

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA

TESIS DOCTORAL



EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE
INFORMACIÓN EN IMÁGENES DE
RADAR DE APERTURA SINTÉTICA

AUTOR: MARÍA GABRIELA PALACIO

DIRECTOR: DR. ALEJANDRO C. FRERY

JUNIO DE 2019

EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DE INFORMACIÓN EN IMÁGENES DE RADAR DE APERTURA SINTÉTICA

por

MARÍA GABRIELA PALACIO

DR. ALEJANDRO C. FRERY
DIRECTOR

COMISIÓN ASESORA

DR. ALEJANDRO C. FRERY
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS, MACEIO, BRASIL

DRA. ELIZABETH VERA DE PAYER
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, Y FÍSICAS Y NATURALES - UNC

DR. OSCAR BUSTOS
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA - UNC

Esta Tesis fue presentada a la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba para cumplimentar los requerimientos de obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

CÓRDOBA, ARGENTINA
JUNIO DE 2019

*Dedicado a mis padres Rosa y Mario,
a mi esposo Gerardo y a mi hijo Gerónimo
por el apoyo incondicional
y el acompañamiento, más allá de la distancia.*

Agradecimientos

Deseo agradecer a la Universidad Nacional de Córdoba por darme esta oportunidad de formación y a la Universidad Nacional de Río Cuarto por darme el lugar para estudiar y para trabajar estudiando desde hace tantos años.

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo del *Dr. Alejandro C. Frery*, quien no sólo me ha brindado la oportunidad de trabajar bajo su dirección, sino que además me ha alentado siempre a continuar aprendiendo.

A todos los compañeros del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de Río Cuarto, en especial a los del área Estadística con los que he compartido parte de esta formación, y muy especialmente a *Susana Ferrero* por estar cerca siempre animándome a seguir.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, a mi mamá *Rosa* que hace tantos años desde el cielo me acompaña, a mi papá *Mario* que ya no está por acá pero pudo verme trabajando en este proyecto y sé que está feliz por mí, a *Mirta* que ha estado cerca y me acompaña como si mi papá estuviera, a mi esposo *Gerardo* que me alienta en cada desafío con tanta paciencia y tranquilidad, y a *Gero*, que tanto ha visto y acompañado a su mamá estudiando y trabajando para llegar a esta meta.

Resumen

Las imágenes *Synthetic Aperture Radar* (SAR) en general, y las *Polarimetric Synthetic Aperture Radar* (PolSAR) en particular, son una importante fuente de información en aplicaciones de Teledetección. Sin embargo, el ruido *speckle* —que es parte de estas imágenes— les da una apariencia granular que dificulta su interpretación y análisis, disminuyendo la cantidad de información que contienen.

La evaluación del Contenido de Información (CI) de las imágenes y cómo se ve afectado por algunos procedimientos habituales se vuelve un desafío interesante en el campo de la teledetección.

Muchos trabajos han abordado el problema de la evaluación del CI desde diferentes enfoques. En esta tesis, siguiendo a Narayanan et al. (2002), estudiamos el CI desde el punto de vista de la exactitud de la clasificación, analizando el efecto que la degradación espacial tiene sobre la clasificación. Como en ese trabajo, modelamos la degradación aplicando filtros con diferentes tamaños de ventana, y usamos como datos de entrada (*input*) para la clasificación las imágenes filtradas. De este modo, a través de imágenes clasificadas verificamos cómo el cambio en las propiedades de los datos de entrada afecta la calidad del resultado.

Nuestra atención está enfocada en las etapas de filtrado y clasificación, además de la verificación de los supuestos distribucionales asociados a esas técnicas. Para el filtrado consideramos, además del clásico filtro *Local Mean* (LM) usado por Narayanan et al. (2002), el *Model Based PolSAR* (MBPolSAR).

Para la clasificación aplicamos, además del clásico Máxima Verosimilitud (MV)

usado por Narayanan et al. (2002), *Support Vector Machines* (SVM) cuyo uso se está extendiendo en el campo de la teledetección. Respecto a los modelos estudiamos los asociados a datos PolSAR *multi-look*, y algunas distribuciones marginales y bivariadas, unificando notación y presentando sus principales propiedades, y verificamos el ajuste de los datos a esas distribuciones.

Para medir la precisión del mapa resultante de la clasificación (CI) usamos, además de la Exactitud de la Clasificación aplicada por Narayanan et al. (2002), otros dos coeficientes derivados de la Matriz de Confusión.

Aplicamos la metodología a dos imágenes PolSAR reales.

Las medidas de precisión obtenidas son buenas y, a diferencia de Narayanan et al. (2002), aumentan con la degradación. Con esto concluimos que, al menos hasta cierto tamaño de ventana, el filtrado mejora los resultados de clasificación y, con ello, el CI.

Palabras claves: *Contenido de Información, SAR Polarimétrico, Filtro MBPolSAR, SVM.*

Abstract

Synthetic Aperture Radar (SAR) images in general, and Polarimetric Synthetic Aperture Radar (PolSAR) images in particular, are an important source of information in Remote Sensing applications. However, speckle noise — which is part of these images — gives them a granular appearance that makes interpretation and analysis hard tasks, and decreases the amount of available information.

A major issue is the assessment of Information Content in these kind of images, and how it is affected by usual processing techniques.

Many works have addressed the problem of the evaluation of the information content. In this thesis, as Narayanan et al. (2002), we study this problem from the classification accuracy viewpoint, focusing in the effect of the spatial degradation on classification procedures. As in that work, we model the degradation by applying filters of different window sizes, and we use the filtered images as input for classification. Thus, the resulting classified images allow us verify how changing the properties of the input data affects their quality.

Our attention is focused in the filtering and classification stages, as well as the verification of the distributional assumptions associated with these techniques.

For the filtering stage we consider, in addition to the classical Local Mean filter used by Narayanan et al. (2002), the Model Based PolSAR filter. For the classification stage, in addition to the classical Maximum Likelihood used by Narayanan et al. (2002), Support Vector Machines. With respect to statistical analysis, we study distributions that model multilook PolSAR images, and some marginal univariate

and bivariate distributions. We unify the notation and present their main properties. We also verify the agreement of the data to the probability density function of these distributions.

To measure the map precision, this study deals not only with Classification Accuracy, used by Narayanan et al. (2002), but also with two coefficients derived from the Confusion Matrix.

Experiments were conducted on two airborne PolSAR images.

Differently from the results observed by Narayanan et al. (2002), almost all quality measures are good and increase with degradation. At least up to certain window sizes, filtering improves the classification results, and also information content.

Keywords: *Information content, Polarimetric SAR, MBPolSAR filter, SVM.*

Resumo

As imagens *Synthetic Aperture Radar* (SAR) em geral, e as *Polarimetric Synthetic Aperture Radar* (PolSAR) em particular, são uma importante fonte de informação em aplicações de Sensoriamento Remoto. No tanto, o ruído *speckle* — o qual é parte de estas imagens — dá a elas uma aparência granular que dificulta sua interpretação e análise, diminuindo a quantidade de informação que elas contêm.

A avaliação do Conteúdo de Informação (CI) das imagens e o modo como é afetado por alguns procedimentos usuais torna-se um desafio interessante no campo do sensoriamento remoto.

Muitos trabalhos tratam o problema da avaliação do CI de diferentes abordagens. Nesta tese, seguindo Narayanan et al. (2002), estudamos o CI do ponto de vista da exatidão da classificação, analisando o efeito que a degradação espacial tem na classificação. Para isso, modelamos a degradação aplicando filtros com diferentes tamanhos de janela e os usamos como dados de entrada (*input*) para classificar as imagens filtradas. Desta forma, através de imagens classificadas, verificamos como a alteração nas propriedades dos dados de entrada afeta a qualidade do resultado.

Nossa atenção está voltada para as etapas de filtragem e classificação, bem como para a verificação dos pressupostos distribucionais associados a essas técnicas. Para filtragem consideramos, além do filtro clássico LM usado por Narayanan et al. (2002), o filtro MBPolSAR. Para a classificação aplicamos, além do clássico MV usado por Narayanan et al. (2002), SVM de amplo uso no sensoriamento remoto. Em relação aos modelos, nós estudamos aqueles associados com imagens PolSAR *multi-look*, e algumas distribuições marginais e bivariadas, unificando a notação e

apresentando suas principais propriedades, e verificamos o ajuste dos dados para essas distribuições.

Para medir a precisão do mapa resultante da classificação (CI) utilizamos, além da exatidão da classificação aplicada por Narayanan et al. (2002), dois outros coeficientes derivados da matriz de confusão.

Aplicamos a metodologia a duas imagens PolSAR obtidas por sensores.

As medidas de precisão obtidas são boas e, diferentemente do Narayanan et al. (2002), aumentam com a degradação. Com isso, concluímos que, pelo menos até certo tamanho da janela, a filtragem melhora os resultados da classificação e, com ela, o CI.

Palavras-chave: *Conteúdo informativo, SAR polarimétrico, filtro MBPolSAR, SVM.*

Abreviaturas

AIRSAR: Airborne Synthetic Aperture Radar.

BSA: Back Scattering Alignment

CI: Contenido de Información.

CV: Coeficiente de Variación.

ENL: Equivalent number of looks.

ENVISAT: Environmental Satellite.

ESA: European Space Agency.

E-SAR: Experimental Synthetic Aperture Radar.

HG: Función Hipergeométrica.

JPL: Jet Propulsion Laboratory.

LANDSAT-TM: LANDSAT Thematic Map.

LM: Local Mean.

ME: Muestras de Entrenamiento.

MBPolSAR: Model Based PolSAR.

MV: Máxima Verosimilitud.

NASA: National Aeronautics and Space Administration.

PolSAR: Polarimetric Synthetic Aperture Radar.

PDF: Probability Density Function.

RBF: Radial Basis Functions.

RAR: Real Aperture Radar.

RADAR: RADio Detection And Ranging.

ROI: Region of Interest.

SAR: Synthetic Aperture Radar.

SIR-C: Shuttle Imaging Radar.

SVM: Support Vector Machines.

UAVSAR: Uninhabited Aerial Vehicle Synthetic Aperture Radar.

Índice general

Agradecimientos	VIII
Resumen	X
Abstract	XIII
Resumo	XV
Abreviaturas	XVII
1. Introducción	1
1.1. Metas	6
1.2. Organización	8
2. Modelos estadísticos para datos PolSAR	9
2.1. Datos PolSAR	10
2.2. El <i>speckle</i>	14
2.2.1. Formación del <i>speckle</i>	14
2.3. Estadísticos gaussianos	17
	XIX

2.4. Modelos de textura escalar:	
modelo multiplicativo	22
2.4.1. Distribuciones asociadas al ruido <i>speckle</i>	25
2.4.1.1. Distribución gaussiana compleja multivariada . . .	25
2.4.1.2. Distribución Wishart compleja escalada	26
2.4.2. Distribuciones del <i>backscatter</i>	27
2.4.2.1. Distribución de Dirac: <i>Backscatter</i> constante	30
2.4.2.2. Distribución gama	31
2.4.2.3. Distribución gama inversa	31
2.4.2.4. Distribución gaussiana inversa	32
2.4.2.5. Distribución de Fisher	33
2.4.2.6. Distribución beta de primer tipo (o Pearson de tipo I)	33
2.4.2.7. Distribución beta inversa (o Pearson de tipo IV) . .	34
2.4.2.8. Distribución gaussiana inversa generalizada	35
2.4.2.9. Distribución gama generalizada	35
2.4.2.10. Distribución gama con expansión de Laguerre . .	36
2.4.2.11. Relación entre modelos para el <i>backscatter</i>	37
2.4.3. Distribuciones del retorno	38
2.4.3.1. Distribución Wishart compleja escalada	39
2.4.3.2. Distribución \mathcal{G} polarimétrica	39
2.4.3.3. Distribución \mathcal{K} polarimétrica	40
2.4.3.4. Distribución \mathcal{G}^0 polarimétrica	41

2.4.3.5.	Distribución armónica polarimétrica	41
2.4.3.6.	Distribución Kummer- \mathcal{U}	42
2.4.3.7.	Distribución \mathcal{W}	43
2.4.3.8.	Distribución \mathcal{M}	43
2.4.3.9.	Distribución Wishart gama generalizada	44
2.4.3.10.	Distribución \mathcal{K} generalizada	45
2.4.3.11.	Relación entre modelos polarimétricos	46
2.5.	Modelos para datos PolSAR bivariados	46
2.5.1.	Coefficiente de correlación complejo	48
2.5.2.	Distribuciones bivariadas	50
2.5.2.1.	Densidad para la diferencia de fases	50
2.5.2.2.	Densidad para la magnitud del producto	54
2.5.2.3.	Densidad conjunta para dos intensidades	56
2.5.2.4.	Densidad para las razones entre intensidades y entre amplitudes	58
3.	Estudios realizados	61
3.1.	Metodología	63
3.1.1.	Filtros	64
3.1.2.	Clasificadores	67
3.2.	Validación	74
4.	Resultados	75

4.1. Imagen de San Francisco	75
4.1.1. Verificación del ajuste	77
4.1.1.1. Distribuciones univariadas	77
4.1.1.2. Distribuciones bivariadas	78
4.1.2. Clasificación	81
4.2. Imagen de Bell Ville	86
4.2.1. Verificación del ajuste	88
4.2.1.1. Distribuciones univariadas	88
4.2.1.2. Distribuciones bivariadas	88
4.2.2. Clasificación	90
5. Conclusiones y trabajos futuros	99
5.1. Trabajos realizados	101
5.1.1. Revista	101
5.1.2. Presentación a Congresos	101
5.2. Trabajos futuros	103
Bibliografía	104

Índice de figuras

2.1. Formación del <i>speckle</i> (Lee y Pottier 2009).	15
2.2. Vector suma.	16
2.3. Distribuciones de la intensidad <i>L-looks</i> con la <i>Probability Density Function</i> (PDF) dada en (2.16).	20
2.4. Ejemplos de diferentes distribuciones de textura. (a) Gama con $\mathcal{L} = 6$ y $\mathcal{L} = 10$, Gama inversa con $\alpha = -6$ y $\alpha = -10$ y Gama generalizada con $\nu = 2, \mathcal{L} = 4$ y $\nu = 2, \mathcal{L} = 8$. (b) Gaussiana inversa con $w = 6$ y $w = 10$, Fisher con $\mathcal{L} = 10, \alpha = -16$ y $\mathcal{L} = 10, \alpha = -8$ y Gaussiana inversa generalizada con $\zeta = 8, w = 10$ y $\zeta = 16, w = 10$. (c) Beta con $\mathcal{L} = 10, w = 16$ y $\mathcal{L} = 10, w = 20$, y Beta inversa con $\mathcal{L} = 10, w = 16$ y $\mathcal{L} = 10, w = 20$	38
2.5. Ejemplos de distribuciones para la diferencia de fases. HG: PDF dada en (2.67) para distintos valores de L , y (2.70) para $L = 3$ y (2.71) para $L = 4$	54
2.6. Ejemplos de distribuciones de magnitud del producto normalizado HH-VV, con PDF (2.74).	56
2.7. Ejemplos de distribuciones de razón de amplitudes normalizada HH-VV, con PDF (2.83).	60
3.1. Observaciones de las Muestras de Entrenamiento (ME) de la imagen <i>Airborne Synthetic Aperture Radar</i> (AIRSAR) con los datos originales, filtrados con LM y con MBPolSAR.	69

4.1. Imagen intensidad HH AIRSAR y muestras de entrenamiento. . . .	76
4.2. Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 2 (verde), 3 (roja) y 4 (azul) <i>looks</i> para las ME de la imagen AIRSAR.	78
4.3. Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 <i>looks</i> (roja) y 4 <i>looks</i> (azul) para las zonas de entrenamiento. .	79
4.4. Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 <i>looks</i> (roja) y 4 <i>looks</i> (azul) para las zonas de entrenamiento. .	80
4.5. Diferencia de fases: Función Hipergeométrica (HG)-3 (rojo), HG-4 (naranja), 3 (verde) y 4 (azul).	81
4.6. Producto normalizado por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) <i>looks</i>	82
4.7. Razón de amplitudes normalizada por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) <i>looks</i>	83
4.8. Datos AIRSAR. Desempeño de los clasificadores por tamaño de ventana.	84
4.9. Datos AIRSAR. Desempeño de los clasificadores por clase.	85
4.10. Datos AIRSAR. Mapas temáticos usando ventanas de tamaño 9×9	86
4.11. Imagen intensidad VV <i>Uninhabited Aerial Vehicle Synthetic Aperture Radar</i> (UAVSAR) y muestras de entrenamiento.	87
4.12. Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 2 (verde), 3 (roja) y 4 (azul) <i>looks</i> para las ME de la imagen UAVSAR.	89
4.13. Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 <i>looks</i> (roja) y 4 <i>looks</i> (azul) para las zonas de entrenamiento. .	90
4.14. Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 <i>looks</i> (roja) y 4 <i>looks</i> (azul) para las zonas de entrenamiento. .	91

4.15. Diferencia de fases: HG-3 (rojo), HG-4 (naranja), 3 (verde) y 4 (azul).	92
4.16. Producto normalizado por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) <i>looks</i>	93
4.17. Razón de amplitudes normalizada por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) <i>looks</i>	94
4.18. Datos UAVSAR. Desempeño de la clasificación por tamaño de ventana.	95
4.19. Datos UAVSAR. Desempeño de los clasificadores por clase.	96
4.20. Datos UAVSAR. Mapas temáticos usando ventanas 7×7	97

Índice de tablas

2.1. Estimadores del coeficiente de correlación	50
3.1. Métodos a comparar.	63
4.1. Estimadores de coeficiente de correlación complejo	79
4.2. Estimadores del coeficiente τ	81
4.3. Estimadores de coeficiente de correlación complejo	92
4.4. Estimadores del coeficiente τ	93

Capítulo 1

Introducción

La observación remota de la superficie terrestre constituye el marco de estudio de la teledetección. La teledetección espacial es la técnica que permite adquirir imágenes desde sensores instalados en plataformas espaciales o aerotransportadas, procesarlas e interpretarlas. Para que dichas imágenes existan se asume que hay una interacción energética entre la Tierra y el sensor, ya sea por reflexión de energía solar o de un haz artificial o por emisión propia.

El sensor explora secuencialmente la superficie terrestre adquiriendo la radiación que proviene de los objetos situados sobre ella. La radiación recibida estará en función, entre otras cosas, de las características de la porción del terreno que observa el sensor en cada instante y de las condiciones atmosféricas en ese momento.

Aunque por conveniencia se usan nombres (ultravioleta, microonda, etc.) para designar a las regiones del espectro electromagnético, no hay una clara línea divisoria entre regiones espectrales. Las divisiones en el espectro se dan más por los diferentes métodos para percibir cada tipo de radiación, que por diferencias inherentes en las características de energía de las diferentes longitudes de onda. Cada una de las regiones con comportamientos electromagnéticos similares se denomina "banda espectral". La parte del espectro electromagnético usada en teledetección se extiende aproximadamente desde $10^{-1} \mu\text{m}$ hasta $10^9 \mu\text{m}$ (el micrómetro es la millonésima parte del metro).

El *RA*dio *DE*tectio*N* *AN*d *R*ang*ING* (RADAR) es un instrumento elaborado para detectar señales en las microondas, que se extienden desde 1 mm a 1 m, usualmente entre la banda P y la K (ver más detalles en Lee y Pottier 2009). La energía en el espectro de las microondas es útil en teledetección porque es capaz de atravesar la atmósfera bajo prácticamente todas las condiciones (niebla, lluvia, nieve, nubes) y porque las reflexiones y emisiones de materiales terrestres captadas por el radar no guardan directa relación con las de otros sistemas (proporcionando distinta información). Además el radar es un sensor activo ya que genera su propia energía para operar, lo que lo hace independiente de otras fuentes energéticas, especialmente del sol (a diferencia de los sensores pasivos que sólo pueden operar de día). El desarrollo de los sistemas de radar ha sido impulsado por la misma necesidad de obtener información de la superficie terrestre, sobre todo de regiones de difícil acceso y de alta nubosidad. Las imágenes de radar se utilizan en monitoreo ambiental, conocimiento de ecosistemas, detección de manchas de petróleo en el mar, detección de claros en bosques, agricultura, planeamiento urbano, estudios sobre hielo y nieve, cambios a lo largo del tiempo, entre otras muchas aplicaciones.

Los primeros sistemas de este tipo eran Radares de Apertura Real, *Real Aperture Radar* (RAR), y tenían resolución espacial limitada y controlada por la longitud física de la antena.

El Radar de Apertura Sintética, *Synthetic Aperture Radar* (SAR), en cambio, permite obtener imágenes de alta resolución a larga distancia, mediante un sofisticado procesamiento posterior a la recolección de datos que simula el tamaño de la antena y la compresión de la señal utilizando los principios físicos del efecto Doppler. Los sistemas SAR envían pulsos lateralmente, y por eso el sensor registra las señales de los objetos de la Tierra en diferentes momentos, lo que permite discriminarlos. Adicionalmente, el perfeccionamiento de la capacidad polarimétrica de los radares los convierte en una opción competitiva frente a los sensores multispectrales ópticos.

El proceso de adquisición de una imagen de radar comienza cuando la antena emite radiación electromagnética en dirección a la superficie terrestre. Cuando la radiación incide sobre la superficie sufre un proceso de dispersión, que resulta en

emisión en potencialmente todas las direcciones. La antena capta una parte de la energía dispersada, llamada “energía retrodispersada”. El sensor detecta la fuerza y origen del retorno de los objetos que se encuentran en el campo de visualización y registra:

- la intensidad de la señal de retorno (*backscattering*), que condiciona el tono;
- el tiempo de retorno, que posiciona los objetos dentro de la faja observada;
- la polarización, si se trata de un sensor con tal capacidad.

La polarización de las imágenes SAR es un aspecto importante a tener en cuenta. Entendemos por polarización a la orientación del vector que representa el campo eléctrico de la radiación transmitida y recibida en el plano ortogonal a la dirección de propagación de la onda. Las antenas de los sistemas de radar se pueden configurar para transmitir y recibir radiación electromagnética polarizada ya sea horizontal o verticalmente. Cuando la energía transmitida es polarizada en la misma dirección que la recibida, al sistema se le conoce como de polarización similar (HH indica que la energía se transmite y se recibe horizontalmente polarizada, VV que la energía se transmite y se recibe verticalmente polarizada). Si la energía transmitida se polariza en una dirección ortogonal a la recibida, al sistema se le conoce como de polarización cruzada (HV indica que la transmisión es horizontalmente polarizada mientras que la recepción es verticalmente polarizada; VH indica transmisión verticalmente polarizada y recepción horizontalmente polarizada).

Los sistemas SAR *monopolarizados* operan con una única polarización (HH, VV, HV o VH) y son empleados para obtener información de alta resolución acerca de las propiedades de reflectividad de la escena. Estas imágenes han sido ampliamente estudiadas y utilizadas en teledetección.

Los sistemas Polarimétricos de Radar de Apertura Sintética, *Polarimetric Synthetic Aperture Radar* (PolSAR), surgieron como un importante configuración multidimensional transmitiendo pulsos ortogonalmente polarizados hacia un objetivo, y registrando el eco devuelto, en diferentes polarizaciones según sus características. Los sistemas PolSAR pueden funcionar como sistemas *single-pol*, que transmiten

en una polarización única y reciben en una polarización única. Un sistema *single-pol* típico transmitiría ondas polarizadas horizontal o verticalmente y recibiría lo mismo, dando imágenes de HH o VV. Por su parte, un sistema *dual-pol* es aquel que transmite ondas polarizadas horizontal o verticalmente y registra señales recibidas en ambas polarizaciones, lo que resulta en imágenes HH y HV, o VV y VH. Un sistema *quad-pol* o *full-quad-pol* alterna entre la transmisión H y V y recibe tanto en H como V, dando imágenes HH, HV, VH, VV. Para operar en modo *quad-pol*, se requiere una pulsación del radar al doble de la velocidad de un sistema *single-pol* o *dual-pol*, ya que la transmisión se alterna entre H y V para adquirir datos coherentes *full-polarimetric*. Como eso puede causar interferencias, se puede usar una variante denominada *quasi-quad-pol*, en la cual se operan simultáneamente dos modos *dual-pol*: un HH/HV en la parte inferior de las frecuencias de transmisión permitidas y uno VH/VV que opera en la parte superior. Al tener frecuencia disjunta no interfieren entre sí, aunque los datos observados de HH/HV y VH/VV son mutuamente incoherentes.

Lee y Pottier (2009) señalaron al año 1985 como inicio en el gran avance de la polarimetría, que es cuando el *Jet Propulsion Laboratory* (JPL) de la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) implementó con éxito el primer sistema *full-polarimetric* AIRSAR en la banda L. Este sistema *quad-pol* permitió sintetizar la potencia y la fase relativa para todas las combinaciones de estados de polarización. Más adelante la NASA-JPL construyó la plataforma y voló el AIRSAR con capacidad de tomar imágenes en tres frecuencias (bandas P, C y L) en una pasada con *quad-pol* en cada banda, y fue el principal sistema PolSAR por casi 20 años. Por su parte, la *European Space Agency* (ESA) comenzó a principios de los 1990s con esta tecnología, con el *Experimental Synthetic Aperture Radar* (E-SAR), que era un sistema *quad-pol* en la banda L, que posteriormente se amplió a la banda P. Los datos del E-SAR polarimétrico tienen mayor resolución que los AIRSAR y están muy bien calibrados.

El interés en las imágenes PolSAR se ha incrementado en los últimos años, principalmente después del lanzamiento de varias misiones espaciales con capacidades polarimétricas. Estas misiones comenzaron en 1994, cuando el *Shuttle Imaging Ra-*

dar (SIR-C) fue puesto en órbita con éxito. El SIR-C en ese año adquirió imágenes *full-polarimetric* en bandas C y L, y en polarización simple en banda X, simultáneamente, lo que estimuló la investigación en este tipo de imágenes y en las técnicas para su análisis.

Posteriormente muchas misiones con capacidad polarimétrica se han lanzado. La disponibilidad de estos sistemas multidimensionales ha permitido aumentar la cantidad de información disponible sobre la superficie (Medasani y Reddy 2017).

Basado en la polarización de la onda incidente, la rugosidad del objeto y sus características físicas, los distintos objetos dispersan las ondas incidentes de una manera que indica su naturaleza (ver Helmy y El-Taweel 2016). Cuando una onda choca una superficie, dependiendo de las propiedades de ella, puede modificarse la polarización. Por esto el tipo de superficie puede inferirse a partir de estas imágenes. Las estructuras orientadas como edificios u objetos naturalmente alineados (ondas en la arena por ejemplo) tienden a preservar la coherencia polarimétrica mientras que las orientadas aleatoriamente inducen a cambios de polarización de la señal dispersada. De este modo los sistemas PolSAR pueden capturar mejor la información de la escena que el SAR univariado (Frery et al. 2014), permitiendo la caracterización de los objetos mediante varios canales y las estructuras de covarianza entre ellos.

Sin embargo, debido a la manera en que son generadas, las imágenes SAR suelen ser difíciles de analizar e interpretar porque, entre otras cosas, tienen *speckle* que es inherente a su proceso de captura y formación y es propio de todos los sistemas generados con iluminación coherente (como las imágenes de ecografía-B, sonar y láser). Aunque es una verdadera medida de dispersión, la complejidad del proceso hace necesario considerarlo como ruido (Foucher y López-Martínez 2014).

Las alteraciones que el *speckle* produce pueden degradar significativamente la calidad de imagen percibida, complicar su interpretación y análisis, y reducir la precisión para la detección de blancos y la clasificación (Ma et al. 2014). Además el *speckle* tiene una naturaleza que no es aditiva ni gaussiana, lo que hace inadecuado el uso de técnicas estadísticas que asumen al ruido con esas propiedades. Así, la

caracterización del *speckle* con modelos estadísticos y distribuciones adecuados a su comportamiento, el filtrado para reducir su influencia y la evaluación de su efecto sobre la capacidad de extraer información útil son tareas críticas (Foucher y López-Martínez 2014) en el análisis de imágenes PolSAR.

1.1. Metas

Las imágenes SAR en general, y las PolSAR en particular, son una importante fuente de información. Sin embargo, el ruido *speckle* —que es parte de estas imágenes— les da una apariencia granular que dificulta su interpretación y análisis, disminuyendo la cantidad de información que contienen.

Además la misma imagen puede tener diferente cantidad de información dependiendo de la aplicación, por ejemplo, visualización y clasificación.

Entonces...

¿ Cuánta información hay en una imagen SAR?

Aragone et al. (2008) señalaron que esta es una pregunta difícil de responder en general, porque depende de lo que se entiende por información, distinguiéndola del ruido.

Muchos trabajos han presentado diversos enfoques para cuantificar el Contenido de Información (CI) y relacionarlo con variables asociadas a las imágenes (resolución -espacial y radiométrica, escala de variabilidad del parámetro de interés, estadísticos, entre otros). La evaluación del CI y cómo se ve afectada por las técnicas de procesamiento habituales es un problema tanto relevante, por el impacto que las soluciones tienen en diversas prácticas de teledetección, como original porque no se le conocen soluciones completas.

Aragone et al. (2008) relacionaron a la información con la resolución radiométrica y espacial de la imagen, las cuales pueden ser más o menos importantes dependiendo de la aplicación.

Narayanan et al. (2000) señalaron que las imágenes crudas adquiridas por un sensor generalmente se procesan intentando maximizar el CI para lograr cierto objetivo, destacando su relación con la resolución de la imagen, y presentaron a la exactitud de la clasificación como una medida para cuantificarlo.

Considerando que la habilidad para discriminar entre diferentes tipos de coberturas es un modo de medir el CI, en esta tesis seguimos la idea de Narayanan et al. (2002) y estudiamos el problema desde el punto de vista de la exactitud de la clasificación, focalizando la atención en dos etapas: el filtrado y la clasificación en sí misma, además del ajuste de los datos a modelos estadísticos que permite confiar en las conclusiones obtenidas con los análisis.

La idea central es verificar cómo se ve afectada la calidad de la información obtenida a través de la clasificación por cambios en las propiedades de los datos. Para esto consideramos como entrada dos imágenes PolSAR reales de diferentes sensores y controlando

- (i) el filtro (LM o MBPolSAR) y el tamaño de su soporte, y
- (ii) el método de clasificación (MV o SVM),

evaluamos la precisión de la clasificación aplicada a los datos filtrados.

Para medir la precisión del mapa resultante de la clasificación, en adelante el CI, usamos, además de la Exactitud de la Clasificación aplicada por Narayanan et al. (2002), otros dos coeficientes derivados de la Matriz de Confusión.

Adicionalmente, considerando que un modelo estadístico preciso que describa los datos es una herramienta importante para extraer información de las imágenes, verificamos el ajuste de los datos de algunas muestras a ciertos modelos, lo cual permite confiar en las conclusiones obtenidas.

Esta tesis tiene los siguientes objetivos:

- presentar un resumen de modelos para imágenes polarimétricas, incluyendo las distribuciones marginales y bivariadas asociadas a estos datos;

- mostrar el ajuste de los datos de imágenes reales a algunas de las distribuciones presentadas, lo cual valida las conclusiones obtenidas con las técnicas empleadas;
- aplicar la metodología que combina los dos filtros con distintos tamaños de ventana y los dos clasificadores, buscando la mejor combinación respecto al CI;
- estudiar el CI de las imágenes obtenidas por los métodos utilizados a través de la exactitud de la clasificación, calculada por distintos coeficientes.

