



FACULTAD  
DE CIENCIAS  
ECONÓMICAS



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

# REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

## Métodos para medir y evaluar la eficiencia de unidades productivas

Claudia B. Peretto

Artículo publicado en Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa  
Volumen 24, Número 39, 2016 – e-ISSN 1853 – 9777



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual  
4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

## MÉTODOS PARA MEDIR Y EVALUAR LA EFICIENCIA DE UNIDADES PRODUCTIVAS

CLAUDIA B. PERETTO  
Facultad de Ciencias Económicas – U.N.C.  
*cperetto@gmail.com*

*Fecha recepción: Octubre 2015 - Fecha aprobación: Mayo 2016*

### RESUMEN

La necesidad de medir y evaluar el rendimiento de cualquier organización de naturaleza pública o privada implica seleccionar alguna técnica de medición. El objetivo de este trabajo es presentar un resumen de los métodos disponibles para la evaluación de la eficiencia de unidades productivas. En primer lugar se describen las características de los modelos de frontera y no frontera. Luego, se presentan los dos grandes paradigmas para la medición de la eficiencia dentro de los métodos de frontera: el enfoque paramétrico y el no paramétrico, profundizando algunos de los modelos de cada grupo. Cada uno de estos métodos, tiene sus propios méritos y sus limitaciones, cada uno puede aportar importantes resultados en el estudio de un problema, por lo que podrían usarse en forma complementaria.

**PALABRAS CLAVE:** Eficiencia – Métodos paramétricos – Métodos no paramétricos.

### ABSTRACT

The need to measure and evaluate the performance of any public or private organization involves selecting a measuring technique. The aim of this paper is to present a summary of the available methods for evaluating the efficiency of production units. First the characteristics of the models border and no border is described. Then the two major paradigms for measuring efficiency within frontier methods are presented: parametric and non-parametric approach, deepening some of the models of each group. Each of these methods have their own merits and limitations, each can bring important results in the study of a problem, so it could be used in a complementary manner.

**KEY WORDS:** Efficiency – Parametric methods – Non-parametric methods.

## 1. INTRODUCCIÓN

La eficiencia es un concepto que actúa en el ámbito interno de la empresa, sin embargo, los elementos del entorno cada día tienen mayor influencia sobre el comportamiento estratégico de la organización.

Según Lovell (1993) existen dos razones fundamentales para medir eficiencia:

- La eficiencia es un indicador de éxito, una medida de rendimiento o desempeño para evaluar unidades productivas.
- Sólo midiendo eficiencia, y separando sus efectos de los efectos del entorno productivo podremos explorar hipótesis relativas a las causas de variación en la eficiencia. Identificar estas causas es esencial para implementar políticas destinadas a mejorar el desempeño y la asignación de los recursos.

En este sentido, la necesidad de medir y evaluar el rendimiento de cualquier organización de naturaleza pública o privada implica también seleccionar alguna técnica de medición que permita conocer los procesos de transformación de *inputs* en *outputs*. Los métodos que suelen emplearse para analizar la eficiencia de unidades se pueden resumir en dos grandes grupos: los que utilizan una función como frontera y los que no la emplean.

El objetivo de este trabajo es presentar un resumen de los métodos disponibles para la evaluación de la eficiencia de unidades productivas. En primer lugar se describen las características de los modelos de frontera y no frontera y se presentan los dos grandes paradigmas para la medición de la eficiencia dentro de los métodos de frontera: el enfoque paramétrico y el no paramétrico, profundizando algunos de los modelos de cada grupo.

Con respecto al análisis econométrico de la eficiencia técnica y económica, se presenta una visión general de los modelos subyacentes y de las técnicas econométricas que se han utilizado en el marco de los modelos de frontera. En particular se describe el modelo de frontera estocástica de Aigner, Lovell y Schmidt (1977) que es ahora la plataforma econométrica estándar para este tipo de análisis. En cuanto a los modelos no paramétricos, se describen brevemente el Método DEA y FDH (*Free Disposal Hull*), y uno de los métodos propuestos para el análisis temporal de la eficiencia, un modelo DEA que trabaja conjuntamente con el Índice de Malmquist, propuesto por Färe, Grosskopf, Norris y Zhang (1994).

Esta propuesta está organizada de la siguiente forma: la Sección 2 presenta los métodos de frontera y de no frontera; la Sección 3 contiene una descripción de los principales métodos paramétricos; la Sección 4 describe brevemente los métodos no paramétricos; la Sección 5 presenta las conclusiones de este trabajo.

## 2. MÉTODOS DE FRONTERA Y DE NO FRONTERA

Aunque existen distintas metodologías o visiones que suelen emplearse para analizar la eficiencia de una empresa, su estimación puede agruparse en general en dos grandes corrientes: los métodos que utilizan una función de producción, de costos o beneficios como una frontera y los que no la emplean. Arias (2009) señala que:

➤ **Métodos de Frontera:** obtienen una función de producción relacionando los productos obtenidos y los insumos de las unidades productivas consideradas en la evaluación. Dicha función determina el límite de posibilidades de producción por lo cual, bajos estos métodos, la eficiencia de una unidad productiva viene dada por la distancia que la separa de la mencionada frontera.

➤ **Métodos de no frontera:** no requieren la estimación de una frontera de posibilidades de producción ya que evalúan la eficiencia en forma absoluta (no se requiere la comparación con otras unidades productivas).

### 2.1. Métodos que no utilizan una frontera

Como se indicó anteriormente, las aproximaciones no frontera para medir la eficiencia no requieren de la formulación explícita de una frontera que delimite el espacio de situaciones posibles en la producción experimentada por las empresas. El empleo de este tipo de técnicas no suele presentar dificultades al medir empíricamente el comportamiento y rendimiento de las unidades productivas. No obstante, sus resultados son generalmente catalogados de ser muy simplistas, y de estar afectados por factores externos a la organización, por lo que, en muchos casos, no reflejan la eficiencia global de todos los factores empleados.

Entre los métodos de no frontera podemos mencionar:

- **Indicadores o Ratios Financieros:** son ampliamente empleados para medir la eficiencia económica y el rendimiento en las operaciones de las empresas. Los ratios financieros relacionan dos magnitudes, son razones, indicadores parciales, como la rentabilidad financiera (ROE), rentabilidad de los activos (ROA) o indicadores de eficiencia (Gastos administrativos sobre Ingresos netos, por ejemplo). Los ratios financieros, han sido asociados a indicadores de productividad parcial ya que miden la productividad de un solo factor de producción. Permiten hacer comparaciones a lo largo del tiempo de los resultados de una empresa, entre varias empresas en un momento dado o bien se pueden comparar con alguna medida estándar de resultados.
- **Índice de Productividad Global (IPG):** este indicador muestra la cantidad de producto que se obtiene respecto a las unidades de factor empleados, todo ello medido en unidades físicas. Esta medida de eficiencia supera a

las medidas de productividad parcial porque considera en general todos los factores de producción utilizados por las unidades productivas.

Según Giménez (2001), los números índice o índices de productividad pueden ser calculados en dos niveles, como índice de productividad parcial o como índice de productividad total.

