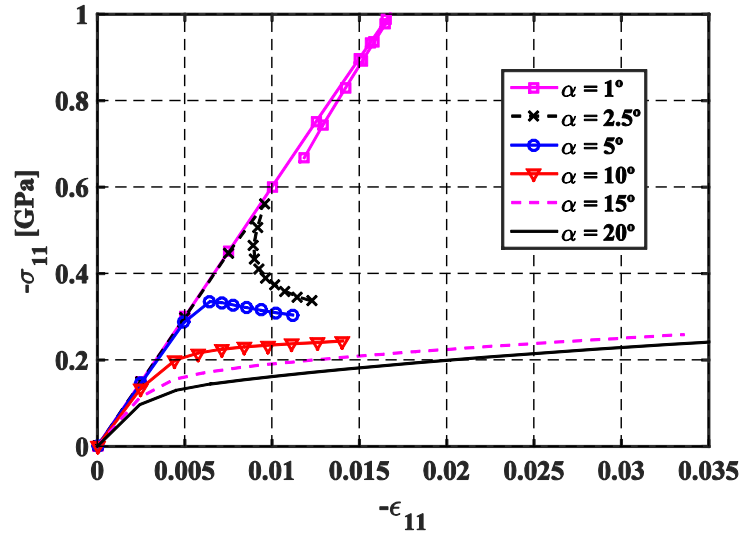


(a)

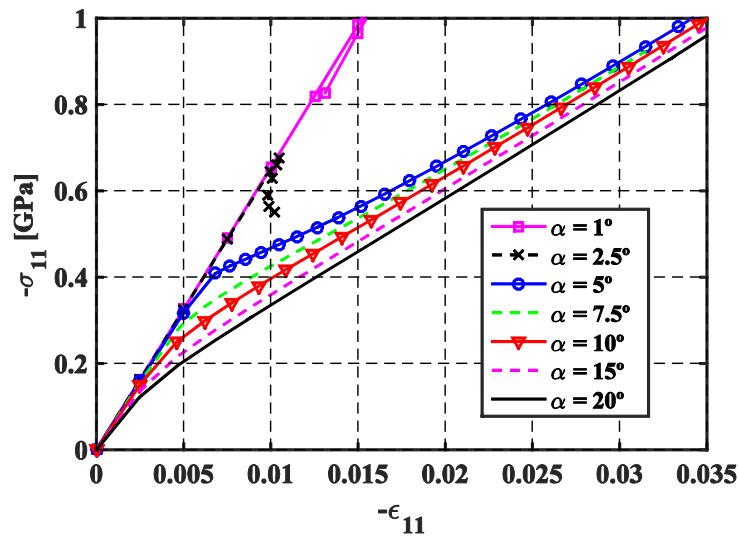


(b)

**Figura 5.3:** Trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 4 en función del ángulo de desalineamiento  $\alpha$ . Resultados para  $\sigma_y = 48.26$  MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.



(a)



(b)

**Figura 5.4:** Detalle de trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 4 en función del ángulo de desalineamiento  $\alpha$ . Resultados para  $\sigma_y = 48.26$  MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

Los valores de las cargas máximas, correspondiente a los puntos límite en las trayectorias de equilibrio, se muestran en las Tablas 5.1 - 5.4. En los casos donde no existe un valor significa que no se encontró un máximo, es decir, no ocurrió micropandeo. Para todos los casos reportados en las Tablas 5.1 - 5.4 se adoptó un valor de  $\beta = 50$ . Dicho valor fue seleccionado en base a resultados experimentales reportados en la literatura [45]. Para ilustrar la influencia de  $\beta$ , se resolvieron casos

para los grupos 1, 7, 13 y 19 (imperfección 3D y ordenamiento de fibras Hx), para el caso de carga B,  $\alpha = 0.01^\circ$  y  $\sigma_y = 48.26$  MPa. Las máximas tensiones resultantes se muestran en la Figura 5.5 observándose un pequeño cambio para altos valores de  $\beta$ .

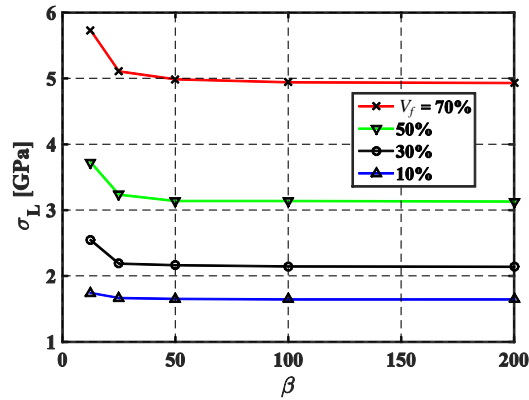
**Tabla 5.1.** Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga A (sin restricción) y  $\sigma_y = 48.26$  MPa.

N°	$V_f$ [%]	ondulación	ordenamiento	$\delta$	Ángulo de desalineamiento $\alpha$							
					0.01°	0.1°	1°	2.5°	5°	10°	15°	20°
1	70	3D	Hx	-	3.706	2.591	1.023	0.558	0.318	0.177	0.130	0.106
2			Sq	-	3.960	2.674	1.011	0.552	0.321	-	-	-
3		2D	Hx	0°	3.752	2.639	1.158	0.592	0.372	-	-	-
4			Sq	0°	3.987	2.677	1.017	0.561	0.335	-	-	-
5			Hx	30°	3.624	2.636	1.087	0.575	0.336	-	-	-
6			Sq	45°	3.965	2.794	1.179	0.627	0.358	-	-	-
7	50	3D	Hx	-	2.303	1.702	0.813	0.479	0.286	0.162	0.116	0.093
8			Sq	-	2.329	1.681	0.809	0.479	0.287	0.162	0.117	0.094
9		2D	Hx	0°	2.346	1.744	0.867	0.519	0.318	0.207	-	-
10			Sq	0°	2.337	1.724	0.756	0.487	0.304	0.195	-	-
11			Hx	30°	2.333	1.722	0.824	0.495	0.306	0.201	-	-
12			Sq	45°	2.379	1.787	0.878	0.516	0.312	0.241	-	-
13	30	3D	Hx	-	1.480	1.146	0.626	0.398	0.256	0.152	0.110	0.088
14			Sq	-	1.505	1.157	0.624	0.397	0.255	0.151	0.110	0.088
15		2D	Hx	0°	1.525	1.175	0.656	0.426	0.284	0.184	0.149	0.128
16			Sq	0°	1.515	1.150	0.643	0.417	0.280	0.179	0.142	0.121
17			Hx	30°	1.521	1.161	0.651	0.419	0.281	0.181	0.147	0.128
18			Sq	45°	1.529	1.177	0.660	0.425	0.283	0.184	0.150	0.130
19	10	3D	Hx	-	0.851	0.674	0.419	0.296	0.206	0.132	0.099	0.081
20			Sq	-	0.845	0.672	0.418	0.296	0.206	0.132	0.099	0.081
21		2D	Hx	0°	0.857	0.685	0.430	0.311	0.229	0.157	0.125	0.105
22			Sq	0°	0.852	0.681	0.430	0.311	0.228	0.157	0.123	0.104
23			Hx	30°	0.855	0.689	0.428	0.312	0.228	0.157	0.124	0.104
24			Sq	45°	0.862	0.681	0.429	0.313	0.228	0.157	0.125	0.105

En la Figura 5.6 se grafican las trayectorias de equilibrio para los grupos 19A y 19B ( $V_f = 10\%$ , ondulación 3D, ordenamiento de fibras hexagonal y  $\sigma_y = 48.26$  MPa) para casos con  $\alpha = 0.01^\circ$ ,  $2.5^\circ$  y  $20^\circ$ . Se muestra una línea con la pendiente inicial del caso más cercano a la alineación perfecta ( $\alpha = 0.01^\circ$ ). Durante el proceso de carga de la CU, la plastificación de la matriz genera un cambio en la pendiente de la curva tensión-deformación. Este cambio se da aproximadamente a una deformación  $\epsilon_{11} = -0.012$  y es más evidente en el caso de carga A que en el B. Para los demás casos con  $V_f = 10\%$  se encontró un comportamiento similar, pero el cambio de pendiente debido a plasticidad no es observable en casos con mayor fracción de volumen de fibra porque la matriz tiene menos incidencia en la rigidez de la CU.

**Tabla 5.2.** Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga A (sin restricción) y  $\sigma_y = 100$  MPa.

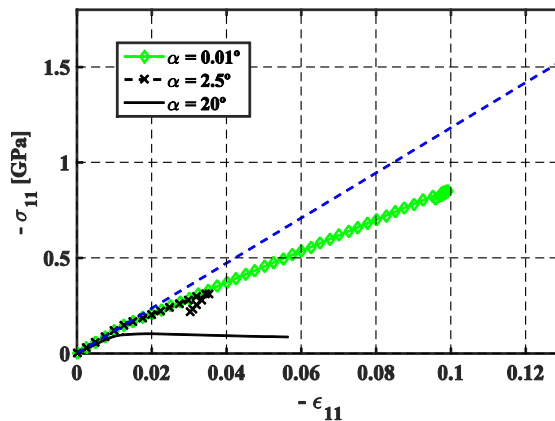
Nº	$V_f$ [%]	Imperfección ordenamiento	$\delta$	Ángulo de desalineamiento $\alpha$								
				0.01°	0.1°	1°	2.5°	5°	10°	15°	20°	
				1	3D	Hx	-	4.839	3.624	1.787	1.019	0.607
2	3D	Sq	-	5.162	3.758	1.647	1.008	0.607	0.348	0.259	0.216	
3	70	2D	Hx	0°	4.889	3.652	1.875	1.134	0.686	-	-	-
4			Sq	0°	5.157	3.701	1.722	1.008	0.617	-	-	-
5		2D	Hx	30°	4.880	3.641	1.824	1.068	0.631	-	-	-
6			Sq	45°	5.293	3.973	1.932	1.098	0.676	0.432	-	-
7	50	3D	Hx	-	2.964	2.364	1.324	0.853	0.536	0.312	0.229	0.185
8			Sq	-	2.986	2.292	1.294	0.847	0.537	0.315	0.231	0.188
9		2D	Hx	0°	2.982	2.300	1.346	0.872	0.590	0.372	0.308	-
10			Sq	0°	2.984	2.368	1.325	0.871	0.559	0.356	0.292	-
11	2D	Hx	30°	2.978	2.392	1.369	0.887	0.563	0.365	-	-	
12		Sq	45°	3.028	2.435	1.402	0.873	0.580	0.373	0.312	-	
13	30	3D	Hx	-	1.928	1.576	0.978	0.681	0.466	0.289	0.215	0.175
14			Sq	-	1.925	1.577	0.977	0.680	0.467	0.290	0.216	0.176
15		2D	Hx	0°	1.943	1.594	1.015	0.717	0.504	0.333	0.272	0.236
16			Sq	0°	1.931	1.570	0.997	0.705	0.496	0.327	0.263	0.227
17	2D	Hx	30°	1.943	1.585	1.006	0.710	0.498	0.330	0.271	0.237	
18		Sq	45°	1.929	1.601	1.001	0.719	0.502	0.333	0.275	0.24	
19	10	3D	Hx	-	1.134	0.936	0.635	0.480	0.358	0.246	0.192	0.160
20			Sq	-	1.132	0.930	0.637	0.480	0.358	0.246	0.192	0.160
21		2D	Hx	0°	1.138	0.937	0.654	0.508	0.391	0.286	0.234	0.201
22			Sq	0°	1.137	0.944	0.659	0.507	0.391	0.286	0.233	0.199
23	2D	Hx	30°	1.139	0.944	0.654	0.508	0.391	0.287	0.234	0.202	
24		Sq	45°	1.138	0.944	0.660	0.508	0.392	0.287	0.235	0.203	



**Figura 5.5:** Tensión límite en función de la relación  $\beta = L_f/D_f$ . Resultados para casos de carga restringido B,  $\sigma_y = 48.26$  MPa, imperfección 3D, ordenamiento Hx (Grupos 1, 7, 13 y 19).

**Tabla 5.3.** Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga B (con restricción) y  $\sigma_y = 48.26$  MPa.

N°	$V_f$ [%]	Imperfección ordenamiento	$\delta$	Ángulo de desalineamiento $\alpha$									
				0.01°	0.1°	1°	2.5°	5°	7.5°	10°	15°	20°	
1	70	3D	Hx -	4.958	3.388	1.303	0.637	0.381	-	-	-	-	
2			Sq -	5.156	3.363	1.145	0.633	-	-	-	-		
3		2D	Hx 0°	5.001	3.451	1.350	0.741	0.437	-	-	-	-	
4			Sq 0°	5.203	3.387	1.257	0.675	-	-	-	-		
5			Hx 30°	5.021	3.419	1.302	0.679	-	-	-	-		
6			Sq 45°	4.559	3.242	1.375	0.730	-	-	-	-		
7	50	3D	Hx -	3.138	2.301	1.023	0.592	0.351	-	-	-		
8			Sq -	3.145	2.267	0.992	0.575	0.353	-	-	-		
9		2D	Hx 0°	3.171	2.345	1.088	0.630	0.387	-	-	-		
10			Sq 0°	3.143	2.281	1.040	0.602	0.368	-	-	-		
11			Hx 30°	3.155	2.322	1.065	0.608	0.367	-	-	-		
12			Sq 45°	3.224	2.346	1.102	0.625	0.375	-	-	-		
13	30	3D	Hx -	2.163	1.590	0.834	0.526	0.338	-	-	-		
14			Sq -	2.159	1.590	0.834	0.526	0.339	-	-	-		
15		2D	Hx 0°	2.178	1.662	0.879	0.553	0.357	-	-	-		
16			Sq 0°	2.163	1.628	0.850	0.536	0.354	-	-	-		
17			Hx 30°	2.171	1.659	0.858	0.536	0.351	-	-	-		
18			Sq 45°	2.174	1.655	0.870	0.549	0.356	-	-	-		
19	10	3D	Hx -	1.656	1.288	0.771	0.538	0.380	-	-	-		
20			Sq -	1.658	1.288	0.774	0.539	0.381	-	-	-		
21		2D	Hx 0°	1.666	1.307	0.790	0.538	0.386	-	-	-		
22			Sq 0°	1.659	1.296	0.782	0.536	0.386	0.317	-	-		
23			Hx 30°	1.665	1.305	0.787	0.541	0.385	0.317	-	-		
24			Sq 45°	1.668	1.310	0.788	0.541	0.386	0.318	-	-		



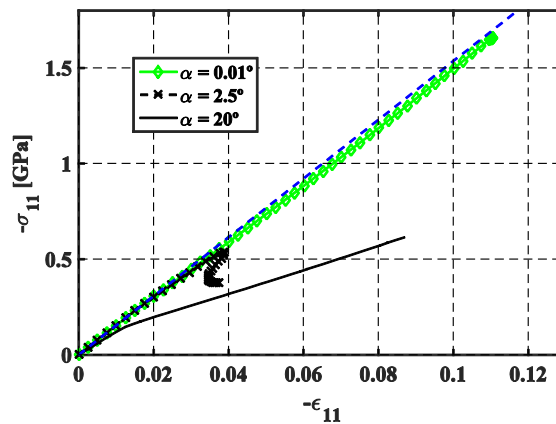
(a)

**Figura 5.6:** Detalle de trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 19 en función del ángulo de desalineamiento  $\alpha$ .