1.2. Organización

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera:

Capítulo 2: presenta una breve descripción de las imágenes SAR, muestra un estudio profundo de los modelos para datos SAR en sus diversos formatos (unificando la notación y presentándolos en un contexto unificado junto con sus principales propiedades).

Capítulo 3: muestra la metodología utilizada, y una breve descripción del filtro MBPolSAR y del clasificador SVM, cuyos efectos contrastamos con los clásicos (filtro LM y clasificador MV) mediante dicha metodología.

Capítulo 4: presenta los ajustes de los datos de las dos imágenes reales a algunas de las distribuciones dadas en el Capítulo 2, los resultados obtenidos con la metodología planteada y el análisis de los mismos.

Capítulo 5: muestra las conclusiones obtenidas de la presente tesis, destacando los aportes realizados al estado del arte y algunas posibles líneas que podrían continuarse a partir de lo realizado a lo largo del doctorado.

Capítulo 2

Modelos estadísticos para datos PolSAR

Deng et al. (2017) destacaron que el conocimiento de las propiedades estadísticas exactas de la señal juega un papel importante en aplicaciones de datos PolSAR. De hecho la información de un blanco debe extraerse a través del análisis estadístico de los datos. Por lo tanto, un modelo estadístico preciso para describir los datos se vuelve clave para la extracción de las propiedades de la superficie terrestre.

En este capítulo mostramos una breve descripción de las imágenes PolSAR y un estudio de los modelos presentados en la literatura, unificando notación y presentándolos en un contexto unificado junto con sus principales propiedades. Los modelos aquí analizados corresponden a los ajustes de datos PolSAR *multi-look*, y a algunas distribuciones marginales y bivariadas asociadas.

La notación que usamos es la siguiente: letras mayúsculas denotan variables aleatorias escalares y letras minúsculas sus ocurrencias; letras mayúsculas en **negrito** representan matrices aleatorias, y minúsculas en **negrito** vectores aleatorios (o, en algunos casos puntuales, para ocurrencias de las matrices aleatorias).

2.1. Datos PolSAR

Como mencionamos en el Capítulo 1, la adquisición de una imagen de radar comienza con la emisión de radiación electromagnética en dirección a la superficie terrestre, esa radiación al incidir en dicha superficie se dispersa, y la antena capta una parte de la energía dispersada, llamada energía retrodispersada. Las imágenes PolSAR se obtienen transmitiendo pulsos electromagnéticos polarizados ortogonalmente y registrando el eco que retorna respecto a cada polarización.

De hecho, los sistemas PolSAR miden las propiedades de un blanco detectando el cambio en el estado de polarización que el blanco provoca en la onda incidente. Si llamamos \mathbf{E}^i a la onda incidente polarizada y \mathbf{E}^s a la dispersada, se puede escribir

$$\mathbf{E}^i = \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} E_h^s \\ E_v^s \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

donde h y v se refieren a los estados de polarización (horizontal y vertical, respectivamente). El proceso de dispersión que ocurre en el blanco de interés puede expresarse a través de la ecuación

$$\begin{bmatrix} E_h^s \\ E_v^s \end{bmatrix} = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{S} \begin{bmatrix} E_h^i \\ E_v^i \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

donde r es la distancia entre el blanco y la antena, y k es la frecuencia de la onda que ilumina. El término $\frac{e^{-jkr}}{r}$ tiene en cuenta los efectos de la propagación de las ondas, tanto en la amplitud como en la fase. La matriz \mathbf{S} de la transformación es la que caracteriza el blanco observado (ver Lee y Pottier 2009).

Para cada pixel el sensor SAR polarimétrico registra el coeficiente de dispersión complejo para las cuatro combinaciones de polarizaciones lineales complejas transmitidas y recibidas: S_{hh} , S_{hv} , S_{vh} y S_{vv} , que usualmente se representan con la

llamada “matriz de dispersión”

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{vh} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

que es la de ecuación (2.2). Los elementos de la diagonal se llaman usualmente “co-pol” porque relacionan la misma polarización de las ondas incidente y dispersada. Los de fuera de la diagonal se conocen como “cross-pol” pues relacionan estados ortogonales de polarización (ver Lee y Pottier 2009).

La definición de \mathbf{S} depende del sistema de coordenadas. Cuando las antenas transmisora y receptora están en mismo punto, se considera que las medidas son monoestáticas y se usa el sistema *Back Scattering Alignment* (BSA).

La interacción entre las ondas electromagnéticas dentro de un medio recíproco sigue el teorema de reciprocidad, que se aplica generalmente a blancos naturales. En el sistema de coordenadas BSA este teorema dice que los canales “cross-pol” de la matriz de dispersión son iguales, es decir $S_{hv} = S_{vh}$ (ver Cloude 2009; Ulaby y Elachi 1990). De este modo sólo se requieren tres coeficientes complejos independientes para caracterizar el blanco observado.

La información polarimétrica puede en este caso representarse con un vector complejo conocido como “vector de dispersión”, que se obtiene como

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{S}\Psi), \quad (2.4)$$

con $\text{tr}(\cdot)$ la traza de la matriz, y Ψ un conjunto completo de matrices complejas 2×2 que forman una base para el espacio vectorial de matrices hermitianas 2×2 . Hay diferentes bases, aunque la más usada en el contexto de polarimetría son la de Pauli y la Lexicográfica que generan, respectivamente, las matrices de coherencia y covarianza.

En el caso monoestático, el conjunto de matrices de la base de Pauli $\{\Psi_P\}$ es

$$\{\Psi_P\} = \left\{ \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.5)$$

de la cual deriva el vector de dispersión llamado “vector de características de Pauli 3-D”

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} & S_{hh} - S_{vv} & 2S_{hv} \end{bmatrix}^T, \quad (2.6)$$

con T que indica la transposición.

El conjunto de matrices de la base Lexicográfica $\{\Psi_L\}$ es

$$\{\Psi_L\} = \left\{ 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.7)$$

de la cual deriva el “vector de características Lexicográfico 3-D”

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} S_{hh} & \sqrt{2}S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}^T. \quad (2.8)$$

Los factores 2, $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ se agregan para preservar la potencia total (*span*) de la señal, es decir

$$\text{Span}(\mathbf{S}) = |\mathbf{k}|^2 = |\mathbf{\Omega}|^2 = |S_{hh}|^2 + 2|S_{hv}|^2 + |S_{vv}|^2.$$

A partir de las formas vectoriales de la matriz \mathbf{S} , \mathbf{k} (2.6) para la base Pauli y $\mathbf{\Omega}$ (2.8) para la Lexicográfica, se generan la “matriz de coherencia”, \mathbf{T}_3 , y la “matriz de covarianza”, \mathbf{C}_3 , definidas como

$$\mathbf{T}_3 = \langle \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}^* \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_3 = \langle \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}^* \rangle, \quad (2.9)$$

donde $(\cdot)^*$ indica el transpuesto del conjugado del número complejo, y $\langle \dots \rangle$ es el promedio espacial o temporal, asumiendo homogeneidad del medio (ver más detalles en Lee y Pottier 2009). Estas matrices son las que contienen los datos de

entrada para los análisis de imágenes. En esta tesis trabajamos con los datos de \mathbf{C}_3 .

Deng et al. (2017) indicaron que la selección de la base depende del propósito final del proceso, y que para estudiar el comportamiento estadístico de los datos PolSAR, la base lexicográfica es más conveniente por su simplicidad. Respecto a la base de Pauli, Anfinson et al. (2009) destacaron su importancia para la interpretación física en términos de los mecanismos de dispersión. En esta tesis usamos la base lexicográfica, y denotamos \mathbf{s} al “vector de dispersión”.

Para blancos puntuales, la ecuación (2.8) caracteriza completamente las propiedades de dispersión del blanco. Sin embargo, en general los blancos están sujetos a variaciones espaciales y temporales, por lo que aunque el sistema transmita la onda polarizada perfectamente, la onda dispersada por el blanco está parcialmente polarizada. Éstos son los denominados “blancos distribuidos”, y para analizarlos debe introducirse el concepto de procesos estocásticos que varían con el tiempo y el espacio. En ese caso \mathbf{s} es aleatorio y puede modelarse con la distribución gaussiana compleja de media cero con parámetro

$$\mathbf{\Sigma} = E \{ \mathbf{s} \mathbf{s}^* \} , \quad (2.10)$$

que es la denomina “matriz de covarianza poblacional”.

La matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}$ contiene toda la información que caracteriza el blanco y debe estimarse a partir de los datos contenidos en \mathbf{s} . El estimador de MV de $\mathbf{\Sigma}$ es

$$\mathbf{C} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^* , \quad (2.11)$$

donde L es el número de *looks* o muestras empleadas para estimar $\mathbf{\Sigma}$, y $\mathbf{s}_k, k = 1, 2, \dots, L$, son realizaciones de \mathbf{s} .

La “matriz de covarianza L -*looks* compleja” \mathbf{C} , por ser un estimador es aleatoria, y tiene un error respecto del valor del parámetro. Este error puede considerarse un componente de ruido.

La operación de promediar que define a \mathbf{C} se llama “procesamiento *multi-look*” y

se emplea para reducir el *speckle* de los datos PolSAR. En la Sección 2.2 vemos más detalle.

2.2. El *speckle*

El *speckle*, como dijimos, causa variación en las intensidades de pixel a pixel, y esa variación se manifiesta como un patrón granular de ruido en imágenes SAR, que complica su interpretación y análisis, y reduce la efectividad de procesos como la segmentación y la clasificación (Lee y Pottier 2009; Ma et al. 2014).

Por ello es crucial comprender los estadísticos del *speckle* para extraer información diseñando algoritmos eficientes para tareas como el filtrado, la estimación de parámetros geofísicos, la clasificación de coberturas, entre otras. Lee y Pottier (2009) realizaron un análisis exhaustivo de los estadísticos asociados al *speckle* de las imágenes SAR monopolarizadas (para datos *single-look* y *multi-look*), y de los correspondientes a las imágenes PolSAR, destacando la distribución Wishart compleja como modelo para la matriz de covarianza. En ese contexto, como en Lee y Pottier (2009) y Deng et al. (2017), presentamos las distribuciones para las variables diferencia entre fases, producto y razón entre amplitudes de dos polarizaciones, cuya importancia para clasificación y estimación de parámetros geofísicos precisamos en la Sección 2.5, donde se muestran dichos modelos.

2.2.1. Formación del *speckle*

Los blancos distribuidos son difíciles de estudiar pues presentan una geometría compleja y tienen distribución aleatoria, lo que hace indispensable describirlos estadísticamente. Existen dos tipos principales de procesos de reflexión de la onda para objetos distribuidos: dispersión de superficie (*surface scattering*) y dispersión de volumen (*volumen scattering*). La primera ocurre cuando la onda electromagnética alcanza la superficie que limita dos medios y la reflexión se da en el límite de la

superficie, en cambio en la segunda las ondas electromagnéticas penetran el medio inferior.

Cuando el radar ilumina una superficie que es rugosa en la escala de su longitud de onda, la señal que retorna está compuesta por la unión de los reflejos de las ondas de cada elemento dentro de la celda (Fig. 2.1). La ubicación de cada elemento en la celda es aleatoria, y por lo tanto la distancia entre cada uno y el radar también lo es. Así, las ondas recibidas de cada objeto son coherentes en frecuencia, pero no necesariamente en fase. Cuando las ondas se suman de manera relativamente constructiva se recibe una señal fuerte, mientras que cuando están fuera de fase la señal es débil.

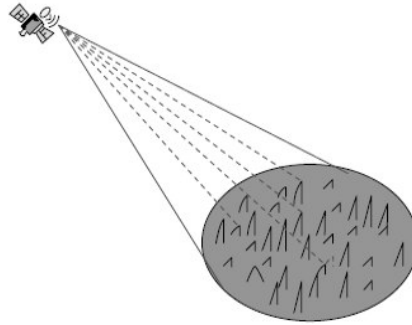


Figura 2.1: Formación del *speckle* (Lee y Pottier 2009).

Si $x_i + jy_i$ representa el retorno complejo del i -ésimo dispersor, la suma de las ondas que retornan

$$\sum_{i=1}^N (x_i + jy_i) = \sum_{i=1}^N x_i + j \sum_{i=1}^N y_i = x + jy = re^{j\theta}, \quad (2.12)$$

modela el eco recibido de un objeto distribuido (ver Fig. 2.2).

Una imagen SAR está formada por el procesamiento coherente de los ecos de los blancos dentro de la celda y, dependiendo de la fase relativa de cada onda, la suma puede ser constructiva o destructiva, provocando el efecto de *speckle*.

El *speckle* causa variación de la intensidad pixel a pixel y se manifiesta como un patrón granular. Una de las consecuencias más obvias que esto tiene es que el uso

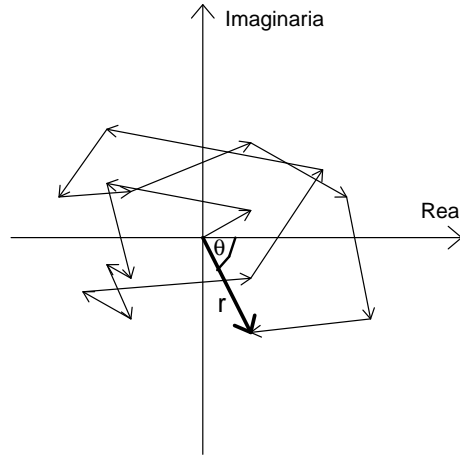


Figura 2.2: Vector suma.

de un único valor de intensidad como medida de la reflectancia puede conducir a errores (ver por ejemplo Lee y Pottier 2009). Por lo tanto, para extraer información de un blanco distribuido, debe usarse análisis estadístico, y contar con un modelo estadístico preciso para describir los datos es una parte muy importante de este análisis (ver por ejemplo Bombrun et al. 2011b; Kersten et al. 2005; Lee et al. 1999).

Deng et al. (2017) presentaron una reseña de las propiedades y modelos asociados a los datos PolSAR *single-look* y *multi-look*. Ahí pueden encontrarse las funciones de densidad, *Probability Density Functions* (PDFs),

- en el caso *single-look*
 - para el vector de dispersión (con distribución gaussiana compleja);
 - conjunta para las partes real e imaginaria por un lado, y para amplitud y fase por otro, del vector de dispersión (con distribución gaussiana circular);
 - para la amplitud (con distribución Rayleigh) y la intensidad (con distribución exponencial);
 - conjunta para las partes reales e imaginarias por un lado, y para las amplitudes y las fases, de dos canales polarimétricos;

- conjunta para el producto de dos amplitudes y la diferencia entre sus fases (y las marginales).
- en el caso de *multi-look*
 - para la matriz de covarianza (con distribución Wishart);
 - para la intensidad (con distribución gama);
 - conjunta para las partes reales e imaginarias de dos canales polarimétricos;
 - conjunta para las amplitudes y las fases del producto de dos canales (y las marginales).
 - para la matriz de covarianza, dejando que el número de *looks* varíe en las diferentes áreas de la imagen (con distribución Wishart relajada);
 - para la matriz de covarianza en imágenes de alta resolución (con distribución Wishart-Kotz).

En las próximas secciones mostramos las PDFs correspondientes al caso *multi-look*, unificando notación y relacionando los modelos.

2.3. Estadísticos gaussianos

En caso de *speckle* completamente desarrollado (*fully developed speckle*) se asume, y se ha verificado experimentalmente, que el modelo gaussiano ajusta adecuadamente los datos, especialmente en áreas naturales homogéneas.

Sin embargo la definición misma de *speckle* completamente desarrollado es compleja. Wang (2013) indicó que Goodman (1975) fue el primero en estudiar las propiedades estadísticas de este tipo de proceso y mostró como características básicas que la amplitud (o la intensidad) y la fase del *speckle* son estadísticamente independientes y que la fase tiene distribución uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Sin embargo uno de los supuestos de Goodman (1975) del cual derivó la distribución uniforme mencionada, fue que la superficie fuera rugosa comparada con la

longitud de onda, y ese supuesto no se refiere a la estructura de las distribuciones de las fases de los objetos, señaló Wang (2013).

Uozumi y Asakura (1980) estudiaron la función de densidad de la fase del *speckle* en el caso gaussiano y encontraron relación entre las distribuciones de las fases del *speckle* y de los objetos. Los autores mostraron que si la distribución de la fase del objeto es gaussiana, cuando la rugosidad del objeto se vuelve suficientemente grande, la distribución de la fase del *speckle* es uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Sin embargo, si la distribución de la fase del objeto es rectangular o triangular, aunque la rugosidad sea grande, la distribución de la fase del *speckle* no se aproxima a la uniforme. Por eso el supuesto de rugosidad usado por Goodman (1975) para producir *speckle* completamente desarrollado gaussiano es ambiguo.

Para el caso general, incluyendo cuando la fase del objeto es gaussiana o cuando no lo sea, Wang (2013) definió al *speckle* completamente desarrollado como aquel en el que la amplitud y la fase del *speckle* son estadísticamente independientes, y en el que la fase tiene distribución uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Lee y Pottier (2009) por su parte, indicaron que si se cumplen las siguientes condiciones:

- (1) el número de objetos dentro de la celda de resolución es suficientemente grande,
- (2) la distancia de alcance es mucho mayor que muchas de las longitudes de onda, y
- (3) la superficie es mucho más rugosa en la escala de la longitud de onda del radar,

puede suponerse que el vector suma (2.12) de las ondas reflejadas de los dispersores tiene fase con distribución uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$, y entonces se verifica que el *speckle* está completamente desarrollado.

Más allá de la caracterización, cuando el *speckle* está completamente desarrollado, por el Teorema Central del Límite, las componentes real e imaginaria del vector suma, x e y en (2.12), son independientes e idénticamente distribuidas (iid)

gaussianas con media cero y varianza $\sigma^2/2$. Por ello su PDF conjunta es

$$\begin{aligned} f_{XY}((x, y); \sigma^2) &= f_X(x) \cdot f_Y(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-x^2}{\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-y^2}{\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{\sigma^2}\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

de donde se deriva la PDF para la amplitud A , definida como $Z_A = \sqrt{x^2 + y^2}$, que tiene distribución Rayleigh con PDF

$$f_{Z_A}(z; \sigma^2) = \frac{2z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{\sigma^2}\right), \quad (2.14)$$

con soporte \mathbb{R}_+ .

La amplitud Z_A tiene media $E(Z_A) = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{2}$ y varianza $Var(Z_A) = \frac{(4-\pi)\sigma^2}{4}$. En esta distribución el coeficiente de variación es $CV(Z_A) = \sqrt{4/\pi - 1} = 0,5227$, que es un valor característico del ruido multiplicativo *single-look*.

La intensidad Z_I , definida como $Z_I = x^2 + y^2 = Z_A^2$ tiene distribución exponencial negativa, con PDF

$$f_{Z_I}(z; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{\sigma^2}\right), \quad (2.15)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $E(Z_I) = \sigma^2$, $Var(Z_I) = \sigma^4$ y $CV(Z_I) = 1$. Los valores de los coeficientes de variación muestran que el *speckle* es más pronunciado en la imagen intensidad que en la amplitud.

Una de las técnicas más utilizadas para reducir el *speckle* es el procesamiento *multi-look*, que realiza promedios de estimaciones independientes de la reflectancia (ver, por ejemplo, Anfinsen et al. 2011). El procesamiento *multi-look*, como lo presentamos en la ecuación (2.11), reduce la desviación estándar del *speckle* en un factor de \sqrt{L} , pero degrada la resolución en un factor L .

En la actualidad los sistemas SAR tienen disponibilidad de datos *single-look* y *multi-look*. Los primeros tienen mayor resolución en acimut que en rango. Los

datos *multi-look* se obtienen promediando píxeles vecinos procesados *single-look*. Lee y Pottier (2009) destacaron que para obtener ese promedio y que se reduzca el *speckle*, la suma no debe realizarse con las imágenes en formato complejo, sino en amplitud o en intensidad.

La imagen intensidad *L-looks* se obtienen como

$$Z_I^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L Z_I(k) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \left(x(k)^2 + y(k)^2 \right) ,$$

donde $x(k)$ e $y(k)$ son las partes real e imaginaria del k -ésimo *look* (o muestra).

Dado que asumimos que $x(k)$ e $y(k)$ son variables aleatorias independientes con distribución gaussiana, $L \cdot Z_I^{(L)}$ tiene distribución Chi-cuadrado con $2L$ grados de libertad. Así, la PDF de la intensidad *L-looks* es

$$f_{Z_I^{(L)}}(z; L, \sigma^2) = \frac{L^L z^{L-1}}{(L-1)! \sigma^{2L}} \exp\left(\frac{-Lz}{\sigma^2}\right) , \quad (2.16)$$

que tiene soporte \mathbb{R}_+ , $E\left(Z_I^{(L)}\right) = \sigma^2$, $Var\left(Z_I^{(L)}\right) = \frac{\sigma^4}{L}$ y $CV\left(Z_I^{(L)}\right) = \frac{1}{\sqrt{L}}$. Este último valor evidencia la reducción en la variación del *speckle* respecto al caso *single-look*.

La Fig.2.3 muestra la densidad (2.16) para distintos valores del parámetro L , con dos valores del parámetro σ^2 estimados con datos reales de zonas de entrenamiento de la intensidad HH de la imagen AIRSAR que trabajamos en los Capítulos 3 y 4.

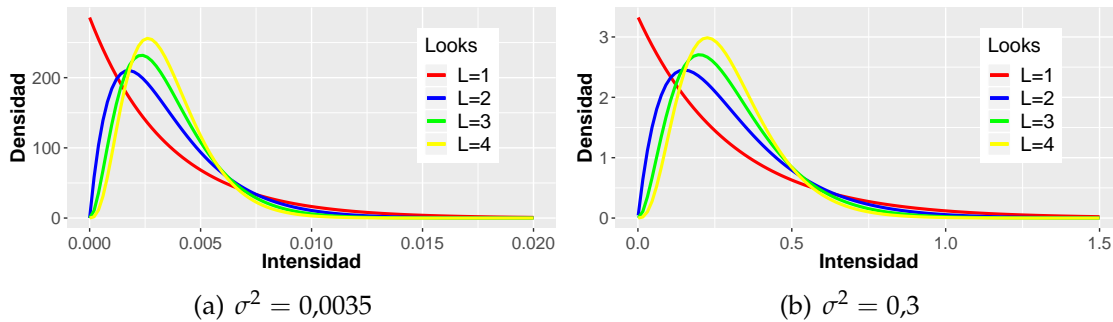


Figura 2.3: Distribuciones de la intensidad *L-looks* con la PDF dada en (2.16).

Respecto a la amplitud, hay dos modos de obtener la imagen amplitud L -looks: (1) promediando L imágenes amplitud y (2) promediando L imágenes intensidad y tomando la raíz cuadrada. En el primer caso la PDF no tiene una fórmula cerrada aunque tiene la misma media que en el caso *single-look* y tiene varianza $\frac{1}{\sqrt{L}}$. En el segundo caso $\sqrt{L \cdot Z_I^{(L)}}$, con $L \cdot Z_I^{(L)}$ de la ecuación (2.16), tiene distribución Chi-cuadrado con $2L$ grados de libertad. Así, la PDF de la amplitud L -looks es

$$f_{Z_A^{(L)}}(z; L, \sigma^2) = \frac{2L^L}{(L-1)! \sigma^{2L}} z^{2L-1} \exp\left(\frac{-Lz^2}{\sigma^2}\right), \quad (2.17)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $E\left(Z_A^{(L)}\right) = \frac{\Gamma(L+1/2)}{\Gamma(L)} \sqrt{\frac{\sigma^2}{L}}$, $Var\left(Z_A^{(L)}\right) = \left(L - \frac{\Gamma^2(L+1/2)}{\Gamma^2(L)}\right) \frac{\sigma^2}{L}$ y $CV\left(Z_A^{(L)}\right) = \sqrt{\frac{L\Gamma^2(L)}{\Gamma^2(L+1/2)}} - 1$.

Lee y Pottier (2009) mostraron una tabla de los CV para la intensidad y la amplitud L -looks (con ambas maneras de calcular la amplitud) para distintos valores del número de *looks*, e indicaron su utilidad como valor de entrada para el filtrado de *speckle*. Además mostraron un diagrama de dispersión de la media muestral versus la desviación estándar de muestras de áreas homogéneas con datos reales, que evidencia la naturaleza multiplicativa del *speckle*.

Como ya dijimos, cuando la resolución espacial es moderada o baja (y el número de objetos dentro de la celda de resolución es suficientemente grande) el *speckle* está completamente desarrollado y los estadísticos gaussianos son adecuados. El punto realmente crucial es que el número de objetos dentro de la celda de resolución sea suficientemente grande como para utilizar el Teorema Central del Límite. Por ello al aumentar la resolución espacial, como es de esperar, el análisis de datos reales revela que es más adecuado un modelo no gaussiano.

2.4. Modelos de textura escalar: modelo multiplicativo

Cuando el número de elementos en cada celda no es suficientemente grande, lo cual ocurre en imágenes de alta resolución y/o en áreas urbanas, hablamos de *speckle* parcialmente desarrollado. En ese caso el modelo gaussiano debería dejar de utilizarse. Deng et al. (2017) indicaron que un modo de introducir la no gaussianidad es dividir la aleatoriedad en dos factores no relacionados (textura y *speckle*).

El modelo de textura agrega a la aleatoriedad del *speckle* una atribuible a la textura, que puede definirse como la variación espacial en la media del coeficiente de retrodispersión (coeficiente de *backscatter* o *radar cross section*) debida a la variabilidad del blanco. La textura representa la variación natural en el retorno de píxeles que podrían etiquetarse como de la misma clase, en oposición a la variación atribuida a la interferencia inherente producida por cualquier sistema de iluminación coherente (ver Anfinson et al. 2011).

Hay dos formas de modelar estadísticamente la textura:

1. como una variable aleatoria escalar: modelo multiplicativo;
2. como un vector con la misma dimensión del *speckle*: modelo multi-textura¹.

En esta tesis abordamos en detalle el modelo de textura multiplicativo. El modelo multiplicativo ha sido ampliamente utilizado para el tratamiento de imágenes SAR monopolarizadas y ha mostrado ser matemáticamente tratable y exitoso para el modelado, pero su extensión a imágenes multivariadas (como es el caso de las polarimétricas) no es tan inmediata. Freitas et al. (2005) indicaron que para seguir con esta representación una parte de la información del terreno debe incluirse en el ruido *speckle* mientras el *backscatter* sólo debe ser responsable de la fluctuación local del valor medio.

¹ver, por ejemplo, Deng et al. (2017).

Para datos PolSAR, Deng et al. (2017) presentaron el modelo multiplicativo, que descompone el vector \mathbf{Z} que representa el retorno 1-look como

$$\mathbf{Z} = \sqrt{X} \cdot \mathbf{Y}, \quad (2.18)$$

donde la variable escalar positiva de media unitaria X representa la variabilidad del *backscatter* debida a la heterogeneidad de la escena, mientras que la variable \mathbf{Y} está asociada al ruido *speckle*. Se considera que X es independiente de \mathbf{Y} .

El ruido *speckle* que afecta a todas las imágenes SAR, es particularmente importante en los sistemas PolSAR pues afecta no sólo las intensidades sino también las covarianzas. Por ello se han ideado numerosos métodos para reducirlo. López-Martínez y Fàbregas (2003) dividieron estas técnicas en dos grupos:

- un primer grupo que combina canales para formar una imagen sin ruido, lo cual lleva a mantener la resolución espacial aunque se pierde la información polarimétrica;
- un segundo grupo que trata el ruido manteniendo la información de los canales y de sus covarianzas.

La matriz de covarianza L -looks compleja definida como

$$\mathbf{Z}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{Z}(k) \mathbf{Z}^*(k), \quad (2.19)$$

es el promedio de un conjunto de vectores $\{\mathbf{z}(k)\}_{k=1}^L$, cada uno de los cuales es una realización de una variable aleatoria $\mathbf{Z}(k)$, con $\mathbf{Z}(k)$ iid.

Usando la ecuación (2.19) y el modelo multiplicativo dado por la ecuación (2.18) resulta

$$\mathbf{Z}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L X(k) \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^*(k). \quad (2.20)$$

Considerando que $X(k)$ no varía de observación en observación en un pixel, es decir que $X(k) = X$ cualquiera sea k (si las observaciones no están muy alejadas

temporalmente) la matriz de covarianza $\mathbf{Z}^{(L)}$ puede escribirse como

$$\mathbf{Z}^{(L)} = \frac{X}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^*(k) , \quad (2.21)$$

ó

$$\mathbf{Z}^{(L)} = X \mathbf{Y}^{(L)} , \quad (2.22)$$

donde el escalar X está asociado al *backscatter* y la matriz $\mathbf{Y}^{(L)}$ al *speckle*. Esta ecuación modela el retorno *multi-look*, de modo similar a como la ecuación (2.18) modela el retorno *single-look*.

Los modelos multiplicativos definidos en las ecuaciones (2.18) y (2.22) para imágenes PolSAR *single-look* y *multi-look*, respectivamente, describen al retorno como una variable aleatoria resultante del producto de dos variables aleatorias, una que modela el *backscatter* y otra que modela el ruido *speckle*. Presentamos a continuación, unificando notación, los resultados de varios trabajos que derivaron la distribución del retorno a partir

- del modelo multiplicativo,
- del supuesto de independencia entre los procesos estocásticos involucrados, y
- de las distribuciones en probabilidad asumidas para el *backscatter* y el *speckle*.

En la literatura se ha trabajado deduciendo bajo el modelo multiplicativo diferentes distribuciones para el retorno *single-look* y *multi-look* en distintos formatos. Aquí nos enfocamos en las distribuciones de la matriz de covarianza del retorno complejo *multi-look*, explicitando las distribuciones del *backscatter* de la cual aquellas derivan.

Para generalizar, como en Frery et al. (2014), consideramos sistemas con p canales de polarización (en medios recíprocos $p = 3$), constituyendo el vector aleatorio complejo (vector de dispersión)

$$\mathbf{s} = \left[S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_p \right]^T . \quad (2.23)$$

2.4.1. Distribuciones asociadas al ruido *speckle*

2.4.1.1. Distribución gaussiana compleja multivariada

Cuando el radar ilumina un área de la superficie que contiene muchos dispersores elementales, el vector \mathbf{Y} asociado al ruido *speckle* para imágenes PolSAR 1-look puede modelarse con la distribución gaussiana compleja multivariada con vector de medias nulo (Goodman 1963) caracterizada por la función de densidad

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \mathbf{\Sigma}) = \frac{1}{\pi^p |\mathbf{\Sigma}|} \exp\left(-\mathbf{y}^* \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{y}\right), \quad (2.24)$$

donde $|\cdot|$ indica el determinante de una matriz (o, en otros casos, el valor absoluto de un escalar) y el parámetro $\mathbf{\Sigma}$ es la matriz de covarianza de \mathbf{Y} dada por

$$\mathbf{\Sigma} = E\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*\} = \begin{bmatrix} E\{S_1 S_1^*\} & E\{S_1 S_2^*\} & \cdots & E\{S_1 S_p^*\} \\ E\{S_2 S_1^*\} & E\{S_2 S_2^*\} & \cdots & E\{S_2 S_p^*\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{S_p S_1^*\} & E\{S_p S_2^*\} & \cdots & E\{S_p S_p^*\} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

La distribución de \mathbf{Y} se denota como $\mathcal{N}_p^{\mathbb{C}}(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{0})$, con el superíndice \mathbb{C} indicando que la distribución corresponde a una variable aleatoria compleja.