- **Función de Producción Promedio:** fue desarrollada por los economistas en los años posteriores a la propuesta de Farrell (1957). Esta función estima, por medio del análisis de regresión, el valor medio de la variable dependiente (*output* o producto) en términos de las variables independientes (*inputs* o insumos), es decir, se pretende estimar una función de producción, de costos o de ingresos de tipo medio que sirva de referencia para realizar las mediciones.

Giménez (2001) señala que estos métodos, evalúan la eficiencia de una unidad de forma absoluta, a través del cálculo de uno o varios ratios, sin tener en cuenta el resto de las unidades bajo estudio.

## 2.2. Métodos que utilizan una frontera.

Para la evaluación de la eficiencia, se ha establecido firmemente como un método fiable el análisis de frontera. Los indicadores de eficiencia tradicionalmente calculados están basados en la utilización de las funciones de producción, de costos o de beneficios, como funciones de frontera. La característica común a estas tres funciones es la optimización, en el sentido de Pareto, pues todas ellas especifican el máximo o mínimo valor de la función que puede ser logrado bajo ciertas condiciones impuestas por los precios y la tecnología, es decir un límite o frontera. Cuando el óptimo está definido por la función de producción, la medida de eficiencia obtenida se la denomina eficiencia técnica. Si la comparación se realiza considerando un óptimo definido en términos de un objetivo económico determinado que las empresas persiguen, la medida de eficiencia obtenida se la denomina eficiencia económica.

Los primeros trabajos, según la recopilación de Greene (2007), sobre las funciones de frontera de producción y costos, y el cálculo de medidas de eficiencia, comienzan con Debreu (1951) y Farrell (1957). Farrell sugirió que se podría analizar provechosamente la eficiencia técnica en términos de desviaciones con respecto a una isocuanta<sup>1</sup> de frontera idealizada. Este enfoque cae naturalmente en un enfoque econométrico, en el que la ineficiencia se identifica como perturbaciones en un modelo de regresión. La estimación empírica de las funciones de producción había comenzado mucho antes del trabajo de Farrell, posiblemente con Cobb y Douglas en 1928. Sin embargo, hasta la década de 1950, las funciones de producción se utilizaban en gran medida como instrumentos para el estudio a nivel macroeconómico.

<sup>1</sup> Una isocuanta es una curva que describe todas las combinaciones posibles de las cantidades de dos inputs o factores productivos variables, que siguiendo una determinada tecnología, le permiten obtener a la empresa una misma cantidad de producto.

Los orígenes del análisis empírico de las estructuras de producción microeconómica se pueden encontrar en la década de 1960.

La literatura empírica sobre producción y costo fue desarrollada en gran parte de forma independiente del discurso de modelos de frontera. Mínimos cuadrados o alguna variante se utilizaba generalmente para pasar una función por el medio de una nube de puntos, y los residuos de ambos signos no eran, elegidos para algún tratamiento especial. Los puntos centrales de estos estudios eran la estimación de los parámetros de la estructura de producción, no las desviaciones individuales de la función estimada. Algunos autores señalaron que estos estimadores promedio estimaban la media, en lugar de la tecnología de mejores prácticas.

Los argumentos de Farrell proporcionaron una base intelectual para redirigir la atención desde la función de producción específicamente a las desviaciones de esa función, y reespecificar el modelo y las técnicas en consecuencia. Una serie de documentos incluyendo Aigner y Chu (1968) y Timmer (1971) propusieron modelos econométricos específicos que eran compatibles con las nociones de frontera de Debreu (1951) y Farrell (1957). Sin embargo, existe una amplia variedad de modelos de frontera disponibles, con algunos criterios teóricos y estadísticos que los diferencian.

### 2.3. Clasificación de los métodos de frontera

Los distintos métodos de frontera se diferencian por la forma de estimación y especificación de dicha frontera, así como por los supuestos realizados.

Forsund, Lovell y Schmidt (1988) y Lovell (1993) utilizan este criterio para clasificar las técnicas existentes. Pastor (1994) siguiendo el criterio de estos autores, señala que la frontera, puede especificarse como una relación paramétrica de los *inputs* o como una relación no paramétrica. Luego, puede especificarse una relación estadística entre el *output* observado y el de la frontera, o emplear métodos de programación matemática que construyan una frontera compatible con los datos y la teoría económica. Por último, la frontera puede tener un carácter determinístico (si no se permite la existencia de observaciones por encima de la misma) o estocástico (permitiendo que algunas observaciones se sitúen por encima de la frontera por causas aleatorias).

Para Murillo Melchor (2002) el proceso de estimación también se realiza tradicionalmente mediante dos tipos de técnicas básicas:

➤ **Paramétricas:** son las que especifican la tecnología mediante una forma funcional conocida. Según se modelice la naturaleza de la perturbación aleatoria, la frontera será:

- **Determinística:** la perturbación aleatoria del modelo incorpora únicamente las desviaciones de la ineficiencia. No se estarían considerando los posibles errores de medida introducidos en los datos.
- **Estocástica:** la perturbación aleatoria del modelo incluye además de las posibles ineficiencias de las unidades, los posibles errores de

medición de los datos u otros factores exógenos no controlables por las mismas.

➤ **No Paramétricas:** son las que formulan las características de la tecnología mediante supuestos sobre el conjunto de producción. La frontera estimada es más flexible y está formada por las unidades que producen la mayor cantidad de *outputs* con la menor cantidad de *inputs*. Se utilizan técnicas de programación lineal para su estimación. Según el tipo de datos utilizados se desarrollaron diferentes métodos:

- *Datos de corte transversal:* los principales modelos utilizados son *Data Envelopment Analysis* (DEA) y *Free Disposal Hull* (FDH).
- *Panel de datos:* DEA combinado con el Índice de Malmquist.

De lo expresado, surge la siguiente clasificación de los métodos:

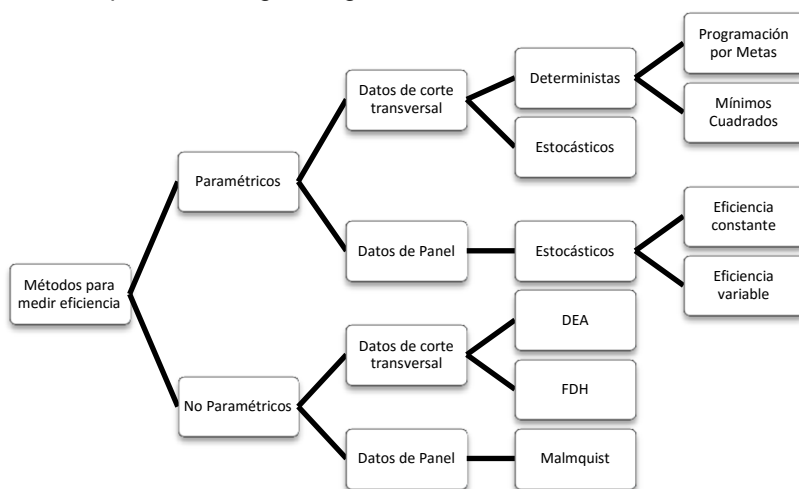


FIGURA 1: Clasificación Métodos para medir eficiencia (Murillo Melchor, 2002)).