(a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

**Tabla 5.4.** Tensiones límites en [GPa] para el caso de carga B (con restricción) y  $\sigma_y = 100$  MPa.

N°	$V_f$ [%]	Imperfección ordenamiento	$\delta$	Ángulo de desalineamiento $\alpha$									
				0.01°	0.1°	1°	2.5°	5°	7.5°	10°	15°	20°	
				1	3D	Hx	-	6.337	4.719	2.142	1.227	0.723	-
2	Sq	-	6.019	4.390		2.065	1.170	0.726	-	-	-	-	
3	70	2D	Hx	0°	6.392	4.805	2.316	1.351	0.806	-	-	-	-
4			Sq	0°	6.468	4.674	2.153	1.234	0.752	-	-	-	-
5		3D	Hx	30°	6.378	4.765	2.240	1.253	0.738	-	-	-	-
6			Sq	45°	6.220	4.629	2.331	1.341	0.798	-	-	-	-
7	50	3D	Hx	-	3.874	3.014	1.682	1.041	0.652	-	-	-	-
8			Sq	-	3.911	3.079	1.633	1.035	0.654	-	-	-	-
9		2D	Hx	0°	3.933	3.111	1.747	1.110	0.689	-	-	-	-
10			Sq	0°	3.937	3.042	1.687	1.041	0.669	-	-	-	-
11	3D	Hx	30°	3.932	3.125	1.716	1.065	0.671	-	-	-	-	
12		Sq	45°	3.995	3.188	1.795	1.111	0.690	-	-	-	-	
13	30	3D	Hx	-	2.667	2.168	1.31	0.901	0.615	0.482	-	-	-
14			Sq	-	2.666	2.159	1.32	0.906	0.612	0.482	-	-	-
15		2D	Hx	0°	2.643	2.206	1.34	0.937	0.637	-	-	-	-
16			Sq	0°	2.671	2.187	1.33	0.905	0.624	0.497	-	-	-
17	3D	Hx	30°	2.682	2.159	1.29	0.911	0.624	0.497	-	-	-	
18		Sq	45°	2.693	2.194	1.36	0.933	0.629	-	-	-	-	
19	10	3D	Hx	-	2.103	1.621	1.144	0.852	0.641	-	-	-	-
20			Sq	-	2.108	1.622	1.145	0.853	0.641	-	-	-	-
21		2D	Hx	0°	2.113	1.547	1.137	0.857	0.651	0.550	-	-	-
22			Sq	0°	2.113	1.547	1.159	0.857	0.649	0.549	-	-	-
23	3D	Hx	30°	2.118	1.587	1.137	0.856	0.650	0.549	-	-	-	
24		Sq	45°	2.114	1.588	1.157	0.857	0.650	0.549	-	-	-	



(b)

**Figura 5.6 (continuación):** Detalle de trayectorias de equilibrio para algunos casos del Grupo 19 en función del ángulo de desalineamiento  $\alpha$ . (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

### 5.5.2. Tensiones en los constituyentes

En las Figuras 5.8 y 5.9 se muestran las tensiones de von Mises para la matriz de la CU de los casos 4A y 2A (con  $\alpha = 2.5^\circ$  y  $\sigma_y = 100$  MPa), respectivamente. Los estados de deformación mostrados corresponden a los puntos marcados en la curva tensión-deformación de la Figura 5.7. De estas figuras se puede notar que existen grandes zonas donde la matriz ha plastificado y, posiblemente, la unión de estas bandas genera la pérdida de capacidad de carga en el nivel macroscópico. En las Figuras 5.10 y 5.11 se muestra la componente  $\sigma_{11}$  de la tensión de Cauchy en las fibras de los mismos casos 4A y 2A, con  $\alpha = 2.5^\circ$  y para los mismos estados de deformación marcados en la Figura 5.7. Se advierte que las tensiones en la fibra son de compresión pero no son uniformes a lo ancho y a lo largo de la misma.

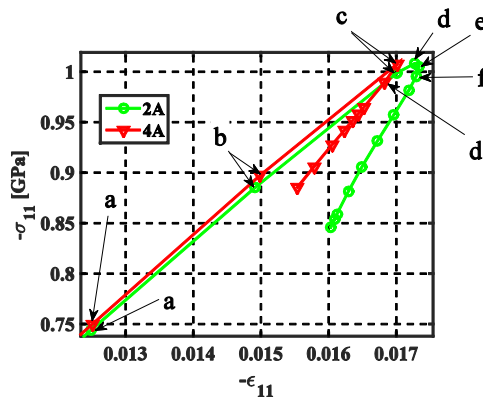


Figura 5.7: Tensiones de Cauchy macroscópicas para casos 2A y 4A.

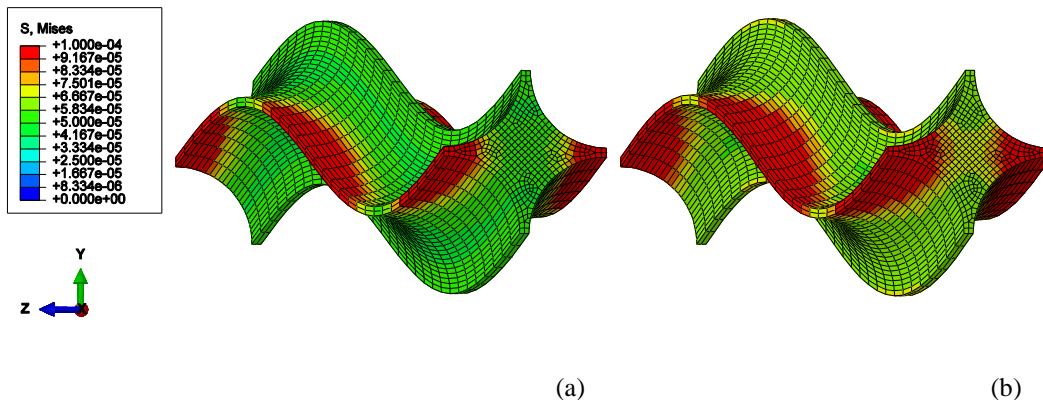
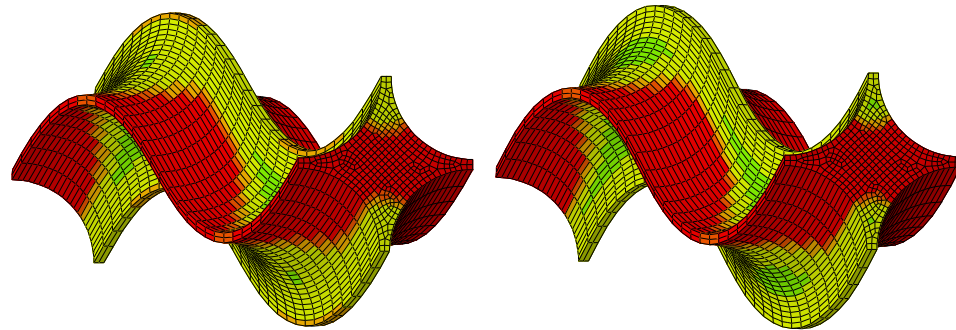


Figura 5.8: Tensiones de von Mises en  $[10^{-3}$  GPa] para la matriz en el caso 4A ( $V_f = 70\%$ , 2D, Sq),  $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c y d corresponden a los puntos de la Figura 5.7.

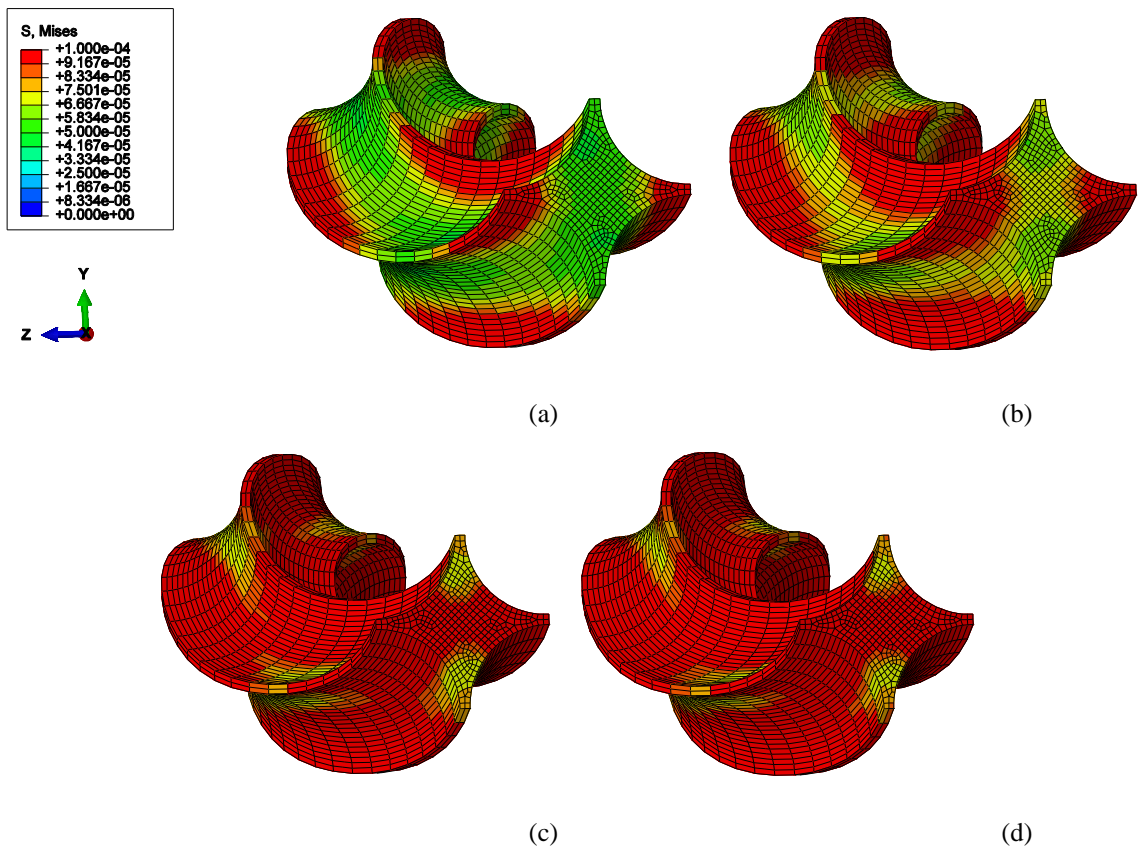




(c)

(d)

**Figura 5.8 (continuación):** Tensiones de von Mises en  $[10^{-3}$  GPa] para la matriz en el caso 4A ( $V_f = 70\%$ , 2D, Sq),  $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c y d corresponden a los puntos de la Figura 5.7.