La matriz $\mathbf{\Sigma}$ es Hermitiana y definida positiva y, a diferencia de lo que ocurre en el caso univariado, contiene toda la información necesaria para caracterizar el terreno en estudio.

La distribución gaussiana compleja fue estudiada por Goodman (1963) para trabajar con ciertas funciones y con la transformada de Fourier, y posteriormente en Goodman (1985) se utilizó para modelar el ruido *speckle*. Esta distribución puede definirse a partir de la distribución gaussiana multivariada real, lo cual es particularmente útil para generar vectores complejos con distribución gaussiana compleja multivariada.

2.4.1.2. Distribución Wishart compleja escalada

La matriz $\mathbf{Y}^{(L)}$ asociada al ruido *speckle* para imágenes PolSAR *L-looks* que aparece en la ecuación (2.22) puede escribirse como

$$\mathbf{Y}^{(L)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{Y}(k) \mathbf{Y}^*(k), \quad (2.26)$$

donde $\mathbf{Y}(k) \sim \mathcal{N}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{0})$, para $k = 1, 2, \dots, L$.

Consideramos, en primer lugar, que las variables aleatorias $\mathbf{Y}(k)$ son independientes y que se verifica que $L \geq p$. Bajo estas restricciones $\mathbf{Y}^{(L)}$ tiene distribución Wishart compleja escalada, con soporte dado por el cono² de matrices Hermitianas definidas positivas y parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L (ver por ejemplo Goodman 1963; Lee et al. 1994a), caracterizada por la función de densidad

$$f_{\mathbf{Y}^{(L)}}(\mathbf{y}; \boldsymbol{\Sigma}, L) = \frac{L^{pL} |\mathbf{y}|^{L-p}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_p(L)} \exp\left(-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{y})\right), \quad (2.27)$$

con $\Gamma_p(L)$ la constante de normalización, denominada usualmente “función gama multivariada”, definida como

$$\Gamma_p(L) = \pi^{p(p-1)/2} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma(L - k),$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gama de Euler estándar. Esto se denota como $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ y satisface que $E(\mathbf{Y}^{(L)}) = \boldsymbol{\Sigma}$. Esta distribución es un escalamiento de la Wishart compleja original estudiada por Goodman (1963). Los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L tienen una interpretación debido a la física de formación de la imagen: $|\boldsymbol{\Sigma}|$ está relacionado al brillo de la imagen y L a la relación señal-ruido.

Sin embargo, en general, las variables aleatorias $\mathbf{Y}(k)$ están correlacionadas, por lo se han estudiado modificaciones de la distribución Wishart presentada. Anfinen

²Un cono es un subespacio de un espacio vectorial cerrado para el producto por un escalar positivo.

et al. (2009) propusieron reemplazar L por el número equivalente de *looks*, L_e , siendo $L_e \geq L$, con lo cual se obtiene consistencia entre los momentos teóricos del modelo y los estimados con los datos. Los autores removieron así la restricción $L \geq p$ y consideraron para $\mathbf{Y}^{(L)}$ la distribución Wishart compleja relajada de parámetros Σ y L_e , que tiene la misma forma que la dada en la ecuación (2.27) aunque sin la restricción para L (que es ahora L_e). Esta distribución se denota como $\mathcal{RW}_p^{\mathbb{C}}(\Sigma, L_e)$, y admite variaciones de L_e en la misma imagen. Según las aplicaciones L_e puede variar entre clases (para clasificación), entre segmentos (para segmentación) o entre píxeles (para detección de cambios).

2.4.2. Distribuciones del *backscatter*

La matriz aleatoria compleja $\mathbf{Y}^{(L)}$ acarrea la estructura de covarianza Σ . Los elementos de la diagonal de esta matriz describen la intensidad del *backscatter multi-look* (relacionada a la verdad no observable del terreno) y así, a diferencia de lo que ocurre en el caso univariado derivado en Frey et al. (1997), tiene toda la información necesaria para caracterizar el terreno en estudio.

Por su parte la variable aleatoria X que es escalar, positiva y verifica que $E(X) = 1$, sólo es responsable de la fluctuación local del valor medio. Freitas et al. (2005) indicaron que esta diferenciación con el caso univariado es necesaria para conseguir modelar canales con diferentes intensidades medias usando una sola variable escalar. Como X es una variable aleatoria, podemos asumir para ella diferentes distribuciones en probabilidad. Presentaremos aquéllas de las que derivan las PDF para el retorno mostradas en la Sección 2.4.3.

Distribución gaussiana inversa generalizada

Freitas et al. (2005) usaron como modelo general para el *backscatter* en intensidad a la distribución gaussiana inversa generalizada, $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$, caracterizada por la función de densidad

$$f_X(x; \alpha, \gamma, \lambda) = \frac{(\lambda/\gamma)^{\alpha/2}}{2K_{\alpha}(\sqrt{\lambda\gamma})} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{x} + \lambda x\right)\right), \quad (2.28)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , donde K_ν denota la función de Bessel de tercer tipo y orden ν , definida en Abramowitz y Stegun (1964) como

$$K_\alpha(V_1) = \frac{1}{2} \int_0^\infty V^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{V_1}{2}(V + V^{-1})\right) dV, \quad (2.29)$$

con $V_1, V \in \mathbb{R}_+$ y dominio de variación de los parámetros dado por

$$\begin{cases} \gamma > 0, \lambda \geq 0 & \text{si } \alpha < 0, \\ \gamma > 0, \lambda > 0 & \text{si } \alpha = 0, \\ \gamma \geq 0, \lambda > 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Los momentos de esta distribución se obtienen de

$$E[X^r] = \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^{r/2} \frac{K_{\alpha+r}(\sqrt{\lambda\gamma})}{K_\alpha(\sqrt{\lambda\gamma})}. \quad (2.31)$$

Jacobo-Berlles (2005) señaló que esta distribución es lo suficientemente general como para describir una gran cantidad de blancos, con la desventaja de que las distribuciones para el retorno que se derivan requieren una estimación de parámetros que es analíticamente compleja y numéricamente inestable.

Freitas et al. (2005) presentaron una parametrización muy útil, por sus propiedades, para modelos polarimétricos. Si en función de los parámetros γ y λ se definen los parámetros ω y η como

$$\omega = \sqrt{\gamma\lambda}, \quad \eta = \sqrt{\gamma/\lambda}, \quad (2.32)$$

se puede escribir la distribución $\mathcal{N}^{-1}(\alpha, \omega, \eta)$ con PDF

$$f_X(x; \alpha, \omega, \eta) = \frac{1}{2\eta^\alpha K_\alpha(\omega)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\omega}{2}\left(\frac{\eta}{x} + \frac{x}{\eta}\right)\right), \quad (2.33)$$

con soporte \mathbb{R}_+ y los parámetros dados por (2.30) y (2.32)

La distribución $\mathcal{N}^{-1}(\alpha, \omega, \eta)$ es invariante a cambios de escala, lo que significa que si $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \omega, \eta)$ entonces $cX \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \omega, c\eta)$ cualquiera sea $c > 0$. Así,

puede definirse una variable con distribución inversa gaussiana generalizada de media unitaria, a partir de una variable $X' \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \omega, \eta)$ y de la expresión (2.31), llegando a la variable aleatoria escalada $X = X'/r_{\alpha, \omega}$ que tiene densidad

$$f_X(x; \alpha, \omega, \eta) = \frac{r_{\alpha, \omega}^\alpha}{2K_\alpha(\omega)} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{r_{\alpha, \omega} x} + r_{\alpha, \omega} x\right)\right), \quad (2.34)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $\alpha \notin [-1, 0)$, ω como en la ecuación (2.32) y $r_{\alpha, \omega} = K_{\alpha+1}(\omega)/K_\alpha(\omega)$. La restricción sobre α garantiza que las distribuciones polarimétricas derivadas tengan media finita.

Independientemente de la parametrización, la distribución gaussiana inversa generalizada puede reducirse a varios casos particulares:

1. la distribución constante;
2. la distribución gama;
3. la distribución gama inversa;
4. la distribución gaussiana inversa.

“Sistema de distribuciones de Pearson”

Delignon y Pieczynski (2002) plantearon que mientras en el esquema clásico el número de dispersores en cada celda se asume como suficientemente grande y constante (resultando la intensidad exponencial y la amplitud Rayleigh), cuando este número varía la distribución de los datos puede no ser gaussiana, por lo que la exponencial deja de ser un modelo apropiado para la intensidad.

Asumiendo que el número de dispersores en cada celda elemental está distribuido como una Poisson, puede considerarse que la media de esa distribución (que es su parámetro) es aleatoria. Así el número n de dispersores es una realización de la variable aleatoria N que tiene asociada una función de densidad f .

Delignon y Pieczynski (2002) asumieron que la densidad f pertenece al “Sistema de distribuciones de Pearson” que cubre una amplia variedad de densidades. Considerando que la variable N toma valores positivos los autores seleccionaron entre las densidades de ese sistema las que tienen soporte positivo. Así, aunque el sistema contiene una gran cantidad de densidades conocidas, ellos eligieron las siguientes:

1. la distribución gama;
2. la distribución gama inversa;
3. la distribución de Fisher;
4. la distribución beta de primer tipo;
5. la distribución beta de segundo tipo.

Además agregaron el caso de *backscatter* constante, apropiado cuando el número de dispersores es suficientemente grande, que es también una densidad (la de Dirac) de este sistema.

En esta tesis trabajamos con todas las distribuciones antes mencionadas y agregamos la gama generalizada y la gama con expansión de Laguerre, unificando notación y relacionándolas. A partir de todas ellas mostramos las distribuciones para el retorno asociadas.

Para poder relacionar con los resultados de Freitas et al. (2005) que propusieron una variable aleatoria con media unitaria como un modelo amplio, en cada distribución proponemos que la media sea 1.

2.4.2.1. Distribución de Dirac: *Backscatter* constante

El uso de una constante como modelo para el *backscatter* fue propuesto a pesar de ser una hipótesis muy restrictiva. Cuando se asume que el área es homogénea, como en regiones de pastos y océanos, el *backscatter* X tiene distribución Dirac (constante). Además como requerimos que $E(X) = 1$, resulta que $P(X = 1) = 1$.

2.4.2.2. Distribución gama

La distribución gama ha sido muy usada para datos no gaussianos como regiones de bosques y superficies de mar. Freitas et al. (2005) la definieron como caso particular $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ con PDF (2.28), cuando $\gamma = 0$, $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$.

Nascimento (2012) planteó a la gama como un caso del “Sistema de distribuciones de Pearson”, caracterizada por la función de densidad dada por

$$f_X(x; \mu, \mathcal{L}) = \frac{\mathcal{L}}{\mu \Gamma(\mathcal{L})} \left(\frac{\mathcal{L}}{\mu} x \right)^{\mathcal{L}-1} \exp \left(-\frac{\mathcal{L}}{\mu} x \right), \quad (2.35)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $\mu > 0$ el parámetro de escala, y $\mathcal{L} > 0$ el de forma. En ese caso se indica que $X \sim \Gamma(\mathcal{L}, \mathcal{L}\mu^{-1})$.

Para que se verifique $E(X) = 1$ simplemente hacemos $\mu = 1$ y así tenemos la PDF de la $\Gamma(\mathcal{L})$ que coincide con la presentada en Freitas et al. (2005) con $\alpha = \mathcal{L}$.

2.4.2.3. Distribución gama inversa

La distribución gama inversa es capaz de modelar blancos extremadamente heterogéneos, para los que no es adecuado usar la gama presentada en la Sección 2.4.2.2.

Freitas et al. (2005) la definieron como caso particular $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ con PDF (2.28), cuando $\lambda = 0$, $\alpha < 0$, $\gamma > 0$.

Nascimento (2012) mostró a la gama inversa como miembro del “Sistema de distribuciones de Pearson”, caracterizada por la función de densidad

$$f_X(x; \mu, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{(-\alpha - 1) \mu} \left[\frac{(-\alpha - 1) \mu}{x} \right]^{-\alpha+1} \exp \left(-\frac{(-\alpha - 1) \mu}{x} \right), \quad (2.36)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $\mu > 0$ el parámetro de escala, y $\alpha < 0$ el de forma. En ese caso se indica que $X \sim \Gamma^{-1}(-\alpha, (-\alpha - 1) \mu)$

Como en el caso anterior, para que se verifique $E(X) = 1$ basta hacer $\mu = 1$ y así tendríamos la PDF de la $\Gamma^{-1}(\alpha)$ que coincide con la presentada en Freitas et al. (2005).

2.4.2.4. Distribución gaussiana inversa

Esta distribución ha sido extensamente usada para datos positivos en los que la distribución gama no es apropiada (ver Jacobo-Berlles 2005). Es además adecuada, según Deng et al. (2017), para datos que tienen grandes variaciones de forma, por ejemplo los derivados del movimiento Browniano.

En Frery et al. (2010) se la definió como caso particular de la distribución gaussiana inversa generalizada, $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\alpha, \gamma, \lambda)$ con $\alpha = -1/2$, $\lambda > 0$ y $\gamma > 0$ en la fórmula (2.28). Los autores reparametrizando con $\mu = \sqrt{\gamma/\lambda}$ y $w = \sqrt{\gamma\lambda}$, derivaron la PDF para esta variable cuya expresión es

$$f_X(x; \mu, w) = \sqrt{\frac{w\mu}{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2} w \frac{(x - \mu)^2}{x\mu}\right), \quad (2.37)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $\mu > 0$ es la media y la varianza que crece cuando $w \rightarrow 0$. Aquí lo denotamos como $X \sim G^{-1}(w, \mu)$.

Para que se verifique $E(X) = 1$ simplemente hacemos $\mu = 1$ y así se tiene la PDF de la $G^{-1}(w, 1)$ que es la presentada en Frery et al. (2010) con $\omega = w$.

Jacobo-Berlles (2005) señaló que el caso *backscatter* constante, que puede verse como caso particular de 2.4.2.2, 2.4.2.3 y 2.4.2.4, aparece siempre que la escala de la rugosidad sea menor que la longitud de onda empleada para formar la imagen, lo cual ocurre por ejemplo en áreas cultivadas con papa, remolacha etc., que se conoce como datos homogéneos. Por esta razón es importante que los modelos puedan reducirse a una constante, ya que datos homogéneos son muy frecuentes en las aplicaciones.

2.4.2.5. Distribución de Fisher

En el caso SAR monopolizado, se ha usado la distribución de Fisher para modelar áreas urbanas, además de dar una buena aproximación a diferentes tipos de cobertura. Recientemente Bombrun y Beaulieu (2008) mostraron la utilidad de esta distribución para modelar datos PolSAR multicanal en escenarios texturados. Bombrun et al. (2011b) indicaron que la distribución de Fisher es solución tipo IV del “sistema de Pearson”, y que se introduce a partir de la convolución de Mellin de la PDF de la gama por la gama inversa. La densidad de una variable aleatoria con distribución Fisher es

$$f_X(x; \mu, \mathcal{L}, \alpha) = \frac{\Gamma(\mathcal{L} - \alpha)}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(-\alpha)} \frac{\mathcal{L}}{(-\alpha - 1)\mu} \frac{\left(\frac{\mathcal{L}x}{(-\alpha - 1)\mu}\right)^{\mathcal{L}-1}}{\left(1 + \frac{\mathcal{L}x}{(-\alpha - 1)\mu}\right)^{\mathcal{L}-\alpha}}, \quad (2.38)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , parámetro de escala $\mu > 0$, y parámetros de forma $\mathcal{L} \geq 0$ y $\alpha \leq 0$. Esta distribución se denota $\mathcal{F}(\mu, \mathcal{L}, \alpha)$.

Cintra et al. (2013) han mostrado que la distribución de Fisher es una reparametrización trivial de la distribución $\mathcal{G}^0(\omega, \mu(-\omega - 1), \alpha)$, propuesta por Frery et al. (1997). Bajo ciertas condiciones se puede mostrar que esta distribución (al igual que la gaussiana inversa generalizada) tiene como caso particular a la gama, la gama inversa y la Dirac.

Para que tenga media unitaria se hace $\mu = 1$ llegando a la $X \sim \mathcal{F}(\mathcal{L}, \alpha)$.

Deng et al. (2017) señalaron que esta distribución es capaz de modelar diferentes tipos de textura, aunque requiere más parámetros.

2.4.2.6. Distribución beta de primer tipo (o Pearson de tipo I)

Delignon y Pieczynski (2002) modelaron el *backscatter* con otra de las distribuciones del “sistema de distribuciones de Pearson”, Bombrun et al. (2011a) usaron la

distribución Beta de primer tipo para la textura, $\mathcal{B}(\mathcal{L}, w - \mathcal{L}, w\mu\mathcal{L}^{-1})$, que tiene PDF

$$f_X(x; \mu, \mathcal{L}, w) = \frac{\mathcal{L}}{w\mu} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(w - \mathcal{L})} \left(\frac{\mathcal{L}x}{w\mu}\right)^{\mathcal{L}-1} \left(1 - \frac{\mathcal{L}x}{w\mu}\right)^{w-\mathcal{L}-1}, \quad (2.39)$$

con soporte $(0; w\mu/\mathcal{L})$, $\mathcal{L} \geq 0$, $w > \mathcal{L}$ los parámetros de forma y μ relacionado a la escala. Esta distribución también es conocida como “Pearson tipo I” (Delignon y Pieczynski 2002).

Para que la distribución tenga media unitaria basta hacer $\mu = 1$ en la ecuación anterior.

2.4.2.7. Distribución beta inversa (o Pearson de tipo IV)

Bombrun et al. (2011a) usaron para la textura esta distribución, que fuera presentada en Delignon y Pieczynski (2002). La PDF de la $\mathcal{B}^{-1}(-w + 1, w - \mathcal{L}, \mu\mathcal{L}w^{-1})$ es

$$f_X(x; \mu, \mathcal{L}, w) = \frac{w}{\mathcal{L}\mu} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(w - \mathcal{L})} \left(\frac{wx}{\mathcal{L}\mu}\right)^{-w} \left(\frac{wx}{\mu\mathcal{L}} - 1\right)^{w-\mathcal{L}-1}, \quad (2.40)$$

con soporte $(\mathcal{L}\mu/w; \infty)$, $\mathcal{L} \geq 0$, $w \geq \mathcal{L}$ los parámetros de forma y μ relacionado a la escala.

Para que la distribución tenga media unitaria basta hacer $\mu = 1$ en la ecuación anterior.

Deng et al. (2017) indicaron que las distribuciones \mathcal{B} y \mathcal{B}^{-1} son capaces de modelar datos con baja varianza y extrema asimetría, como los datos texturados después de aplicar filtros.

2.4.2.8. Distribución gaussiana inversa generalizada

Nascimento (2012) planteó la PDF de la $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\mu, \zeta, w)$ dada por

$$f_X(x; \mu, \zeta, w) = \frac{x^{\zeta-1} r_{\zeta, w}^{\zeta}}{2\mu^{\zeta} K_{\zeta}(w)} \exp\left(-\frac{w}{2} \left(\frac{\mu}{r_{\zeta, w} x} + \frac{r_{\zeta, w} x}{\mu}\right)\right), \quad (2.41)$$

con soporte \mathbb{R}_+ y $r_{\zeta, w} = K_{\zeta+1}(w)/K_{\zeta}(w)$. Los parámetros de esta distribución son: $\mu > 0$ que controla la escala, y ζ y w que son de parámetros de forma, con $\zeta \notin [-1, 0)$.

Haciendo $\mu = 1$, $\zeta = \alpha$ y $w = \omega$ se obtiene la PDF dada en (2.34).

Deng et al. (2017) señalaron que esta distribución es capaz de modelar diferentes tipos de textura, aunque requiere más parámetros que las del “sistema de Pearson”.

2.4.2.9. Distribución gama generalizada

La distribución gama generalizada, presentada en Li et al. (2011) es un modelo puramente matemático, sin relación con la física del proceso. Sin embargo incluye una gran variedad de distribuciones muy usadas como densidades para imágenes SAR, y es suficientemente amplia como para modelar áreas con diferentes coberturas.

Song et al. (2015) señalaron que es además una distribución muy flexible para el modelado estadístico, comparada con la distribución gama y la Fisher.

Deng et al. (2017) presentaron la PDF de la distribución $G\Gamma(\nu, \theta, \mathcal{L})$ como

$$f_X(x; \nu, \theta, \mathcal{L}) = \frac{\nu}{\theta \Gamma(\mathcal{L})} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\mathcal{L}\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\nu}\right), \quad (2.42)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $\theta > 0$ un parámetro de escala relacionado a la media, y $\mathcal{L} > 0$ y $\nu > 0$ parámetros de forma. La media de esta distribución es $\mu = \theta \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \frac{1}{\nu})}{\Gamma(\mathcal{L})}$.

En función de los valores de los parámetros se tienen modelos conocidos, por ejemplo: gama (para $\nu = 1$), exponencial (para $\nu = 1, \mathcal{L} = 1$), Rayleigh (para $\nu = 2, \mathcal{L} = 1$) y Weibull ($\mathcal{L} = 1$) son casos especiales de la $GF(\nu, \theta, \mathcal{L})$.

Deng et al. (2017) escalaron la variable con PDF dada en (2.42) para que la media sea unitaria, con lo que se obtuvieron

$$f_X(x; \nu, \mathcal{L}) = \frac{\nu \beta^{\mathcal{L}\nu}}{\Gamma(\mathcal{L})} x^{\mathcal{L}\nu-1} \exp(-(\beta x)^\nu), \quad (2.43)$$

con soporte \mathbb{R}_+ y $\beta = \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \frac{1}{\nu})}{\Gamma(\mathcal{L})}$, que es la que usamos para combinar con la PDF del *speckle*.

2.4.2.10. Distribución gama con expansión de Laguerre

La distribución gama con expansión Laguerre, dada en Bian y Mercer (2014) mejora el ajuste de la clásica distribución gama en áreas muy heterogéneas. Deng et al. (2017) mostraron la PDF de $\Gamma L(\mu, \alpha)$

$$f_X(x; \mu, \alpha) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right) \exp\left(-\frac{\alpha x}{\mu}\right) \sum_{u=0}^{\infty} \xi_u \frac{\Gamma(\alpha)u!}{\Gamma(u+\alpha)} L_u^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha x}{\mu}\right), \quad (2.44)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $\mu > 0$ parámetro de escala y $\alpha > 0$ de forma, con

$$\xi_u = \sum_{k=0}^u (-1)^k \binom{u+\alpha-1}{u-k} \frac{1}{k!} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k E[x^k].$$

El polinomio de Laguerre $L_u^{\alpha-1}(x)$ está dado por

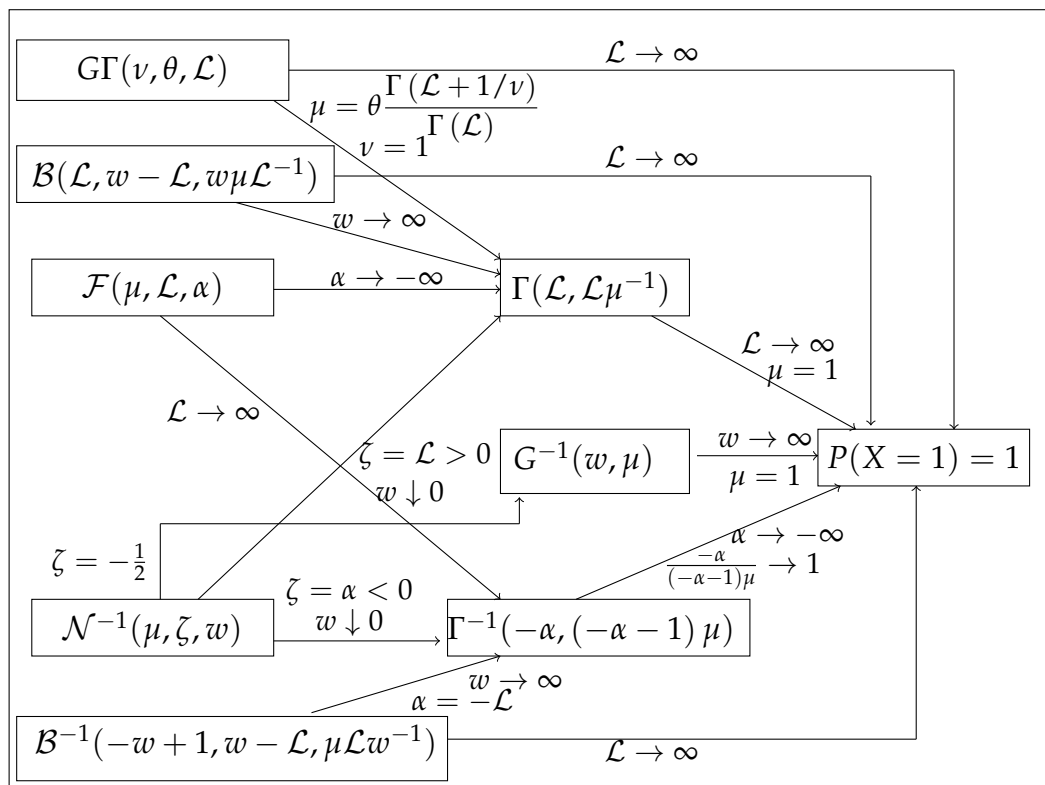
$$L_u^{\alpha-1}(x) = \sum_{k=0}^u (-1)^k \binom{u+\alpha-1}{u-k} \frac{x^k}{k!}.$$

Para que la distribución tenga media unitaria basta hacer $\mu = 1$ en la ecuación (2.44).

Deng et al. (2017) indicaron que esta distribución es buena para aproximar datos con dispersores fuertes pero tiene PDF compleja para utilizar.

2.4.2.11. Relación entre modelos para el *backscatter*

La relación entre los modelos considerados, que ilustra el siguiente diagrama, ha sido extraída en su mayoría de Nascimento (2012). Aquí sólo agregamos la distribución gama generalizada, $G\Gamma(v, \theta, \mathcal{L})$.



La Fig. 2.4 muestra ejemplos de curvas de densidad del *backscatter* para diferentes valores de los parámetros, siempre con media unitaria.

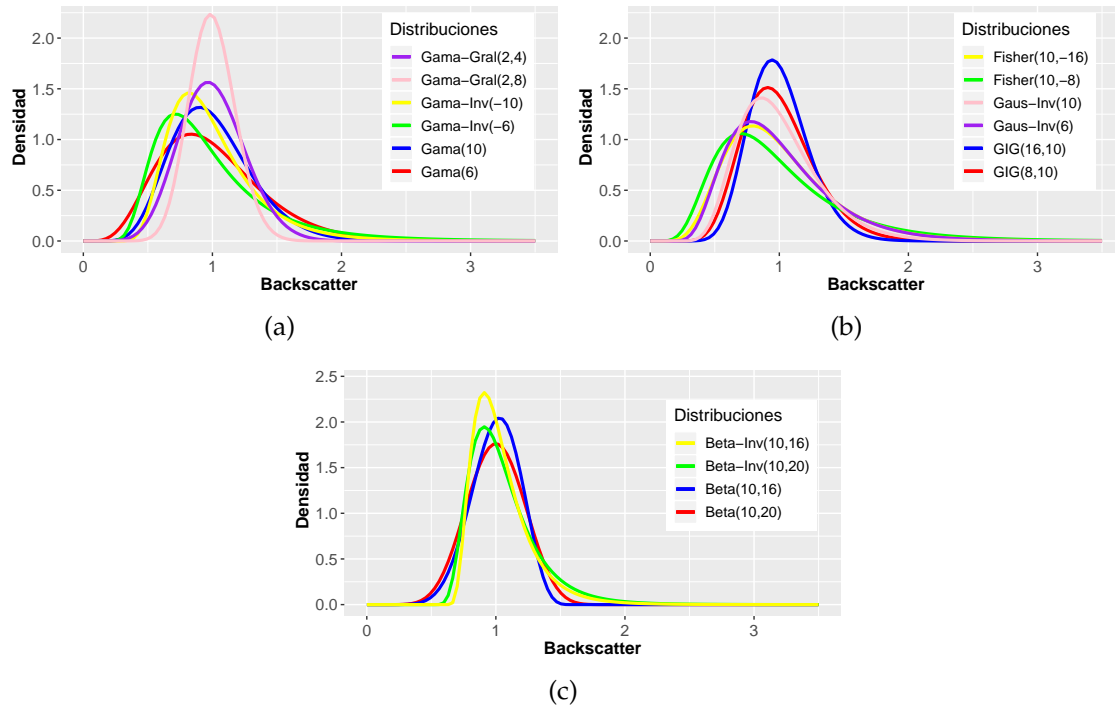


Figura 2.4: Ejemplos de diferentes distribuciones de textura.

(a) Gama con $\mathcal{L} = 6$ y $\mathcal{L} = 10$, Gama inversa con $\alpha = -6$ y $\alpha = -10$ y Gama generalizada con $\nu = 2, \mathcal{L} = 4$ y $\nu = 2, \mathcal{L} = 8$.

(b) Gaussiana inversa con $w = 6$ y $w = 10$, Fisher con $\mathcal{L} = 10, \alpha = -16$ y $\mathcal{L} = 10, \alpha = -8$ y Gaussiana inversa generalizada con $\zeta = 8, w = 10$ y $\zeta = 16, w = 10$.

(c) Beta con $\mathcal{L} = 10, w = 16$ y $\mathcal{L} = 10, w = 20$, y Beta inversa con $\mathcal{L} = 10, w = 16$ y $\mathcal{L} = 10, w = 20$.

2.4.3. Distribuciones del retorno

Presentaremos en esta sección los resultados de varios trabajos que derivaron las distribuciones del retorno complejo *multi-look* $\mathbf{Z}^{(L)}$ usando el modelo multiplicativo y la distribución de las variables involucradas X e $\mathbf{Y}^{(L)}$.

Para derivar todas las funciones de densidad aquí presentadas se usa que

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{\mathbf{Z}^{(L)}|X=x}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\theta}) f_X(x) dx,$$

donde el soporte está dado por el cono de matrices Hermitianas definidas positivas y $\boldsymbol{\theta}$ el vector de parámetros de cada distribución.

2.4.3.1. Distribución Wishart compleja escalada

Cuando se asume que el área es homogénea, como en regiones de pastos y océanos, el *backscatter* X tiene distribución constante que presentamos en la Sección 2.4.2.1 y es a su vez caso particular de las presentadas en las secciones 2.4.2.2, 2.4.2.3 y 2.4.2.4. Esta distribución, combinada con $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ presentada en la Sección 2.4.1.2, lleva al retorno $\mathbf{Z}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$. Así su función de densidad es

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, L) = \frac{L^{pL} |\mathbf{z}|^{L-p}}{|\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma_p(L)} \exp\left(-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z})\right), \quad (2.45)$$

que es la presentada en (2.27) para $\mathbf{Y}^{(L)}$ y tiene sus parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L representando lo mismo.

La $\mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ ha sido utilizada con éxito como modelo para el retorno de imágenes PolSAR aún en áreas no homogéneas, en diferentes análisis como segmentación, clasificación y detección de bordes (ver por ejemplo Frery et al. 2011, 2014; Nascimento et al. 2010), por lo que bajo esta distribución se tiene una gran cantidad de herramientas de análisis.