En este sentido, también Dong, Hamilton y Tippett (2014) coinciden en que dos clases de métodos son los utilizados principalmente para determinar la frontera eficiente: el enfoque paramétrico (econométrico) y el no paramétrico (programación matemática), que difieren en principio, en los supuestos subyacentes a su aplicación.

De todas formas, ambos métodos de estimación de la Frontera, paramétricos y no paramétricos tienen sus propios méritos y sus limitaciones. Como se plantea en Melo y Espinosa (2005), una de las ventajas de aplicar análisis de frontera con respecto a las técnicas econométricas tradicionales es que provee medidas específicas de ineficiencia, que no siempre son el resultado del comportamiento directo de la unidad de producción. Así, las desviaciones pueden estar originadas en eventos que se encuentran bajo o fuera del control de dichas unidades.

### 3. MÉTODOS DE FRONTERA PARAMÉTRICOS

La existencia de una relación paramétrica conocida entre *outputs* e *inputs* posibilita la estimación de la función de producción mediante el uso de técnicas econométricas. El procedimiento paramétrico permite aislar el efecto del ruido estadístico del efecto de la ineficiencia, lo que resulta en una frontera estocástica. Sin embargo, este enfoque requiere una forma funcional específica que presupone la forma de la frontera eficiente (producción, costo o beneficio) y asume una distribución de probabilidad específica para el nivel de eficiencia. Esto trae como consecuencia que si los supuestos no son correctamente especificados, la eficiencia medida contendrá errores.

Los modelos paramétricos teóricos que se detallan a continuación, se basan en una recopilación realizada por Murillo Melchor (2002). Ellos se asocian a la producción de un único *output*, aunque en algunos casos se pueden extender a situaciones en las que se producen más de uno. En base al tipo de datos a disposición del investigador en la estimación de eficiencia, se presentan modelos para datos de corte transversal o para datos de panel.

#### 3.1. Modelos de datos de corte transversal

Los modelos de datos de corte transversal son aplicables a información obtenida en un momento en el tiempo para un grupo determinado de individuos sean éstos personas, empresas, organizaciones, etc. En este tipo de datos el componente temporal pierde (momentáneamente) importancia, centrándose el interés en las similitudes o disparidades de ese grupo en determinado instante del tiempo.

Aunque la principal ventaja de un modelo paramétrico es que permite discriminar el componente aleatorio, también prosperaron, sobre todo en los primeros tiempos, modelos determinísticos. Por lo tanto, se han desarrollado con el fin de utilizar este tipo de datos, modelos determinísticos y estocásticos.

##### 3.1.1. Modelos con fronteras determinísticas

En estos modelos se utilizan funciones de frontera, en las que la desviación de una observación del máximo valor teórico posible, se atribuye exclusivamente a la ineficiencia de la firma.

La frontera de producción de estos modelos se especifica como:

$$y_j = g(x_j, \beta) * \exp\{-u_j\}, \text{ para } j = 1, \dots, N$$

donde:  $x_j \in \mathbb{R}^{p+1}$  es el vector de inputs de la empresa  $j$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^1$  es el output de la empresa  $j$ ,  $g(x_j, \beta)$  es un función de producción conocida,  $\beta$  es el vector de parámetros que deben ser estimados,  $u_j$  es el vector que mide la ineficiencia técnica, siendo  $u_j \geq 0$

En estos modelos, se denomina Ineficiencia técnica a las desviaciones de los datos con respecto a la frontera. Se mide a través de la



relación que hay entre el output observado y el máximo output posible permitido por la función de producción:  $\exp\{-u_j\} = \frac{y_j}{g(x_j, \beta)}$

Si la función de producción sigue la distribución de una función de Cobb-Douglas se puede reescribir la frontera de la siguiente forma:

$$\ln y_j = \beta_0 + \sum_p \beta_p \cdot \ln x_{pj} - u_j, \text{ para } j=1, \dots, N \text{ donde } u_j \geq 0$$

Se han propuesto tres métodos para la estimación de esta última ecuación (Kumbhakar y Lovell, 2000):

- 1- **Programación por Metas (Goal Programming):** Propuesto por Aigner y Chu (1968). Estima los parámetros  $\beta$  mediante programación matemática, minimizando la suma de las desviaciones o la suma del cuadrado de las desviaciones. En ambos casos se restringe a que el output observado sea menor o igual al máximo posible.

$$\min \sum_j u_j \text{ ó } \sum_j u_j^2$$

$$\text{s.a.} \left[ \beta_0 + \sum_p \beta_p \ln(x_{pj}) \right] \geq \ln(y_j), j = 1, \dots, N$$

La ineficiencia se obtiene como las holguras de las restricciones:

$$u_j = \left[ \beta_0 + \sum_p \beta_p \ln(x_{pj}) \right] - \ln(y_j)$$

- 2- **Mínimos cuadrados corregidos:** Propuesto por Winsten (1957). Estimó el modelo mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios obteniendo un estimador de  $\beta_0$  sesgado. Debido a eso, en un segundo paso lo corrigió sumándole el máximo valor de los residuos mínimo cuadráticos. Los estimadores de la ineficiencia se obtienen corrigiendo los residuos, restándoles el máximo valor de los residuos mínimo cuadráticos.

- 3- **Mínimos cuadrados modificados:** Afriat (1972) y Richmond (1974) tomaron el modelo de Winsten, pero la corrección de  $\beta_0$  y de los residuos la realizan mediante la media de la distribución elegida para la distribución de la ineficiencia. En cuanto a la ineficiencia, en este modelo se especifica que se distribuye como una exponencial o como una normal de una cola.

Con la excepción de la estimación mediante Programación por Metas, la estimación paramétrica de la ineficiencia en un entorno determinístico ha sido abandonada, ya que son más apropiados y acordes con la realidad económica, los modelos que incorporan en su composición una variable aleatoria que recoja el ruido.

### 3.1.2. Modelos con fronteras estocásticas

La frontera de producción de estos modelos se especifica como:

$$y_j = g(x_j, \beta) \cdot \exp\{\varepsilon_j\}, \text{ para } j = 1, \dots, N$$

donde:  $x_j \in \mathbb{R}^{p+1}$  es el vector de inputs de la empresa  $j$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^1$  es el output de la empresa  $j$ ,  $g(x_j, \beta)$  es un función de producción conocida,  $\beta$  es el vector de parámetros que deben ser estimados,  $\varepsilon_j$  es el término de error que se define como

$$\varepsilon_j = v_j - u_j$$

siendo  $v_j$  la variable aleatoria de media cero y varianza constante que recoge el ruido del modelo y  $u_j$  la variable aleatoria de media cero y varianza constante que representa la ineficiencia en la producción. Los dos componentes son independientes entre sí y de los regresores.