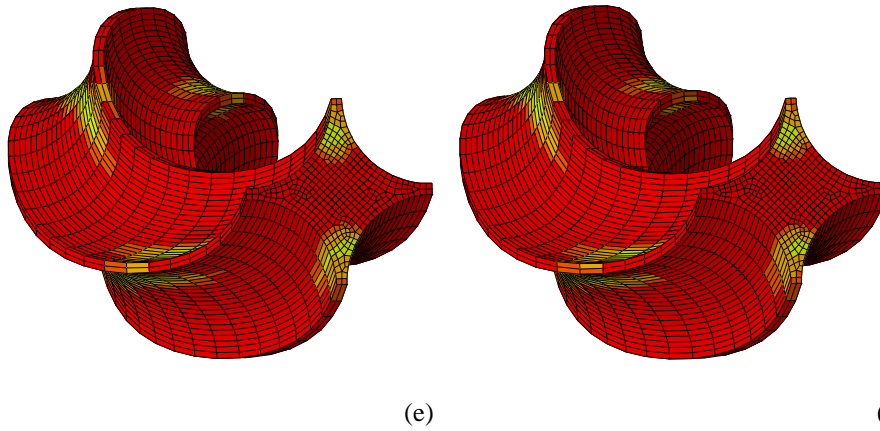
(a)

(b)

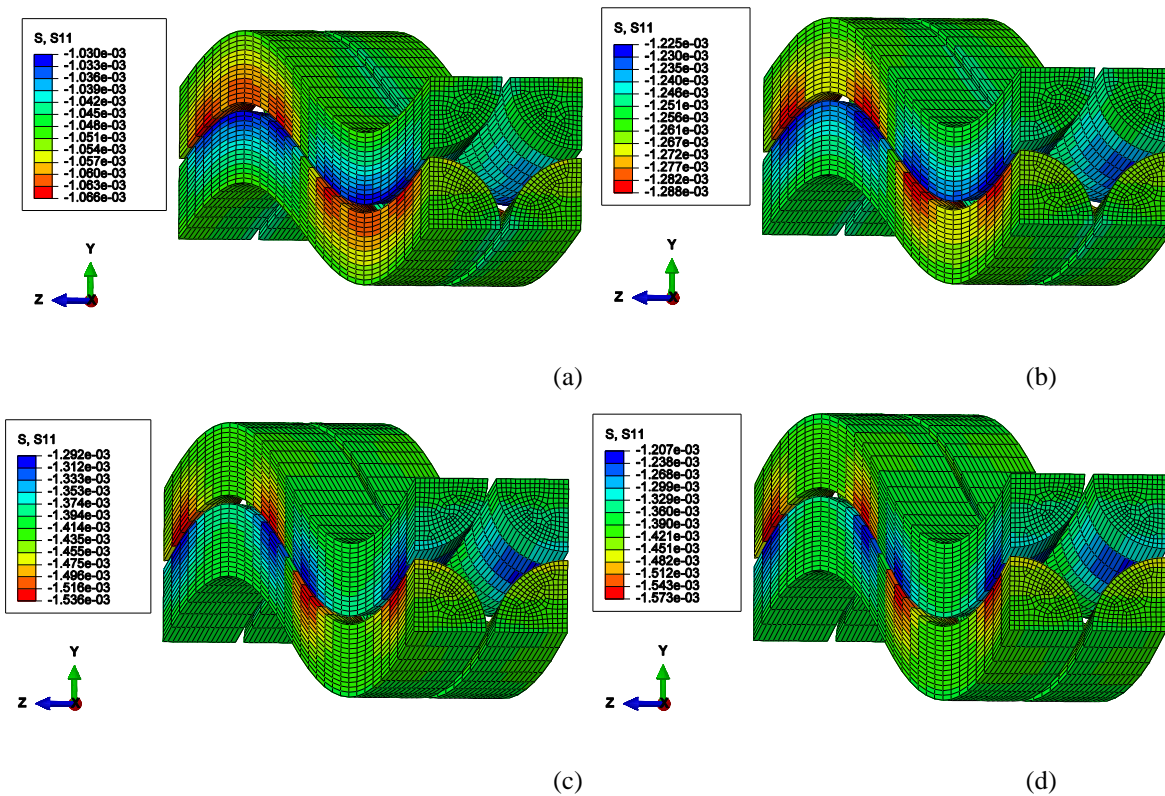
(c)

(d)

**Figura 5.9:** Tensiones de von Mises en  $[10^{-3}$  GPa] en la matriz. Caso 2A ( $V_f = 70\%$ , 3D, Sq),  $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c, d, e y f corresponden a los puntos de la Figura 5.7.



**Figura 5.9 (continuación):** Tensiones de von Mises en  $[10^{-3}$  GPa] en la matriz. Caso 2A ( $V_f=70\%$ , 3D, Sq),  $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c, d, e y f corresponden a los puntos de la Figura 5.7.



**Figura 5.10:** Tensiones de Cauchy  $\sigma_{11}$  en  $[10^{-3}$  GPa] para la fibra en el caso 4A ( $V_f=70\%$ , 2D, Sq),  $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c y d corresponden a los puntos de la Figura 5.7.

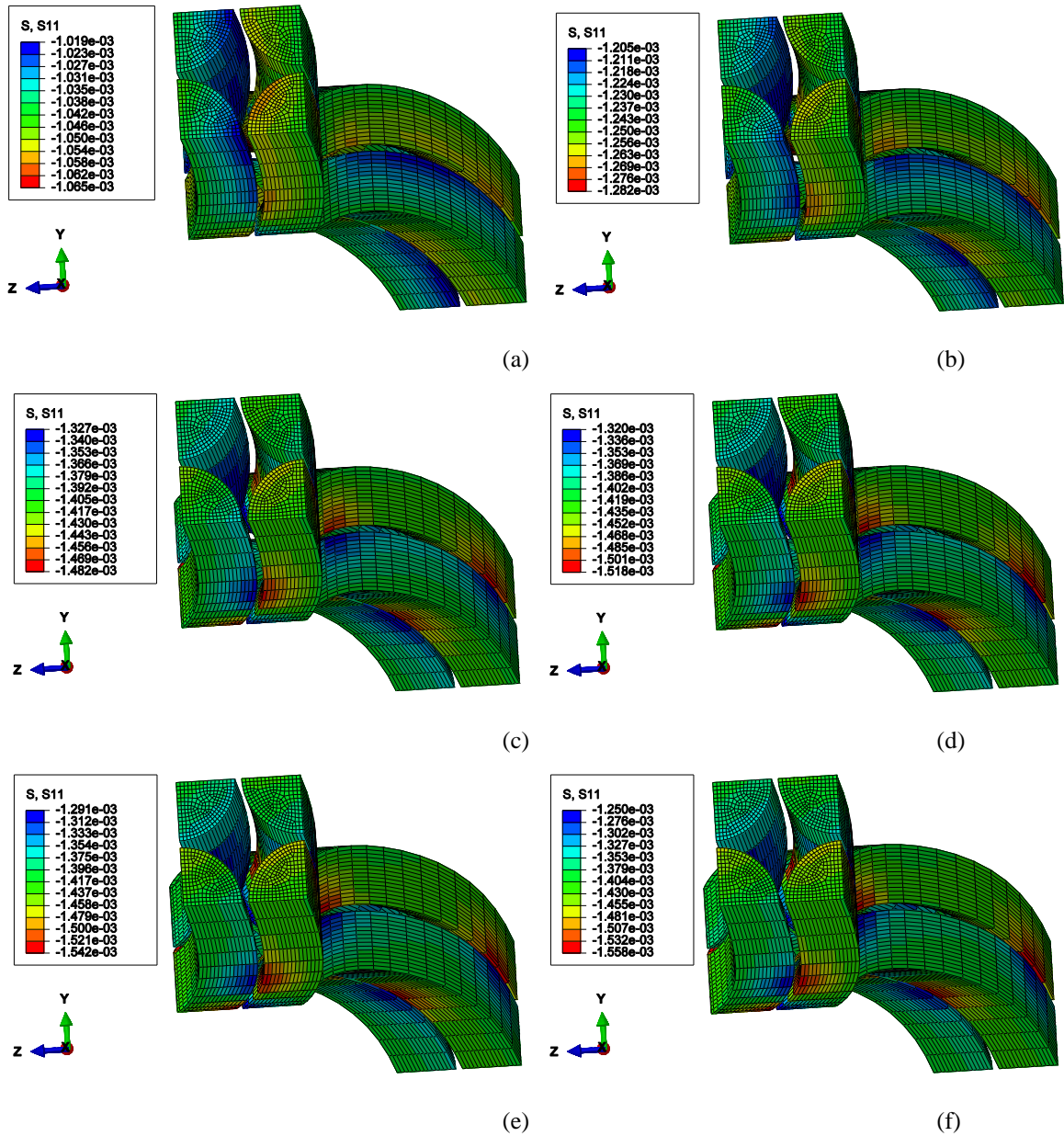


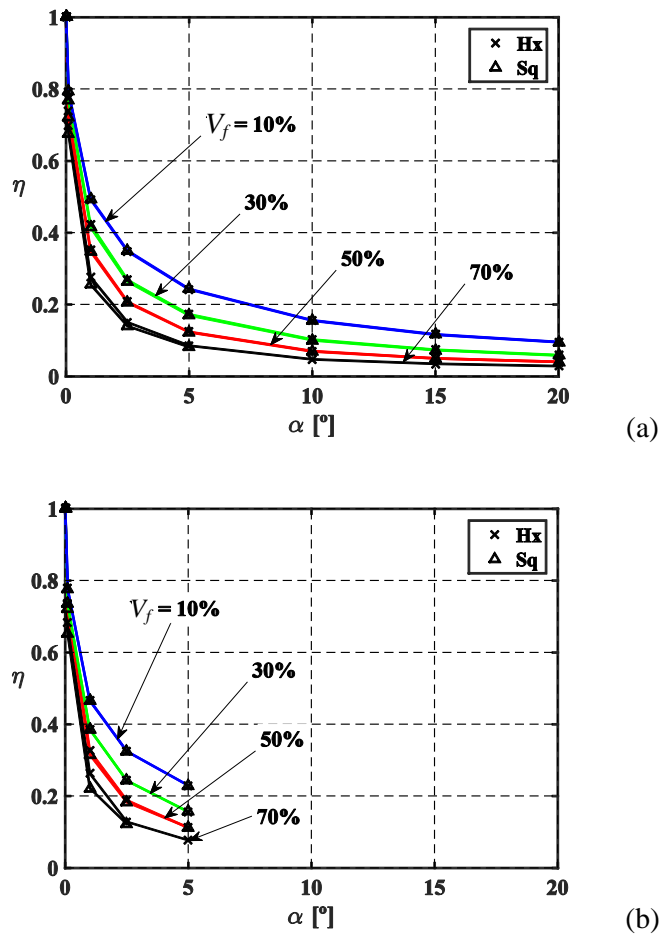
Figura 5.11: Tensiones de Cauchy  $\sigma_{11}$  en  $[10^{-3}$  GPa] para la fibra en el caso 2A ( $V_f = 70\%$ , 3D, Sq),  $\alpha = 2.5^\circ$ . Los cuadros marcados como a, b, c, d, e y f corresponden a los puntos de la Figura 5.7.

### 5.5.3. Estudios paramétricos

Se realizaron estudios paramétricos teniendo en cuenta las tensiones límite reportadas en las Tablas 5.1 a 5.4; los resultados se presentan (como en muchos problemas de estabilidad) en términos de un

factor de reducción o *knock-down factor*  $\eta$ ; dicho factor se obtiene dividiendo la tensión resultante para un  $\alpha$  dado por la tensión correspondiente a un  $\alpha$  igual a cero.

En la Figura 5.12, se grafica el factor  $\eta$  como una función del desalineamiento  $\alpha$  para los casos con una ondulación 3D,  $\sigma_y = 48.26$  MPa y ambos ordenamientos de fibra. Los resultados indican que el ordenamiento de fibra no tiene incidencia en los resultados. Utilizando los valores de las Tablas 5.1 a 5.4 para imperfecciones 2D se encontraron similares resultados.

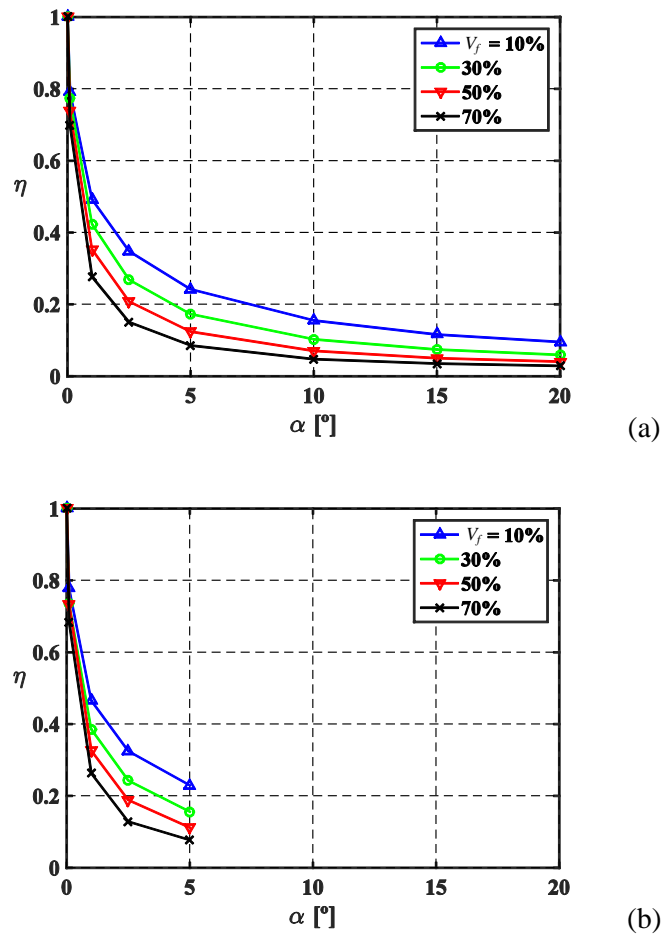


**Figura 5.12:** Influencia de ordenamiento de fibras cuadrado (Sq) y hexagonal (Hx) sobre el factor  $\eta$ , para imperfecciones 3D (Grupos 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19 y 20) con  $\sigma_y = 48.26$  MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

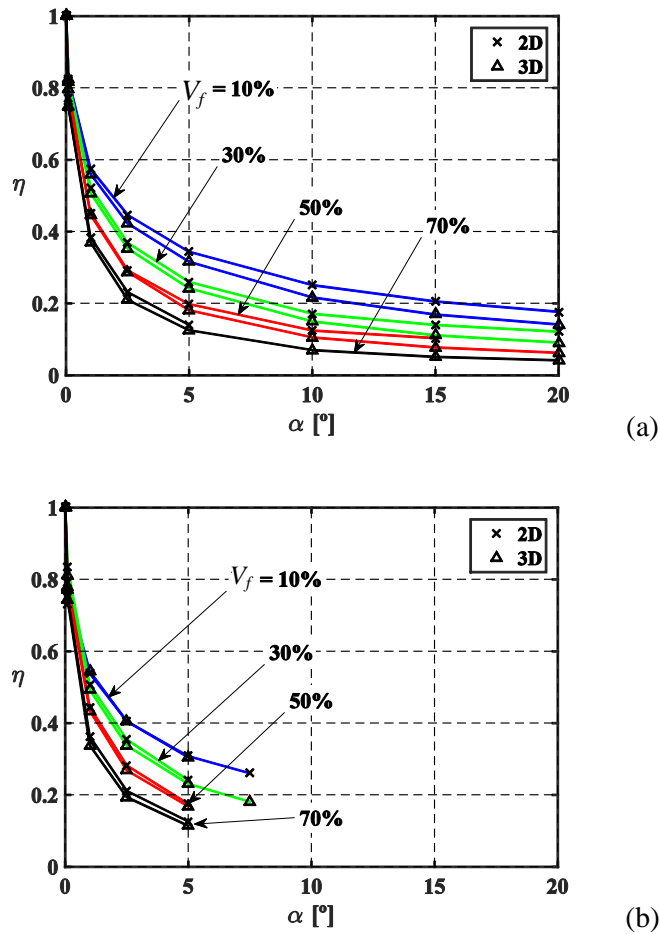
La influencia de la fracción de volumen de fibra  $V_f$  sobre la carga de micropandeo para varios ángulos de desalineamiento se muestra en la Figura 5.13 considerando una ondulación 3D y

ordenamiento de fibras Hx (Grupos 1, 7, 13 y 19). Los resultados tienen una gran sensibilidad a pequeñas ondulaciones; por ejemplo, para  $\alpha = 1^\circ$ , el factor  $\eta$  cae más del 50% en todos los casos. Además, la sensibilidad aumenta con el incremento de  $V_f$ . Un comportamiento similar fue obtenido para imperfecciones 2D,  $\sigma_y = 100$  MPa y para ordenamientos Sq.