2.4.3.2. Distribución \mathcal{G} polarimétrica

Cuando se asume que el *backscatter* X tiene distribución gaussiana inversa generalizada, presentada en la Sección 2.4.2.8 y caracterizada por la ecuación (2.41), $X \sim \mathcal{N}^{-1}(\mu, \zeta, w)$, y con $\mu = 1$, se la combina con $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ presentada en la Sección 2.4.1.2, el retorno $\mathbf{Z}^{(L)}$ tiene densidad

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \zeta, w, L) = \frac{L^{pL} |\mathbf{z}|^{L-p} r_{\zeta, w}^{\zeta}}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L K_{\zeta}(w)} \left(\frac{2L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) + \frac{w}{r_{\zeta, w}}}{w r_{\zeta, w}} \right)^{\frac{\zeta - pL}{2}} K_{\zeta - pL} \left(\sqrt{w r_{\zeta, w} \left(2L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) + \frac{w}{r_{\zeta, w}} \right)} \right). \quad (2.46)$$

Esta distribución que se denota como $\mathcal{G}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \zeta, w, L)$, con el espacio paramétrico ya indicado, es la extensión multivariada de la \mathcal{G}_I que fuera presentada en Frery et al. (1997) para el formato intensidad.

La distribución $\mathcal{G}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \zeta, w, L)$ tiene como casos particulares a siguientes tres distribuciones para el retorno.

2.4.3.3. Distribución \mathcal{K} polarimétrica

Freitas et al. (2005) mostraron a esta distribución como derivada de la $\mathcal{G}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \alpha, \omega, L)$ cuando $\omega \rightarrow 0$ con $\alpha > 0$ que, en la parametrización original, equivale a hacer $\gamma \rightarrow 0$ con $\lambda > 0$.

Nascimento (2012) la presentó como el producto de dos variables aleatorias independientes: una que modela el *speckle* $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ con PDF (2.27), y la otra para el *backscatter* $X \sim \Gamma(\mathcal{L}, \mathcal{L}\mu^{-1})$ con PDF (2.35) y $\mu = 1$. La densidad es

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, L) = \frac{2 |\mathbf{z}|^{L-p} (L\mathcal{L})^{\frac{\mathcal{L}+pL}{2}}}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(\mathcal{L})} \left(\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}) \right)^{\frac{\mathcal{L}-pL}{2}} K_{\mathcal{L}-pL} \left(2 \sqrt{L\mathcal{L} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z})} \right), \quad (2.47)$$

con parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes y $\mathcal{L} > 0$, que se denota $\mathcal{K}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, L)$.

La distribución $\mathcal{K}_p^{(L)}$, que fue presentada por Yueh et al. (1989), es adecuada para modelar la matriz de covarianza polarimétrica *multi-look* especialmente en áreas heterogéneas (como floresta) y se reduce, cuando hay una única polarización, a la distribución univariada para la intensidad *multi-look* \mathcal{K}_I (ver Oliver y Quegan 1998).

Deng et al. (2017) indicaron que la $\mathcal{K}_p^{(L)}$ puede considerarse uno de los modelos más exitosos para imágenes de radar.

2.4.3.4. Distribución \mathcal{G}^0 polarimétrica

Esta distribución es especialmente adecuada para modelar blancos polarimétricos *multi-look* extremadamente heterogéneos (como regiones urbanas). Freitas et al. (2005) la mostraron como derivada de la $\mathcal{G}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \alpha, \omega, L)$ cuando $\omega \rightarrow 0$ con $\alpha < -1$, que en la parametrización original equivale a hacer $\lambda \rightarrow 0$ con $\gamma > 0$.

También puede derivarse como el producto de $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ con PDF (2.27), y $X \sim \Gamma^{-1}(-\alpha, (-\alpha - 1)\mu)$ con PDF (2.36) con $\mu = 1$.

La densidad está dada por

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \alpha, L) = \frac{L^{pL} |\mathbf{z}|^{L-p} \Gamma(pL - \alpha)}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(-\alpha) (-\alpha - 1)^\alpha} \left(L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) + (-\alpha - 1) \right)^{\alpha - pL}, \quad (2.48)$$

con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, y $\alpha < -1$.

Se denomina $\mathcal{G}_p^{0(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \alpha, L)$, y se reduce cuando $p = 1$ a la distribución \mathcal{G}_1^0 univariada para la intensidad *multi-look* (ver Frery et al. 1997).

Como su versión univariada la $\mathcal{G}_p^{0(L)}$ es apropiada para describir tanto los blancos extremadamente heterogéneos como los homogéneos y heterogéneos. Además, como en el caso univariado, no depende de la función K_ν , lo cual es una característica deseable pues esa función sólo está disponible a través de la evaluación numérica de las integrales.

2.4.3.5. Distribución armónica polarimétrica

Considerando que en datos reales es usual encontrar datos extremadamente heterogéneos a los que la \mathcal{K} no ajusta adecuadamente, Frery et al. (2010) propusieron una distribución más flexible y tratable a la que denominaron distribución armónica polarimétrica. Asumiendo que $X \sim G^{-1}(w, \mu)$ con PDF (2.37) y $\mu = 1$, y combi-nándolo con la $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ con PDF (2.27), Frery et al. (2010) derivaron la

función de densidad

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, w, L) = \frac{\sqrt{\frac{2}{L}} L^{pL} \exp(w) w^{3L+1} |\mathbf{z}|^{L-p} K_{3L+\frac{1}{2}} \left(\sqrt{w (2L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) + w)} \right)}{\Gamma_p(L) \pi^3 |\boldsymbol{\Sigma}|^L \left(w (2L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) + w) \right)^{\frac{3}{2}L + \frac{1}{4}}}, \quad (2.49)$$

con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, y $w > 0$. Esto se denota como $\mathbf{Z}^{(L)} \sim \mathcal{G}_p^{H(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, w, L)$. Para evitar los problemas numéricos que surgen usando el caso general para el cálculo de $K_{3L+1/2}$ (por ser de orden $k + 1/2$, con k entero) se la puede evaluar como una suma de funciones simples (ver Frery et al. 2010).

2.4.3.6. Distribución Kummer- \mathcal{U}

Para modelar áreas urbanas Bombrun y Beaulieu (2008) propusieron que el *backscatter* $X \sim \mathcal{F}(\mu, \mathcal{L}, \alpha)$ con PDF (2.38), que además brinda un buen ajuste para regiones con diferentes tipos de cobertura. Esta distribución, con $\mu = 1$, combinada con la $\mathbf{Y}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\Sigma}, L)$ con PDF (2.27) es la que da origen a la función de densidad de $\mathbf{Z}^{(L)}$ denominada distribución Kummer- \mathcal{U} para el retorno cuya función de densidad es

$$f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, \alpha, L) = \frac{L^{Lp} |\mathbf{z}|^{L-p} \Gamma(\mathcal{L} - \alpha)}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(\mathcal{L}) \Gamma(-\alpha)} \left(\frac{\mathcal{L}}{-\alpha - 1} \right)^{Lp} \Gamma(Lp - \alpha) U \left(Lp - \alpha, 1 + Lp - \mathcal{L}, \frac{L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}) \mathcal{L}}{-\alpha - 1} \right) \quad (2.50)$$

con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, $\mathcal{L} \geq 0$, $-\alpha \geq 0$ y $U(., ., .)$ la función hipergeométrica confluyente de segundo orden (también conocida como función de Kummer). Esta situación se denota como $\mathbf{Z}^{(L)} \sim \mathcal{U}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, \alpha, L)$.

Abramowitz y Stegun (1964) en la ecuación (13.2.6) del texto dieron para la función Kummer U la siguiente representación integral

$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} e^z \int_1^\infty e^{-zt} (t-1)^{a-1} t^{b-a-1} dt, \quad (2.51)$$

con $a, b, z \in \mathbb{C}$, $\Re(b) > \Re(a) > 0$ y $\Re(z) > 0$, siendo $\Re(\cdot)$ la parte real del número complejo (ver por ejemplo Ayienda 2014).

2.4.3.7. Distribución \mathcal{W}

Bombrun et al. (2011a) asumieron la distribución beta de primer tipo para la textura, $\mathcal{B}(\mathcal{L}, -\alpha - \mathcal{L}, (-\mathcal{L} - 1)\mu\mathcal{L}^{-1})$, con PDF (2.39) y $\mu = 1$, y la combinaron con la de $\mathbf{Y}^{(L)}$ dada en la ecuación (2.27). Además, usando que la función Kummer- \mathcal{U} puede reemplazarse por la Whittaker W de acuerdo a la siguiente relación:

$$W_{\kappa, \mu}(z) = z^{\mu + \frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z}{2}\right) U\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, z\right), \quad (2.52)$$

mostrada en la ecuación (13.1.33) de Abramowitz y Stegun (1964), derivaron la función de densidad

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, w, L) &= \frac{|\mathbf{z}|^{L-p}}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L} \left(\frac{L\mathcal{L}}{w}\right)^{\frac{\mathcal{L}+Lp-1}{2}} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma(\mathcal{L})} \left[\text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}\right)\right]^{\frac{\mathcal{L}+Lp-1}{2}} \\ &\exp\left\{-\frac{L\mathcal{L}}{2w} \text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}\right)\right\} W_{\frac{w-Lp-2\mathcal{L}}{2}, \frac{Lp-\mathcal{L}}{2}}\left(-\frac{L\mathcal{L}}{w} \text{tr}\left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}\right)\right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, $\mathcal{L} > 0$, $w > 0$, $w > \mathcal{L}$ y $W_{\kappa, \mu}(\cdot)$ la función de Whittaker. Esta situación se denota como $\mathbf{Z}^{(L)} \sim \mathcal{W}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, w, L)$.

2.4.3.8. Distribución \mathcal{M}

Bombrun et al. (2011a) también usaron la distribución beta inversa para la textura, $\mathcal{B}^{-1}(-w + 1, w - \mathcal{L}, \mu\mathcal{L}w^{-1})$ con PDF (2.40) y $\mu = 1$ y la combinaron con la de $\mathbf{Y}^{(L)}$ dada en la ecuación (2.27). Además, usando que la función Kummer- \mathcal{U} puede reemplazarse por la Kummer- M de acuerdo a la siguiente relación mostrada en la

ecuación (13.2.1) de Abramowitz y Stegun (1964):

$$\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)} M(a, b, z) = \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt, \quad (2.54)$$

con $a, b, z \in \mathbb{C}$, $\Re(b) > 0$ y $\Re(a) > 0$, derivaron la función de densidad de $\mathbf{Z}^{(L)}$ dada por

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, w, L) &= \frac{|\mathbf{z}|^{L-p}}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L} \left(\frac{Lw}{\mathcal{L}} \right)^{\frac{Lp-w}{2}} \frac{\Gamma(w)\Gamma(Lp+\mathcal{L})}{\Gamma(\mathcal{L})\Gamma(Lp+w)} \left[-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}) \right]^{\frac{-Lp-w}{2}} \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{Lw}{2\mathcal{L}} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}) \right\} M_{\frac{w-Lp-2\mathcal{L}}{2}, \frac{Lp-\mathcal{L}}{2}} \left(-\frac{Lw}{\mathcal{L}} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}) \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, $\mathcal{L} > 0$, $w > 0$, $w \geq \mathcal{L}$ y $M(a, b, z)$ la función de Whittaker M . Esta situación se denota como $\mathbf{Z}^{(L)} \sim \mathcal{M}_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, w, L)$.

2.4.3.9. Distribución Wishart gama generalizada

Song et al. (2015) usaron la distribución gama generalizada para la textura, $X \sim G\Gamma(\nu, \theta, \mathcal{L})$ con PDF (2.42), $\mu = \theta \frac{\Gamma(\mathcal{L} + \frac{1}{\nu})}{\Gamma(\mathcal{L})}$, y para $\mu = 1$, la combinaron con la de $\mathbf{Y}^{(L)}$ dada en la ecuación (2.27). Así los autores derivaron una expresión compacta, aunque no explícita, para la función de densidad de $\mathbf{Z}^{(L)}$ realizando una sustitución $x = \tan(\theta)$ siendo x el de la PDF (2.43). La función de densidad de $\mathbf{Z}^{(L)} \sim W\Gamma_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, \nu, L)$ es

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \mathcal{L}, \nu, L) &= \frac{L^{pL} |\mathbf{z}|^{L-p} |\nu|}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(\mathcal{L})} \\
 &\int_0^{\pi/2} [\tan(\theta)]^{\mathcal{L}\nu-1-Lp} [\sec(\theta)]^2 \\
 &\exp \left\{ \frac{-L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z})}{\tan(\theta)} - [\tan(\theta)]^\nu \right\} d\theta,
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, y $\nu > 0$ y $\mathcal{L} > 0$ parámetros de forma.

Song et al. (2015) presentaron experimentos que mostraron que la WT es más flexible que la \mathcal{K} y que la Kummer- \mathcal{U} para modelar imágenes PolSAR *multi-look*, especialmente los extremadamente heterogéneos (como regiones urbanas).

2.4.3.10. Distribución \mathcal{K} generalizada

Bian y Mercer (2014) usaron la distribución gama con expansión Laguerre, ΓL , para la textura presentada en la Sección 2.4.2.10 con PDF (2.44) y, para $\mu = 1$ la combinaron con la de $\mathbf{Y}^{(L)}$ dada en la ecuación (2.27), derivando la función de densidad para $\mathbf{Z}^{(L)} \sim GK_p^{(L)}(\boldsymbol{\Sigma}, \alpha, L)$

$$\begin{aligned}
 f_{\mathbf{Z}^{(L)}}(\mathbf{z}; \boldsymbol{\Sigma}, \alpha, L) &= \frac{L^{Lp} |\mathbf{z}|^{L-p} \alpha^\alpha}{\Gamma_p(L) |\boldsymbol{\Sigma}|^L \Gamma(\alpha)} \times \sum_{u=0}^{\infty} \xi_u \frac{\Gamma(\alpha) u!}{\Gamma(u + \alpha)} \sum_{k=0}^u (-1)^k \\
 &\frac{2}{k!} \frac{(u + \alpha - 1)!}{(u - k)! (\alpha - 1 + k)!} \alpha^k \left(\frac{L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z})}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha+k-pL}{2}} \\
 &K_{\alpha+k-pL} \left(2 \sqrt{\alpha L \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{z})} \right),
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

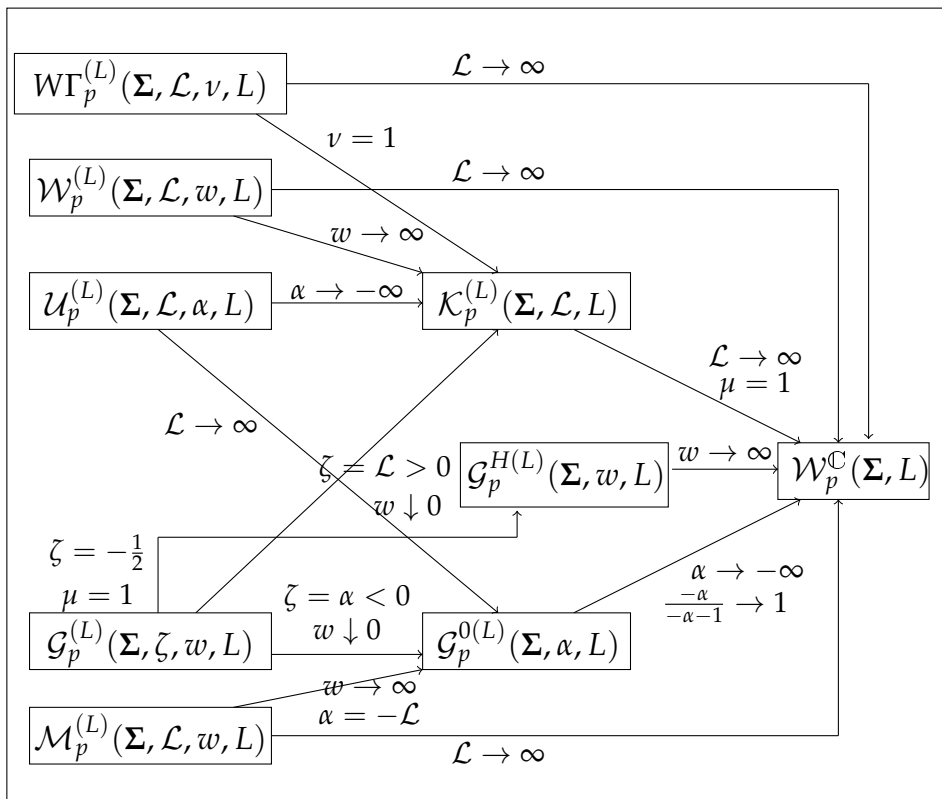
con los parámetros $\boldsymbol{\Sigma}$ y L definidos como antes, y $\alpha > 0$.

Esta distribución es una combinación pesada de una serie de distribuciones \mathcal{K} basa-

da en una expansión polinomial de Laguerre, que brinda una mejor aproximación que la \mathcal{K} cuando hay en la escena blancos puntuales fuertes (ver Deng et al. 2017).

2.4.3.11. Relación entre modelos polarimétricos

El siguiente diagrama ilustra la relación entre modelos polarimétricos. Como en el caso del *backscatter*, el diagrama ha sido extraído en su mayoría de Nascimento (2012), incorporando la distribución Wishart gama generalizada, $W\Gamma_p^{(L)}(\Sigma, \mathcal{L}, \nu, L)$.



2.5. Modelos para datos PolSAR bivariados

Lee y Pottier (2009) indicaron que las características estadísticas de los datos PolSAR no se limitan a las intensidades y amplitudes, presentadas en la Sección

2.3, sino que además es muy importante analizar otras, como por ejemplo diferencia de fases y coherencia entre canales o entre polarizaciones. En esta sección consideramos tener el caso de medios recíprocos, por lo cual las componentes S_{hv} y S_{vh} de la matriz \mathbf{S} coinciden, entonces se tiene el vector de dispersión

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} S_{hh} & S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}^T, \quad (2.58)$$

a partir del cual se obtienen los datos de las interacciones de los procesos de interferencia coherente de los tres canales de polarización correlacionados. Por lo tanto el *speckle* no sólo aparece en las intensidades sino también en el producto cruzado complejo de los tres canales.

Bajo el supuesto de gaussianidad hemos trabajado con la distribución Wishart compleja para la matriz de covarianza polarimétrica (ver Secciones 2.4.1.2 y 2.4.3.1). En esta sección presentamos los resultados de Lee et al. (1994a) quienes, a partir de la distribución Wishart compleja, derivaron las funciones de densidad

1. para la diferencia entre fases *multi-look*,
2. para la magnitud del producto,
3. conjunta para dos intensidades, y
4. para las razones entre intensidades y entre amplitudes.

Para facilitar la notación, Lee y Pottier (2009) trabajaron a partir de la distribución de la matriz $\mathbf{A} = L\mathbf{C}$, con la matriz \mathbf{C} presentada en (2.11). La matriz \mathbf{A} tiene distribución Wishart compleja con PDF

$$f_{\mathbf{A}^{(L)}}(\mathbf{a}; \mathbf{\Sigma}, L) = \frac{|\mathbf{a}|^{L-p}}{|\mathbf{\Sigma}|^L \Gamma_p(L)} \exp\left(-\text{tr}\left(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{a}\right)\right), \quad (2.59)$$

con soporte dado por el cono de matrices Hermitianas definidas positivas y parámetros $\mathbf{\Sigma}$ y L .

Las variables aleatorias de esta distribución, destacaron Lee y Pottier (2009), son los términos diagonales de \mathbf{A} y las partes reales e imaginarias de los términos por encima de la diagonal (considerando las propiedades de simetría de las matrices hermitianas). De este modo el número total de variables independientes es p^2 .

Así, en una imagen *full-polarimetric* asumiendo medio recíproco ($p = 3$) se tienen para cada pixel 9 variables aleatorias independientes. De esta manera, la diferencia de espacio (físico, si se trata de almacenar, o de memoria, si se trata de procesar) entre una imagen monopolarizada y una *full polarimetric* es de 1 : 9.

Entre el formato monopolarizado y el *full polarimetric* hay una gran cantidad de modos de almacenamiento intermedios, cuyas características es interesante analizar. Además cuando se tienen datos PolSAR incompletos o para ciertos estudios teóricos es necesario contar con distribuciones que sólo consideren algunas de las componentes de la matriz \mathbf{S} , dada en (2.3). Las PDFs presentadas son de utilidad para derivar, por ejemplo, medidas de distancia por máxima verosimilitud para clasificación.

Por otra parte, como varios estadísticos (como media y desviación estándar) y las PDFs que presentamos dependen del coeficiente de correlación complejo, comenzamos mostrando sus características.

2.5.1. Coeficiente de correlación complejo

El coeficiente de correlación complejo es el parámetro más importante para describir funciones de densidad bivariadas (ver Lee et al. 1994a). Teóricamente las componentes “co-pol” (S_{hh} y S_{vv}) tienen alta correlación, mientras las de “cross-pol” (por ejemplo S_{hv} y S_{vh}) tienen correlación nula.

El coeficiente de correlación complejo se define como

$$\rho_C = \frac{E [S_i S_j^*]}{\sqrt{E [|S_i|^2] E [|S_j|^2]}} = |\rho_C| \exp (j \theta), \quad (2.60)$$

donde el subíndice C indica que el coeficiente es “complejo”, S_i y S_j representan cualquiera de las componentes de la matriz \mathbf{S} , θ el ángulo de incidencia, $|\rho_C|$ la denominada “coherencia polarimétrica”.

La coherencia es una importante fuente de información de datos PolSAR porque, al estar influenciada por características como estructuras del blanco y orientación de la dirección de iluminación, revela propiedades físicas de los elementos de la escena (ver por ejemplo Chen 2018).

Teóricamente la coherencia puede estimarse usando dos intensidades *multi-look* C_{ii} y C_{jj} de la matriz \mathbf{C} dada en (2.11). El coeficiente de correlación entre dos intensidades *multi-look* es

$$\rho_I^{(L)} = \frac{E [(C_{ii} - \bar{C}_{ii}) (C_{jj} - \bar{C}_{jj})]}{\sqrt{E [(C_{ii} - \bar{C}_{ii})^2] E [(C_{jj} - \bar{C}_{jj})^2]}}, \quad (2.61)$$

donde el subíndice I indica “Intensidad”, y \bar{C}_{ii} y \bar{C}_{jj} se obtienen de las vecindades del pixel. Este es el clásico coeficiente de correlación lineal de Pearson.

Lee et al. (1994b) derivaron la relación entre el coeficiente de correlación complejo y el correspondiente a las intensidades *multi-look*, expresada como

$$\rho_I^{(L)} = |\rho_C|^2, \quad (2.62)$$

la cual por un lado muestra que $\rho_I^{(L)}$ es independiente del número de *looks*, y por otro brinda una manera de calcular la coherencia polarimétrica a partir del coeficiente de correlación entre intensidades.

Sin embargo, indicaron Lee y Pottier (2009), la estimación del coeficiente de correlación a partir de los datos no es un simple promedio, y la estimación de la coherencia usando (2.62) puede causar serios problemas, ya que los píxeles vecinos no son necesariamente homogéneos.

La coherencia varía con el tipo de coberturas presentes en la escena.

La Tabla 2.1 muestra los estimadores del coeficiente de correlación entre las in-

tensidades HH y VV, $\rho_I^{(L)}$, y del módulo del coeficiente de correlación complejo, ρ_C , obtenidos con los datos reales de las zonas de entrenamiento de la imagen AIRSAR que trabajamos en los Capítulos 3 y 4. El cálculo de $\widehat{\rho}_I^{(L)}$ se realiza con todos los datos de las muestras de entrenamiento, y sólo para la clase Océano la aproximación es muy buena, para el resto de las clases ambos estimadores están muy alejados entre sí. Esto evidencia la inconveniencia de usar la relación (2.62) para encontrar el estimador de la coherencia.

Tabla 2.1: Estimadores del coeficiente de correlación

Estimador	Océano	Urbano	Árboles	Pasto	Agua2
$\widehat{\rho}_I^{(L)}$	0.8580324	0.4862687	0.9214202	0.3925209	0.8394048
$ \widehat{\rho}_C ^2$	0.8315342	0.0559159	0.0162105	0.0035395	0.5592017

2.5.2. Distribuciones bivariadas

Las siguientes densidades bivariadas, cuya importancia ya hemos resaltado, derivan del número de *looks* y del coeficiente de correlación complejo dado en (2.60).

2.5.2.1. Densidad para la diferencia de fases

Deng et al. (2017) destacaron que el interés en derivar la distribución para la diferencia de fases proviene de que, junto a la del producto de dos amplitudes, refleja la correlación entre diferentes canales polarimétricos.

Lee et al. (1994a) derivaron la función de densidad para la diferencia entre las fases de cualquier par de componentes de polarización.

Para 1-look la diferencia de fases es

$$\psi_1 = \angle \left(S_i S_j^* \right),$$

y para L -looks es

$$\psi_L = \angle \left[\frac{1}{L} \sum_{k=1}^L S_i(k) S_j^*(k) \right].$$

Esta última ecuación brinda la forma correcta de determinar la diferencia de fases *multi-look* que no coincide con el promedio de las diferencias *1-look*. ψ_L es el argumento de un elemento de fuera de la diagonal de la matriz de covarianza \mathbf{C} .

Como las densidades sólo involucran dos polarizaciones, Lee et al. (1994a) usan la distribución (2.59), y para $p = 2$ se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \alpha \exp(j\psi) \\ \alpha \exp(-j\psi) & A_{22} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

y

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}} |\rho_C| \exp(j\theta) \\ \sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}} |\rho_C| \exp(-j\theta) & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

donde $\psi = \psi_L$, $\alpha \exp(j\psi) = A_{12R} + jA_{12I}$ y $\Sigma_{ii} = E(|S_i|^2)$.

Por conveniencia se normalizan las intensidades y el ángulo en términos de los elementos de la matriz $\mathbf{\Sigma}$ y se definen

$$B_1 = \frac{A_{11}}{\Sigma_{11}}, \quad B_2 = \frac{A_{22}}{\Sigma_{22}}, \quad \eta = \frac{\alpha}{\sqrt{\Sigma_{11}\Sigma_{22}}}. \quad (2.65)$$

Cambiando el vector $[A_{11}, A_{22}, A_{12R}, A_{12I}]$ por $[B_1, B_2, \eta, \psi]$, respectivamente, resulta

$$f_{B_1, B_2, \eta, \psi}(B_1, B_2, \eta, \psi; \theta, \rho_C, L) = \frac{(B_1 B_2 - \eta^2)^{L-2} \eta}{\pi (1 - |\rho_C|^2)^L \Gamma(L) \Gamma(L-1)} \exp\left(-\frac{B_1 + B_2 - 2\eta |\rho_C| \cos(\psi - \theta)}{(1 - |\rho_C|^2)}\right). \quad (2.66)$$

La función de densidad de la diferencia de fases *multi-look* ψ se derivó en Lee et al. (1994a) integrando (2.66) sobre B_1 , B_2 y η , con dominio de integración restringido a $B_1 B_2 - \eta^2 > 0$ (porque el coeficiente de correlación tiene magnitud menor o igual que 1), resultando

$$f_{\psi}^{(L)}(\psi; \beta, \rho_C, L) = \frac{\Gamma(L + 1/2) (1 - |\rho_C|^2)^L \beta}{2\sqrt{\pi} \Gamma(L) (1 - \beta^2)^{L+1/2}} + \frac{(1 - |\rho_C|^2)^L}{2\pi} {}_2F_1(L, 1; 1/2; \beta^2), \quad (2.67)$$

que tiene soporte $(-\pi; \pi)$, parámetros L , ρ_C y $\beta = |\rho_C| \cos(\psi - \theta)$, y con ${}_2F_1(\cdot)$ que representa la función hipergeométrica gaussiana.

Para valores pequeños de L , Lee et al. (1994a) reemplazaron la función hipergeométrica por funciones algebraicas y trigonométricas y obtuvieron las PDFs para la diferencia de fases para 1, 2, 3 y 4 *looks*.

Para $L = 1$, usando la identidad

$$F(1, 1; 1/2, z) = (1 - z)^{-1} \left(1 + \frac{\sqrt{z} \sin^{-1}(\sqrt{z})}{\sqrt{1 - z}} \right),$$

se deriva la PDF de la diferencia de fases

$$f_{\psi}^{(1)}(\psi; \beta, \rho_C) = \frac{(1 - |\rho_C|^2) \left[(1 - \beta^2)^{1/2} + \beta (\pi - \cos^{-1}(\beta)) \right]}{2\pi (1 - \beta^2)^{3/2}}. \quad (2.68)$$

Para $L = 2$ la PDF es

$$f_{\psi}^{(2)}(\psi; \beta, \rho_C) = \frac{3 (1 - |\rho_C|^2)^2 \beta}{8 (1 - \beta^2)} + \frac{(1 - |\rho_C|^2)^2}{4\pi (1 - \beta^2)} \left[2 + \beta^2 + \frac{3\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \sin^{-1}(\beta) \right]. \quad (2.69)$$

Para $L = 3$ la PDF es

$$f_{\psi}^{(3)}(\psi; \beta, \rho_C) = \frac{15 (1 - |\rho_C|^2)^3 \beta}{32 (1 - \beta^2)^{7/2}} + \frac{(1 - |\rho_C|^2)^3}{16\pi (1 - \beta^2)^3} \left[8 + 9\beta^2 - 2\beta^4 + \frac{15\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \sin^{-1}(\beta) \right]. \quad (2.70)$$

Para $L = 4$ la PDF es

$$f_{\psi}^{(4)}(\psi; \beta, \rho_C) = \frac{35 (1 - |\rho_C|^2)^4 \beta}{64 (1 - \beta^2)^{9/2}} + \frac{(1 - |\rho_C|^2)^4}{96\pi (1 - \beta^2)^4} \left[48 + 87\beta^2 - 38\beta^4 + 8\beta^6 + \frac{105\beta}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \sin^{-1}(\beta) \right]. \quad (2.71)$$

La función de densidad de ψ dada en (2.67) depende sólo de L y de ρ_C , alcanzando su pico cuando $\psi = \theta$. Lee et al. (1994a) presentaron gráficos de las PDFs para distintos valores de L , fijando $|\rho_C|$ y θ . Como es de esperar el aumento en el número de *looks* mejora la exactitud de la fase. Lee et al. (1994b) graficaron además la desviación estándar de la diferencia de fases ψ versus la coherencia $|\rho_C|$ para distintos valores de L , que muestra que el procesamiento *multi-look* reduce el error de la fase, especialmente para número de *looks* grande.

La Fig. 2.5 muestra las densidades de la diferencia de fases dada en la fórmula (2.67), que usa la HG para distintos valores de los parámetros, y usando funciones algebraicas con $L = 3$ (2.70) y $L = 4$ (2.71). Los valores de los parámetros $|\rho_C|$ y θ fueron estimados con datos reales de zonas de entrenamiento de la imagen AIRSAR que trabajamos en los Capítulos 3 y 4. Cuando θ es cercano a 0 la distribución es unimodal y es evidente que el procesamiento *multi-look* mejora la exactitud de la fase pues la distribución se vuelve más estrecha, siempre que se use la función hipergeométrica. Por otra parte el uso de funciones algebraicas en lugar de la

hipergeométrica no provoca gran diferencia, salvo en el caso de $|\rho_C| = 0,9; \theta = 0,1$ donde estas PDFs resultan ser las más exactas. Cuando $\theta = -2,8$, valor estimado con datos de zona Urbana, la distribución cambia notablemente, y no es tan claro el efecto del número de *looks*.