El grado de ineficiencia se obtiene mediante la comparación del output observado con el máximo posible:

$$ET_0^j = \exp\{-u_j\} = \frac{y_j}{g(x_j, \beta) \cdot \exp\{v_j\}}$$

La estimación del nivel de ineficiencia requiere que se especifiquen no sólo la función de producción, sino también las distribuciones de los dos componentes del residuo del modelo, ya que no es posible identificar que parte del residuo es ineficiencia y que parte es ruido. La única forma de distinguir la parte correspondiente a la ineficiencia es suponer distribuciones conocidas para cada componente.

La mayoría de los autores, especifica la función de producción como una Cobb-Douglas o una Translog. Al ruido se le especifica como una distribución normal de media cero y varianza constante y en el término de la ineficiencia se utilizan cinco modelos según la distribución con la que se la identifique: seminormal, exponencial, normal truncada, gamma o uniforme.

La estimación del modelo se puede efectuar mediante dos técnicas diferentes:

- 1- **Máxima verosimilitud:** se obtienen estimadores consistentes de todos los parámetros. El siguiente paso es extraer la información sobre  $u_j$  que  $\varepsilon_j$  contiene y obtener las estimaciones de la ineficiencia de cada unidad. Esta información se puede extraer de la distribución de la ineficiencia condicionada, la cual es conocida al estar especificadas las distribuciones de ambas variables aleatorias. Calculadas las estimaciones puntuales de  $u_j$ , la ineficiencia técnica se obtendrá como  $ET_0^j = \exp\{-\hat{u}_j\}$ , aunque esta predicción es inconsistente y tiene el inconveniente de obtenerse estableciendo supuestos muy fuertes sobre las formas funcionales de sus componentes.
- 2- **Mínimos cuadrados ordinarios modificados:** se emplean mínimos cuadrados ordinarios para obtener estimadores consistentes de todos los parámetros excepto del término independiente. Luego se estima  $\beta_0$  y las varianzas del ruido y de la ineficiencia especificando las distribuciones de

ambas variables con alguna de las cinco opciones señaladas para el método de Máxima Verosimilitud.

Resumiendo, los modelos de datos de corte transversal presentan tres importantes inconvenientes:

- La ineficiencia técnica de una unidad en particular puede ser estimada pero no de forma consistente.
- La estimación del modelo requiere una especificación arbitraria de las distribuciones del ruido y de la ineficiencia.
- El supuesto de que la ineficiencia es independiente de los regresores puede no ser correcto en algunas situaciones.

### 3.2. Modelos de datos de panel

Schmidt y Sickles (1984) propusieron un modelo de datos de panel con el que era posible efectuar diversas estimaciones de la eficiencia técnica. A diferencia de los modelos de corte transversal, el de panel permite estimar consistentemente la ineficiencia de cada unidad basándose en la disponibilidad de muchas observaciones para la misma unidad productiva; además, en algunos de los modelos de panel no es necesario imponer supuestos distribucionales tan fuertes como en el modelo de corte transversal y tampoco es necesario suponer siempre que la ineficiencia es independiente de los regresores. En los datos de panel, una variable importante es el número de períodos que se vayan a analizar.

Los primeros modelos de panel presuponían a la eficiencia técnica constante en el tiempo, pero este supuesto se convierte en un argumento poco razonable según se alargue el tiempo del panel. En general podemos clasificar a los modelos de panel en dos grandes grupos:

- los que mantienen invariante la eficiencia a lo largo del tiempo y
- los que permiten su modificación.

#### 3.2.1. Modelos en que la eficiencia técnica es invariante en el tiempo

Este tipo de modelos especifica la tecnología de la siguiente manera:

$$y_{jt} = g(x_{jt}, \beta) \cdot \exp\{v_{jt} - u_j\} \text{ para } j=1, \dots, N \quad t=1, \dots, T$$

donde:  $t$  es el período de tiempo analizado,  $x_j \in \mathbb{R}^{p+1}$  es el vector de inputs de la empresa  $j$ ,  $y_j \in \mathbb{R}^1$  es el output de la empresa  $j$ ,  $g(x_j, \beta)$  es un función Cobb-Douglas,  $\beta$  es el vector de parámetros desconocidos que deben ser estimados

$v_{jt}$  es una perturbación aleatoria que representa el ruido. Independiente e idénticamente distribuida, de media cero y varianza constante que no está correlacionada con los regresores

$u_j$  es una perturbación aleatoria que representa la ineficiencia técnica. Invariante en el tiempo puede considerarse correlacionada o no con los inputs  
Si se linealiza la función mediante logaritmos, el modelo se reescribe de la siguiente forma:

$$Y_{jt} = \alpha + X'_{jt}\beta + v_{jt} - u_j \text{ para } j=1,\dots,N \quad t=1,\dots,T$$

donde:  $Y_{jt} = \ln(y_{jt})$  y  $X_{jt} = \ln(x_{jt})$

Battese y Coelli (1988) estimaron mediante la técnica de máxima verosimilitud este modelo adaptado para datos de panel. Al igual que con datos de corte transversal, especificaron el ruido mediante una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida que se distribuye como una normal  $(0; \sigma_w^2)$ , mientras que la ineficiencia es otra variable aleatoria que sigue una distribución seminormal  $(0; \sigma_w^2)$ .

La ineficiencia se sigue considerando no correlacionada con los inputs y la especificación de las funciones de distribución se sigue realizando sin una justificación teórica. Pese a ello, la ventaja de este modelo con respecto al que utiliza datos de corte trasversal, es que cuando el número de periodos  $t$  tiende a infinito, las estimaciones individuales de la eficiencia son consistentes.

La estimación de los parámetros del modelo y de la eficiencia técnica con datos de panel es habitual que se obtenga mediante uno de los dos modelos clásicos de estimación de panel de datos:

**1 – Modelo de efectos fijos:** considera a la ineficiencia como un efecto individual de cada empresa que puede estar correlacionado con los inputs. No especifica ningún supuesto distribucional sobre la eficiencia siendo el único supuesto implícito que la eficiencia es siempre mayor o igual a cero.

El modelo se estima consistentemente por Mínimos Cuadrados ordinarios, si se reescribe la ineficiencia junto con el término independiente  $\alpha_j$ .

La ecuación del modelo es entonces:

$$Y_{jt} = \alpha_j + X'_{jt}\beta + v_{jt} \text{ para } j=1,\dots,N \quad t=1,\dots,T$$

donde  $\alpha_j = \alpha - u_j$  son los efectos fijos de cada una de las empresas.

Los valores de ineficiencia técnica de cada empresa se calculan con referencia a la de, al menos una unidad considerada técnicamente eficiente. Para ello se normalizan las estimaciones de los efectos fijos obtenidos con el máximo valor,  $\hat{\alpha} = \max\{\hat{\alpha}_j\}$  y se calcula  $\hat{u}_j = \hat{\alpha} - \hat{\alpha}_j$ .

La ineficiencia técnica de cada unidad productiva será  $ET_0^j = \exp(-\hat{u}_j)$

Con respecto a este modelo podemos decir que la ventaja, es que los estimadores son consistentes a pesar de su simplicidad y la desventaja, es que incluyen no sólo la ineficiencia técnica, sino también todos aquellos efectos que varían entre empresas pero permanecen fijos en el tiempo.