La influencia del tipo de imperfección (2D y 3D) se investigó para los grupos 1, 3, 7, 9, 13, 15 y 21 considerando un ordenamiento de fibras hexagonal (Hx) y  $\sigma_y = 100$  MPa. El factor  $\eta$  para estos casos se muestra en la Figura 5.14 y se puede observar que las gráficas de los casos con diferentes tipos de ondulación son casi idénticas. La conclusión es que el tipo de imperfección considerado (2D o 3D) no tiene influencia en el factor  $\eta$ .



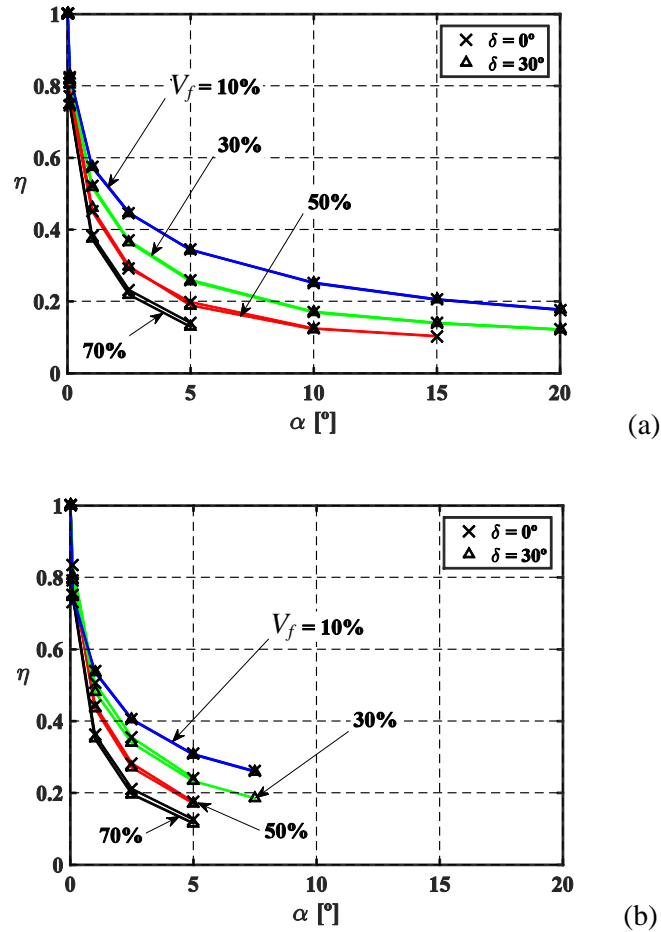
**Figura 5.13:** Sensibilidad de micro pandeo. Factor  $\eta$  para ondulación 3D y ordenamiento Hx (Grupos 1, 7, 13 y 19) con  $\sigma_y = 48.26$  MPa. (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.



**Figura 5.14:** Influencia del tipo de imperfección: bidimensional (2D) y tridimensional (3D). Factor  $\eta$  para Grupos 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19 y 21 (ordenamiento Hx y  $\sigma_y = 100$  MPa). (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

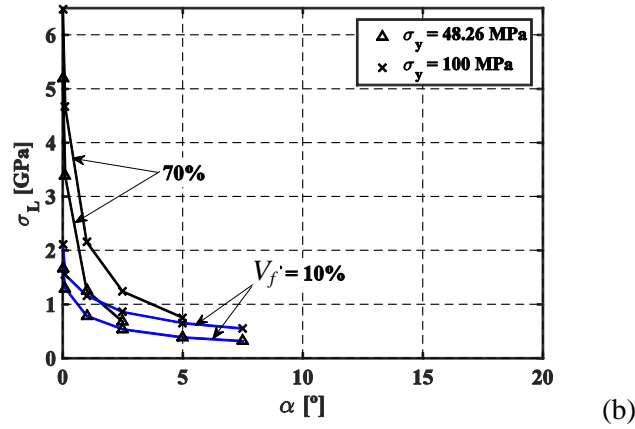
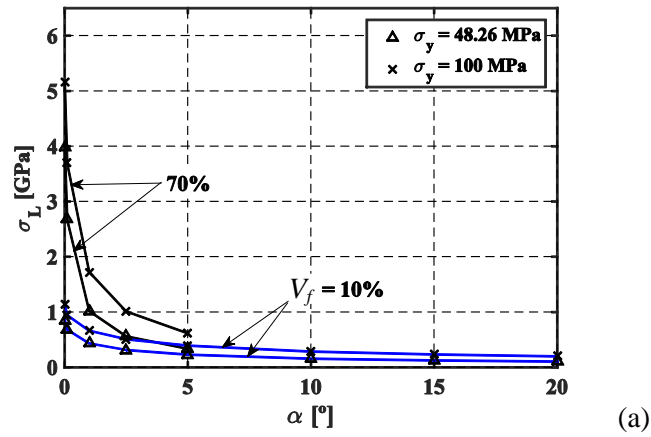
La influencia del ángulo  $\delta$  (orientación del plano de la ondulación 2D) para los Grupos 3, 5, 8, 11, 15, 17, 21 y 23 para ambos casos de carga, A y B, para el mismo ordenamiento de fibras (Hx) y  $\sigma_y = 100$  MPa se ha graficado en la Figura 5.15. Los resultados indican que  $\delta$  no tiene influencia en la tensión límite. El mismo comportamiento se encuentra con ordenamiento cuadrado (Sq) y  $\sigma_y = 48.26$  MPa.



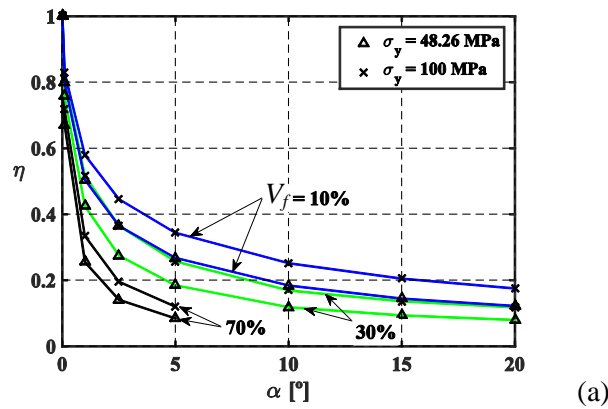


**Figura 5.15:** Influencia del ángulo  $\delta$  (orientación del plano de la ondulación 2D). Factor  $\eta$  para Grupos 3, 5, 9, 11, 15, 17, 21 y 23 (ondulación 3D,  $\sigma_y = 48.26$  MPa y ordenamiento Hx) para  $\delta = 0^\circ$  y  $30^\circ$ . (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

Los casos con mayor tensión de fluencia de la matriz generaron mayores tensiones límites. En la Figura 5.16 se muestran los resultados para los casos 4 y 22 (imperfección 2D, ordenamiento Sq,  $\delta = 0$  y  $\sigma_y = 48.26$  MPa) y el mismo comportamiento fue encontrado para todos los casos considerados en esta tesis. La influencia de la tensión de fluencia de la matriz en el factor  $\eta$  se muestra en la Figura 5.17 para los casos 4, 16 y 21 con imperfección 2D, ordenamiento Sq y  $\delta = 0$ . Los resultados muestran un incremento en el factor  $\eta$  pero el problema sigue siendo altamente sensible a la imperfección.

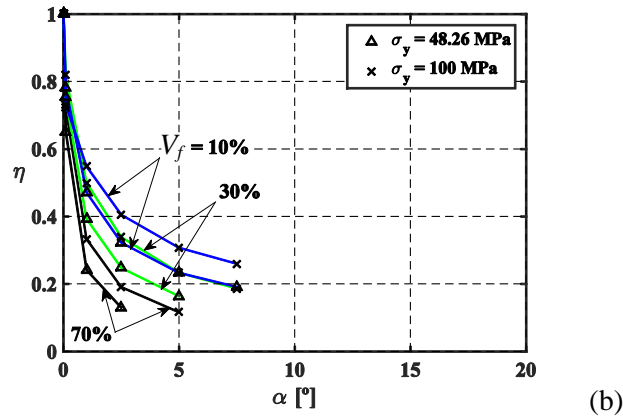


**Figura 5.16:** Influencia de la resistencia de la matriz en la tensión límite para los casos 4 y 22 (imperfección 2D y ordenamiento Sq) (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.



**Figura 5.17:** Influencia de la resistencia de la matriz en el factor de reducción  $\eta$  para los casos 4, 16 y 22 (imperfección 2D y ordenamiento Sq) (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.





**Figura 5.17 (continuación):** Influencia de la resistencia de la matriz en el factor de reducción  $\eta$  para los casos 4, 16 y 22 (imperfección 2D y ordenamiento Sq) (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

#### 5.5.4. Comparación con un modelo simplificado

En esta sección se realiza una comparación entre los resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos presentados en la sección anterior y un modelo simplificado desarrollado por Barbero [101]. La ecuación analítica (ecuación 4.93 en [1]) para el cálculo de la tensión límite está dada por

$$\sigma(\alpha) = G_{12} + \frac{16C_2\alpha}{3\pi} - \frac{4\sqrt{2C_2\alpha(8C_2\alpha + 3\pi G_{12})}}{3\pi}$$

$$C_2 = \frac{G_{12}^2}{4F_6}$$
(5.16)

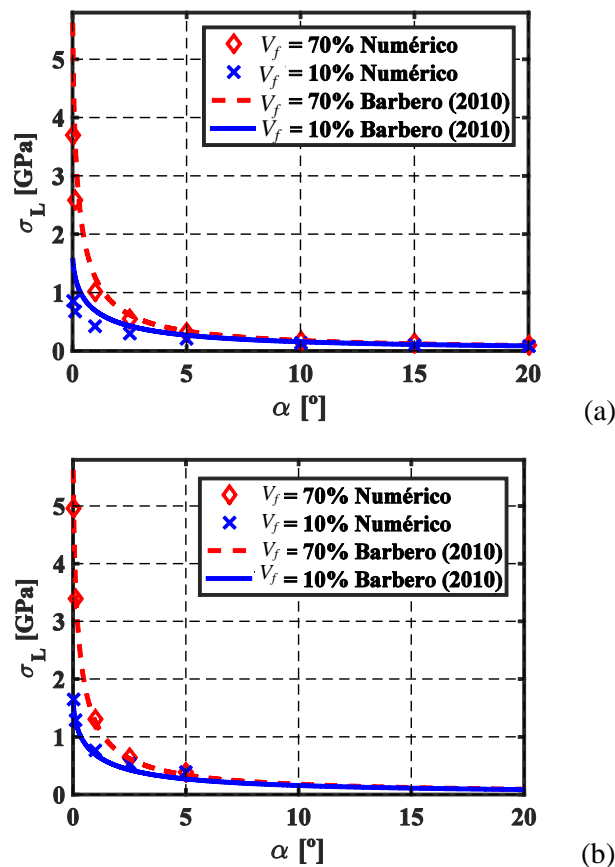
Esta ecuación analítica aproxima la tensión límite  $\sigma(\alpha)$  de un compuesto unidireccional bajo cargas de compresión sin tener en cuenta los efectos transversales. Las propiedades del compuesto requeridas en este modelo son la resistencia a corte en el plano  $F_6$  y el módulo de corte  $G_{12}$ . Para este ejemplo numérico y en base al criterio de fluencia de von Mises empleado se adoptó un valor de  $F_6 = 27.86$  MPa en concordancia con  $\sigma_y = 48.26$  MPa. El módulo elástico  $G_{12}$  fue obtenido usando el Modelo de Microestructura Periódica (PMM por sus siglas en inglés), ecuación 4.39 en Barbero [1].

En la Figura 5.18 se comparan los resultados de la tensión límite  $\sigma_L$  para los grupos 1 y 11 (ondulación 3D y ordenamiento Hx). Los resultados del presente modelo de elementos finitos y del

modelo analítico aproximado están en muy buen acuerdo. Los casos con restricción A originaron tensiones límites menores. Se encontraron tendencias similares para todos los casos considerados.

En la Tabla 5.5, las tensiones límite  $\sigma_L$  para ambos casos de carga fueron normalizadas con respecto a las cargas de bifurcación del modelo de Rosen [39].

Analizando los casos de los grupos 1, 7, 13 y 19 (ondulación 3D y ordenamiento Hx) para  $\alpha = 0.01^\circ$  y se encontró que los casos de carga A (sin restricción) tienen menores valores que los casos con restricción B. Tales discrepancias entre el modelo simplificado de Rosen y el presente modelo puede deberse a diferentes hipótesis en los estados tensionales de la fibra y la matriz, consideración de desalineamiento y plasticidad en la matriz, entre otras razones. Las mismas tendencias se producen para ordenamiento Sq y ondulación 2D.