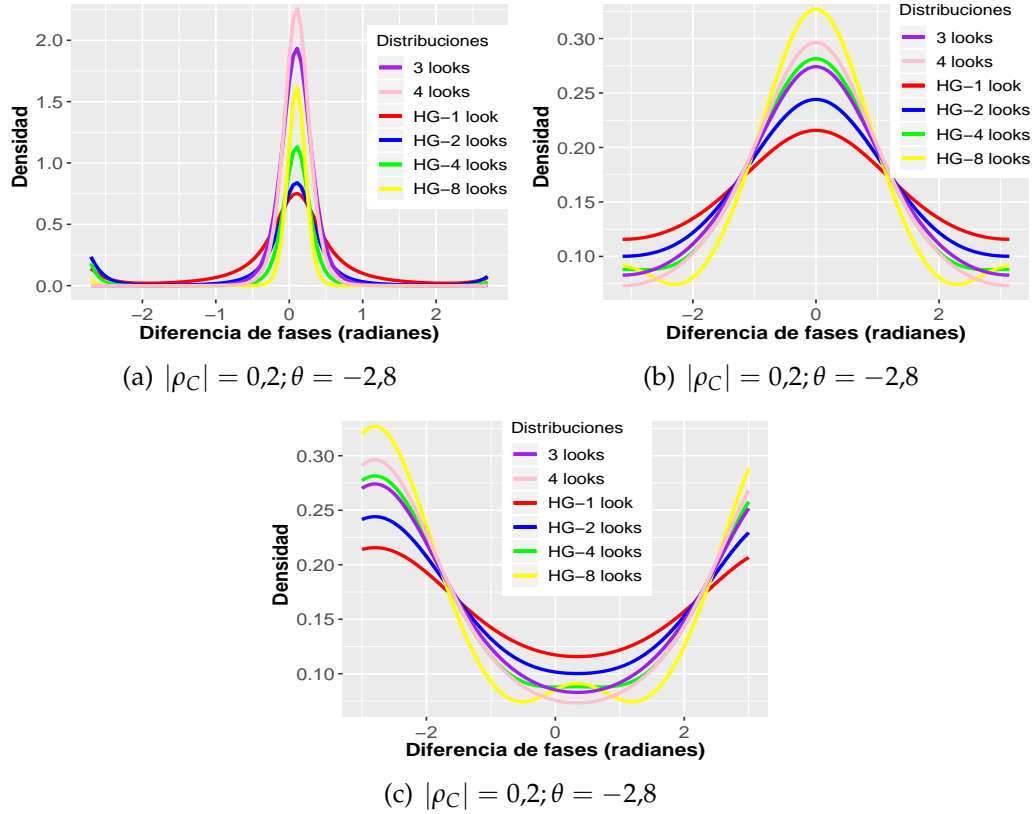


Figura 2.5: Ejemplos de distribuciones para la diferencia de fases.

HG: PDF dada en (2.67) para distintos valores de L , y (2.70) para $L = 3$ y (2.71) para $L = 4$.

2.5.2.2. Densidad para la magnitud del producto

La magnitud del producto entre dos componentes de la matriz \mathbf{S} , S_i y S_j , es una medida importante para datos SAR polarimétricos.

Si $g = |S_i S_j^*|$ es la magnitud del producto, al dividirlo por su amplitud esperada

$h = \sqrt{E[|S_i|^2] E[|S_j|^2]}$ se define

$$\xi = \frac{g}{h} = \frac{\left| \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L S_i(k) S_j^*(k) \right|}{\sqrt{E[|S_i|^2] E[|S_j|^2]}}, \quad (2.72)$$

como una normalización que permite estimar la coherencia y encontrar de manera más simple la función de densidad.

La función de densidad de la magnitud del producto normalizada ξ se derivó en Lee et al. (1994b) integrando (2.66) respecto a B_1 , B_2 y ψ , resultando

$$f_{\xi}(\xi; \rho_C, L) = \frac{4L^{L+1} \xi^L}{\Gamma(L) (1 - |\rho_C|^2)} I_0 \left(\frac{2|\rho_C| L \xi}{1 - |\rho_C|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2L \xi}{1 - |\rho_C|^2} \right), \quad (2.73)$$

donde $I_0(\cdot)$ y $K_L(\cdot)$ son las funciones de Bessel modificadas.

La función de densidad de la magnitud no normalizada del producto g se obtiene usando (2.72) en (2.73)

$$f_g(g; \rho_C, L) = \frac{4L^{L+1} g^L}{\Gamma(L) (1 - |\rho_C|^2) h^{L+1}} I_0 \left(\frac{2|\rho_C| L g/h}{1 - |\rho_C|^2} \right) K_{L-1} \left(\frac{2L g/h}{1 - |\rho_C|^2} \right). \quad (2.74)$$

Al igual que con la diferencia de fases, la función de densidad de ξ depende sólo de L y de ρ_C . Lee et al. (1994a) representaron la media de ξ versus $|\rho_C|$ como función del número de *looks*. Como es de esperar el aumento en el número de *looks* reduce la desviación estándar de la magnitud del producto. Adicionalmente Lee y Pottier (2009), en base a ese gráfico, destacaron que ξ es un estimador no sesgado de la coherencia cuando $L \rightarrow \infty$, aunque en general la sobreestima, especialmente cuando el módulo del coeficiente de correlación complejo es pequeño y el número de *looks* es bajo.

Lee et al. (1994a) graficaron también la desviación estándar de ξ versus $|\rho_C|$ para distintos valores de L , y observaron que al aumentar el número de *looks* se reduce

la desviación estándar, pero al aumentar el coeficiente de correlación complejo aumenta la desviación estándar.

La Fig. 2.6 muestra las densidades de la magnitud del producto normalizado dada en la fórmula (2.73) para dos valores del parámetro $|\rho_C|$ estimados con datos reales de zonas de entrenamiento de la intensidad HH de la imagen AIRSAR que trabajamos en los capítulos 3 y 4, y diferentes valores de L . Al igual que en la diferencia de fases, el procesamiento *multi-look* hace más exacta la magnitud del producto.

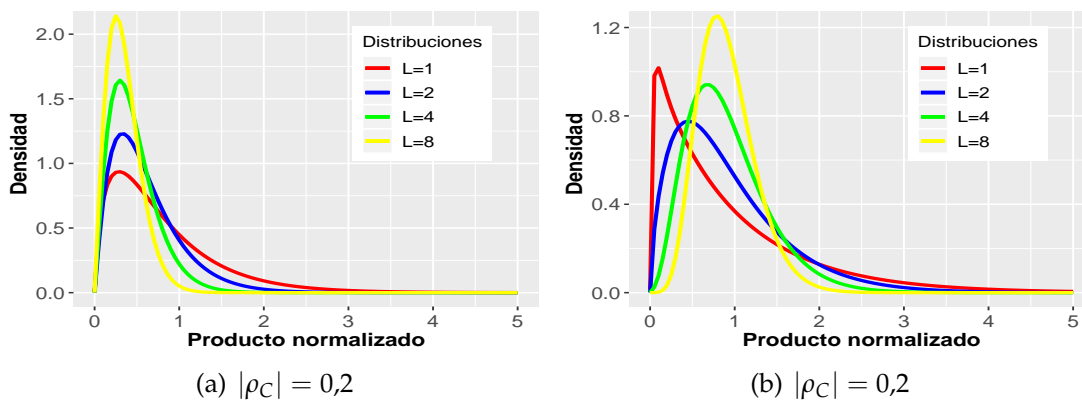


Figura 2.6: Ejemplos de distribuciones de magnitud del producto normalizado HH-VV, con PDF (2.74).

2.5.2.3. Densidad conjunta para dos intensidades

La densidad conjunta de dos retornos de canales polarimétricos correlacionados es importante en dos sentidos:

- cuando se tienen datos polarimétricos incompletos, y
- cuando se desea obtener distribuciones marginales.

A partir de (2.65) definimos las intensidades *multi-look* como

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |S_i(k)|^2 = \frac{B_1 \Sigma_{11}}{L}, \\ R_2 &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |S_k(k)|^2 = \frac{B_2 \Sigma_{22}}{L}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Lee et al. (1994a) derivaron primero la función de densidad conjunta de B_1 y B_2 integrando (2.66) respecto a η y ψ , que resulta ser

$$\begin{aligned} f_{B_1, B_2}(B_1, B_2; \rho_C, L) &= \frac{(B_1 B_2)^{(L-1)/2} \exp\left(-\frac{B_1 + B_2}{1 - |\rho_C|^2}\right)}{\Gamma(L) (1 - |\rho_C|^2) |\rho_C|^{L-1}} \\ &I_{L-1}\left(2\sqrt{B_1 B_2} \frac{|\rho_C|}{1 - |\rho_C|^2}\right). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Y, aplicando las igualdades de (2.75) en (2.76), derivaron la función de densidad conjunta de R_1 y R_2

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2}(R_1, R_2; \rho_C, L) &= \frac{(R_1 R_2)^{(L-1)/2} L^{L+1} \exp\left(-\frac{L(R_1/\Sigma_{11} + R_2/\Sigma_{22})}{1 - |\rho_C|^2}\right)}{(\Sigma_{11} \Sigma_{22})^{(L+1)/2} \Gamma(L) (1 - |\rho_C|^2) |\rho_C|^{L-1}} \\ &I_{L-1}\left(2L \sqrt{\frac{R_1 R_2}{\Sigma_{11} \Sigma_{22}}} \frac{|\rho_C|}{1 - |\rho_C|^2}\right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Muchos sistemas SAR tienen modos de polarización dual: ENVISAT ASAR Banda C, RADARSAT-2 Banda C, ALOS-PALSAR Banda L, SAOCOM 1 Banda L, TerraSAR-X modo SpotLight, entre otros, y para estos casos es útil contar con las PDFs aquí mostradas que puede usarse, por ejemplo, para clasificación por Máxima Verosimilitud.

Lee et al. (2001) destacaron que en ausencia de datos sobre la diferencia de fases, la clasificación debe basarse en dos intensidades. Además la distribución conjunta para las partes real e imaginaria por un lado, y para amplitud y fase por otro, del vector de dispersión (con distribución gaussiana circular) permite determinar la coherencia usando dos imágenes intensidad.

2.5.2.4. Densidad para las razones entre intensidades y entre amplitudes

Las razones entre intensidades y amplitudes de los canales “co-pol” (S_{hh} y S_{vv}) son importantes para discriminar regiones en imágenes polarimétricas.

Lee et al. (1994a) definieron la razón de intensidades normalizadas como

$$\mu = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\sum_{k=1}^L |S_i(k)|^2 / \Sigma_{11}}{\sum_{k=1}^L |S_j(k)|^2 / \Sigma_{22}} = \frac{\sum_{k=1}^L |S_i(k)|^2}{\tau \sum_{k=1}^L |S_j(k)|^2}, \quad (2.78)$$

con $\tau = \Sigma_{11} / \Sigma_{22}$. La función de densidad de la razón entre intensidades *multi-look* normalizada, μ , es

$$f_{\mu}^{(L)}(\mu; \rho_C, L) = \frac{\Gamma(2L) (1 - |\rho_C|^2)^L (1 + \mu) \mu^{L-1}}{\Gamma^2(L) \left[(1 + \mu)^2 - 4 |\rho_C|^2 \mu \right]^{(2L+1)/2}}. \quad (2.79)$$

Y, definiendo $\nu = \sqrt{\mu}$, Lee et al. (1994a) derivaron de (2.79) la función de densidad de la razón de amplitudes normalizada *multi-look*, ν , como

$$f_{\nu}^{(L)}(\nu; \rho_C, L) = \frac{2 \Gamma(2L) (1 - |\rho_C|^2)^L (1 + \nu^2) \nu^{2L-1}}{\Gamma^2(L) \left[(1 + \nu^2)^2 - 4 |\rho_C|^2 \nu^2 \right]^{(2L+1)/2}}. \quad (2.80)$$

Las PDFs de las razones entre intensidades y amplitudes entre S_1 y S_2 se derivan de las densidades de las razones normalizadas (2.79) y (2.80). A partir de (2.78)

definimos

$$w = \frac{\sum_{k=1}^L |S_1(k)|^2}{\sum_{k=1}^L |S_2(k)|^2} = \tau \mu, z = \sqrt{w} = \sqrt{\tau \nu}. \quad (2.81)$$

La función de densidad de la razón entre intensidades *multi-look*, w , es

$$f_w^{(L)}(w; \rho_C, \tau, L) = \frac{\tau^L \Gamma(2L) (1 - |\rho_C|^2)^L (\tau + w) w^{L-1}}{\Gamma^2(L) [(\tau + w)^2 - 4\tau |\rho_C|^2 w]^{(2L+1)/2}}. \quad (2.82)$$

Y la función de densidad de la razón entre amplitudes *multi-look*, z , es

$$f_z^{(L)}(z; \rho_C, \tau, L) = \frac{2 \tau^L \Gamma(2L) (\tau + z^2) z^{2L-1}}{\Gamma^2(L) [(\tau + z^2)^2 - 4\tau |\rho_C|^2 z^2]^{(2L+1)/2}}. \quad (2.83)$$

Lee et al. (1994a) sólo trabajaron con los estadísticos de la razón de amplitudes normalizadas graficando las PDFs para varios valores de L fijado el coeficiente de correlación complejo. Con eso mostraron que el aumento en el número de *looks* reduce tanto la desviación estándar de la razón de amplitudes como el del valor absoluto del coeficiente de correlación complejo. Además graficaron la desviación estándar de la razón de amplitudes normalizada versus la coherencia polarimétrica para varios valores de L , mostrando que la desviación disminuye al aumentar el número de *looks*.

La Fig. 2.7 muestra las densidades de la de razón de amplitudes normalizada HH-VV dada en la fórmula (2.83) para dos pares de valores de los parámetros $|\rho_C|$ y τ estimados con datos reales de zonas de entrenamiento de la imagen AIRSAR que trabajamos en los capítulos 3 y 4, y diferentes valores de L . El procesamiento *multi-look* hace que la distribución se vuelva más puntiaguda, mostrando menor variación de la razón de amplitud.

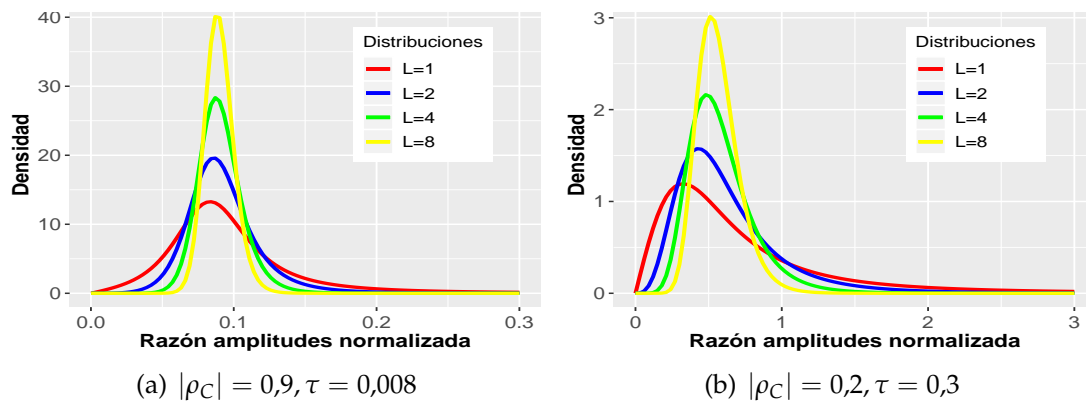


Figura 2.7: Ejemplos de distribuciones de razón de amplitudes normalizada HH-VV, con PDF (2.83).

Capítulo 3

Estudios realizados

Como mencionamos en el Capítulo 1, el CI debe cuantificarse antes de intentar realizar operaciones para aumentarlo. Sin embargo, no es fácilmente cuantificable; la misma imagen puede contener diferente cantidad de información dependiendo de la aplicación prevista, por ejemplo, visualización y clasificación.

Para cuantificar el CI, Narayanan et al. (2002) utilizaron la exactitud de la clasificación, y estudiaron el efecto de la degradación espacial sobre la clasificación de imágenes *LANDSAT Thematic Map* (LANDSAT-TM) y SIR-C. En su trabajo modelaron la degradación espacial aplicando filtros de media (LM) con diferentes tamaños de ventana, y evaluaron el CI con la exactitud de la clasificación realizada por MV. Usando como CI al número de píxeles correctamente clasificados en la imagen completa encontraron que un modelo exponencial negativo describe adecuadamente la relación entre el tamaño de ventana y la exactitud de la clasificación. Con ello mostraron que al aumentar la degradación disminuye el CI.

En Palacio et al. (2017) hemos seguido un esquema similar a Narayanan et al. (2002), utilizando la imagen *full polarimetric* de la Bahía de San Francisco del AIRSAR, que ha sido usada en muchos trabajos. En ese trabajo para modelar la degradación espacial reemplazamos el filtro LM por el *Model Based PolSAR* (MBPolSAR) (López-Martínez y Fàbregas 2008), y para la etapa de clasificación reemplazamos el clasificador MV por la Máquina de Soporte Vectorial, *Support*

Vector Machines (SVM); más adelante describimos brevemente MBPolSAR y SVM, y justificamos su utilización en este contexto. Como medida del CI, utilizamos además de la Exactitud de clasificación usada en Narayanan et al. (2002), los coeficientes Kappa y de Fiabilidad global derivados de la matriz de confusión, y evaluamos el método mediante inspección visual de mapas temáticos. Con esto último ampliamos, de cierto modo, el estudio de Narayanan et al. (2002) y concluimos que al aumentar la degradación aumenta el CI, que es una conclusión diferente a la de aquel trabajo.

Buscando analizar si el cambio en la conclusión respecto a la de Narayanan et al. (2002) se debe principalmente al filtro o al clasificador, nos propusimos evaluar el rendimiento de cuatro métodos resultantes de la combinación de los dos filtros con los dos clasificadores (que detallamos en la Sección 3.1). Adicionalmente, para verificar si el aumentar la degradación sigue beneficiando el CI, incrementamos el tamaño de ventana (que pasó de ser a lo sumo 13×13 a 19×19). En Palacio et al. (2019) presentamos los resultados usando esta metodología, que extiende la presentada en Palacio et al. (2017). Además usamos dos imágenes *full polarimetric*: la AIRSAR y una UAVSAR.

En esta tesis presentamos los resultados de Palacio et al. (2019).

A la imagen AIRSAR la clasificamos con una clase temática adicional, atendiendo a lo observado en Palacio et al. (2017), donde aparecían píxeles mal clasificados, fundamentalmente dentro la clases Océano, por lo que sugeríamos considerar una mayor cantidad de clases.

Además, como hemos mencionado, para verificar la validez de nuestras conclusiones, realizamos para ambas imágenes los ajustes de los datos de las muestras de entrenamiento a algunos de los modelos presentados en el Capítulo 2 lo cual, como mostraremos, justifica el uso del modelo Wishart.

El resto del capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 3.1 esquematizamos la metodología utilizada y describimos el filtro MBPolSAR y la clasificación por SVM, y en la 3.2 presentamos el esquema de validación que usamos para comparar los métodos contrastados.

La aplicación de la metodología propuesta se deja para el Capítulo 4 y las conclusiones para el 5.

3.1. Metodología

Evaluamos el desempeño de cuatro métodos resultantes de la combinación de los dos filtros con los dos clasificadores. La Tabla 3.1 muestra los métodos propuestos.

Tabla 3.1: Métodos a comparar.

Clasificador	Filtro	
	Media Local	<i>Model Based PolSAR</i>
Máxima Verosimilitud	Método 1 [†]	Método 2
<i>Support Vector Machine</i>	Método 3	Método 4 [‡]

[†]el mismo que Narayanan et al. (2002).

[‡]el mismo que Palacio et al. (2017).

Los principales objetivos con esta metodología se pueden resumir de la siguiente manera:

- I. comparar los cuatro métodos resultantes de la combinación de filtro y clasificador;
- II. comparar el rendimiento de los filtros (para cada clasificador);
- III. comparar el rendimiento de los clasificadores (para cada filtro);
- IV. evaluar el impacto de la degradación en cada método.

Para cada una de las imágenes, y cada métodos de la Tabla 3.1, usamos el siguiente esquema:

1. Aplicar del filtro (LM o MBPolSAR) con ventanas deslizantes;

2. Seleccionar como características para la clasificación los nueve canales resultantes del filtrado;
3. Predecir todos los píxeles de la imagen usando el clasificador (MV o SVM) y obtener el mapa temático.

El procedimiento se repite para cada tamaño de ventana. Los resultados se validan con el esquema dado en la Sección 3.2.

3.1.1. Filtros

Para los métodos 1 y 3, como en Narayanan et al. (2002), aplicamos primero un filtro Refinado de Lee (Lee et al. 1999) con ventanas de tamaño 3×3 y usamos la imagen resultante como entrada, *input*, para el filtro de media (Lee 1980). Para los métodos 2 y 4 usamos directamente la imagen como entrada para el filtro MBPolSAR.

Mientras que la reducción del *speckle* en imágenes SAR es algo relativamente resuelto (ver por ejemplo Argenti et al. 2013), el problema es más complicado para datos PolSAR, pues el *speckle* aparece tanto en la intensidad de cada canal polarimétrico como en los términos de fase (Ma et al. 2016). Además, dada la correlación generalmente presente entre los canales PolSAR, las extensiones inmediatas del modelo de un canal no es adecuada.

En base a las conclusiones de Foucher y López-Martínez (2014), hemos utilizado en estudios previos (Palacio et al. 2017, 2019) el filtro MBPolSAR (López-Martínez y Fàbregas 2003, 2008), porque considera toda la información provista por la matriz de covarianza, mejorando la estimación de las entradas individuales y la información polarimétrica.

Filtro MBPolSAR

Como hemos dicho, para blancos puntuales, el vector s caracteriza completamente las propiedades del blanco. En cambio, para blancos distribuidos s es aleatorio y

puede modelarse con la distribución gaussiana compleja multivariada con vector de medias nulo y parámetro

$$\mathbf{\Sigma} = E \{ \mathbf{s} \mathbf{s}^* \}, \quad (3.1)$$

que presentamos en (2.10).

Como ya dijimos en la Sección 2.1, la estimación de la matriz $\mathbf{\Sigma}$ que consiste en estimar cada uno de sus términos, se llama usualmente “filtrado de *speckle multi-look*”. El estimador MV de $\mathbf{\Sigma}$ es

$$\mathbf{C} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^*, \quad (3.2)$$

que ya presentamos en (2.11).

La matriz de covarianza estimada (o matriz de covarianza *L-looks* compleja) \mathbf{C} , es una variable aleatoria cuyo error respecto de $\mathbf{\Sigma}$ puede considerarse como componente de ruido. López-Martínez y Fàbregas (2003) han mostrado que, considerando que \mathbf{s} tiene distribución gaussiana compleja multivariada con vector de medias nulo, el *speckle* para datos PolSAR es una combinación de componentes de ruido multiplicativo y aditivo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Sigma} + \mathbf{N}_m + \mathbf{N}_a, \quad (3.3)$$

donde \mathbf{N}_m (con media cero) es el componente de ruido *speckle* multiplicativo para todos los elementos de la matriz de covarianza muestral, y \mathbf{N}_a (también con media cero) modela el componente de ruido *speckle* aditivo que sólo aparece en los elementos de fuera de la diagonal. Así, los términos de la diagonal de la matriz de covarianza muestral pueden caracterizarse con un modelo de ruido multiplicativo, mientras que los de fuera de la diagonal requieren un modelo que combine ruido aditivo y multiplicativo (López-Martínez y Fàbregas 2008; Ma et al. 2016). Y, como $E \{ \mathbf{C} \} = \mathbf{\Sigma}$, \mathbf{C} es un estimador no sesgado de $\mathbf{\Sigma}$ y el modelo multiplicativo-aditivo no involucra pérdida de información polarimétrica.

López-Martínez y Fàbregas (2008) indicaron que, como todos los elementos de \mathbf{C} se obtienen con dos componentes de la matriz de dispersión \mathbf{S} dada en (2.3), el modelo final para \mathbf{C} puede derivarse de la generalización del modelo de *speckle*

para el producto $S_i S_j^*$, con $\{i, j\} \in \{hh, hv, vh, vv\}$, cuya magnitud denominamos g en la Sección 2.5.2.2 (donde mostramos su PDF).

La naturaleza aleatoria del producto debida al *speckle* tiene un comportamiento estadístico, indicaron López-Martínez y Fàbregas (2003), determinado por el coeficiente de correlación complejo presentado en (2.60),

$$\rho_C = \frac{E [S_i S_j^*]}{\sqrt{E [|S_i|^2] E [|S_j|^2]}} = |\rho_C| \exp(j \theta), \quad (3.4)$$

donde el denominador $h = \sqrt{E [|S_i|^2] E [|S_j|^2]}$ (que también definimos en la Sección 2.5.2.2) es la “potencia promedio de los dos canales”, $|\rho_C|$ es la coherencia polarimétrica y θ es el ángulo de incidencia (también conocido como “diferencia de fase efectiva”).

Así, indicaron López-Martínez y Fàbregas (2003), los términos $S_i S_j^*$ pueden escribirse como

$$S_i S_j^* = |S_i S_j^*| \exp(j (\theta_i - \theta_j)) = g \exp(j \psi), \quad (3.5)$$

donde g es el de la Sección 2.5.2.2 y ψ representa la diferencia de fases, estudiada en 2.5.2.1.

La definición dada por la ecuación (3.5) implica que para encontrar la distribución del producto debemos contar con la PDF de la diferencia de fases, dada en (2.67), y con la de la magnitud del producto no normalizado, dada en (2.74).

El filtro MBPolSAR usa diferentes procesos para filtrar los elementos diagonales y los de fuera de diagonal de \mathbf{C} . Los diagonales se filtran usando el proceso *multi-look*, y los elementos fuera de diagonal se procesan según $\hat{\rho}_C$, que se calcula como en López-Martínez y Pottier (2007), para reducir el sesgo de la coherencia.

Como dijimos, para los métodos 2 y 4 de la Tabla 3.1 aplicamos este filtro con ventanas cuadradas de tamaños 3, 5, 7, ..., 19. En cada situación, obtenemos los nueve canales que se utilizan como entrada para el clasificador.

3.1.2. Clasificadores

La clasificación consiste en la asignación de un objeto a uno de los grupos o clases predefinidos. La clasificación de imágenes desempeña un papel importante en el procesamiento de imágenes pues una imagen clasificada brinda, dependiendo de la aplicación, más información sobre una escena que los valores digitales aislados. Podemos pensar en una imagen clasificada como si fuera un mapa, o algo próximo de un mapa.

Muchos estudios han mostrado mayor exactitud de la clasificación usando datos PolSAR que usando datos SAR de polarización simple, pero la elección del clasificador es clave para que ésta sea eficaz.

Los clasificadores que utilizamos en esta tesis son del tipo supervisado, lo cual implica que contamos con información de cada uno de los grupos (clases, coberturas de interés) y el usuario supervisa el proceso de clasificación seleccionando muestras representativas obtenidas de cada cobertura denominadas “muestras de entrenamiento”, ME (*training samples*). En los campos de la ingeniería y de la informática, la clasificación supervisada suele llamarse “reconocimiento de patrones”.

Para los métodos 1 y 2 de la Tabla 3.1 utilizamos, como en Narayanan et al. (2002), el Clasificador MV (Strahler 1980). El MV es la Regla de Bayes con probabilidades *a priori* iguales para cada clase. Este método consiste en asignar cada pixel a la clase a la cual tiene mayor verosimilitud de pertenecer. Numerosos trabajos presentan detalles de este clasificador que ha sido extensamente utilizado en teledetección (ver por ejemplo Lee et al. 2001; Maselli et al. 1992).

Para los métodos 3 y 4 de la Tabla 3.1 usamos las SVM que describimos con más detalle a continuación.

Máquinas de Soporte Vectorial (SVM)

Las SVM fueron propuestas como un sistema de aprendizaje automático basado en

la teoría de aprendizaje estadístico, *statistical learning* (Vapnik 1995) y han captado la atención de los investigadores debido a su exitoso desempeño en diferentes áreas, como reconocimiento facial, categorización textual, recuperación de imágenes y reconocimiento de escritura manuscrita.

Entre sus características sobresalen la excelente capacidad de generalización (aún en espacios de alta dimensión y utilizando conjuntos de entrenamiento pequeños), la eficiencia para manejar casos no separables linealmente (Burges 1998), la posibilidad de trabajar con vectores de características con componentes numerosos y heterogéneos (Tison et al. 2007), y la de ser utilizado sin especificar la distribución en probabilidades de los datos.

La Fig. 3.1 muestra los diagramas de dispersión de los datos de las ME de la imagen AIRSAR original (izquierda, mostrada en la Fig. 4.1), de la imagen filtrada con LM (medio) y de la imagen filtrada con MBPolSAR (derecha). Se eligió representar los componentes intensidad HH (abscisas) e intensidad VV (ordenadas) en escala log-log por la magnitud de los datos. La intención de este diagrama es evidenciar el problema de no linealidad de las fronteras de separación entre datos de diferentes clases, que es muy claro, por lo que SVM es una herramienta apropiada para la clasificación de esta imagen.

Las SVM se han empleado en muchos problemas, y su uso se está extendiendo en el campo de la teledetección, llevando a mejores resultados que los clasificadores tradicionales como MV (Aghababae et al. 2013; ?).

Lardeux et al. (2009) presentaron una breve descripción de las SVM concluyendo que se comportan mucho mejor que MV bajo el modelo de Wishart, cuando se aplica a un conjunto optimizado de indicadores polarimétricos. Por ello, si la distribución Wishart es un modelo apropiado a nuestros datos, la clasificación por SVM sería preferible a la MV y eso justificaría nuestros mejores resultados.

Las SVM pueden usarse para realizar clasificación supervisada empleando un algoritmo de optimización que determine la frontera óptima entre dos clases, aunque puede generalizarse a una cantidad mayor de clases.