**2 – Modelo de efectos aleatorios:** considera que  $u_j$  es una variable aleatoria con media y varianza constante y no correlacionada con los regresores, por lo que el modelo se expresa:

$$Y_{jt} = \alpha - E(u_j) + X'_{jt}\beta + v_{jt} - [u_j - E(u_j)] \text{ para } j=1,\dots,N \quad t=1,\dots,T$$

La principal virtud de este modelo, es que al caracterizar a la eficiencia como aleatoria, es posible suponer que los regresores son invariantes en el tiempo. Pero esto puede ser un inconveniente en situaciones en que la ineficiencia depende de los regresores.

### 3.2.2. Modelos en los que la eficiencia técnica varía en el tiempo

Hay tres modelos que especifican y estiman la eficiencia técnica como variable en el tiempo:

#### ❖ Modelos que utilizan técnicas tradicionales de los modelos de datos de panel

El primer modelo que introdujo una ineficiencia técnica variable en el tiempo fue desarrollado por Cornwell, Schmidt y Sickles (1990) y puede formularse de la siguiente forma:

$$Y_{jt} = \alpha_t + X'_{jt}\beta + v_{jt} - u_{jt} \quad \text{para } j=1,\dots,N \quad t=1,\dots,T$$

$$= \alpha_{jt} + X'_{jt}\beta + v_{jt}$$

donde  $\alpha_t$  es el término independiente que es común, en cada período a todas las empresas. El resto de las variables se definen estimando el modelo con efectos fijos o aleatorios.

#### ❖ Modelos que utilizan el estimador de máxima verosimilitud

En este modelo se supone que el ruido es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida, con distribución normal de media cero y varianza constante, y se define a la ineficiencia como  $u_{jt} = \beta(t)u_j$ , donde  $u_j$  es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida, que se distribuye como una seminormal de media cero y varianza constante.

Un modelo alternativo es el formulado por Battese y Coelli (1992), en el que la ineficiencia se distribuye como una normal truncada y el ruido como una normal y especifican  $\beta(t) = \exp(-\gamma[t-T])$ .

#### ❖ Modelos que utilizan el método de los momentos

En este caso, se puede reescribir el modelo de Cornwell *et al.* (1990) de la siguiente forma:

$$Y_{jt} = \alpha - \beta(t) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_u + X'_{jt}\beta + v_{jt} - [u_{jt} - E(u_{jt})] \quad \text{para } j=1,\dots,N \quad t=1,\dots,T$$

$$= \beta(t)^* + X'_{jt}\beta + v_{jt} - u_{jt}^*$$

donde  $u_{jt}^* = u_j \cdot \beta(t)$  y  $E(u_{jt}^*) = \beta(t) \cdot \sqrt{2/\pi} \sigma_u$

La estimación se realiza en un primer paso con las variables binarias  $\beta(t)^*$  mediante mínimos cuadrados. El procedimiento posterior para computar los momentos se puede revisar en Kumbhakar y Lovell (2000).

### 3.3. Modelo de Frontera Estocástica (SFA – Stochastic Frontier Analysis)

De los métodos paramétricos desarrollados, el modelo de frontera estocástica de Aigner, Lovell y Schmidt (1977) es, en la actualidad, la plataforma econométrica estándar para el análisis de eficiencia.

SFA fue desarrollado independientemente por Aigner *et al.* (1977) y Meeusen y van den Broeck (1977). La frontera de producción estocástica propuesta por ellos está motivada por la idea de que las desviaciones desde la frontera de producción podrían no estar completamente bajo el control de la unidad analizada. Algunos eventos externos, por ejemplo, un inusual número grande de fallas aleatorias en los equipos, o incluso el mal tiempo, podrían ser interpretados como ineficiencia. Peor aún, cualquier error o imperfección en la especificación del modelo o de la medición de las variables que lo componen, podría traducirse en un aumento de la medida de ineficiencia, aspectos no contemplados en la especificación de una frontera determinista.

SFA es una técnica paramétrica, que requiere supuestos acerca de la forma funcional de la función de producción y la distribución de los términos de error. Descompone el término de error en dos componentes: una parte representa eventos aleatorios fuera de control de la unidad de toma de decisiones y la otra parte es un término no negativo que captura la ineficiencia.

Esta formulación supone la existencia de una estructura de producción bien definida, caracterizada por una función de producción o de transformación:

$$y_i = f(x_i)TE_i e^{v_i}$$

donde  $0 < TE(y_i, x_i) \leq 1$ ,  $f(x_i)$  es la función de producción,  $TE_i$  es la medida de la eficiencia técnica y  $v_i$  no tiene restricciones. Este último componente, encarna errores de medición, cualquier otro ruido estadístico y variación aleatoria de la frontera entre las unidades.

El modelo reformulado es:

$$\ln y_i = \alpha + \beta^T x_i + v_i - u_i = \alpha + \beta^T x_i + \varepsilon_i$$

donde,  $u_i > 0$ , pero  $v_i$  podrá adoptar cualquier valor. Para  $v_i$  generalmente se asume una distribución simétrica, tal como la distribución normal. Por lo tanto, la frontera estocástica es  $\alpha + \beta^T x_i + v_i$ , y  $u_i$  representa la ineficiencia.

Se debe tener presente, que el objetivo último de la estimación econométrica de los modelos de frontera es construir una estimación de  $u_i$ . El primer paso, por supuesto, es calcular los parámetros de la tecnología,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_u$ , y  $\sigma_v$  (o cualquier otro parámetro). De esto se desprende que, si las estimaciones del modelo de frontera son inapropiadas o inconsistentes, entonces la estimación del componente de ineficiencia de  $\varepsilon_i$ , es decir,  $u_i$  es probable que no sea correcto.

La falta de justificación a priori para el uso de cualquier distribución particular, ha sido una crítica general del SFA. Sin embargo, la investigación ha demostrado que el impacto de las diferentes distribuciones en las estimaciones de ineficiencia, es muy pequeño.

## 4. MÉTODOS DE FRONTERA NO PARAMÉTRICOS

Estos métodos a diferencia de las técnicas econométricas, no estiman la frontera de producción, sino que la construyen a partir de los datos observados. La frontera estimada es más flexible que la paramétrica y está formada por las unidades de la muestra que producen la mayor cantidad de productos con la menor cantidad de insumos.

El enfoque no paramétrico, evita el error de especificación porque no requiere a priori supuestos acerca de la forma analítica de la función de producción (o costo), ni asumir distribución de probabilidad alguna para la eficiencia. Sin embargo, adolece de un inconveniente importante, ya que no considera errores aleatorios en el problema de optimización (por ejemplo, errores de medición, buena o mala suerte) y todas las desviaciones con respecto a la frontera se miden como ineficiencia. En consecuencia, se exagera la ineficiencia promedio si se presenta algún ruido.