**Figura 5.18:** Comparación con resultados analíticos. Curvas de sensibilidad para Grupos 11 y 1 (ondulación 3D y ordenamiento Hx) y ecuación analítica por Barbero [1] (a): Caso de carga A, sin restricción; (b): Caso de carga B, con restricción.

**Tabla 5.5.** Tensiones límite normalizadas con respecto a las cargas de bifurcación de Rosen [39]. Resultados para  $\alpha = 0.01^\circ$ .

$V_f$ [%]	$\sigma_y = 48.26$ MPa		$\sigma_y = 100$ MPa	
	Caso A	Caso B	Caso A	Caso B
10	0.529	1.029	0.704	1.306
30	0.715	1.045	0.931	1.289
50	0.794	1.082	1.022	1.336
70	0.767	1.027	1.002	1.312

En las Figuras 5.16 y 5.18 también se puede apreciar que existe una pérdida de la contribución de la fibra para grandes ángulos de desalineamiento. También, para tales ángulos de desalineamiento, un cambio en la tensión de fluencia de la matriz produce tensiones límite que son comparables e incluso mayores que aquellas generadas por el cambio en  $V_f$ . Como un ejemplo, el caso 22A en la Tabla 5.1 ( $V_f = 10\%$ , imperfección 2D,  $\sigma_y = 48.26$  MPa y ordenamiento Sq) con  $\alpha = 5^\circ$  tiene una tensión límite de 0.228 GPa. Si se incrementa  $V_f$  hasta un 70% (se recupera el caso 4A de la Tabla 5.1), entonces se obtiene un valor de 0.335 GPa. Si se considera nuevamente el caso 22A con  $\alpha = 5^\circ$  de la Tabla 5.1 y se modifica la tensión de fluencia de la matriz desde  $\sigma_y = 48.26$  MPa hasta  $\sigma_y = 100$  MPa, recuperándose el caso 22A de la Tabla 5.2, se obtiene un valor de 0.391 GPa. Nuevamente, si se analizan los demás casos considerados se obtienen las mismas tendencias. Finalmente, los resultados parecen mostrar que, para grandes ángulos de desalineamiento, la tensión de fluencia de la matriz juega un papel más importante que la fracción de volumen de fibra.



# Conclusiones

### 6.1. Introducción

En este capítulo se presentan las principales conclusiones que surgen de esta tesis. En primer lugar, se presentan las conclusiones relativas a la metodología de cálculo de tensiones macroscópicas presentada en el Capítulo 3. En segundo lugar, y como aplicación de la metodología desarrollada, se exponen las principales conclusiones sobre el estudio de las propiedades elásticas en compuestos de matriz polimérica con fibras largas y unidireccionales con daño en la interfaz fibra-matriz, discutido en el Capítulo 4. Finalmente, se expresan las conclusiones relativas al Capítulo 5 en el que se modela el fenómeno de micropandeo utilizando micromecánica computacional. En las Secciones 6.3 y 6.4, se enumeran los principales aportes originales y se establecen posibles líneas de investigación futuras, respectivamente.

### 6.2. Conclusiones

En concordancia con el primer objetivo específico establecido en la Sección 1.3, en esta tesis se ha logrado explicitar las relaciones entre las variables microscópicas presentes en la implementación del modelo de micromecánica computacional, tales como fuerzas y desplazamientos de nodos de control, y la tensión en la escala macroscópica. Estas relaciones originaron el desarrollo de una metodología para el cálculo de tensiones macroscópicas en el marco de la micromecánica computacional. Mediante una formulación basada en el Principio de Hill-Mandel se establece que esta metodología es adecuada para todas condiciones de borde que puedan ser implementadas mediante nodos de control, tales como las condiciones de borde periódicas y las condiciones de desplazamiento lineal. Esta metodología es adecuada para procesos de carga cuasi-estáticos en deformaciones infinitesimales o finitas, en problemas con o sin inestabilidad en la respuesta, con no linealidades geométricas y/o materiales en la escala microscópica. La metodología desarrollada en esta tesis se puede aplicar para cualquier forma de elemento de volumen representativo sin necesidad de modificar la implementación. A pesar de que el

ahorro en tiempo y costo de cálculo puede ser pequeño en comparación al tiempo de solución del problema de valores de frontera del elemento de volumen representativo, esta metodología tiene la ventaja de evitar la integración numérica y de requerir menor información. El desempeño de la metodología se ha verificado mediante la comparación de los resultados de la misma con resultados reportados en la literatura, tanto numéricos como analíticos. Los resultados revelaron la buena performance de la metodología desarrollada. Es importante hacer notar que dicha metodología puede usarse para los estados de deformación uniaxial, tensión uniaxial y de corte simple, por lo tanto, las tensiones que se pueden calcular serán las asociadas a dichos estados de carga.

Por otro lado, dado que las condiciones de borde expresadas en función de nodos de control son un elemento importante para la metodología desarrollada, se ha presentado una técnica para identificar las relaciones a imponer en el borde del dominio microscópico (ya sea celda unitaria o elemento de volumen representativo) cuando se desean emplear condiciones de borde periódicas y nodos de control. Las relaciones se seleccionan en función de la dependencia lineal de los vectores de periodicidad involucrados como se explica en el Apéndice A. Esta técnica es útil cuando la geometría del elemento de volumen representativo es compleja tal como la de un octaedro truncado.

En segundo lugar, en el Capítulo 4 de esta tesis, se ha presentado un modelo para la evaluación de las propiedades elásticas de compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras con daño en la interfaz fibra-matriz utilizando micromecánica computacional, en cumplimiento con el tercer objetivo específico enunciado en la Sección 1.3. Mediante un modelo de elementos finitos tridimensional se representa el dominio microscópico con daño localizado en la interfaz fibra-matriz en parte de la longitud de la fibra y del perímetro de la sección transversal de la misma. Se considera la posibilidad de contacto entre las superficies de la fisura por medio de un modelo de contacto sin fricción, lo que permite capturar el comportamiento bimodular elástico; esto es, cuando el material exhibe diferentes valores de módulos de Young a tracción y a compresión. Se ha realizado un extenso estudio paramétrico incluyendo características tales como la fracción de volumen de fibra, el tamaño de daño a lo largo de la fibra, el tamaño de daño en el perímetro de la sección transversal de la fibra, el ordenamiento de fibras, la distribución tridimensional de daño y la relación de aspecto de la celda unitaria. Para la verificación del modelo se utilizó un modelo bidimensional con y sin daño, que constituye los casos extremos para el modelo tridimensional con daño localizado. Los resultados de la presente metodología muestran que el módulo en la dirección de la fibra no sufre ninguna modificación

debida a la presencia del daño en la interfaz fibra-matriz. Las demás constantes elásticas de lámina se vieron fuertemente afectadas por el daño, llegando, en algunos casos, a reducciones mayores al 95% respecto al valor del mismo módulo del compuesto sin daño. Por otro lado, la distribución tridimensional del daño muestra una leve modificación en los valores del módulo transversal a tracción sólo cuando el parámetro de daño en el perímetro de la fibra es igual a la unidad y para valores de daño a lo largo de la fibra de entre 0.4 y 0.8, mientras que para las demás configuraciones de daño no se observan cambios relevantes.

La utilización de dominios en el nivel microscópico con detalles microestructurales tridimensionales no sólo permite el estudio cualitativo del problema, sino también, la derivación de todas las propiedades elásticas macroscópicas como funciones analíticas de los parámetros de daño a nivel microscópico. Para ello se utilizó el método de mínimos cuadrados y, de esta forma, con las propiedades de lámina pre-definidas (*off-line*, en inglés), se pudo acoplar el problema microscópico con un cálculo macroscópico de una estructura, sin necesidad de realizar cálculos en el nivel microscópico cuando se resuelve el problema en el nivel macroscópico. Esto permite incluir, en un mismo análisis, variables de los dominios microscópico y macroscópico tales como tamaño de zonas macroscópicas afectadas por el daño, número de láminas afectadas por el daño, niveles de daño microscópico, etc. Los resultados de una placa laminada simplemente apoyada sometida a una presión revelaron un aumento del desplazamiento de un punto de la estructura del 68% respecto al valor sin daño.

Abordando los últimos dos objetivos específicos planteados en la Sección 1.3, en el Capítulo 5 se ha presentado un modelo del fenómeno de micropandeo en compuestos de matriz polimérica con fibras largas sometidos a compresión en la dirección de la fibra utilizando la micromecánica computacional. Dicho fenómeno ha sido capturado considerando las ondulaciones o desviaciones de las fibras respecto de la dirección ideal e incluyendo dos fuentes de no linealidad: material y relaciones deformación-desplazamiento. Se consideraron dos tipos de curva de imperfección para la fibra en dos y tres dimensiones. En el primer tipo de imperfección, la fibra sigue una curva sinusoidal y, en el segundo tipo, la fibra tiene forma de helicoides. La imperfección se caracterizó mediante el máximo ángulo de desalineamiento, como es usual hacerlo en este campo de conocimiento. Se consideraron, además, en un estudio paramétrico, características microestructurales tales como la fracción de volumen de fibra, la tensión de fluencia de la matriz, el ángulo de desalineamiento, la orientación del plano de la

imperfección sinusoidal, el tipo de imperfección de fibra y el tipo de ordenamiento de fibras. Se consideró un caso de carga donde se restringe la deformación transversal a la dirección de la fibra y otro caso de carga en el que a medida que se comprime el material, el mismo puede deformarse en dirección transversal.

Los resultados del modelo desarrollado para micropandeo muestran un buen acuerdo con los resultados reportados en la literatura. Mediante este modelo ha sido posible identificar la gran sensibilidad a la imperfección de las tensiones de micropandeo, ya reportada en la literatura para pequeños ángulos de desalineamiento. Por otro lado, se puede concluir que el tipo de ondulación (bidimensional o tridimensional), el ordenamiento de fibra y la orientación del plano de la ondulación bidimensional no tienen gran influencia en las tensiones de micropandeo. Además, para grandes desalineamientos existe una pérdida del efecto de refuerzo provisto por las fibras. También, para tal nivel de desalineamiento, el incremento de la tensión de fluencia de la matriz produce tensiones límites comparables, e incluso mayores, a las tensiones límite generadas por el aumento de la fracción de volumen de fibra. En otras palabras, el micropandeo está dominado por la fracción de volumen de fibra y por la tensión de fluencia de la matriz sólo para pequeños ángulos de desalineamiento, mientras que, para grandes ángulos el micropandeo se muestra como una propiedad dominada por la tensión de fluencia de la matriz. Una consecuencia de este resultado es que, al momento del diseño de piezas de compuesto, incrementar la fracción de volumen de fibra no es una manera efectiva de aumentar la tensión límite a menos que se mantenga el desalineamiento de las fibras en valores pequeños mediante un proceso de fabricación adecuado.

En términos de modelado, y utilizando los resultados presentados en el Capítulo 5, se puede concluir que no es necesario modelar la geometría tridimensional compleja del compuesto para el problema de micropandeo. En su lugar, se pueden utilizar modelos 2D o aproximaciones analíticas que tengan en cuenta al menos las variables: fracción de volumen de fibra, ángulo de desalineamiento y tensión de fluencia de la matriz.

### **6.3. Aportes originales**

Las contribuciones originales presentadas en esta tesis pueden resumirse como:



- (i) Se ha desarrollado una metodología de post-proceso para el cálculo de tensiones macroscópicas en problemas de micromecánica computacional bajo deformaciones finitas.
- (ii) Se han evaluado las propiedades elásticas de lámina de compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras de vidrio con daño localizado en la interfaz fibra-matriz, utilizando micromecánica computacional con dominios microscópicos tridimensionales.
- (iii) Se han obtenido fórmulas analíticas para las propiedades elásticas macroscópicas de lámina modificadas considerando daño en la interfaz fibra-matriz para su incorporación en problemas de estructuras macroscópicas.
- (iv) Se ha logrado identificar las variables microscópicas de mayor importancia en el problema de micropandeo de plásticos reforzados con fibras de vidrio unidireccionales sometidos a compresión.
- (v) Se ha establecido una recomendación de diseño de piezas de compuesto sometidas a compresión: si la tecnología de fabricación disponible no permite mantener el desalineamiento de las fibras en valores bajos, no se debe aumentar la fracción de volumen de fibra, ya que esto no produce incremento significativo en la tensión de micropandeo.
- (vi) Se ha desarrollado una metodología para identificar las ecuaciones a implementar para las condiciones de borde periódicas mediante la técnica de restricciones multipunto.

#### **6.4. Posibilidades para trabajo futuro**

En base a la metodología desarrollada y a los resultados obtenidos en esta tesis se establecen las siguientes líneas de trabajo futuras:

- 1- Sobre la metodología de post-proceso desarrollada:
  - Extender la metodología a estados de deformación generales, distintos de deformación uniaxial, tensión uniaxial y corte simple, para poder calcular el tensor de tensiones completo. Esto permitirá estudiar fenómenos que dependen de estados de deformación más complejos tales como materiales bimodulares anisotrópicos o modos de falla complejos.

2- Sobre el problema de compuestos con daño en la interfaz fibra-matriz:

- Estudiar la influencia del daño en la interfaz fibra-matriz sobre el comportamiento mecánico de compuestos con ordenamiento aleatorio tridimensional de fibras.
- Estudiar el fenómeno de fractura de un compuesto laminado como la evolución de una fisura en la interfaz fibra-matriz a través de las expresiones analíticas para las propiedades elásticas de lámina desarrolladas en esta tesis.
- Utilizando ensayos experimentales de envejecimiento higrotérmico determinar la relación existente entre el tiempo de envejecimiento y el nivel de daño involucrado. Luego, evaluar el comportamiento elástico bimodular.
- Medir los parámetros de daño en la interfaz fibra-matriz en compuestos con daño higrotérmico mediante técnicas experimentales (SEM o XCT) y contrastar las predicciones del modelo con mediciones experimentales de propiedades elásticas y de fractura.