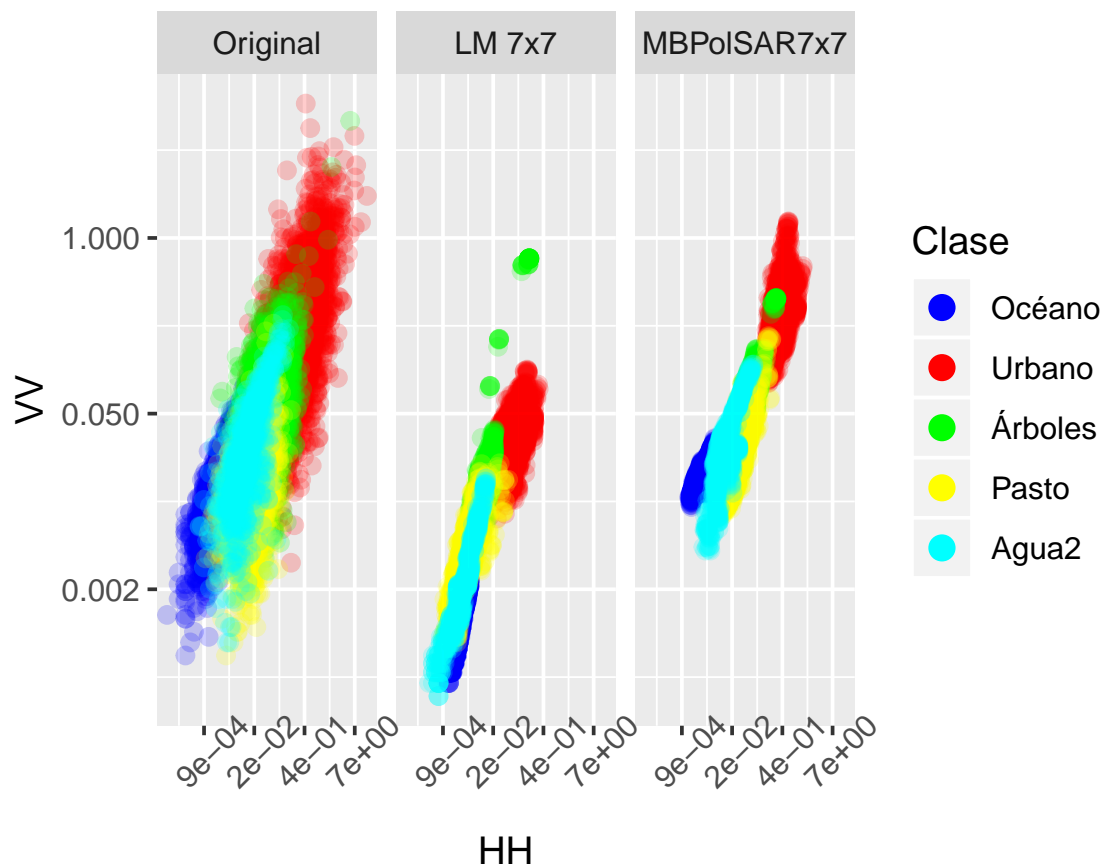


Figura 3.1: Observaciones de las ME de la imagen AIRSAR con los datos originales, filtrados con LM y con MBPolSAR.

El caso más simple es cuando las clases son linealmente separables, donde existe una distancia positiva entre ambos grupos y es posible elegir un hiperplano de separación maximizando la distancia de éste a cada grupo. Para decidir a qué grupo pertenece una nueva observación, se considera el signo de la función que define al hiperplano de separación.

Cuando las clases no son linealmente separables, que es la situación más realista y compleja, los grupos se superponen en el espacio de parámetros haciendo imposible la separación por medio de un hiperplano. Una alternativa para separar las observaciones sería cambiar la frontera lineal por una no lineal. SVM lo hace de una manera indirecta que resulta computacionalmente eficiente, aplicando una

transformación no lineal del espacio de origen en otro de mayor dimensión en el cual los dos grupos quedan separados linealmente. A partir de esa transformación, es posible proceder como en el primer caso. La transformación inversa deforma el hiperplano en una frontera no lineal que separa los dos grupos en el espacio original.

Sin embargo esto presenta un grave problema: se produce un sobre-ajuste análogo al que ocurre en regresión si se usa para interpolar un polinomio que ajuste todos los puntos. De hecho, la transformación que separa perfectamente ambos grupos, no sólo contiene la información que distingue los grupos sino también todo el ruido, como si fuese información relevante.

Una manera de lograr que la frontera separe usando sólo la información relevante e ignore el ruido es tolerar que algunos puntos queden mal asignados a un grupo. Para ello, se introducen las llamadas “variables de holgura”, que cuantifican la distancia entre un punto que se encuentra del lado (grupo) equivocado y la frontera de separación. De este modo, ambas cuestiones se formulan como problemas de programación cuadrática y sólo se necesita conocer el producto interno de los puntos transformados que, como función de los datos originales, se denomina “función núcleo, *kernel*” (ver por ejemplo Alpaydin 2010).

Supongamos que se tienen dos clases de interés, C_1 y C_2 . Dado un conjunto de características de entrenamiento de tamaño n ,

$$\mathcal{T} = ((\mathbf{y}_1, r_1), (\mathbf{y}_2, r_2), \dots, (\mathbf{y}_n, r_n)),$$

con $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ip})^T \in \mathbb{R}^p$, p el tamaño del espacio de características, y con $r_i = +1$ si $\mathbf{y}_i \in C_1$ y $r_i = -1$ de otro modo. La clasificación SVM puede verse como la búsqueda del hiperplano óptimo para la separación de las dos clases, que puede definirse como

$$g(\mathbf{y}_i) = \mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0, \quad (3.6)$$

con \mathbf{w} , el “vector soporte” perpendicular al hiperplano, y w_0 un escalar. Más

específicamente, buscamos encontrar \mathbf{w} y w_0 tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0 &\geq +1, & \text{para } r_i = +1, \\ \mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0 &\leq -1, & \text{para } r_i = -1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

que puede reescribirse como

$$r_i(\mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0) \geq +1.$$

Notemos que no sólo requerimos que $r_i(\mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0) \geq 0$, lo que indica que la observación esté del lado correcto del hiperplano, sino que además se requiere que esté a determinada distancia.

Aquí es donde aparece el concepto de “margen” (M), entendido como la distancia del hiperplano a los puntos más cercanos de cada lado. Y, en estos términos, podemos definir el “hiperplano óptimo” como aquel (entre los infinitos que separan a los dos grupos) que maximiza el margen.

Los valores de \mathbf{w} y w_0 se eligen con la idea de maximizar M ,

$$\max_{\mathbf{w}, w_0} M, \text{ sujeto a } \|\mathbf{w}\| = 1 \text{ y } r_i(\mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0) \leq M, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Al buscar maximizar M , como hay infinitas soluciones a las que se llega escalando \mathbf{w} , para tener unicidad fijamos $M \|\mathbf{w}\| = 1$. Y a partir de esa igualdad es claro que para maximizar M debe minimizarse $\|\mathbf{w}\|$ (ver Alpaydin 2010). De este modo reemplazamos (3.8) por

$$\min_{\mathbf{w}, w_0} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2, \text{ sujeto a } r_i(\mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0) \leq 1, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

La restricción asegura que el clasificador asigne cada punto correctamente, lo cual es posible pues asumimos que los datos son linealmente separables. Este es un

problema de optimización cuadrática que puede resolverse directamente para encontrar \mathbf{w} y w_0 , utilizando multiplicadores de Lagrange. Entonces, en ambos lados del hiperplano óptimo, habrá puntos que están a $1/\|\mathbf{w}\|$ de distancia del hiperplano, y el margen total será $M = 2/\|\mathbf{w}\|$.

La clase a la cual una observación pertenece está determinada por (3.6): si el resultado es positivo la observación se asigna a C_1 , si no a C_2 (ver más detalles en Alpaydin 2010).

Los denominados “vectores de soporte” son los \mathbf{y}_i que verifican

$$r_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0 \right) = 1, \quad (3.10)$$

que están sobre el margen, y a partir de ahí $w_0 = r_i - \mathbf{w}^T \mathbf{y}_i$.

Por estabilidad numérica Alpaydin (2010) sugirió realizar el procedimiento anterior para todos los vectores de soporte y tomar un promedio. El discriminante así obtenido es llamado “máquina de soporte vectorial”.

Es interesante destacar que los vectores que no son vectores de soporte no tienen información, y por lo tanto no influyen en la clasificación.

Por otra parte, la presencia de *speckle* en imágenes SAR hace que la clasificación sea un problema no separable linealmente (ver por ejemplo Aghababae et al. 2013; Negri et al. 2018), y la Fig. 3.1, que evidencia este hecho para la imagen AIRSAR que trabajamos en esta tesis. En esta situación los grupos no son separables linealmente a menos que se introduzcan las variables de holgura que permiten a algunos puntos estar del lado equivocado. Para cada punto, la variable de holgura $\zeta_i \geq 0$ mide la distancia del punto al margen de su grupo: si $\zeta_i = 0$, el punto está en el lado correcto; si $0 < \zeta_i < 1$, está del lado correcto pero sobre el margen; y si $\zeta_i \geq 1$, el punto está mal clasificado.

Y, usando ζ_i , se reemplaza (3.9) por

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + c \sum_i \zeta_i, \text{ sujeto a } r_i \left(\mathbf{w}^T \mathbf{y}_i + w_0 \right) \geq 1 - \zeta_i, \quad (3.11)$$

donde $c > 0$ se llama “valor de penalización” establece la importancia relativa de maximizar el margen minimizando simultáneamente la totalidad de las holguras. Cuando c es pequeño el margen es ancho, y a medida que aumenta c disminuye el margen y el procedimiento es más rígido. Como en el caso más simple, para encontrar \mathbf{w} y w_0 se utilizan multiplicadores de Lagrange.

En este caso (no separable linealmente) SVM lleva los datos a un espacio de dimensión m , con $m > p$, usando una transformación $\Phi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ para volver lineal al problema. No es necesario contar con la forma analítica de Φ , sólo se requiere conocer su producto escalar $K(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \Phi(\mathbf{y}_i)^T \bullet \Phi(\mathbf{y}_j)$, que es lo que se denomina “función *kernel*”, K . La función *kernel* es la proyección no lineal de los datos en el espacio original (dimensión p). Entonces, la función de decisión (3.6) puede expresarse en términos de K . Hay varias funciones *kernel*; en este trabajo usamos la gaussiana de base radial, *Radial Basis Functions* (RBF), que es la que usa por defecto el paquete `e1071` de la plataforma R (R Core Team 2018).

La función RBF tiene dos parámetros: c (valor de penalización), y γ (relacionado a la curvatura de las bandas de decisión). Para seleccionar los valores de esos parámetros algunos autores consideran un espacio de parámetros fijo y buscan la configuración óptima (c, γ) que produce los resultados más precisos. Por simplicidad y reproductibilidad nosotros usamos $c = 1$ y $\gamma = p^{-1}$, que son los que tiene por defecto la librería `libsvm` del paquete `e1071` de la plataforma R (R Core Team 2018).

Las SVM fueron diseñadas originalmente como clasificadores binarios. Para poder usarlas en problemas de clasificación con más de dos clases (multiclase) se han planteado estrategias para combinar las SVM binarias. Entre las más difundidas se puede mencionar uno-contra-todos y uno-contra-uno. Aquí usamos la última, que es la que tiene por defecto la librería `libsvm`.

3.2. Validación

Para evaluar la clasificación obtenida con los métodos de la Tabla 3.1, seleccionamos muestras de prueba, *testing samples*, diferentes de las *training samples*, ME. Sólo almacenamos las posiciones de los píxeles de las muestras de prueba y, para evaluar cuantitativamente el desempeño de los métodos propuestos, construimos una Matriz de Confusión para cada situación (tamaños de ventana 3, 5, 7, . . . , 19) y cada método, usando las mismas posiciones. A partir de estas matrices calculamos las medidas de precisión del mapa temático:

- (a) Coeficiente de fiabilidad global (F), que es la proporción de píxeles correctamente clasificados;
- (b) Coeficiente Kappa (κ), que es la proporción de píxeles correctamente clasificados considerando todas las entradas de la matriz;
- (c) Coeficiente de exactitud de la clasificación (CA), definido como la proporción de píxeles correctamente clasificados para cada clase.

También evaluamos cualitativamente los mapas temáticos mediante inspección visual.

Cabe señalar que hemos realizado todos los estudios con una plataforma informática que resulta de una combinación de código abierto y *software* con licencia. El *software* de código abierto PolSARPro v5.1 (Pottier y Ferro-Famil 2012) se utilizó para la etapa de pre-procesamiento. ENVI versión 4.8 (Harris Geospatial Solutions 2018) fue la plataforma elegida para extraer y validar las regiones de interés, *Region of Interest* (ROI). Los restantes análisis se implementaron en la plataforma R versión 3.5.0 (R Core Team 2018).

Capítulo 4

Resultados

Para probar la metodología presentada en la Tabla 3.1 usamos dos imágenes *full polarimetric*: una subimagen de una AIRSAR de San Francisco extensamente usada, y una subimagen del UAVSAR que contiene a la ciudad de Bell Ville, en la provincia Córdoba.

4.1. Imagen de San Francisco

El AIRSAR fue una misión aerotransportada con capacidad de captar imágenes PolSAR, diseñada y construida por el JPL. AIRSAR fue usada como banco de pruebas de tecnología de radar de la NASA para demostrar nueva tecnología y adquirir datos para el desarrollo de técnicas de procesamiento de imágenes de radar y aplicaciones. Como parte de *Earth Science Enterprise* de la NASA, el AIRSAR voló por primera vez en 1988 y realizó su última misión en 2004.

El instrumento AIRSAR montado a un avión modificado de la NASA DC-8 voló durante la recolección de datos a 8 km sobre la altura promedio del terreno a una velocidad de 215 m s^{-1} . El sensor AIRSAR operó en modo polarimétrico, simultáneamente en bandas P-(0.45 GHz), L-(1.26 GHz) y C-(5.31 GHz).

La Fig. 4.1 muestra una región de 550×645 píxeles obtenida de una imagen real de 900×1024 píxeles *full polarimetric* de San Francisco registrada en la banda L, con 10 m de resolución espacial, adquirida con cuatro *looks*. Esta imagen PolSAR ha sido extensamente utilizada y presenta regiones bien definidas con distintos grados de textura que posibilitan la prueba de los métodos estudiados en varias situaciones.

En esta tesis identificamos 5 coberturas diferentes: Océano, Urbano, Árboles, Pasto y Agua2 (áreas dentro del mar con agua en movimiento). Como mencionamos en el Capítulo 3, a partir de los resultados presentados en Palacio et al. (2017) que, con las cuatro primeras clases mal clasificaba píxeles de Océano, agregamos la clase Agua2 dentro del Océano.

Para realizar la clasificación seleccionamos muestras de entrenamiento de las cinco clases que se visualizan en la Fig. 4.1 en Azul, Rojo, Verde, Amarillo y Cyan, respectivamente.

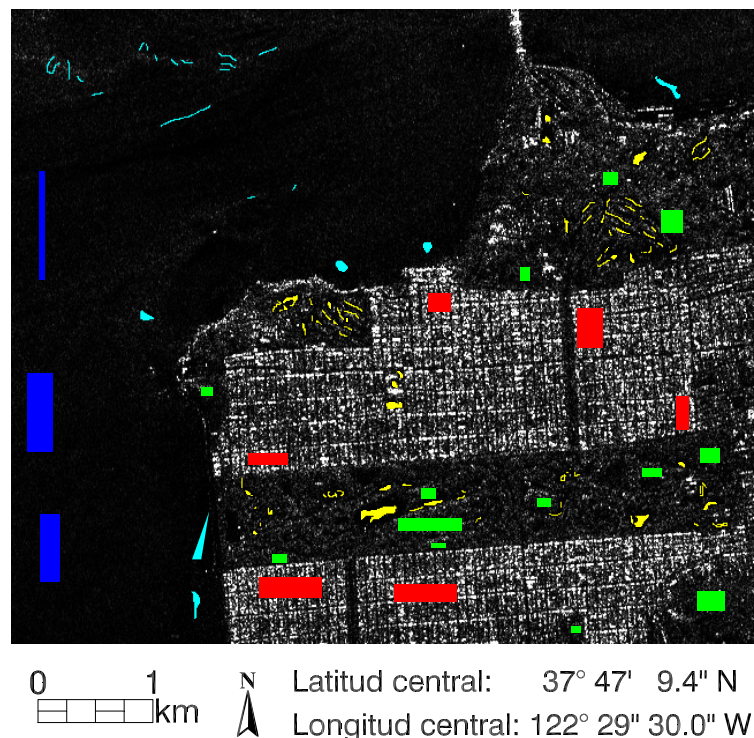


Figura 4.1: Imagen intensidad HH AIRSAR y muestras de entrenamiento.

4.1.1. Verificación del ajuste

Visualizaremos los histogramas de los datos reales junto con las curvas de densidad, a fin de analizar la bondad del ajuste que permita confiar en nuestras conclusiones.

4.1.1.1. Distribuciones univariadas

En primer lugar realizamos el ajuste de las intensidades *multilook*. La distribución Wishart compleja escalonada se reduce, cuando se tiene una sola polarización, a la gama (Hagedorn et al. 2006) con densidad dada por

$$f_{Z_i}(z_i; L, \sigma_i^2) = \frac{L^L z_i^{L-1}}{\sigma_i^{2L} \Gamma(L)} \exp\left(\frac{-Lz_i}{\sigma_i^2}\right), \quad (4.1)$$

con soporte \mathbb{R}_+ , $i \in \{hh, hv, vh, vv\}$, σ_i^2 la entrada (i, i) de Σ y z_i la entrada (i, i) de la matriz \mathbf{Z} . Cuando L es entero la distribución coincide con la dada en (2.16), que ahí presentamos como Chi-cuadrado con $2L$ grados de libertad (por la relación entre ambas distribuciones).

Respecto al número de *looks* L , Lee y Pottier (2009) indicaron que la razón de la desviación estándar a la media, Coeficiente de Variación (CV), que es un buen indicador del nivel de ruido *speckle*, está directamente relacionada a este número. Debido a la correlación espacial esta razón es mayor a la correspondiente al número de muestras independientes incluidas en el promedio. Así definido el número equivalente de *looks*, *Equivalent number of looks* (ENL), es usualmente menor al valor nominal con el que se obtiene la imagen.

Si definimos el número equivalente de *looks* de la intensidad como

$$ENL(I) = \frac{1}{CV^2}, \quad (4.2)$$

resulta que por ejemplo para la imagen de San Francisco que tiene 4 *looks* nominal resulta $ENL(I_{HH}) = 1,8$, $ENL(I_{HV}) = 2,9$ y $ENL(I_{VV}) = 2,4$, con estos valores calculados a partir de los datos de la ME de la clase Océano.

En base a estos datos del número equivalente de *looks* se hicieron los ajustes de los datos Intensidad de las muestras de entrenamiento a las distribución Wishart $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}, 2)$, $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}, 3)$ y $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}, 4)$. Las figuras 4.2, 4.3 y 4.4 presentan estos ajustes para los datos intensidad HH, HV y VV, respectivamente.

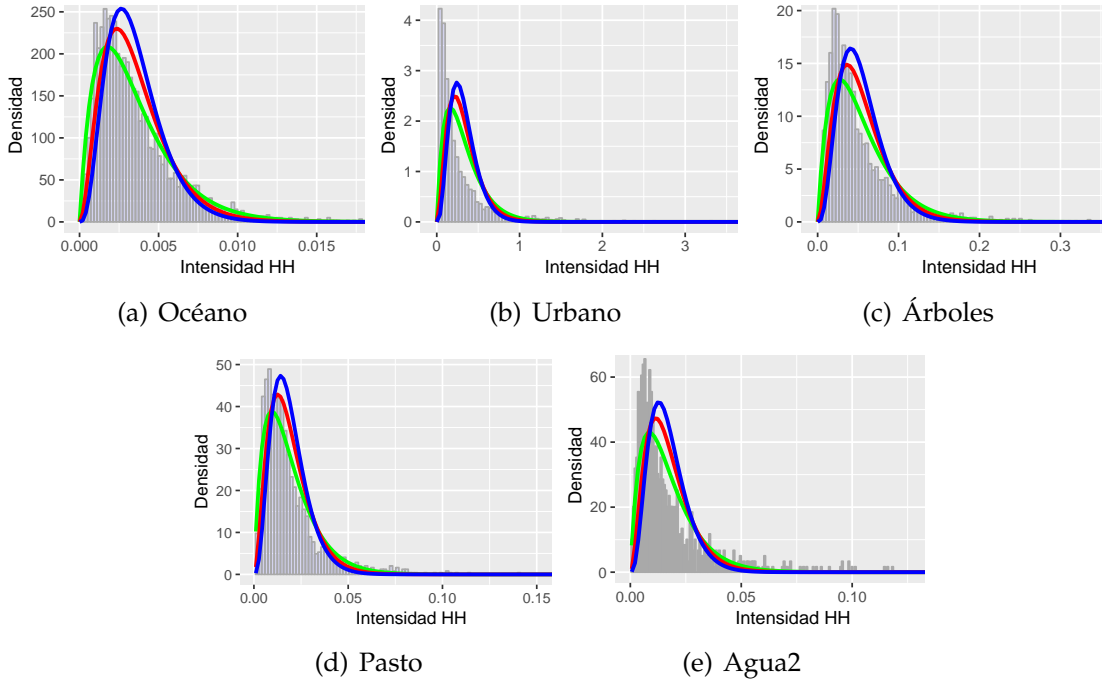


Figura 4.2: Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 2 (verde), 3 (roja) y 4 (azul) *looks* para las ME de la imagen AIRSAR.

Los ajustes son buenos para Océano HV y VV, Árboles VV, Pasto HH y VV, y Agua2 HV, y son malos para Urbano HH, Árboles HV y Pasto HV. Los demás son aceptables. En los casos en que presentan buenos ajustes, son mejores a medida que aumenta la degradación, y el mejor con 4 *looks*.

4.1.1.2. Distribuciones bivariadas

En esta sección verificamos el ajuste de los datos a las PDFs de

- la diferencia de fases,

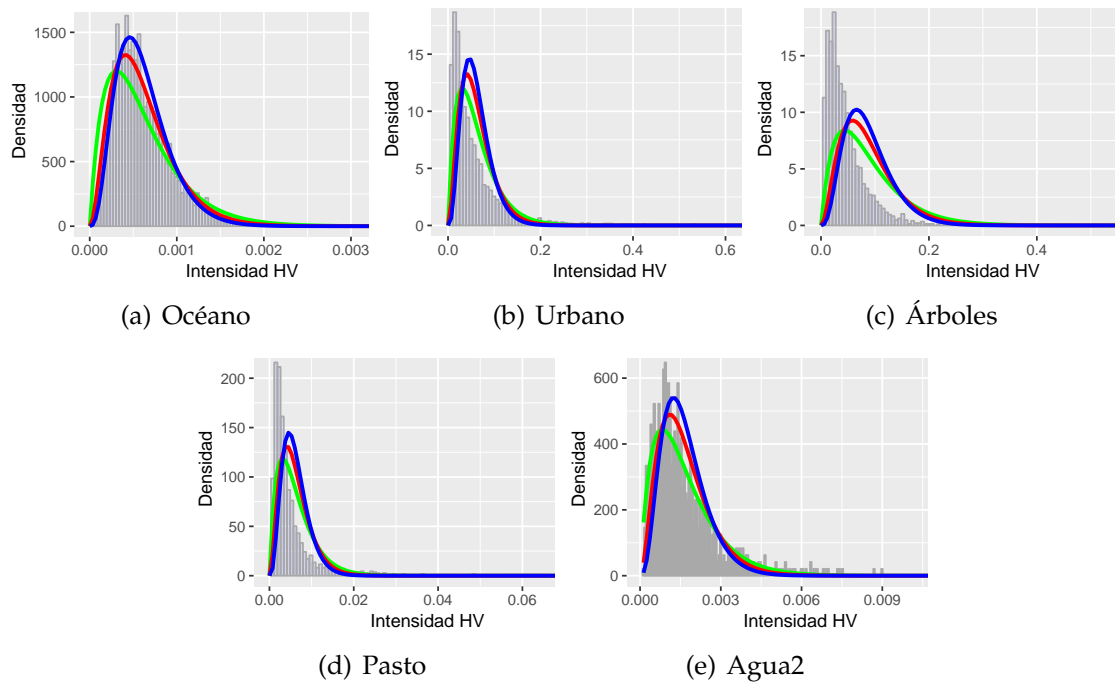


Figura 4.3: Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 *looks* (roja) y 4 *looks* (azul) para las zonas de entrenamiento.

- el producto normalizado, y
- la razón de amplitudes,

usando los datos de las ME de la imagen AIRSAR. En primer lugar estimamos, para cada clase, el coeficiente de correlación complejo ρ_C . Los valores obtenidos para los estimadores de $|\rho_C|$ y θ se muestran en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: Estimadores de coeficiente de correlación complejo

Estimador	Océano	Urbano	Árboles	Pasto	Agua2
$ \hat{\rho}_C $	0.911885	0.2364655	0.127320	0.0594934	0.7477979
$\hat{\theta}$	0.108838	-2.817167	0.581792	0.3546010	0.1434881

La Fig.4.5 muestra los histogramas de la diferencia de fases entre HH y VV, y su correspondiente PDF con los estimadores de los parámetros $|\rho_C|$ y θ de cada clase

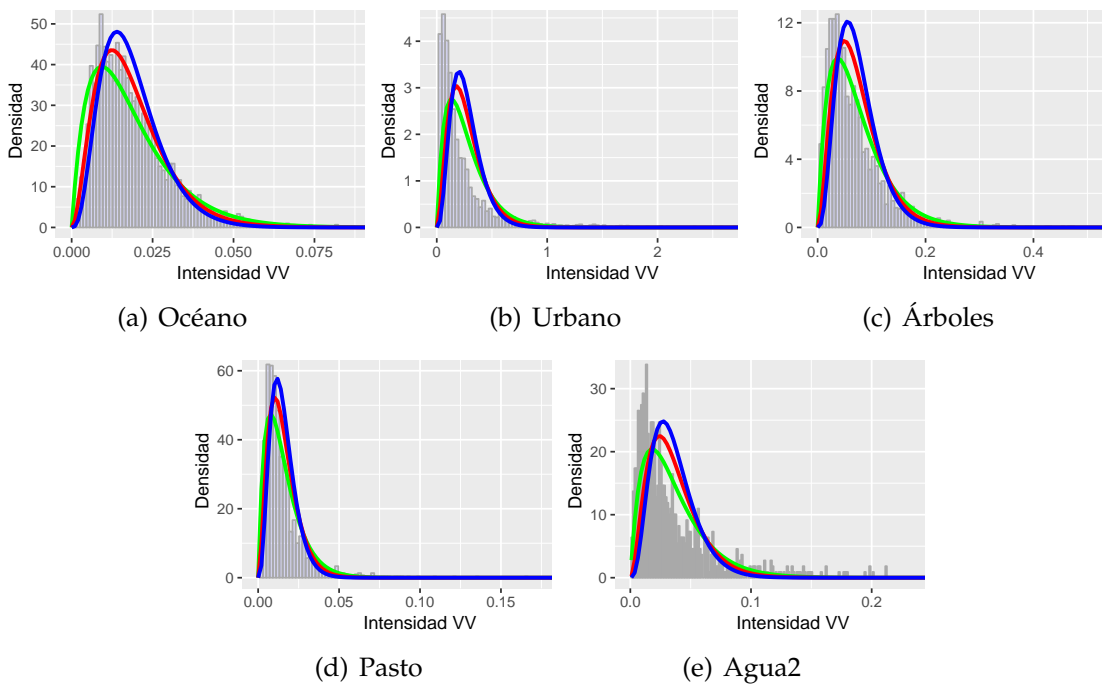


Figura 4.4: Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 *looks* (roja) y 4 *looks* (azul) para las zonas de entrenamiento.

que se muestran en la Tabla 4.1, calculados con la fórmula (2.67) (HG) y, usando funciones algebraicas con 3 y 4 *looks*, usando (2.70) y (2.71), respectivamente.

El ajuste es bueno para Océano, sobre todo con las PDFs que usan funciones algebraicas y especialmente con 4 *looks*. Para la clase Agua2, no es tan bueno el ajuste pero sigue siendo aceptable y es mejor con 4 *looks* usando funciones algebraicas. La clase Urbano tiene un ajuste razonablemente bueno con todas las PDFs. Las otras clases no presentan buenos ajustes.

La Fig.4.6 muestra los histogramas de la magnitud del producto normalizado entre HH y VV y su correspondiente PDF, con el estimador de $|\rho_C|$ de cada clase, que se muestran en la Tabla 4.1, calculado con la fórmula (2.73) con 3 y 4 *looks*.

El ajuste es bueno para Océano, Árboles y Pasto, y es mejor con 4 *looks*. Las otras clases no presentan buenos ajustes.

La Fig 4.7 muestra los histogramas de la razón entre las amplitudes normalizadas

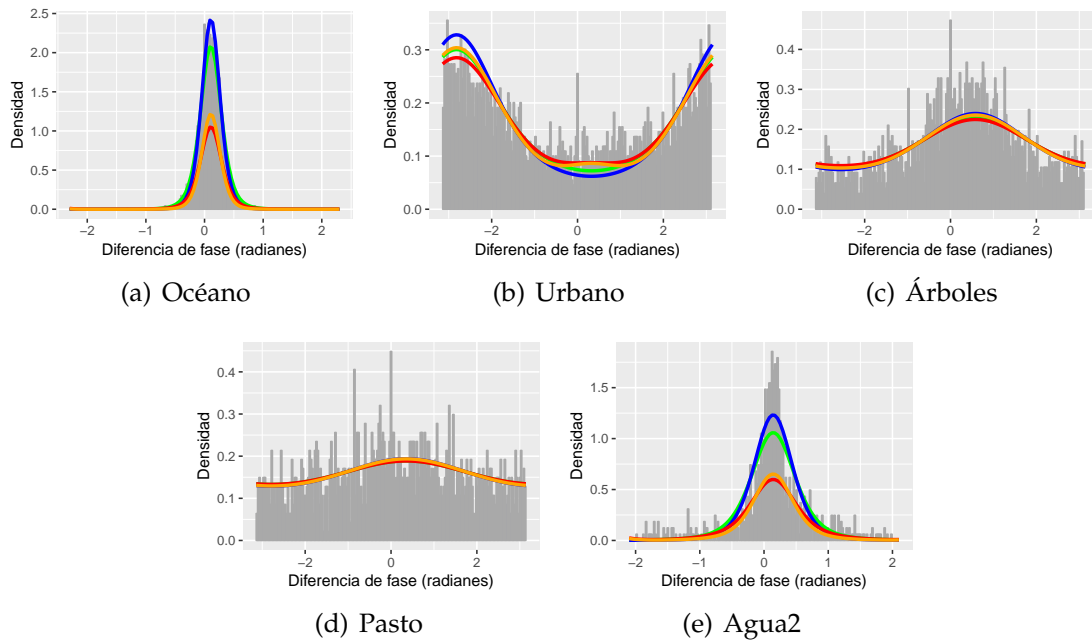


Figura 4.5: Diferencia de fases: HG-3 (rojo), HG-4 (naranja), 3 (verde) y 4 (azul).

HH y VV y su correspondiente PDF con 3 y 4 dada en la fórmula (2.83), con los estimadores de los parámetros $|\rho_C|$ de cada clase que se muestran en la Tabla 4.1, y los estimadores de τ para cada clase dados en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Estimadores del coeficiente τ

Estimador	Océano	Urbano	Árboles	Pasto	Agua2
$\hat{\tau}$	0.008109716	0.2943549	0.06361199	0.01713576	0.02485286

El ajuste es muy bueno para todas las clases, y es levemente mejor con 4 looks.

4.1.2. Clasificación

La Tabla 3.1 muestra los métodos que comparamos en esta tesis. Para comparar los resultados obtenidos con los distintos métodos usamos los coeficiente presentados en la Sección 3.2.