En la mayoría de los modelos, la estimación de la frontera es determinística (es decir: las desviaciones de la frontera se consideran producidas únicamente por ineficiencias técnicas) y se utilizan técnicas de programación lineal para su estimación.

### 4.1. DEA (Data Envelopment Analysis)

DEA es una metodología de programación matemática, desarrollada específicamente para medir la eficiencia de un conjunto de unidades homogéneas (DMUs<sup>2</sup>). Calcula la eficiencia relativa de cada unidad, con respecto al conjunto de todas las unidades analizadas.

Este enfoque, nace como nueva metodología para medir la eficiencia, con el artículo de Charnes, Cooper y Rhodes (1978)<sup>3</sup>, donde se plantea un modelo de optimización fraccionaria y a partir del cual se deduce, mediante un cambio de variables, un modelo lineal equivalente y su correspondiente programa dual. Estos modelos son conocidos como modelos CCR y suponen retornos constantes a escala en el espacio de transformaciones posibles. Posteriormente Banker, Charnes y Cooper (1984) presentan el segundo modelo DEA conocido como BCC, el cual se caracteriza por admitir retornos variables a escala en el espacio de transformaciones posibles. A partir de éstos, a los que denominaremos "Modelos clásicos", se elaboraron numerosos modelos alternativos o complementarios.

La metodología DEA, basada en la Programación Lineal, permite trabajar con unidades que tienen múltiples *inputs* y *outputs*, que pueden ser incorporados en una única medida de eficiencia: la suma ponderada de los *outputs* dividida la suma ponderada de los *inputs*. Los Programas Lineales

<sup>2</sup> Aceptando la denominación en idioma inglés utilizada en DEA: *Decision Making Unit (DMU)*.

<sup>3</sup> No obstante resulta conveniente aclarar que existen importantes antecedentes de este enfoque, como por ejemplo el artículo de Farrell (1957).

admiten dos enfoques, “orientados a los *inputs*” y “orientados a los *outputs*”. En un modelo orientado a los *inputs* se trata de “minimizar” los mismos para obtener por lo menos un vector de *outputs* determinado. En los modelos orientados a los *outputs*, se intenta la maximización<sup>4</sup> de ellos, utilizando no más *inputs* que un cierto vector dado.

DEA, identifica unidades eficientes y permite hallar indicadores de gestión relativa para cada unidad con relación a aquellas que presentan el mejor desempeño. Además, permite identificar y cuantificar las ineficiencias con relación a los *inputs* y *outputs*, dando así pautas para el mejoramiento de las distintas unidades analizadas. Este modelo se encuentra ampliamente desarrollado en los números 20 y 21 de esta Revista, en dos artículos de Perez y Azcona (2001,2002), a los cuales se remite para profundizarlo.

#### 4.2. Modelo FDH (*Free Disposal Hull*)

El modelo FDH o de Libre Disposición del Casco Convexo, formulado por Deprins, Simar y Tulkens (1984), es un método similar al proceso de estimación de DEA, cuya principal diferencia es que no cuenta con un conjunto de posibilidades de producción convexo. Por consiguiente, el conjunto de posibilidades de producción estimado por DEA siempre va a incluir al conjunto de posibilidades estimado por FDH.

En este modelo, el casco convexo define al conjunto más pequeño que encierra todas las posibilidades de producción que pueden generarse a partir de las observaciones. Formalmente:

$$T_{FDH} = \{(x, y) / x \geq x_j; y \leq y_j; x \geq 0, y \geq 0; j = 1 \dots n\}$$

Dónde  $x_j (\geq 0) \wedge y_j (\geq 0)$  son las observaciones de las  $n$  DMUs.

Esto significa que, un punto es miembro de  $T_{FDH}$  si todas sus coordenadas de entradas son al menos tan grandes como las correspondientes en los vectores de entradas observados ( $x_j, j=1 \dots n$ ) y sus coordenadas de salidas no son más grandes que las correspondientes en los vectores de salidas observados ( $y_j, j=1 \dots n$ ).

La frontera en el modelo FDH se construye como una función a saltos incluyendo a todas las DMU observadas estrictamente no dominadas.

Ningún punto por debajo de la frontera posee la propiedad descrita para  $T_{FDH}$ . La formulación matemática de este modelo se plantea mediante un programa entero mixto:

<sup>4</sup> Los términos maximización y minimización están dados en el sentido de los óptimos de Pareto.



$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \theta \\
 & \text{s.a:} \\
 & \theta x_o - X \lambda \geq 0 \\
 & y_o - Y \lambda \leq 0 \\
 & e \lambda = 1 \\
 & \lambda_j \in \{0,1\}
 \end{aligned}$$

Dónde la condición  $\lambda_j \in \{0,1\}$  junto a la restricción  $e\lambda=1$ , asegura la determinación del casco convexo.

Este tipo de modelos se sustentan en el hecho de que frecuentemente es difícil hallar una justificación teórica o empírica que avale el postulado de convexidad en los conjuntos de posibilidades de producción. En este sentido, Farrell (1957) señaló que la indivisibilidad de *inputs* y *outputs* y las economías de escala y especialización, podían ser causa de violación del supuesto de convexidad.

Sin embargo, como expresa Gimenez García (2004), los modelos FDH no están exentos de críticas y limitaciones. En primer lugar, pueden calificar como técnicamente eficientes unidades con vectores asociados de *inputs-outputs* que son ineficientes desde el punto de vista de maximización de beneficios (Thrall, 1999), es decir, desde un punto de vista de eficiencia económica. Además, debe mencionarse que como consecuencia de la menor imposición de estructura a la función de producción de los modelos FDH respecto a los DEA, suele ser necesario disponer de un número mayor de unidades a comparar.

#### 4.3. Métodos para análisis temporal de la eficiencia: DEA Malmquist

El índice de la variación de productividad de Malmquist fue introducido por Caves *et al.* (1982), en base al trabajo de Malmquist (1953), quien había propuesto construir índices como cocientes de funciones de distancia. Estos pueden utilizarse para medir eficiencia en un contexto de múltiples *inputs* y *outputs*, requiriéndose sólo los datos sobre las cantidades de insumos y productos sin necesidad de conocer costos o ingresos.

El Índice de Malmquist permite medir la variación de la productividad entre dos periodos de tiempo. Al examinar los cambios entre dos periodos de tiempo, se puede tener dos tecnologías de producción para establecer la comparación: la del periodo inicial y la del periodo final. Por lo tanto, es posible obtener dos índices de productividad según la tecnología de referencia asumida. Färe *et al.* (1992) construyeron un índice Malmquist basado en DEA, el cual corresponde a la media geométrica de dichos índices.

A diferencia de otras aproximaciones para la medición de la productividad, el índice de Malmquist también entrega información sobre el origen del cambio de productividad a través de la descomposición de este índice en una componente de cambio técnico y otra, de cambio en la eficiencia. La primera recoge la variación debida al desplazamiento de la

frontera eficiente, por lo que expresa el grado en que la unidad analizada ha experimentado un cambio técnico. La segunda expresa la variación atribuible a la mejoría del rendimiento relativo de la unidad respecto a las mejoras de cada período, esto es, la unidad analizada ha experimentado un cambio de eficiencia.