3- Sobre el problema de compuestos sometidos a compresión:

- Considerar el despegue en la interfaz fibra-matriz en un compuesto sometido a compresión en la dirección de la fibra mediante las propiedades elásticas de lámina expresadas en función del daño en la interfaz fibra-matriz en el nivel microscópico.
- Acoplar las escalas microscópicas y macroscópicas incluyendo el fenómeno de micropandeo considerando daño en la interfaz fibra-matriz en el nivel microscópico.
- Evaluar las contribuciones a la energía de deformación total de cada componente de tensión y deformación en GFRP sometidos a compresión utilizando micromecánica computacional. Esto permitirá identificar las contribuciones más importantes para entender el fenómeno en mayor detalle; esta información será útil para generar modelos simplificados basados en los resultados de la micromecánica computacional.
- Evaluar el comportamiento post-crítico considerando la objetividad de la respuesta con respecto al tamaño del elemento de volumen representativo utilizado.

# Referencias

- [1] Barbero E.J. (2010). Introduction to Composite Materials Design. CRC press. Boca Ratón.
- [2] Barbero, E. J. (editor) (2016). Multifunctional composites, CreateSpace, Charleston, SC.
- [3] Zohdi, T. I., y Wriggers, P. (2008). An Introduction to Computational Micromechanics. Springer. Berlín.
- [4] Ayadi, A., Nouri, H., Guessasma, S., y Roger, F. (2016). Determination of orthotropic properties of glass fibre reinforced thermoplastics using X-ray tomography and multiscale finite element computation. *Composite Structures*, 136, 635-649.
- [5] Naouar, N., Vidal-Salle, E., Schneider, J., Maire, E., y Boisse, P. (2015). 3D composite reinforcement meso FE analyses based on X-ray computed tomography. *Composite Structures*, 132, 1094-1104.
- [6] Fernandino, D. O., Cisilino, A. P., y Boeri, R. E. (2015). Determination of effective elastic properties of ferritic ductile cast iron by computational homogenization, micrographs and microindentation tests. *Mechanics of Materials*, 83, 110-121.
- [7] Lubrina, P., Giclais, S., Stephan, C., Boeswald, M., Govers, Y., y Botargues, N. (2014). AIRBUS A350 XWB GVT: State-of-the-art techniques to perform a faster and better GVT campaign. In *Topics in Modal Analysis II*, 8, 243-256. Springer. Bethel, CT, USA.
- [8] CompositesWorld (2016) Article: “Boeing, Airbus optimistic about commercial aircraft demand” en: [www.compositesworld.com](http://www.compositesworld.com)
- [9] Goudarzi, R. H., y Khedmati, M. R. (2015). An experimental investigation of static load capacity of AL-GFRP adhesively bonded single lap and double butt lap joints. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12(8): 1583-1594.
- [10] Hollaway, L. C. (2010). A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil infrastructure with reference to their important in-service properties. *Construction and Building Materials*, 24(12): 2419-2445.
- [11] Van Den Einde, L., Zhao, L., y Seible, F. (2003). Use of FRP composites in civil structural applications. *Construction and Building Materials*, 17(6): 389-403.
- [12] CompositesWorld (2016) Article: “The markets: Construction” en: [www.compositesworld.com](http://www.compositesworld.com)

- [13] CompositesWorld (2016) Article: "Supply and demand: Advanced fibers" en: [www.compositesworld.com](http://www.compositesworld.com)
- [14] Plan Nacional de Ciencia Tecnología e Innovación: Argentina Innovadora 2020 en: <http://www.argentinainnovadora2020.mincyt.gob.ar/>
- [15] Friedrich, K., y Almajid, A. A. (2013). Manufacturing aspects of advanced polymer composites for automotive applications. *Applied Composite Materials*, 20(2), 107-128.
- [16] Martínez, X., y Oller, S. (2009). Numerical simulation of matrix reinforced composite materials subjected to compression loads. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(4), 357-397.
- [17] Pochiraju, K. V., Tandon, G., y Schoeppner, G. A. (Eds.). (2011). *Long-term Durability of Polymeric Matrix Composites*. Springer. New York.
- [18] Kaddour, A. S., Hinton, M. J., Smith, P. A., y Li, S. (2013). The background to the third worldwide failure exercise. *Journal of Composite Materials*, 47(20-21), 2417-2426.
- [19] Aboudi, J., Arnold, S. M., y Bednarczyk, B. A. (2012). *Micromechanics of composite materials: a generalized multiscale analysis approach*. Butterworth-Heinemann.
- [20] Nguyen, V. P., Stroeven, M., y Sluys, L. J. (2011). Multiscale continuous and discontinuous modeling of heterogeneous materials: a review on recent developments. *Journal of Multiscale Modelling*, 3(04), 229-270.
- [21] Zahr-Viñuela, J., y Pérez-Castellanos, J. (2011). Elastic constants and isotropy considerations for Particulate Metal-Matrix Composites. A multi-particle, cell-based approach. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 42(5), 521-533.
- [22] Sethi, S., y Ray, B. C. (2015). Environmental effects on fibre reinforced polymeric composites: Evolving reasons and remarks on interfacial strength and stability. *Advances in colloid and interface science*, 217, 43-67.
- [23] Faguaga, E., Pérez, C. J., Villarreal, N., Rodriguez, E. S., y Alvarez, V. (2012). Effect of water absorption on the dynamic mechanical properties of composites used for windmill blades. *Materials & Design*, 36, 609-616.
- [24] Rull, N., Ollier, R. P., Francucci, G., Rodriguez, E. S., y Alvarez, V. A. (2015). Effect of the addition of nanoclays on the water absorption and mechanical properties of glass fiber/up resin composites. *Journal of Composite Materials*, 49(13), 1629-1637.

- [25] Kaminsky, M.M. (2005). Computational mechanics of composite materials. Springer, London UK.
- [26] Godoy, L. A., Mondragón, V., Pando, M. A., y Acosta, F. J. (2013). Stress redistributions in unit cells of fibre-reinforced polymer composites with interface degradation. *International Journal of Microstructure and Materials Properties*, 8(3), 185-206.
- [27] Teng, H. (1992). On stiffness reduction of a fiber-reinforced composite containing interfacial cracks under longitudinal shear. *Mechanics of Materials*, 13(2), 175-183.
- [28] Teng, H. (1992). Effective longitudinal shear modulus of a unidirectional fiber composite containing interfacial cracks. *International Journal of Solids and Structures*, 29(12), 1581-1595.
- [29] Kim, S. Y., Moon, H. J., y Earmme, Y. Y. (1995). Effective elastic moduli in fiber reinforced composite with circular-arc shaped interfacial cracks. *International Journal of Fracture*, 71(1), 85-93.
- [30] Kushch, V. I., Shmegeera, S. V., y Mishnaevsky, L. (2011). Elastic interaction of partially debonded circular inclusions. II. Application to fibrous composite. *International Journal of Solids and Structures*, 48(16), 2413-2421.
- [31] Kushch, V. I., Shmegeera, S. V., y Mishnaevsky, L. (2010). Elastic interaction of partially debonded circular inclusions. I. Theoretical solution. *International Journal of Solids and Structures*, 47(14), 1961-1971.
- [32] Rodriguez-Ramos, R., de Medeiros, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Otero, J. A., y Tita, V. (2013). Different approaches for calculating the effective elastic properties in composite materials under imperfect contact adherence. *Composite Structures*, 99, 264-275.
- [33] Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., López-Realpozo, J. C., Sabina, F. J., y Sevostianov, I. (2013). Effective elastic properties of a periodic fiber reinforced composite with parallelogram-like arrangement of fibers and imperfect contact between matrix and fibers. *International Journal of Solids and Structures*, 50(13), 2022-2032.
- [34] Sabina, F. J., Guinovart-Díaz, R., Rodríguez-Ramos, R., López-Realpozo, J. C., y Bravo-Castillero, J. (2012). Overall properties in fibrous elastic composite with imperfect contact condition. *International Journal of Engineering Science*, 61, 142-155.
- [35] Takahashi, K., y Chou, T. W. (1988). Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composites with interfacial debonding. *Metallurgical Transactions A*, 19(1), 129-135.

- [36] Shan, H. Z., y Chou, T. W. (1995). Transverse elastic moduli of unidirectional fiber composites with fiber/matrix interfacial debonding. *Composites Science and Technology*, 53(4), 383-391.
- [37] Teng, H. (2007). Transverse stiffness properties of unidirectional fiber composites containing debonded fibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38(3), 682-690.
- [38] Maewal, A. (1981). Postbuckling behavior of a periodically laminated medium in compression. *International Journal of Solids and Structures*, 17(3): 335-344.
- [39] Rosen, B. W. (1965). *Fiber composite materials*. American Society for Metals, Metals Park, Ohio, 37.
- [40] Tomblin, J. S., Barbero, E. J., y Godoy, L. A. (1997). Imperfection sensitivity of fiber microbuckling in elastic-nonlinear polymer-matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 34(13): 1667-1679.
- [41] Tomblin, J. S., y Barbero, E. J. (1997). Statistical microbuckling propagation model for compressive strength prediction of fiber-reinforced composites. In *Composite Materials: Testing and Design, Volume XIII*. ASTM International.
- [42] Drapier, S., Gardin, C., Grandidier, J. C., y Potier-Ferry, M. (1996). Structure effect and microbuckling. *Composites Science and Technology*, 56(7): 861-867.
- [43] Drapier, S., Grandidier, J. C., y Potier-Ferry, M. (1998). A non-linear numerical approach to the analysis of microbuckling. *Composites Science and Technology*, 58(5): 785-790.
- [44] Sun, C. T., y Tsai, J. L. (2001). Comparison of microbuckling model and kink band model in predicting compressive strength of composites. In *Proceedings of the 13th International Conference on Composite Materials, Beijing, China*.
- [45] Jochum, C., y Grandidier, J. C. (2004). Microbuckling elastic modelling approach of a single carbon fibre embedded in an epoxy matrix. *Composites Science and Technology*, 64(16): 2441-2449.
- [46] Nezamabadi, S., Potier-Ferry, M., Zahrouni, H., y Yvonnet, J. (2015). Compressive failure of composites: A computational homogenization approach. *Composite Structures*, 127, 60-68.
- [47] Nemat-Nasser, S., y Hori, M. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. 1999. Elsevier.
- [48] de Souza Neto, E. A., y Feijóo, R. A. (2008). On the equivalence between spatial and material volume averaging of stress in large strain multi-scale solid constitutive models. *Mechanics of Materials*, 40(10), 803-811.

- [49] van Dijk, N. P. (2015). Formulation and implementation of stress-and/or strain-driven computational homogenization for finite strain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107: 1009-1028.
- [50] Blanco, P. J., Sánchez, P. J., de Souza Neto, E. A., y Feijóo, R. A. (2016). The method of multiscale virtual power for the derivation of a second order mechanical model. *Mechanics of Materials*, 99, 53-67.
- [51] Kouznetsova, V., Geers, M. G., y Brekelmans, W. M. (2002). Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(8), 1235-1260.
- [52] Larsson, R., y Diebels, S. (2007). A second-order homogenization procedure for multi-scale analysis based on micropolar kinematics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(12), 2485-2512.
- [53] Torquato, S. (2013). *Random heterogeneous materials: microstructure and macroscopic properties*. Springer. New York.
- [54] Carazo, F. D., Giusti, S. M., Boccardo, A. D., y Godoy, L. A. (2014). Effective properties of nodular cast-iron: A multi-scale computational approach. *Computational Materials Science*, 82, 378-390.
- [55] Rodríguez, F. J., Dardati, P. M., Godoy, L. A., y Celentano, D. J. (2015). Evaluación de propiedades elásticas de la fundición nodular empleando micromecánica computacional. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 31(2), 91-105.
- [56] Inglis, H. M., Geubelle, P. H., y Matouš, K. (2008). Boundary condition effects on multiscale analysis of damage localization. *Philosophical Magazine*, 88(16), 2373-2397.
- [57] Van der Sluis, O., Schreurs, P. J. G., Brekelmans, W. A. M., y Meijer, H. E. H. (2000). Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials: effect of microstructural modelling. *Mechanics of Materials*, 32(8), 449-462.
- [58] Nguyen, V. D., Béchet, E., Geuzaine, C., y Noels, L. (2012). Imposing periodic boundary condition on arbitrary meshes by polynomial interpolation. *Computational Materials Science*, 55, 390-406.
- [59] Tyrus, J. M., Gosz, M., y DeSantiago, E. (2007). A local finite element implementation for imposing periodic boundary conditions on composite micromechanical models. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9), 2972-2989.

- [60] Larsson, F., Runesson, K., Saroukhani, S., y Vafadari, R. (2011). Computational homogenization based on a weak format of micro-periodicity for RVE-problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1), 11-26.
- [61] Wentorf, R., Collar, R., Shephard, M. S., y Fish, J. (1999). Automated modeling for complex woven mesostructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1), 273-291.
- [62] Yuan, Z., y Fish, J. (2008). Toward realization of computational homogenization in practice. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(3), 361-380.
- [63] Al Kassem, G., y Weichert, D. (2009). Micromechanical material models for polymer composites through advanced numerical simulation techniques. *Proceeding in Applied Mathematics and Mechanics*, 9(1), 413-414.
- [64] Reis, F. J. P., y Pires, F. A. (2014). A mortar based approach for the enforcement of periodic boundary conditions on arbitrarily generated meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 274, 168-191.
- [65] Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., y Jeulin, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13), 3647-3679.
- [66] Barbero, E. J. (2013). *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus TM*. CRC Press. Boca Ratón, FL, USA.
- [67] Barbero, E. J., Cosso, F. A., y Campo, F. A. (2013). Benchmark solution for degradation of elastic properties due to transverse matrix cracking in laminated composites. *Composite Structures*, 98, 242-252.
- [68] Caporale, A., Luciano, R., y Sacco, E. (2006). Micromechanical analysis of interfacial debonding in unidirectional fiber-reinforced composites. *Computers & Structures*, 84(31), 2200-2211.
- [69] Abadi, M. T. (2010). Characterization of heterogeneous materials under shear loading at finite strain. *Composite Structures*, 92(2), 578-584.
- [70] Guo, Z., Shi, X., Chen, Y., Chen, H., Peng, X., y Harrison, P. (2014). Mechanical modeling of incompressible particle-reinforced neo-Hookean composites based on numerical homogenization. *Mechanics of Materials*, 70, 1-17.