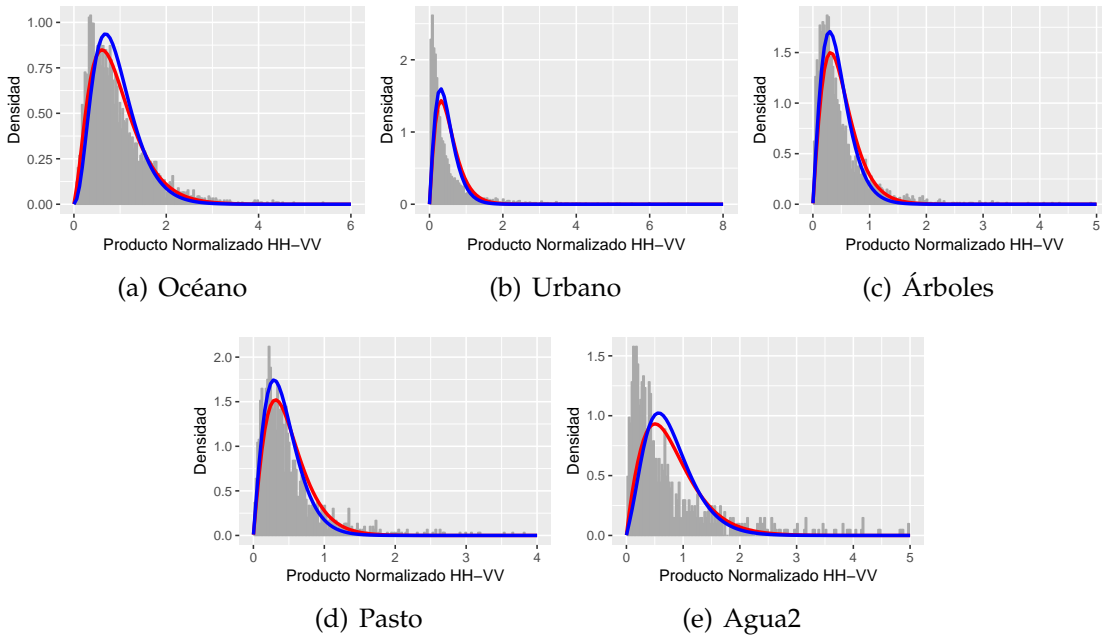


Figura 4.6: Producto normalizado por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) looks.

La Fig. 4.8 muestra la relación entre la degradación espacial (simulada con los filtros con ventanas de diferentes tamaños) y la calidad global de la clasificación (expresada con los valores de F y κ). Los valores de las medidas de calidad son similares y tienen la misma tendencia, aunque F siempre es superior.

El filtrado mejora los resultados (con la imagen no filtrada con 4 clases $F = 38\%$ y $\kappa = 21\%$) aunque los desempeños no son los mismos en todas las situaciones, porque el exceso de degradación arruina en general los resultados.

Aplicando el clasificador MV (Figs. 4.8(a) y (4.8(b))),

- los mayores valores se obtienen con el filtro MBPolSAR (Fig. 4.8(b));
- con el filtro LM el máximo valor se alcanza con ventanas de tamaño 9×9 (Fig. 4.8(a));
- con el filtro MBPolSAR el máximo valor se alcanza con ventanas de tamaño 7×7 (Fig. 4.8(b)).

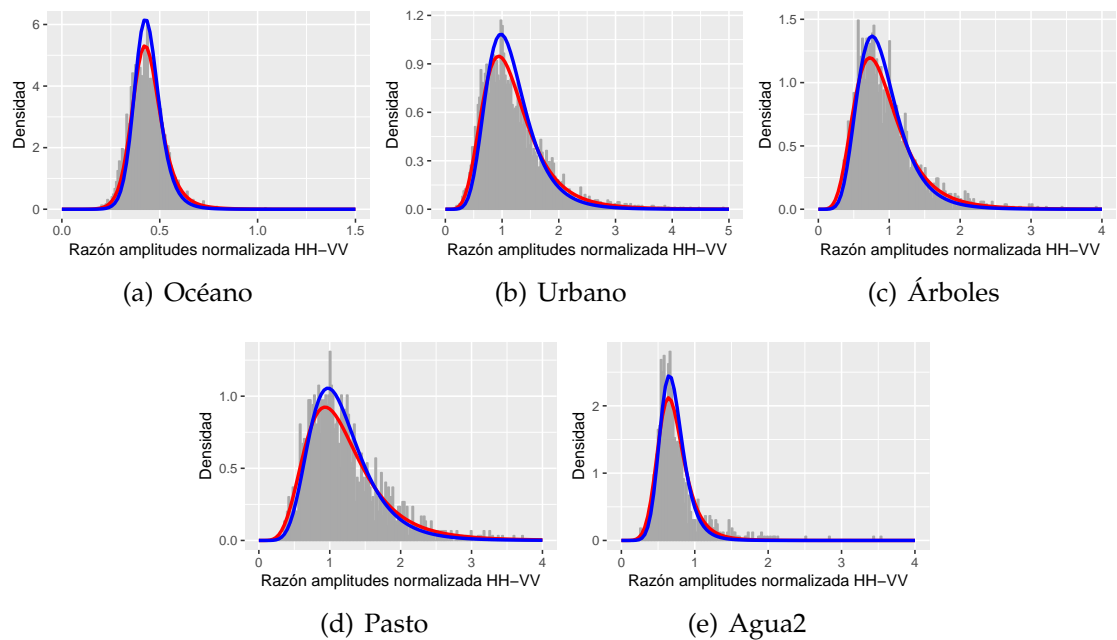


Figura 4.7: Razón de amplitudes normalizada por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) looks.

Aplicando el clasificador SVM, Figs. 4.8(c) y 4.8(d),

- cambiar tamaños de ventana de 3×3 a 5×5 es lo que produce la diferencia más notable;
- con el filtro LM el máximo valor se alcanza con ventanas de tamaño 19×19 (Fig. 4.8(c)), y en esta situación el filtrado mejora la calidad tendiendo a estabilizar los valores;
- con el filtro MBPolSAR el máximo valor se alcanza con ventanas de tamaño 11×11 (Fig. 4.8(d)), y a partir de ahí comienza a disminuir la calidad.

Comparando los 4 métodos,

- la peor situación se da con ventanas pequeñas y el clasificador SVM (Figs. 4.8(c) y 4.8(d)), aunque los valores aumentan y llegan a desempeños similares al Método 1, Fig. 4.8(a), con ventanas de tamaño 9×9 ;

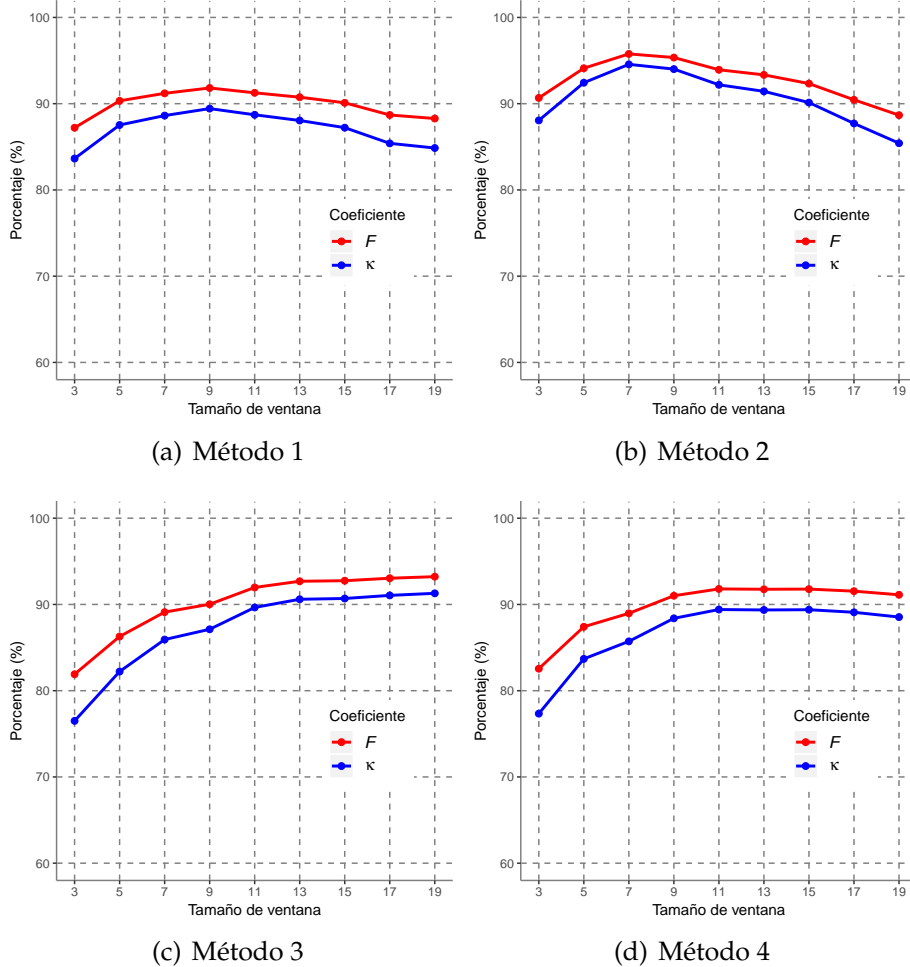


Figura 4.8: Datos AIRSAR. Desempeño de los clasificadores por tamaño de ventana.

- los mejores resultados se obtienen con el filtro MBPolSAR, el clasificador MV (Fig. 4.8(b)) y ventanas de tamaño de 5×5 a 9×9 .

La diferencia más notable entre los clasificadores es que SVM tiene mejor desempeño con más degradación, mientras que esas ventanas grandes arruinan la clasificación MV.

La Fig. 4.9 muestra el análisis de las clases individualmente. El desempeño es similar cuando se usa el mismo clasificador. La exactitud de la clasificación toma los valores máximos en las clases Océano y Urbano, excepto con ventanas 3×3 y

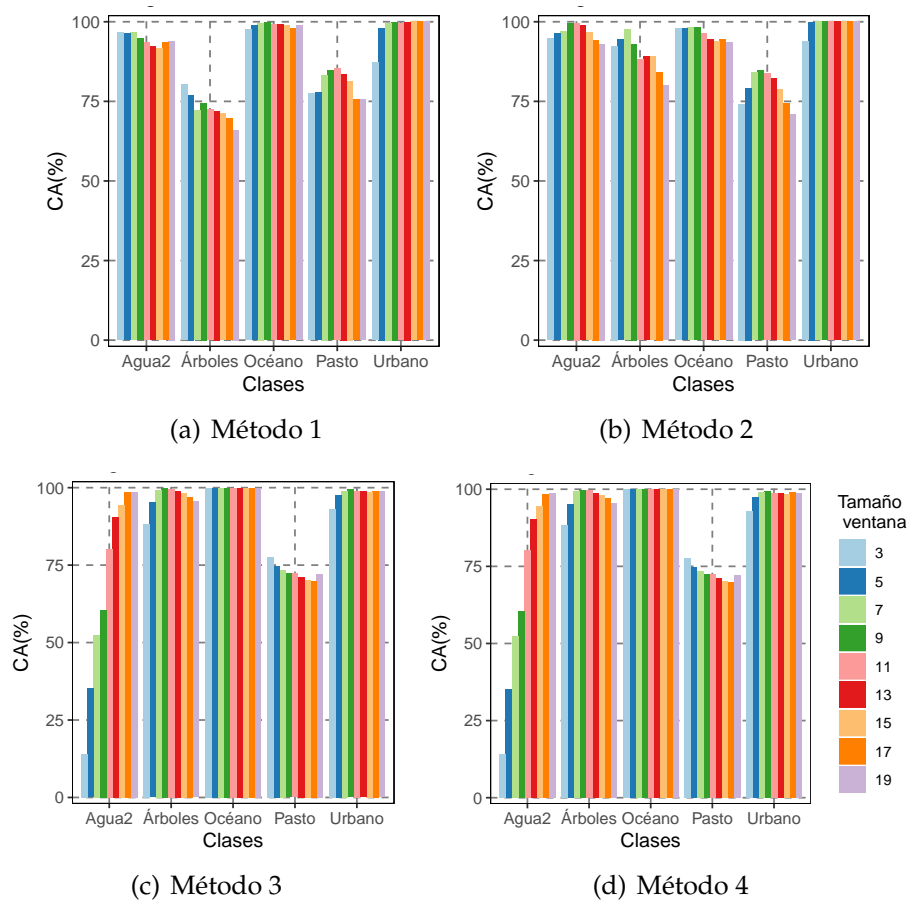


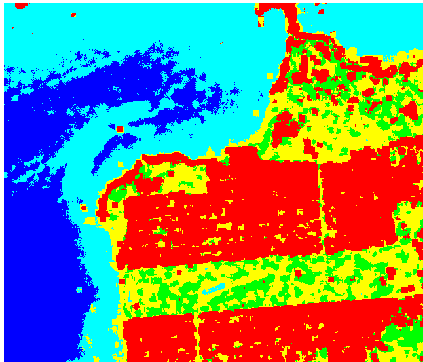
Figura 4.9: Datos AIRSAR. Desempeño de los clasificadores por clase.

clasificador MV; en esa situación la clase Agua2 es la mejor clasificada.

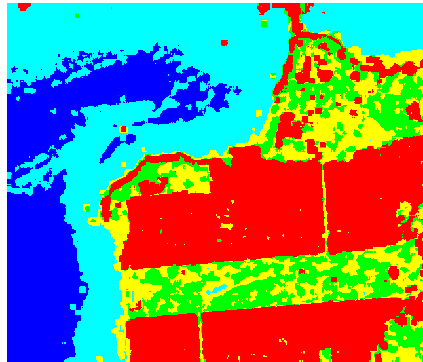
Numéricamente, la clase Agua2 es mejor clasificada con MV, mientras que con SVM es la peor clasificada (con el filtro MBPolSAR los valores son mayoritariamente menores al 75 %).

La Fig. 4.10 muestra los mapas temáticos con los 4 métodos y ventanas de tamaño 9×9 . La clasificación es buena en general aunque, debido a la textura del mar (Océano), en casi todas las degradaciones los mapas producidos por el clasificador MV (aquí Figs. 4.10(a) y 4.10(b)) asignan a la clase Agua2 los píxeles de la clase Océano. Además ese clasificador provoca una gran pérdida de detalle en la clase Pasto. Por estos dos aspectos los mapas producidos por SVM se ven mejores (aquí

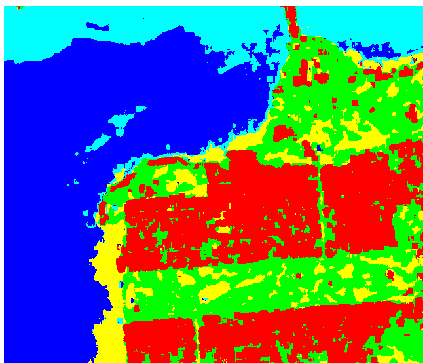
Figs. 4.10(c) y 4.10(d)).



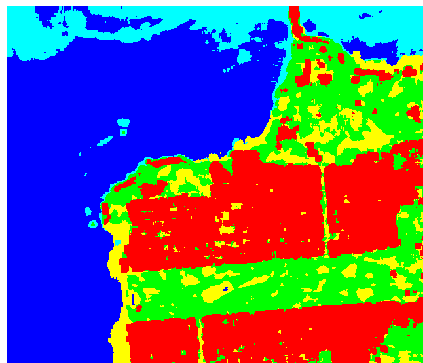
(a) Método 1



(b) Método 2



(c) Método 3



(d) Método 4

Figura 4.10: Datos AIRSAR. Mapas temáticos usando ventanas de tamaño 9×9 .

4.2. Imagen de Bell Ville

El UAVSAR es un instrumento de radar de apertura sintética que recoge mediciones claves de la deformación de la Tierra. El instrumento está diseñado para volar a bordo de un avión Gulfstream III de la NASA y en vehículos aéreos deshabitados. El UAVSAR registra imágenes *full-polarimetric* en la banda L (24 cm de longitud de onda), ha estado recolectando datos científicos desde 2009 y voló por primera vez en Sudamérica en el 2013.

Buscando analizar regiones cercanas geográficamente, seleccionamos una subimagen de 700×1100 píxeles de una imagen UAVSAR que contiene a la ciudad de Bell Ville (en la provincia de Córdoba) registrada en la banda L, con 7 m de resolución espacial, adquirida con tres *looks*. Para aplicar la metodología propuesta identificamos cuatro diferentes tipos de coberturas con diferente textura. La Fig. 4.11 es la imagen intensidad VV con las muestras de entrenamiento de las clases: Agua, Árboles, Cultivo y Urbano, en colores Azul, Verde, Naranja y Rojo, respectivamente.

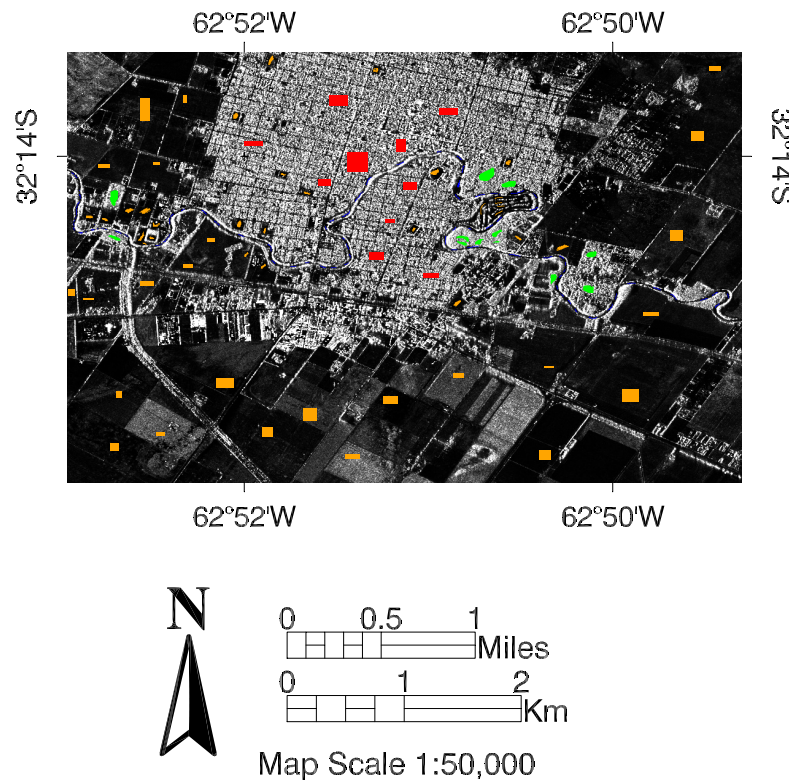


Figura 4.11: Imagen intensidad VV UAVSAR y muestras de entrenamiento.

4.2.1. Verificación del ajuste

Al igual que en la imagen de San Francisco mostramos los histogramas de los datos reales de las muestras de entrenamiento junto con las curvas de densidad.

4.2.1.1. Distribuciones univariadas

Realizamos el ajuste de las intensidades *multilook*. Esta imagen tiene 3 *looks* nominal, y usando el número equivalente de *looks* de la intensidad dado en (4.2) resulta que con los datos de la ME de la clase Árboles: $ENL(I_{HH}) \approx 3,2$, $ENL(I_{HV}) \approx 2,5$ y $ENL(I_{VV}) \approx 3,4$.

En base a estos datos hicimos los ajustes a las distribución Wishart $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}, 2)$, $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}, 3)$ y $\mathcal{W}(\hat{\Sigma}, 4)$. Las figuras 4.12, 4.13 y 4.14 presentan estos ajustes para los datos intensidad HH, HV y VV, respectivamente.

Los ajustes son buenos para la clase Árboles, especialmente HH y HV, y son malos para las restantes. En la clase que presenta buenos ajustes, es mejor a medida que aumenta la degradación.

4.2.1.2. Distribuciones bivariadas

Al igual que con la imagen AIRSAR verificamos el ajuste de los datos a las PDFs de: (i) la diferencia de fases, (ii) el producto normalizado, y (iii) la razón de amplitudes, usando los datos de las ME.

En primer lugar estimamos, para cada clase, el coeficiente de correlación complejo ρ_C , y estimamos $|\rho_C|$ y θ (ver Tabla 4.3).

La Fig.4.15 muestra los histogramas de la diferencia de fases entre HH y VV, y su correspondiente PDF con los estimadores de los parámetros $|\rho_C|$ y θ dados en la Tabla 4.3, calculados con la fórmula (2.67) (HG) y, usando funciones algebraicas con 3 y 4 *looks*, usando (2.70) y (2.71), respectivamente.

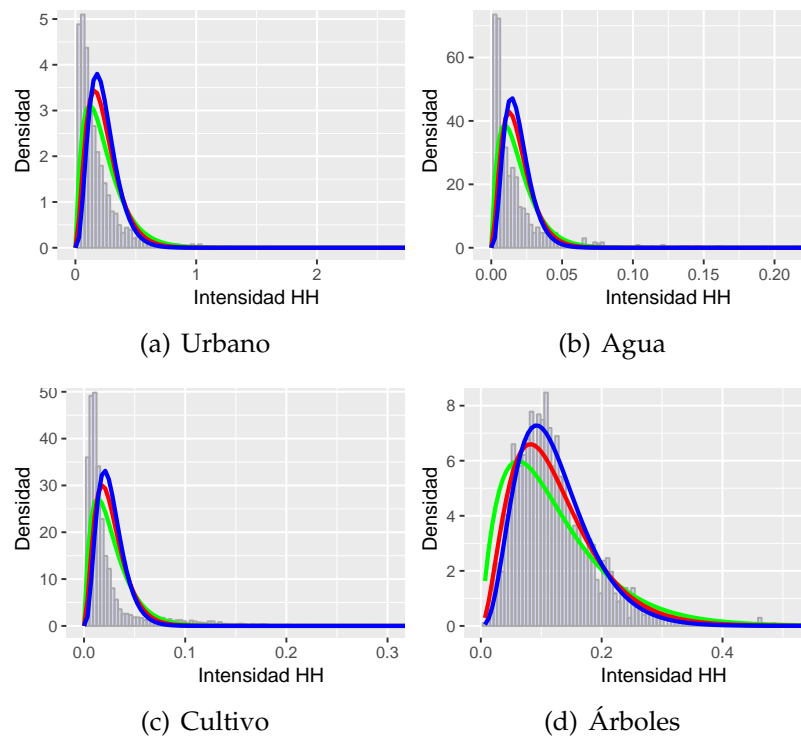


Figura 4.12: Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 2 (verde), 3 (roja) y 4 (azul) looks para las ME de la imagen UAVSAR.

El ajuste es bueno para las clases Urbano y Cultivo (aunque ahí se presentan algunos valores raros), no presentándose gran diferencia entre las PDFs que usan funciones algebraicas y las clásicas, ni entre las que ajustan con 3 y con 4 looks. Para las otras dos clases el ajuste es malo.

La Fig.4.16 muestra los histogramas de la magnitud del producto normalizado entre HH y VV y su correspondiente PDF, con el estimador de $|\rho_C|$ de cada clase, que se muestran en la Tabla 4.3, calculado con la fórmula (2.73) con 3 y 4 looks.

Estas distribuciones no muestran buen ajuste para los datos de estas muestras, salvo la clase Árboles con 4 looks, aunque ahí el ajuste es apenas aceptable. Las otras clases no presentan buenos ajustes.

La Fig 4.17 muestra los histogramas de la razón entre las amplitudes normalizadas HH y VV y su correspondiente PDF con 3 y 4 dada en la fórmula (2.83), con los

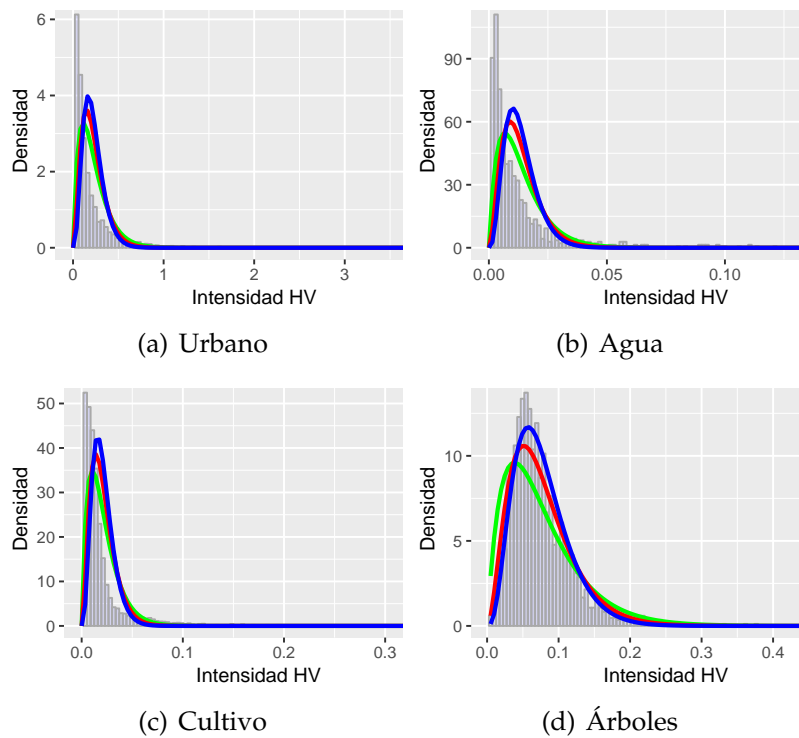


Figura 4.13: Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 looks (roja) y 4 looks (azul) para las zonas de entrenamiento.

estimadores de los parámetros $|\rho_C|$ de cada clase que se muestran en la Tabla 4.3, y los estimadores de τ para cada clase dados en la Tabla 4.4.

El ajuste es aceptable para las clases Urbano y Cultivo, y es mejor con 4 looks. Para las clases Agua y Árboles el ajuste es malo, especialmente para esta última.

4.2.2. Clasificación

Globalmente (Fig. 4.18) los valores de los coeficientes F y κ son similares. El filtrado mejora los resultados (con la imagen no filtrada $F = 63\%$ y $\kappa = 25\%$), y es especialmente notable al cambiar de tamaños de ventana 3×3 a 5×5 .

La peor situación es con el Método 2 (Fig. 4.18(b)) y ventana 3×3 , aunque los valores aumentan con la degradación y se comportan de manera similar a los

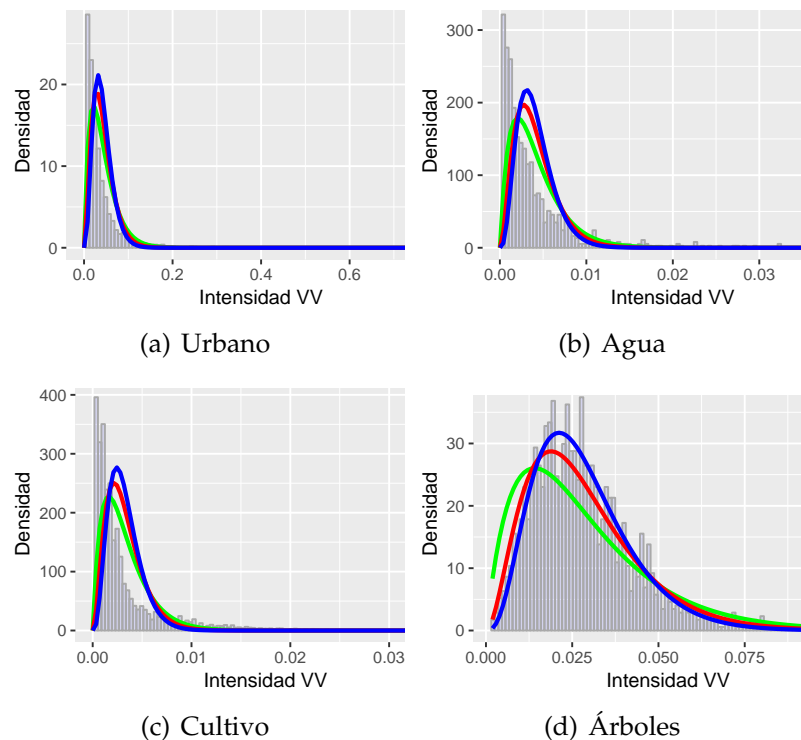


Figura 4.14: Densidades empíricas y ajustadas para las distribuciones Wishart con 3 looks (roja) y 4 looks (azul) para las zonas de entrenamiento.

demás métodos. Casi todos los valores son altos (excepto para el Método 2 ventana 3×3), y aumentan con las degradaciones.

Sin embargo,

- con el filtro LM (Figs. 4.18(a) y 4.18(c)) el aumento es más notable inicialmente, hasta ventanas 7×7 o 9×9 , y se reduce ligeramente para ventanas más grandes, pero
- con el filtro MBPolSAR (Figs. 4.18(b) y 4.18(d)) el desempeño es inestable, especialmente cuando se usa MV, aunque las variaciones no son muy notables.

Con ventanas más grandes que 9×9 todos los métodos muestran resultados buenos y similares.

Tabla 4.3: Estimadores de coeficiente de correlación complejo

Estimador	Urbano	Agua	Cultivo	Árboles
$ \hat{\rho}_C $	0.2214306	0.08524713	0.2025373	0.08629845
$\hat{\theta}$	3.123841	-2.764554	-1.633148	-2.507583

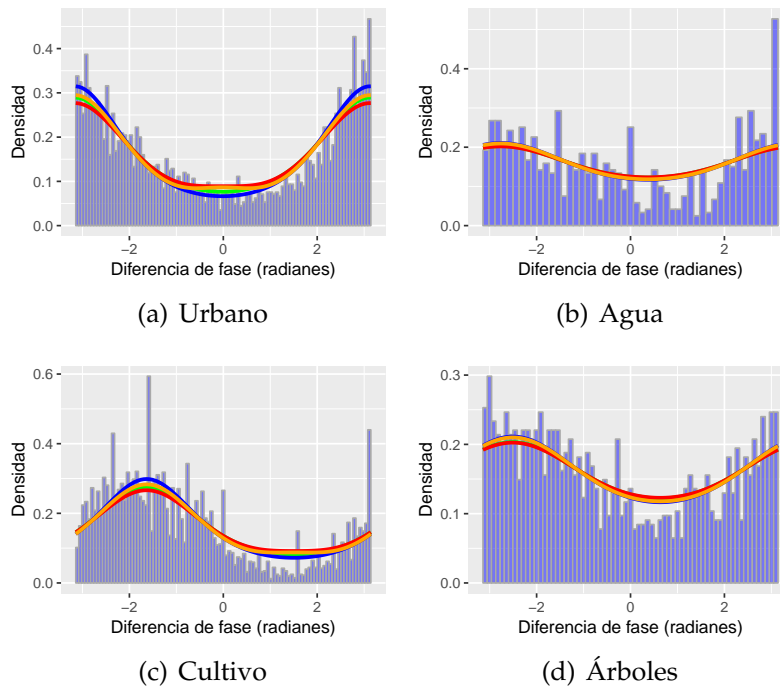


Figura 4.15: Diferencia de fases: HG-3 (rojo), HG-4 (naranja), 3 (verde) y 4 (azul).

Cuando consideramos las clases individualmente, Fig. 4.19, los desempeños con el mismo clasificador son similares (como en la imagen de San Francisco). La exactitud de la clasificación toma los máximos valores para la clase Cultivo, y los mínimos para Agua, especialmente usando SVM donde es la clase con peor desempeño para todas las degradaciones.