Asúmase que existe una función de producción en el tiempo  $t$  y otra en el tiempo  $t+1$ . Para una dada  $DMU_0$ , el cálculo de su respectivo índice de Malmquist requiere de dos medidas de distancia obtenidas a partir de las observaciones realizadas en cada periodo de tiempo por separado pero que pueden ser calculadas utilizando como fronteras de referencia la medida de distancia de uno u otro período de tiempo. Dado que elegir una u otra frontera de referencia es arbitrario, debido a que no necesariamente ambos índices serán iguales, es convencional establecer el Índice de Malmquist de cambio en la productividad como la media geométrica de los dos índices. De esta forma, el índice de productividad de Malmquist orientado a los *outputs* propuesto por Färe *et al.* (1992), el cual mide la variación de productividad para una dada  $DMU_0$  entre los periodos  $t+1$  y  $t$ , está dado por:

$$m_0(y_{t+1}, x_{t+1}, y_t, x_t) = \left[ \frac{d_0^t(x_{t+1}, y_{t+1})}{d_0^t(x_t, y_t)} \right] \left[ \frac{d_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{d_0^{t+1}(x_t, y_t)} \right]^{1/2}$$

Donde:

$d_0^t(x_t, y_t)$  corresponde a la medida de eficiencia técnica de la  $DMU_0$  en el periodo  $t$ , la cual es obtenida usando las observaciones de todas las  $DMU$ 's en el periodo  $t$ , es decir,  $d_0^t(x_t, y_t) = \theta_0^t$ ,

$d_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})$  corresponde a la medida de eficiencia técnica de la  $DMU_0$  en el periodo  $t+1$ , la cual es obtenida usando las observaciones de todas las  $DMU$ 's en el periodo  $t+1$ , es decir,  $d_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1}) = \theta_0^{t+1}$ ,

$d_0^t(x_{t+1}, y_{t+1})$  corresponde a la medida de eficiencia técnica de la  $DMU_0$  obtenida al sustituir los datos de la  $DMU_0$  en el periodo  $t$  por los del periodo  $t+1$ , mientras que las observaciones de las demás  $DMU$ 's han sido realizadas en el periodo  $t$ ,

$d_0^{t+1}(x_t, y_t)$  corresponde a la medida de eficiencia técnica de la  $DMU_0$  obtenida al sustituir los datos de la  $DMU_0$  en el periodo  $t+1$  por los del periodo  $t$ , mientras que las observaciones de las demás  $DMU$ 's han sido realizadas en el periodo  $t+1$ .

En el caso de que  $m_0 > 1$ , supone que la  $DMU_0$  es más productiva en relación al período inicial. Este incremento en la productividad relativa de la  $DMU_0$  podría deberse a diferentes causas. Por un lado, es posible que la  $DMU_0$  haya mejorado su eficiencia relativa. Por otro lado, es posible que la tecnología disponible haya mejorado.

Färe *et al.* (1992) propusieron una descomposición del índice Malmquist que permite separar ambas fuentes de variación de la productividad en dos términos:

$$m_0 = \frac{D_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_0^t(x_t, y_t)} \left[ \frac{D_0^t(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_0^t(x_t, y_t)} \frac{D_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_0^{t+1}(x_t, y_t)} \right]^{1/2}$$

Donde:

$$\Delta EF_0^{t,t+1} = \frac{D_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_0^t(x_t, y_t)} \text{ mide el cambio de la eficiencia técnica de la}$$

DMU<sub>0</sub> entre el período *t* y el período *t+1* y

$$\Delta T_0^{t,t+1} = \left[ \frac{D_0^t(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_0^t(x_t, y_t)} \frac{D_0^{t+1}(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_0^{t+1}(x_t, y_t)} \right]^{1/2} \text{ mide el cambio de la frontera}$$

tecnológica de la DMU<sub>0</sub> entre el período *t* y el período *t+1*.

$\Delta EF_0^{t,t+1}$  refleja el cambio que se ha producido en la eficiencia relativa de la DMU (variación en la distancia que la separa de su frontera contemporánea), mientras que  $\Delta T_0^{t,t+1}$  refleja el cambio en la productividad que puede atribuirse al movimiento de la frontera entre los periodos *t* y *t+1*.

El Índice de Malmquist puede calcularse de diferentes formas según el método que se utilice para valorar la función de distancia. En numerosos estudios se utiliza el método DEA. Como señalan Färe *et al.* (1994) y Lovell (2003), puede calcularse suponiendo retornos constantes o variables a escala.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se revisaron los métodos para medir y evaluar el rendimiento de unidades productivas. Estos métodos, se dividen en dos grandes grupos según utilicen o no una función de frontera. Dentro de los métodos que utilizan una frontera, los métodos paramétricos y no paramétricos, difieren principalmente en la forma en que manejan el error aleatorio y en los supuestos con respecto a la forma de la frontera eficiente. El modelo de frontera estocástica (paramétrico) y el modelo DEA (no paramétrica) emergieron como dos desarrollos alternativos de las ideas que se originaron con Farrell (1957). Grosskopf (1986) señaló que el enfoque paramétrico ha sido desarrollado principalmente por los economistas, mientras que el no paramétrico ha sido más utilizado por la investigación de operaciones.

Ambos tipos de métodos, tienen sus propios méritos y sus limitaciones, por lo que la elección de un procedimiento de estimación adecuado ha sido bastante controversial. Dong *et al.* (2014) demuestran que ni el enfoque no paramétrico ni el paramétrico tienen una ventaja absoluta sobre el otro y sugieren realizar la aplicación paralela de los métodos que compiten, y luego cotejar los resultados de eficiencia obtenidos. Otros investigadores, han sostenido que no es necesario tener consenso sobre cuál método es mejor para determinar la frontera eficiente. Más bien, ellos recomiendan un procedimiento de verificación utilizando más de una

metodología (principalmente estadísticas), para evaluar la solidez de los resultados de eficiencia obtenidos.

Según Lovell (1993) “ninguno de los métodos es estrictamente dominante sobre otro”, y cada uno puede aportar importantes resultados en el estudio de un problema, por lo que interpreta que pueden usarse en forma complementaria.

## 6. REFERENCIAS

AFRIAT, S. N. (1972): “EFFICIENCY ESTIMATION OF A PRODUCTION FUNCTION”. *International Economic Review*, 13 (3): 568-598.

AIGNER, D. y CHU, S. (1968): “ON ESTIMATING THE INDUSTRY PRODUCTION FUNCTION”. *American Economic Review*, 58: 826-839.

AIGNER, D.; LOVELL, C. y SCHMIDT, P. (1977): “FORMULATION AND ESTIMATION OF STOCHASTIC FRONTIER PRODUCTION FUNCTION MODELS”. *Journal of Econometrics*, 6: 21-37.

ARIAS, J. (2009): “EVALUACIÓN DE LA EFICIENCIA BANCARIA EN VENEZUELA DESDE EL ANÁLISIS DE FRONTERAS DETERMINISTAS (PERÍODO 2005-2008)”. Tesis. Cumaná, Venezuela.