- [71] Bonora, N. y Ruggiero, A. (2006). Micromechanical modeling of composites with mechanical interface—Part I: Unit cell model development and manufacturing process effects. *Composites Science and Technology*, 66(2), 314-322.
- [72] Bonora, N., y Ruggiero, A. (2006). Micromechanical modeling of composites with mechanical interface—Part II: Damage mechanics assessment. *Composites Science and Technology*, 66(2), 323-332.
- [73] Bonora, N., y Ruggiero, A. (2005). Micromechanical modeling of ductile cast iron incorporating damage. Part I: Ferritic ductile cast iron. *International Journal of Solids and Structures*, 42(5), 1401-1424.
- [74] Li, S., y Wongsto, A. (2004). Unit cells for micromechanical analyses of particle-reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 36(7), 543-572.
- [75] Sun, C. T., y Vaidya, R. S. (1996). Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, 56(2), 171-179.
- [76] Michel, J. C., Moulinec, H., y Suquet, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1), 109-143.
- [77] Rasool, A., y Böhm, H. J. (2012). Effects of particle shape on the macroscopic and microscopic linear behaviors of particle reinforced composites. *International Journal of Engineering Science*, 58, 21-34.
- [78] Böhm, H. J., y Rasool, A. (2016). Effects of particle shape on the thermoelastoplastic behavior of particle reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 87, 90-101.
- [79] Daxner, T., Bitsche, R. D., y Böhm, H. J. (2006). Space-filling polyhedra as mechanical models for solidified dry foams. *Materials Transactions*, 47(9), 2213-2218.
- [80] Barulich, N. D., Godoy, L. A., y Dardati, P. M. (2016). Evaluation of stresses at the macro level based on computational micromechanics under finite strains. *Mechanics of Materials*, 101, 93-101.
- [81] Delannay, L., Jacques, P. J., y Kalidindi, S. R. (2006). Finite element modeling of crystal plasticity with grains shaped as truncated octahedrons. *International Journal of Plasticity*, 22(10), 1879-1898.
- [82] Dharmasena, K. P., y Wadley, H. N. G. (2002). Electrical conductivity of open-cell metal foams. *Journal of Materials Research*, 17(03), 625-631.

- [83] Oller, S., Miquel Canet, J., y Zalamea, F. (2005). Composite material behavior using a homogenization double scale method. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(1), 65-79.
- [84] Guo, Z., Peng, X., y Moran, B. (2007). Large deformation response of a hyperelastic fibre reinforced composite: Theoretical model and numerical validation. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38(8), 1842-1851.
- [85] Abaqus v. 6.7 (2009). Dassault Systèmes, Providence, RI, USA.
- [86] Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear solid mechanics (Vol. 24)*. Wiley. Chichester, UK.
- [87] de Souza Neto, E. A., Blanco, P. J., Sánchez, P. J., y Feijóo, R. A. (2015). An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. *Mechanics of Materials*, 80, 136-144.
- [88] Chandrasekharaiah, D. S., y Debnath, L. (2014). *Continuum Mechanics*. Elsevier.
- [89] Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4), 745-752.
- [90] Barulich, N. D., Godoy, L. A., y Dardati, P. M. (2016). A computational micromechanics approach to evaluate elastic properties of composites with fiber-matrix interface damage. *Composite Structures*, 154, 309-318.
- [91] Kajorncheappunngam, S., Gupta, R. K., y GangaRao, H. V. (2002). Effect of aging environment on degradation of glass-reinforced epoxy. *Journal of Composites for Construction*, 6(1), 61-69.
- [92] De La Osa, O., Alvarez, V. A., Fraga, A. N., Mammone, E. M., y Vázquez, A. (2006). Loss of mechanical properties by water absorption of vinyl-ester reinforced with glass fiber. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 25(2), 215-221.
- [93] Kotani, M., Yamamoto, Y., Shibata, Y., y Kawada, H. (2011). Strength prediction method for unidirectional GFRP after hydrothermal aging. *Advanced Composite Materials*, 20(6), 519-535.
- [94] El Yagoubi, J., Lubineau, G., Traidia, A., y Verdu, J. (2015). Monitoring and simulations of hydrolysis in epoxy matrix composites during hygrothermal aging. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 68, 184-192.
- [95] El Yagoubi, J., Lubineau, G., Roger, F., y Verdu, J. (2012). A fully coupled diffusion-reaction scheme for moisture sorption-desorption in an anhydride-cured epoxy resin. *Polymer*, 53(24), 5582-5595.

- [96] Quino, G., El Yagoubi, J., y Lubineau, G. (2014). Characterizing the toughness of an epoxy resin after wet aging using compact tension specimens with non-uniform moisture content. *Polymer Degradation and Stability*, 109, 319-326.
- [97] El Yagoubi, J., Lubineau, G., Saghir, S., Verdu, J., y Askari, A. (2014). Thermomechanical and hygroelastic properties of an epoxy system under humid and cold-warm cycling conditions. *Polymer Degradation and Stability*, 99, 146-155.
- [98] Seber G.A.F. y Wild C.J. (2003). *Nonlinear Regression*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.
- [99] Comninou, M. (1990). An overview of interface cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 37(1), 197-208.
- [100] Reddy, J. N., y Chao, W. C. (1980). Finite-element analysis of laminated bimodulus composite-material plates. *Computers & Structures*, 12(2), 245-251.
- [101] Barbero, E. J. (1998). Prediction of compression strength of unidirectional polymer matrix composites. *Journal of Composite Materials*, 32(5): 483-502.
- [102] Barulich, N. D., Godoy, L. A. y Barbero E. J. (2016). On micro-buckling of unidirectional fiber-reinforced composites by means of computational micromechanics. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(16): 2785-2806.
- [103] Budiansky, B., y Fleck, N. A. (1993). Compressive failure of fibre composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(1): 183-211.
- [104] Jones R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere, New York, 1975.
- [105] Yurgartis, S. W., y Sternstein, S. S. (1994). Experiments to reveal the role of matrix properties and composite microstructure in longitudinal compression strength. *ASTM Special Technical Publication*, 1185: 193-193.
- [106] Godoy, L. A. (2000). *Theory of Elastic Stability: Analysis and Sensitivity*. CRC Press. Boca Raton, FL, USA.



# Apéndice A: Condiciones de borde periódicas mediante restricciones multipunto

En esta sección se presenta una metodología de identificar qué ecuaciones implementar para aplicar condiciones de borde periódicas sobre un octaedro truncado con malla periódica (Figura A.3) mediante la técnica de restricciones multipunto, también conocida como eliminación de incógnitas redundantes. No obstante, dicho enfoque puede aplicarse a otras formas de celdas unitarias con cualquier conjunto de vectores de periodicidad. Se presentan también las ecuaciones para una celda unitaria de forma prismática. En las Figuras A.1 - A.3 se muestra la identificación de caras, aristas y vértices para la CU con forma de prisma, CU curva y octaedro truncado, celdas utilizadas a lo largo de esta tesis. Las dimensiones de las CU se aprecian en las Figuras 3.1 y 3.2.

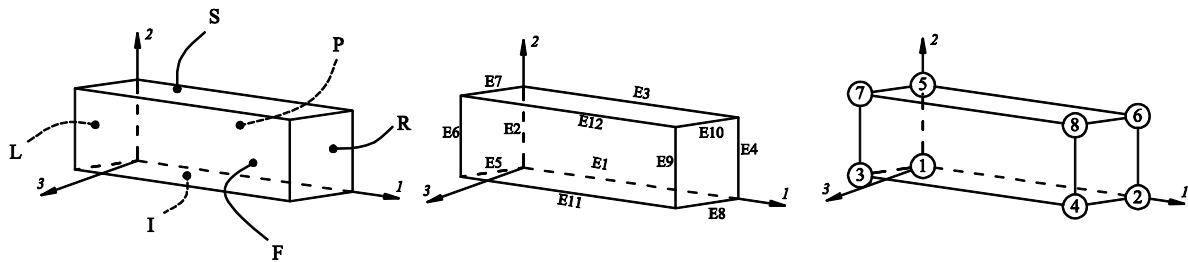


Figura A.1: Identificación de caras, aristas y vértices en una celda unitaria prismática.

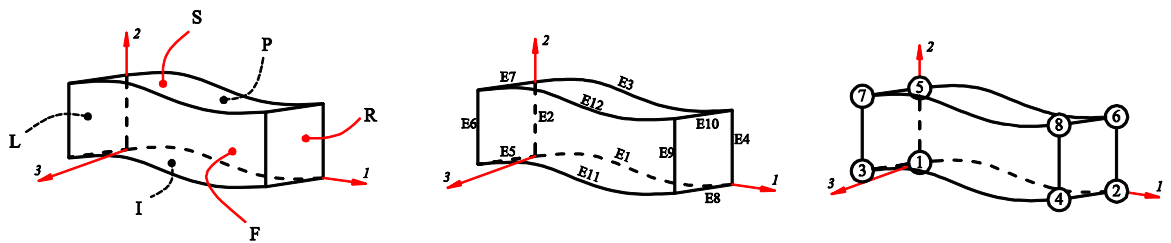


Figura A.2: Identificación de caras, aristas y vértices en una celda unitaria curva.

Para los pares de nodos de las caras, excluyendo los de los vértices y aristas, se pueden implementar las ecuaciones del tipo (3.12) utilizando los grados de libertad (GL) y vectores  $\mathbf{P}_v$  como se

indica en la Tabla A.1. Para los pares de nodos de las aristas no se podrían implementar todas las relaciones, directamente. Para explicar esto, considérense las aristas E1, E25 y E4 del octaedro truncado (Figura A.4). Todas las relaciones que se deberían cumplir para los pares de nodos de estas (excluyendo los vértices) son: entre E4 y E1 (por pertenecer a las caras L y R, respectivamente)

$$u_i^{E1} - u_i^{E4} - \frac{1}{\alpha} w_i^1 P_{1x} - \frac{1}{\alpha} w_i^2 P_{1y} - \frac{1}{\alpha} w_i^3 P_{1z} = 0 \tag{A.1}$$

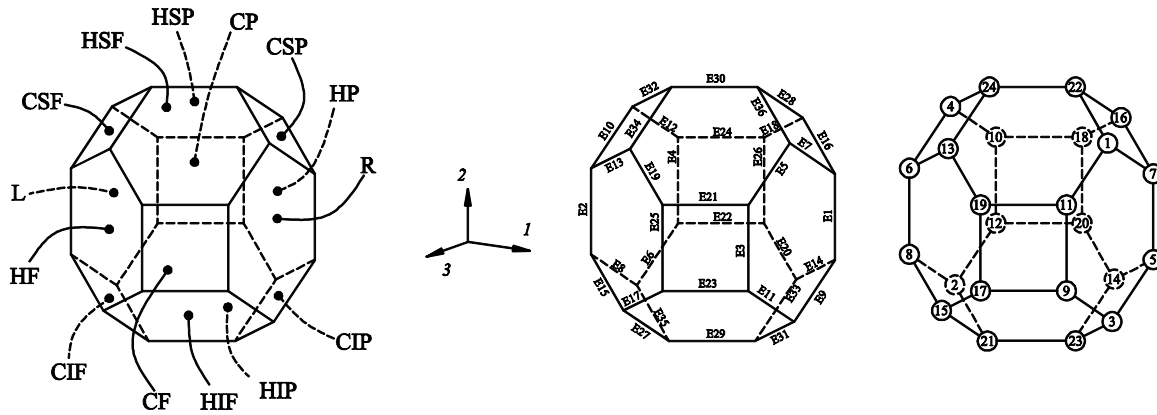


Figura A.3: Identificación de caras, aristas y vértices en una celda unitaria octaedro truncado.

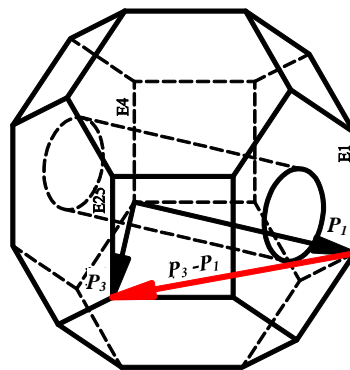


Figura A.4: Vectores  $P_v$  en aristas E1, E4 y E25.

Para hacer reducir la expresión se puede expresar la ecuación anterior en función de un producto escalar de vectores

$$u_i^{E1} - u_i^{E4} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{P}_1 = 0$$

$$\text{con } \mathbf{w}_i = [w_i^1 \quad w_i^2 \quad w_i^3]^T \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{P}_1 = [P_{1x} \quad P_{1y} \quad P_{1z}]^T$$

Entre E4 y E25, por pertenecer a las caras CF y CP se debe satisfacer

$$u_i^{E25} - u_i^{E4} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{P}_3 = 0 \quad (\text{A.3})$$

Finalmente, entre E25 y E1, por pertenecer a las caras HF y HP, se debe cumplir

$$u_i^{E25} - u_i^{E1} - \frac{1}{\alpha} \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Es posible notar que si, por ejemplo, se implementaran las ecuaciones (A.2) y (A.3) entonces se eliminarían los GL de los nodos de las aristas E1 y E25, respectivamente, imposibilitando la programación de la ecuación (A.4). Sin embargo, para este conjunto de aristas, la ecuación (A.4) es linealmente dependiente de las ecuaciones (A.2) y (A.3). Esto quiere decir que, si se programaran las ecuaciones (A.2) y (A.3), entonces no sería necesario programar la ecuación de restricción (A.4) ya que, a través de las dos primeras, se cumplirá la tercera ecuación. De esta manera, a través del análisis de la dependencia lineal de las ecuaciones de restricción, es posible determinar qué ecuaciones se pueden programar para cumplir con todas las restricciones necesarias, en estas aristas. Sin embargo, analizar la dependencia lineal de las ecuaciones puede resultar una tarea compleja. Pero, por otro lado, se puede notar que la dependencia lineal de las ecuaciones se dará con la dependencia lineal de los vectores involucrados en ellas. Por ejemplo, la ecuación (A.4) es dependiente de las ecuaciones (A.2) y (A.3) dado que el vector  $\mathbf{P}_v$  utilizado en la primera es  $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1$ , esto es, una combinación lineal de  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_3$  utilizados en las últimas ecuaciones. En definitiva, se puede reemplazar el análisis de la dependencia lineal de las ecuaciones de restricción por el análisis de la dependencia lineal de los vectores  $\mathbf{P}_v$  con la notable ventaja de ser, este último, un proceso más simple. Así, utilizando por ejemplo un simple

esquema de los vectores y del OT se podrá determinar la dependencia lineal de los mismos, por ejemplo, verificando que pertenezcan al mismo plano.

Aplicando este procedimiento a las restantes aristas y a los vértices del octaedro truncado se determinaron las ecuaciones a implementar del tipo (3.12) para los pares de nodos de los mismos según se indica en las Tablas A.1, A.2 y, A.3. Para una celda unitaria prismática (Figura A.1) se pueden aplicar las ecuaciones (3.12) según las Tablas A.4, A.5 y A.6.

**Tabla A.1.** Vectores  $\mathbf{P}_v$  de diferentes pares de puntos de caras de la celda unitaria octaedro truncado.

1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$
R	L	$\mathbf{P}_1$
QF	QP	$\mathbf{P}_3$
HF	HP	$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1$
QSF	QIP	$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$
HSF	HIP	$\mathbf{P}_2$
QSP	QIF	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$
HSP	HIF	$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$

**Tabla A.2.** Vectores  $\mathbf{P}_v$  de diferentes pares de puntos de aristas de la celda unitaria octaedro truncado.

1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$	1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$
E1	E4	$\mathbf{P}_1$	E18	E13	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$
E25	E4	$\mathbf{P}_3$	E31	E13	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$
E26	E2	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$	E14	E17	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$
E3	E2	$\mathbf{P}_1$	E32	E17	$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$
E5	E10	$\mathbf{P}_1$	E16	E19	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$
E33	E10	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$	E35	E19	$-\mathbf{P}_2$
E9	E6	$\mathbf{P}_1$	E20	E15	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$
E34	E6	$\mathbf{P}_2$	E36	E15	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$
E7	E12	$\mathbf{P}_1$	E21	E24	$\mathbf{P}_3$
E27	E12	$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$	E29	E24	$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$
E11	E8	$\mathbf{P}_1$	E23	E30	$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$
E28	E8	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$	E22	E30	$-\mathbf{P}_2$



**Tabla A.3.** Vectores  $\mathbf{P}_v$  de diferentes pares de puntos de vértices de la celda unitaria octaedro truncado.

1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$	1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$
V17	V12	$\mathbf{P}_3$	V7	V10	$\mathbf{P}_1$
V5	V12	$\mathbf{P}_1$	V19	V10	$\mathbf{P}_3$
V24	V12	$\mathbf{P}_2$	V21	V10	$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$
V9	V8	$\mathbf{P}_1$	V3	V2	$\mathbf{P}_1$
V22	V8	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$	V16	V2	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3$
V20	V8	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$	V13	V2	$\mathbf{P}_2$
V11	V6	$\mathbf{P}_1$	V1	V4	$\mathbf{P}_1$
V23	V6	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$	V14	V4	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$
V18	V6	$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3$	V15	V4	$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2$

**Tabla A.4, A.5 y A.6.** Vectores  $\mathbf{P}_v$  de diferentes pares de puntos de caras, aristas y vértices de la celda unitaria prismática y curva.

Caras			Vértices			Aristas		
1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$	1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$	1 <sup>er</sup> GL	2 <sup>do</sup> GL	$\mathbf{P}_v$
R	L	$\mathbf{P}_1$	V2	V1	$\mathbf{P}_1$	E3	E1	$\mathbf{P}_2$
S	I	$\mathbf{P}_2$	V5	V1	$\mathbf{P}_2$	E11	E1	$\mathbf{P}_3$
F	P	$\mathbf{P}_3$	V3	V1	$\mathbf{P}_3$	E12	E1	$\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$
			V4	V1	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3$	E8	E5	$\mathbf{P}_1$
			V7	V1	$\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$	E7	E5	$\mathbf{P}_2$
			V6	V1	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$	E10	E5	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$
			V8	V1	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$	E4	E2	$\mathbf{P}_1$
						E6	E2	$\mathbf{P}_3$
						E9	E2	$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3$

## Apéndice B: Expresiones analíticas para propiedades elásticas de lámina

En esta sección se presentan las ecuaciones analíticas para las propiedades de lámina, tal como son utilizadas en la teoría clásica de laminado TCL, para un compuesto con daño en la interfaz fibra-matriz como se discute en Capítulo 4. En este apéndice, para simplificar las expresiones se utiliza la nomenclatura  $x = l_d$ ,  $y = p_d$ . Para obtener las ecuaciones (B.3) a (B.15) se emplearon polinomios por su simplicidad. La forma final de dichas ecuaciones fue obtenida por prueba y error como se explica a continuación. Para cada propiedad considerada el procedimiento comienza con un polinomio de prueba de la forma

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^N c_i x^i y^i \quad (\text{B.1})$$

Los coeficientes  $c_i$  son calculados por medio del método de mínimos cuadrados y se evalúa el error relativo de la propiedad para cada valor de los parámetros de daño,  $x$  e  $y$ , obtenido mediante el Método de los Elementos Finitos  $p_{FEM}$

$$e(x, y) = \frac{\text{abs}(p(x, y) - p_{FEM}(x, y))}{\max(p_{FEM})} 100\% \quad (\text{B.2})$$

donde  $\max(p_{FEM})$  es el máximo valor para la propiedad elástica obtenido mediante el modelo de Elementos Finitos. Si el error relativo, para algún valor de  $x$  e  $y$ , es mayor que el 2%, entonces el valor de  $N$  es aumentado hasta que se alcance el valor aceptable en el error. Para reducir la cantidad de términos en la ecuación se prosigue eliminando términos de la misma; si el error es aceptable se continúa quitando más términos.

Si el polinomio encontrado presenta oscilaciones, típicamente observadas en el proceso de regresión utilizando polinomios, se reemplaza dicho polinomio por un cociente de polinomios. En primer lugar se consideran polinomios de segundo orden y se evalúan los coeficientes mediante el

método de mínimos cuadrados. Si el error es mayor que el 2% se agregan nuevos términos al divisor y al dividendo. Por lo tanto, todas las ecuaciones presentadas en este Apéndice tienen un error menor al 2% respecto de los valores obtenidos mediante el modelo de Elementos Finitos presentado en el Capítulo 4 de esta tesis.

Los valores de los coeficientes están dados en las Tablas B.1 y B.2. Los módulos obtenidos están expresados en GPa.

**Tabla B.1.** Coeficientes de ecuaciones para módulos de corte y coeficientes de Poisson.

	$V_{23T}$	$V_{23C}$	$V_{21T}$	$V_{21C}$	$V_{31T}$	$V_{31C}$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$
$a_0$	0.2188	0.2187	0.102	0.102	0.102	0.102	7.984	7.996	5.442
$a_1$	-0.5318	12.46	-0.3912	-0.2327	-0.00293	-0.00191	-18.67	-1.568	-14.29
$a_2$	1.0515	-1.288	0.6027	0.4535	-0.0099	-0.0252	45.37	1.559	0.522
$a_3$	-0.5952	59.53	-0.5756	-0.2587	-0.0826	0.01727	-30.55	0.5858	-9.801
$a_4$	-1.6723	-67.02	0.2891	-0.023	0.0107	0.5762	-110.9	-3.691	-3.254
$a_5$	2.643	-16.26	-0.1572	-	0.9542	-0.1516	101.6	-40.53	9.834
$a_6$	-0.985	-114.1	0.1982	-	-0.0641	0.5885	-22.1	2.556	2.915
$a_7$	1.1808	41.07	0.2894	-	0.0482	-0.4068	177.8	0.4392	-8.064
$a_8$	-1.1436	-34.57	-0.0898	-	-0.0565	0.01988	-183.4	-0.2514	12.41
$a_9$	-1.5203	278.9	-0.6349	-	-2.478	-2.22	41.5	-7.471	-5.749
$a_{10}$	1.4287	-84.37	0.4429	-	2.465	3.399	15.81	6.243	2.27
$a_{11}$	-	-80.33	0.1729	-	-	-1.648	-85.4	4.389	1.138
$a_{12}$	-	-15.56	-0.244	-	-	-	105	-	-1.475
$a_{13}$	-	-	-	-	-	-	-43.81	-	-

**Tabla B.2.** Coeficientes de ecuaciones para módulos transversales.

	$E_{2T}$	$E_{2C}$	$E_{3T}$	$E_{3C}$
$a_0$	25.02	25.02	25.11	25.12
$a_1$	-106.5	-64.92	-2579	5.56
$a_2$	236.2	133.2	1098	-34.17
$a_3$	-224.3	-77.88	-218.2	21.02
$a_4$	74.63	-4.881	-2.59E4	-73.41
$a_5$	-66.49	-	-1784	16.2
$a_6$	51	-	1560	4.426
$a_7$	73.32	-	-225.2	2.87
$a_8$	-30.91	-	279.5	-2.246
$a_9$	-22.04	-	-122.5	-18.14
$a_{10}$	-28.1	-	-4667	20.5
$a_{11}$	19	-	4349	-2.996
$a_{12}$	-	-	34.77	-

$$v_{23T} = a_0 + a_1 xy + a_2 xy^2 + a_3 xy^3 + a_4 x^2 y^2 + a_5 x^2 y^3 + a_6 x^2 y^4 + \dots \\ + a_7 x^3 y^2 + a_8 x^3 y^3 + a_9 x^4 y^3 + a_{10} x^4 y^4 \quad (\text{B.3})$$

$$v_{23C} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 xy + a_3 x^2 y + a_4 y + a_5 x)xy}{a_6 + a_7 x^2 + a_8 x^3 + a_9 xy + a_{10} y + a_{11} y^2 + a_{12} y^3} \quad (\text{B.4})$$

$$v_{21T} = a_0 + a_1 xy + a_2 xy^2 + a_3 xy^4 + a_4 xy^5 + a_5 x^2 y + a_6 x^3 y + a_7 x^3 y^6 + a_8 x^4 y + \dots \\ + a_9 x^4 y^7 + a_{10} x^5 y^8 + a_{11} x^7 y^7 + a_{12} x^7 y^8 \quad (\text{B.5})$$

$$v_{21C} = a_0 + a_1 xy^2 + a_2 xy^3 + a_3 xy^4 + a_4 x^4 y^3 \quad (\text{B.6})$$

$$v_{31T} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 x + a_3 y^2 + a_4 x^2)xy}{a_5 + a_6 x + a_7 x^2 + a_8 x^3 + a_9 y + a_{10} y^2} \quad (\text{B.7})$$

$$v_{31C} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 xy + a_3 y^2 x)xy}{a_4 + a_5 x + a_6 x^2 + a_7 x^3 + a_8 xy^2 + a_9 y + a_{10} y^2 + a_{11} y^3} \quad (\text{B.8})$$

$$G_{12} = a_0 + a_1 xy + a_2 xy^2 + a_3 xy^3 + a_4 x^2 y + a_5 x^2 y^2 + a_6 x^2 y^3 + a_7 x^3 y + \dots \\ + a_8 x^3 y^2 + a_9 x^3 y^3 + a_{10} x^3 y^4 + a_{11} x^4 y + a_{12} x^4 y^2 + a_{13} x^4 y^3 \quad (\text{B.9})$$

$$G_{13} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y^3 + a_5 xy^3)xy}{a_6 + a_7 x + a_8 x^2 + a_9 y + a_{10} y^2 + a_{11} y^4 x^2} \quad (\text{B.10})$$

$$G_{23} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 y^2)xy}{a_6 + a_7 x + a_8 x^2 + a_9 x^3 + a_{10} y + a_{11} y^2 + a_{12} y^3 x^3} \quad (\text{B.11})$$

$$E_{2T} = a_0 + a_1 xy + a_2 xy^2 + a_3 xy^3 + a_4 xy^4 + a_5 x^2 y + a_6 x^2 y^2 + a_7 x^3 y + \dots \\ + a_8 x^3 y^2 + a_9 x^3 y^3 + a_{10} x^4 y + a_{11} x^4 y^3 \quad (\text{B.12})$$

$$E_{2C} = a_0 + a_1 xy^2 + a_2 xy^3 + a_3 xy^4 + a_4 x^4 y^3 \quad (\text{B.13})$$

$$E_{3T} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 y^2)xy}{a_6 + a_7 x + a_8 x^2 + a_9 x^3 + a_{10} y + a_{11} y^2 + a_{12} y^3 x^3} \quad (\text{B.14})$$

$$E_{3C} = a_0 + \frac{(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 y^3 + a_5 xy^3)xy}{a_6 + a_7 x + a_8 x^2 + a_9 y + a_{10} y^2 + a_{11} y^4 x^2} \quad (\text{B.15})$$