BANKER R., CHARNES A. y COOPER W. (1984): “SOME MODELS FOR ESTIMATING TECHNICAL AND SCALE INEFFICIENCIES IN DEA”. *Management Science*, vol. 30 (9): 1078-1092.

BATTESE, G. y COELLI, T. (1988): “PREDICTION OF FIRM-LEVEL TECHNICAL EFFICIENCIES WITH A GENERALIZED FRONTIER PRODUCTION FUNCTION FOR PANEL DATA”. *Journal of Econometrics*, 38: 387-399.

BATTESE, G. y COELLI, T. (1992): “FRONTIER PRODUCTION FUNCTIONS, TECHNICAL EFFICIENCY AND PANEL DATA: WITH APPLICATION TO PADDY FARMERS IN INDIA”. *Journal of Productivity Analysis*, 3: 153-169.

CAVES, D. W., CHRISTENSEN, L. R. y DIEWERT, W. E. (1982): “THE ECONOMIC THEORY OF INDEX NUMBERS AND THE MEASUREMENT OF INPUT, OUTPUT, AND PRODUCTIVITY”. *Econometrica*, 50 (6): 1393 – 1414.

CHARNES A., COOPER W. y RHODES E. (1978): “MEASURING THE EFFICIENCY ON DECISION MAKING UNITS”. *European Journal of Operations Research*, 2 (6): 429-444.

CORNWELL, C.; SCHMIDT, P. y SICKLES, S. (1990): "PRODUCTION FRONTIERS WITH CROSSECTIONAL AND TIME-SERIES VARIATION IN EFFICIENCY LEVELS". *Journal of Econometrics*, 46: 185-200.

- DEPRINS, D.; SIMAR, L. Y TULKENS, H. (1984): "MEASURING LABOR INEFFICIENCY IN POST OFFICES". The performance of public enterprises: Concepts and Measurements, M. Marchand, P. Pestieau y H. Iblkens (eds), Amsterdam, North Holland, pág. 243-267.

DONG, Y.; HAMILTON, R.; TIPPETT, M. (2014): "COST EFFICIENCY OF THE CHINESE BANKING SECTOR: A COMPARISON OF STOCHASTIC FRONTIER ANALYSIS AND DATA ENVELOPMENT ANALYSIS". *Economic Modelling* 36: 298-308.

FÄRE, R., GROSSKOPF, S., LINDGREN, B. y ROOS, P. (1992): "PRODUCTIVITY CHANGES IN SWEDISH PHARMACIES 1980-1989: A NONPARAMETRIC MALMQUIST APPROACH". *Journal of Productivity Analysis* 3(3): 85 – 101.

FÄRE, R., GROSSKOPF, S., NORRIS, M. y ZHANG, Z. (1994): "PRODUCTIVITY GROWTH, TECHNICAL PROGRESS, AND EFFICIENCY CHANGE IN INDUSTRIALIZED COUNTRIES". *The American Economic Review* 84 (1), pág. 66-83.

FARRELL, M.J. (1957): "THE MEASUREMENT OF PRODUCTIVE EFFICIENCY". *Journal of Royal Statistical Society Series A*, 120 (3): 253–281.

GIMÉNEZ, V. (2001): "LA MEDIDA DE LA EFICIENCIA OPERATIVA DE UNIDADES DE NEGOCIO MEDIANTE LOS MODELOS DEA. UNA APLICACIÓN AL SECTOR DE LA RESTAURACIÓN MODERNA". *Universidad Autónoma de Barcelona*, pág. 1-25.

GIMENEZ GARCÍA, V.M. (2004): "UN MODELO FDH PARA LA MEDIDA DE LA EFICIENCIA EN COSTES DE LOS DEPARTAMENTOS UNIVERSITARIOS". *Revista de Economía Pública*. 168 (1/2004), pág. 69-92.

GREENE, W. (2007) "THE ECONOMETRIC APPROACH TO EFFICIENCY ANALYSIS". En: FriedH, Lovell K, Schmidt S (Eds), *The measurement of productive efficiency and productivity*. Oxford University Press.

GROSSKOPF, S. (1986): "THE ROLE OF THE REFERENCE TECHNOLOGY IN MEASURING PRODUCTIVE EFFICIENCY". *Economic Journal*, 96: 499-513.

KUMBHAKAR, S. y LOVELL, C. (2000): "STOCHASTIC FRONTIER ANALYSIS", Cambridge University Press, Cambridge.

LOVELL, C.A.K. (1993): "PRODUCTION FRONTIERS AND PRODUCTIVE EFFICIENCY". EN: "THE MEASUREMENT OF PRODUCTIVE EFFICIENCY". [Editado por: Fried, H. C.; Lovell, C. A. K. & Schmidt, S. S.]. Oxford University Press. New York, New York (E. U. de A.). Pág. 3-67.

LOVELL, C.A.K. (2003): "THE DECOMPOSITION OF MALMQUIST PRODUCTIVITY INDEXES". *Journal of Productivity Analysis* 20, 437–458.

MALMQUIST, S. (1953): "INDEX NUMBERS AND INDIFFERENCE SURFACES". *Trabajos en Estadística*, 4: 209–242.

MELO, L. y ESPINOSA, N. (2005): "INEFICIENCIA EN LA DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA: UNA APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES DE DISTANCIA ESTOCÁSTICA". *Revista ESPE*, 49: 88-132.

MEEUSEN, W. y VAN DEN BROECK, J. (1977): "EFFICIENCY ESTIMATION FROM COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTIONS WITH COMPOSED ERROR". *International Economic Review*, 18 (2): 435–444.

MURILLO MELCHOR, C. (2002): Tesis Doctoral Economía "CONTRIBUCIONES AL ANÁLISIS ESTOCÁSTICO DE LA EFICIENCIA TÉCNICA MEDIANTE MÉTODOS NO PARAMÉTRICOS". Universidad de Cantabria.

PASTOR, J. M. (1994): "EFICIENCIA, CAMBIO PRODUCTIVO Y CAMBIO TÉCNICO EN LOS BANCOS Y CAJAS DE AHORRO ESPAÑOLAS: UN ANÁLISIS FRONTERA NO PARAMÉTRICO". *Anales VII ASEPELT-ESPAÑA y Simposio de Análisis económico (Barcelona)*.

PÉREZ MACKEPFRANG, C. y ALBERTO DE AZCONA, C. (2001): "MEDIDA DE LA EFICIENCIA TÉCNICA UTILIZANDO PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA - MÉTODOS DEA -PRIMERA PARTE". *Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa*, 21: 44-62.

PÉREZ MACKEPFRANG C., ALBERTO C. (2002): "MEDIDA DE LA EFICIENCIA TÉCNICA UTILIZANDO LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA (MÉTODOS DEA) –SEGUNDA PARTE–". *Revista de la Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa*, 22: 17-36.

SCHMIDT, P. y SICKLES, R. (1984): "PRODUCTION FRONTIERS AND PANEL DATA". *Journal of Business Economic Statistics*, 2 (4): 367-374.