Las clases Árboles y Urbano son muy bien clasificadas con SVM y mal clasificadas por MV (especialmente con ventanas pequeñas). El río (Agua) es mejor clasificado por MV (aunque los valores están apenas por encima del 50 %) mientras que con SVM y ventanas pequeñas los valores son menores, lo cual vuelve invisible el río

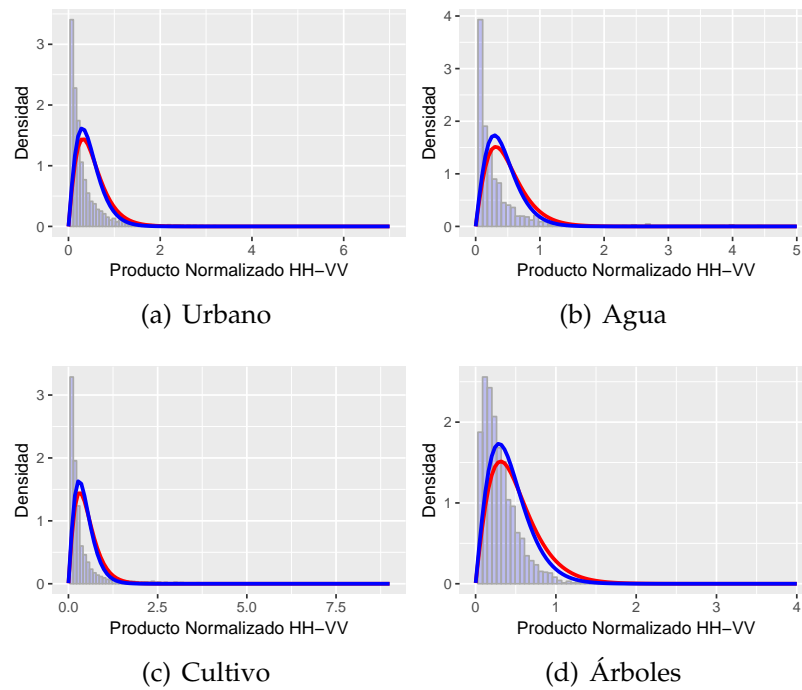


Figura 4.16: Producto normalizado por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) looks.

Tabla 4.4: Estimadores del coeficiente τ

Estimador	Urbano	Agua	Cultivo	Árboles
$\hat{\tau}$	5.558477	4.597926	8.3399	4.35407

en los mapas temáticos, Figs. 4.20(c) y 4.20(d). Además, la clase Cultivo es mejor conservada usando SVM.

Globalmente es pues mejor la clasificación alcanzada con SVM, salvo para el río.

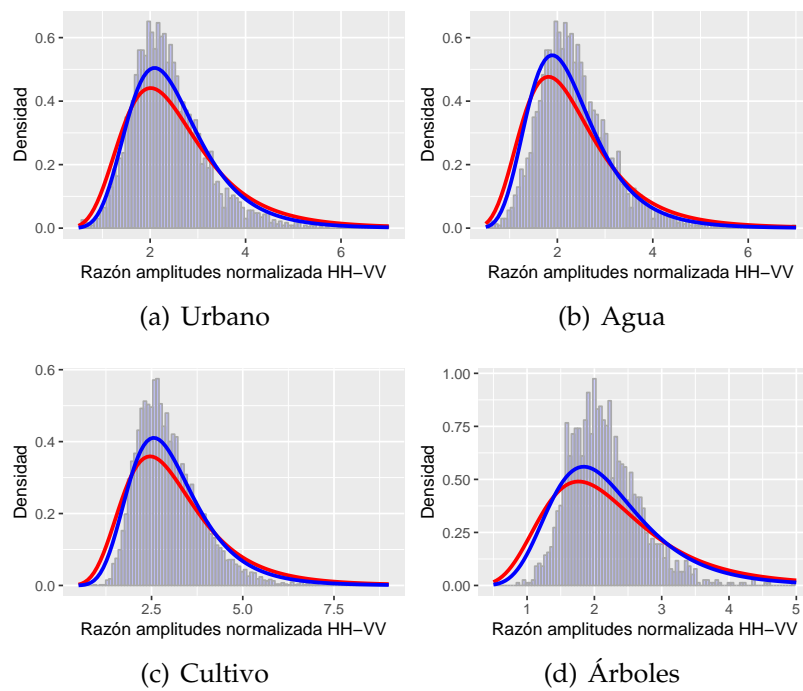
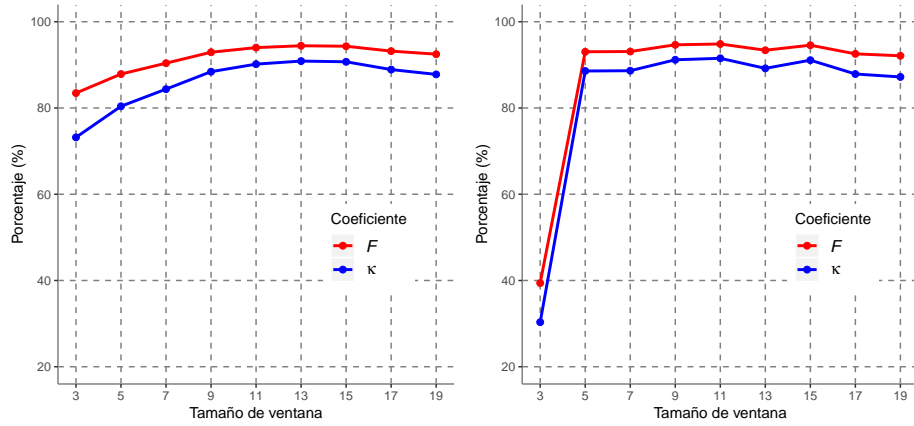
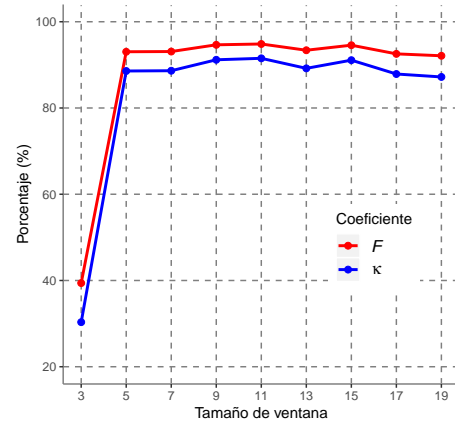


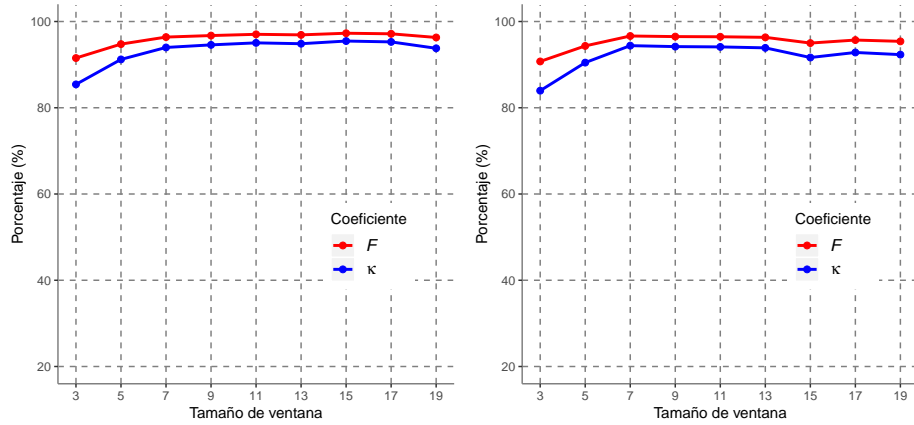
Figura 4.17: Razón de amplitudes normalizada por clase, con 3 (rojo) y 4 (azul) looks.



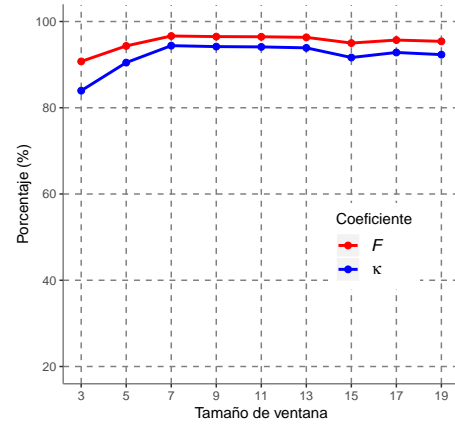
(a) Método 1



(b) Método 2



(c) Método 3



(d) Método 4

Figura 4.18: Datos UAVSAR. Desempeño de la clasificación por tamaño de ventana.

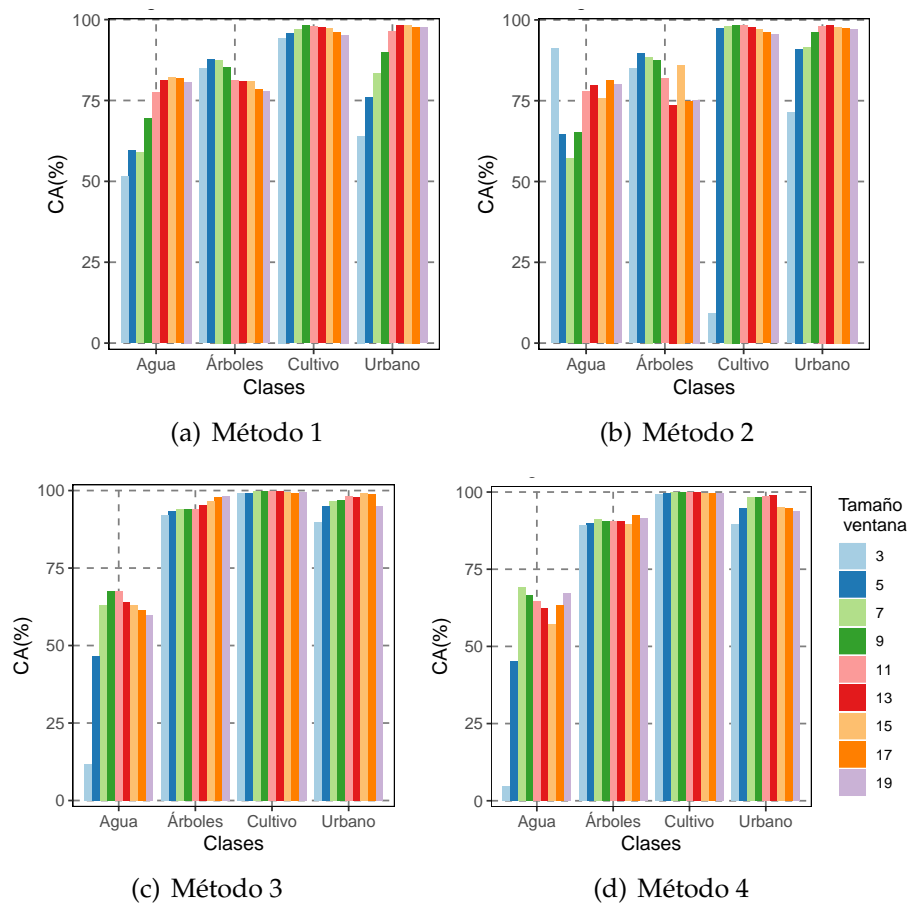
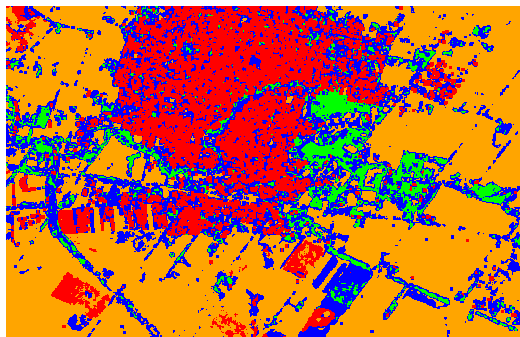
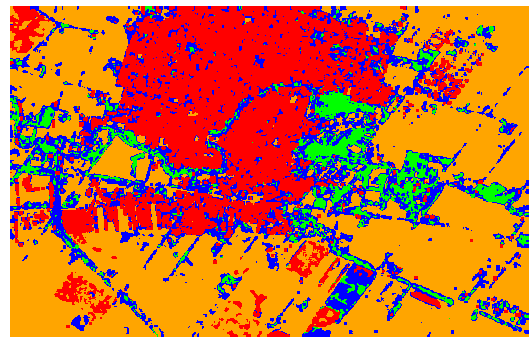


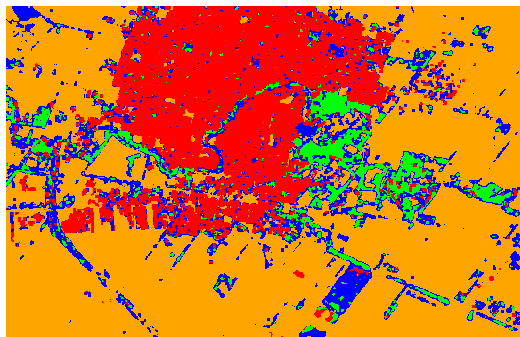
Figura 4.19: Datos UAVSAR. Desempeño de los clasificadores por clase.



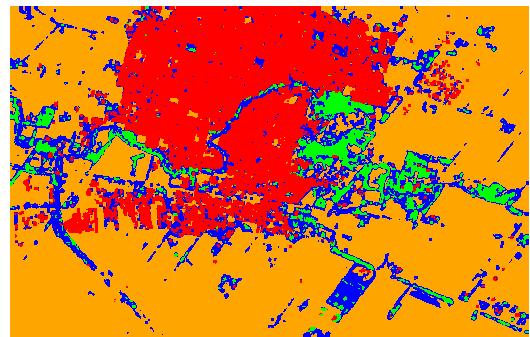
(a) Método 1



(b) Método 2



(c) Método 3



(d) Método 4

Figura 4.20: Datos UAVSAR. Mapas temáticos usando ventanas 7×7 .

Capítulo 5

Conclusiones y trabajos futuros

Las imágenes SAR en general, y las PolSAR en particular, son una importante fuente de información.

Considerando que un modelo estadístico preciso que describa los datos se vuelve clave para la extracción de las propiedades de la superficie terrestre, en esta tesis incluimos una reseña de los modelos para datos PolSAR *multi-look*, las distribuciones marginales y bivariadas asociadas y realizamos el ajuste de datos reales a algunas de esas distribuciones, lo cual además justifica el uso de las técnicas que se aplican a las imágenes para extraer la información que contienen.

Siguiendo a Narayanan et al. (2002), y atendiendo a que la habilidad para discriminar entre diferentes coberturas presentes en una imagen es un modo de medir el CI, en esta tesis estudiamos el problema de cuantificar la información con la exactitud de la clasificación y analizamos la influencia de la degradación espacial en el CI. Modelamos la degradación espacial aplicando filtros con distintos tamaños de ventana y cuantificamos el CI con la exactitud de la clasificación. Nuestra idea inicial fue estudiar el comportamiento de un filtro y un clasificador diferentes a los usados por Narayanan et al. (2002) y agregar algunas medidas adicionales para cuantificar el CI. Específicamente en nuestro primer estudio: (i) reemplazamos el filtro LM por el MBPolSAR, (ii) reemplazamos el clasificador MV por SVM, y (iii) agregamos al coeficiente F , el κ y la Exactitud de la clasificación por clase.

Mientras Narayanan et al. (2002) observaron una disminución del CI al aumentar la degradación espacial, en Palacio et al. (2017), con las modificaciones indicadas, concluíamos que el filtrado mejora los resultados de clasificación.

Para verificar si el aumento de la degradación sigue beneficiando el CI, incrementamos el tamaño de ventana y, con idea de analizar en detalle qué factor o factores son responsables de la diferencia en las conclusiones, planificamos un estudio comparativo de los resultados obtenidos con cuatro métodos resultantes de la combinación de los dos filtros y los dos clasificadores. En Palacio et al. (2019) aplicamos esa metodología, aumentando la degradación respecto a lo presentado en Palacio et al. (2017), a dos imágenes *full polarimetric*: la AIRSAR de San Francisco usada en Palacio et al. (2017), y una UAVSAR de una región geográficamente cercana. En esta tesis presentamos los resultados de ese trabajo.

Para la imagen AIRSAR los datos de las clases resultaron ser en general bien ajustados por la distribución univariada para la Intensidad, y por la distribución bivariada para la Razón de amplitudes normalizada, y en el caso de la distribución para la Diferencia de Fases para las clases Océano, Urbano y Agua², y en caso del Producto Normalizado para las clases Océano, Árboles y Pasto.

Para la imagen UAVSAR, en cambio, los datos de las clases resultaron mal ajustados por la distribución univariada para la Intensidad (salvo la clase Árboles con dos polarizaciones), y por la del Producto Normalizado (salvo la clase Árboles), mientras que para la Razón de amplitudes normalizada, y la Diferencia de Fases el ajuste fue bueno para las clases Urbano y Cultivo.

Respecto a la clasificación, para ambas imágenes los valores de los coeficientes F y κ son similares. Casi todas las medidas tienen valores grandes, excepto en la imagen UAVSAR con filtro MBPolSAR, clasificador MV y ventana 3×3 , y en todos los casos al menos hasta 7×7 los valores de los coeficientes aumentan con la degradación. Esto muestra que el filtrado, al menos hasta ese tamaño de ventana, mejora los resultados de la clasificación.

Para la imagen AIRSAR, la diferencia más notable entre los clasificadores es que SVM tiene el mejor rendimiento con mayores degradaciones, mientras que es-

tas ventanas arruinan la clasificación con MV. Por su parte los mapas temáticos producidos por SVM se ven mejores que los resultantes de usar MV.

Para la imagen UAVSAR, con ventanas más grandes que 9×9 todos los métodos muestran resultados buenos y similares, sólo hay una leve disminución del CI con clasificación MV. En general la clasificación es mejor con SVM, salvo para la clase Agua, lo que hace que el río se vuelva invisible en los mapas temáticos.

Cuando las clases se consideran individualmente, los desempeños son similares al aplicar el mismo clasificador.

No todas las clases son mejor clasificadas por el mismo método en la misma situación, lo cual coincide con la afirmación de (Narayanan et al. 2002) de que una imagen puede contener diferentes cantidades de información según la aplicación.

5.1. Trabajos realizados

5.1.1. Revista

- Palacio, M. G.; Ferrero, S. B. ; Frery, A. C. (2019) Revisiting the effect of spatial resolution on information content based on classification results. *International Journal of Remote Sensing*, 40 (12): 4489-4505.

5.1.2. Presentación a Congresos

- Palacio, M. G. ; Ferrero, S. B. ; Frery, A. C. *Influencia de la Resolución Espacial en el Contenido de Información de Imágenes PolSAR*. (Oral presentation). V Jornadas Interdisciplinarias de Análisis Avanzado de Imágenes y Señales (JIAAIS). Universidad Nacional de General Sarmiento. Universidad Tecnológica Nacional Regional Buenos Aires. Buenos Aires. Argentina. 6-7 Mayo 2019.

- Palacio, M. G. ; Ferrero, S. B. ; Frery, A. C. *Efecto de la resolución espacial en el Contenido de Información de imágenes clasificadas con SVM*. (Oral presentation). VII Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial (MACI). Universidad Nacional de Río Cuarto, Río Cuarto, Córdoba, Argentina. 8-10 Mayo 2019.
- Palacio, M. G. ; Ferrero, S. B. ; Frery, A. C. *Information content in SAR images: A classification accuracy viewpoint*. Complete article. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS). July 23-28, 2017, Texas, USA. p.5307-5310.
- Palacio, M. G. ; Ferrero, S. B. ; Frery, A. C. *Contenido de la Información medido como la precisión de la Clasificación en Imágenes SAR con distinta Resolución Espacial*. (Oral presentation). III Jornadas de Análisis Avanzado de Imágenes y Señales (JIAAIS). Universidad Tecnológica Nacional. Buenos Aires. Argentina. 11-12 Mayo 2017.
- Palacio, M. G. ; Ferrero, S. B. ; Frery, A. C. *Classification accuracy of SAR images as a measure of Information Content*. (Oral presentation). IV INTERDISCIPLINARY WORKSHOP ON ADVANCED SIGNAL AND IMAGE ANALYSIS (JIAAIS). University Federal de Alagoas, Maceió, Alagoas, Brazil. 10-15 Noviembre 2017.
- Lanfri, S. ; Palacio, M. G. ; Lanfri, M. ; Scavuzzo, M. ; Frery, A.C. *Information Content in COSMO-SkyMed Data*. (Trabajo completo publicado) En: IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2013, Melbourne, Australia. Proceedings, 2013.
- Lanfri, S. ; Scavuzzo, M. ; Lanfri, M. ; Palacio, M. G. ; Frery, A.C. *Change Detection Methods in High Resolution Cosmo SkyMed images (HIMAGE mode)*. (Trabajo completo publicado) En: The 4th Asia-Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar, 2013, Tsukuba, Japón. Proceedings, 2013.
- Palacio, M.G. *Information content and hypothesis tests*. Segunda reunión del proyecto Universal financiado por el CNPq (nro 471805/2011-4) Teoria da

Informação na Análise de Imagens SAR Polarimétricas. LCCV (Laboratório de Computação Científica e Visualização) de la Ufal (Universidade Federal de Alagoas), Brasil. 11 al 14 Set 2013.

- Palacio, M.G. ; Lanfri, S. *Information Content in COSMO-SkyMed Data*. Primera reunión del proyecto Universal financiado por el CNPq (nro 471805/2011-4 Teoria da Informação na Análise de Imagens SAR Polarimétricas). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) São Jose dos Campos. Brasil. 2012.

5.2. Trabajos futuros

1. Considerando la gran variedad de formatos que van desde la intensidad o la amplitud hasta el *full polarimetric*, pasando por intermedios, realizar la clasificación usando menos atributos que los de una imagen *full polarimetric* comparando sus resultados.
2. Teniendo en cuenta la importancia de la evaluación cualitativa basada en la calidad percibida por parte de usuarios, buscar imágenes de regiones que tienen interés para profesionales de Geología vinculados a nuestros trabajos de investigación, y aplicar la metodología propuesta.
3. Dado que se nos ha dificultado tener acceso a imágenes *full polarimetric* de ciertas regiones (como las planteadas en 2), si logramos buenas clasificaciones con otros formatos, sería de interés aplicar la metodología a imágenes de estas características.
4. Entendiendo a una imagen como un conjunto de regiones formadas por píxeles que son realizaciones de variables aleatorias con cierta distribución en probabilidades, y teniendo en cuenta el estudio que hemos realizado sobre estas distribuciones, usar medidas derivadas de la Teoría de la Información para cuantificar la distancia entre distribuciones en probabilidades.

Bibliografía

- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied mathematics series. Dover Publications.
- Aghababae, H., Amini, J., y Tzeng, Y. C. (2013). Contextual polsar image classification using fractal dimension and support vector machines. *European Journal of Remote Sensing*, 46(1):317–332.
- Alpaydin, E. (2010). *Introduction to Machine Learning*. The Massachusetts Institute of Technology Press.
- Anfinsen, S. N., Doulgeris, A. P., y Eltoft, T. (2011). Goodness-of-fit tests for multi-look polarimetric radar data based on the Mellin transform. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(7):2764–2781.
- Anfinsen, S. N., Eltoft, T., y Doulgeris, A. P. (2009). A retexted Wishart model for polarimetric SAR data. In *Proceedings of the 4th International Workshop on Science and Applications of SAR Polarimetry and Polarimetric Interferometry (POLin- SAR2009)*, volume 8, pages 26–30.
- Aragone, M., Caridi, A., Serpico, S. B., Moser, G., Cerra, D., y Datcu, M. (2008). Study of information content of sar images. In *2008 IEEE Radar Conference*, pages 1–6.
- Argenti, F., Lapini, A., Bianchi, T., y Alparone, L. (2013). A tutorial on speckle reduction in synthetic aperture radar images. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, 1(3):6–35.

- Ayienda, K. C. (2014). *Gamma and Related Distributions*. BoD–Books on Demand.
- Bian, Y. y Mercer, B. (2014). Multilook polarimetric SAR data probability density function estimation using a generalized form of multivariate k-distribution. *Remote Sensing Letters*, 5(7):682–691.
- Bombrun, L., Anfinson, S. N., y Harant, O. (2011a). A complete coverage of log-cumulant space in terms of distributions for Polarimetric SAR data. In *5th International Workshop on Science and Applications of SAR Polarimetry and Polarimetric Interferometry (POLinSAR 2011)*, pages 1–8, Friscati, Italy.
- Bombrun, L. y Beaulieu, J. M. (2008). Fisher distribution for texture modeling of polarimetric SAR data. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 5(3):512–516.
- Bombrun, L., Vasile, G., Gay, M., y Totir, F. (2011b). Hierarchical segmentation of polarimetric SAR images using heterogeneous clutter models. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(2):726–737.
- Burges, C. (1998). A tutorial on support vector machines for pattern recognition. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 2(2):121–167.
- Chen, S. (2018). Polarimetric coherence pattern: A visualization and characterization tool for polsar data investigation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 56(1):286–297.
- Cintra, R. J., Frery, A. C., y Nascimento, A. D. C. (2013). Parametric and nonparametric tests for speckled imagery. *Pattern Anal. Appl.*, 16(2):141–161.
- Cloude, S. (2009). *Polarisation: Applications in Remote Sensing*. OUP Oxford.
- Delignon, Y. y Pieczynski, W. (2002). Modeling non-Rayleigh speckle distribution in SAR images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 40(6):1430–1435.
- Deng, X., López-Martínez, C., Chen, J., y Han, P. (2017). Statistical modeling of polarimetric sar data: A survey and challenges. *Remote Sensing*, 9(4).

- Foucher, S. y López-Martínez, C. (2014). Analysis, evaluation, and comparison of Polarimetric SAR speckle filtering techniques. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(4):1751–1764.
- Freitas, C. C., Frery, A. C., y Correia, A. H. (2005). The polarimetric \mathcal{G} distribution for SAR data analysis. *Environmetrics*, 16(1):13–31.
- Frery, A. C., Jacobo-Berlles, J., Gambini, J., y Mejail, M. (2010). Polarimetric SAR image segmentation with B-Splines and a new statistical model. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 21:319–342.
- Frery, A. C., Müller, H.-J., Yanasse, C. C. F., y Sant’Anna, S. J. S. (1997). A model for extremely heterogeneous clutter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 35(3):648–659.
- Frery, A. C., Nascimento, A. D. C., y Cintra, R. J. (2011). Information theory and image understanding: An application to polarimetric SAR imagery. *Chilean Journal of Statistics*, 2(2):81–100.
- Frery, A. C., Nascimento, A. D. C., y Cintra, R. J. (2014). Analytic expressions for stochastic distances between relaxed complex Wishart distributions. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 52(2):1213–1226.
- Goodman, J. W. (1975). Statistical properties of laser speckle patterns. In Dainty, J. C., editor, *Laser Speckle and Related Phenomena*, pages 9–75. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Goodman, J. W. (1985). *Statistical Optics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley.
- Goodman, N. R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction). *The Annals of Mathematical Statistics*, 34(1):152–177.
- Hagedorn, M., Smith, P. J., Bones, P. J., Millane, R. P., y Pairman, D. (2006). A trivariate chi-squared distribution derived from the complex wishart distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 97(3):655–674.

- Harris Geospatial Solutions (2018). *ENVI – Environment for Visualizing Images*.
- Helmy, A. K. y El-Taweel, G. S. (2016). Adaptive local means filter for polarimetric sar images; despeckling for homogeneous and heterogeneous clutter models. *Information Technology and Computer Science*, 11:33–45.
- Jacobo-Berlles, J. C. (2005). *Nuevas familias de distribuciones polarimétricas para imágenes SAR*. Tesis de doctorado, Departamento de Computación, FCEyN, UBA, Buenos Aires, República Argentina.
- Kersten, P. R., Lee, J.-S., y Ainsworth, T. L. (2005). Unsupervised classification of polarimetric synthetic aperture radar images using fuzzy clustering and em clustering. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(3):519–527.
- Lardeux, C., Frison, P., Tison, C., Souyris, J. C., Stoll, B., Fruneau, B., y Rudant, J. P. (2009). Support vector machine for multifrequency SAR polarimetric data classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 47(12):4143–4152.
- Lee, J. S. (1980). Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2:165–168.
- Lee, J. S., Grunes, M. R., y de Grandi, G. (1999). Polarimetric SAR speckle filtering and its implication for classification. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 37(5):2363–2373.
- Lee, J. S., Grunes, M. R., y Pottier, E. (2001). Quantitative comparison of classification capability: fully polarimetric versus dual and single-polarization sar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 39(11):2343–2351.
- Lee, J. S., Hoppel, K. W., Mango, S. A., y Miller, A. R. (1994a). Intensity and phase statistics of multilook polarimetric and interferometric SAR imagery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 32(5):1017–1028.

- Lee, J. S., Miller, A. R., y Hoppel, K. W. (1994b). Statistics of phase difference and product magnitude of multi-look processed gaussian signals. *Waves in Random Media*, 4(3):307–319.
- Lee, J. S. y Pottier, E. (2009). *Polarimetric radar imaging : from basics to applications*. Optical science and engineering. CRC Press, Boca Raton.
- Li, H. C., Hong, W., Wu, Y. R., y Fan, P. H. (2011). On the empirical-statistical modeling of SAR images with Generalized Gamma distribution. *IEEE Journal of selected topics in signal processing*, 5(3):386–397.
- López-Martínez, C. y Fàbregas, X. (2003). Polarimetric SAR speckle noise model. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(10):2232–2242.
- López-Martínez, C. y Fàbregas, X. (2008). Model-based polarimetric SAR speckle filter. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46(11):3894–3907.
- López-Martínez, C. y Pottier, E. (2007). Coherence estimation in synthetic aperture radar data based on speckle noise modeling. *Applied Optics*, 46(4):544–558.
- Ma, X., Shen, H., Yuan, Q., y Zhang, L. (2014). Spatially adaptive nonlocal total variation for PolSAR despeckling. In *IEEE International Geoscience & Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 1670–1676, Quebec City, QC, Canada.
- Ma, X., Shen, H., y Zhang, L. (2016). PolSAR anisotropic diffusion filter with a refined similarity measure and an adaptive fidelity constraint. *International Journal of Remote Sensing*, 37(24):5988–6011.
- Maselli, F., Conese, C., Petkov, L., y Resti, R. (1992). Inclusion of prior probabilities derived from a nonparametric process into the maximum likelihood classifier. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 58:201–207.
- Medasani, S. y Reddy, G. U. (2017). Analysis and evaluation of speckle filters for polarimetric synthetic aperture radar (polsar) data. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(15):4916–4927.

- Narayanan, R. M., Desetty, M. K., y Reichenbach, S. E. (2002). Effect of spatial resolution on information content characterization in remote sensing imagery based on classification accuracy. *International Journal of Remote Sensing*, 23(3):537–553.
- Narayanan, R. M., Sankaravadivelu, T. S., y Reichenbach, S. E. (2000). Dependence of image information content on gray-scale resolution. *Geocarto International*, 15(4):17–30.
- Nascimento, A. D. C. (2012). *Teoria Estatística da Informação para Dados de Radar de Abertura Sintética Univariados e Polarimétricos*. Tese de doutorado em estatística, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.
- Nascimento, A. D. C., Cintra, R. J., y Frery, A. C. (2010). Hypothesis testing in speckled data with stochastic distances. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 48(1):373–385.
- Negri, R. G., Frery, A. C., Silva, W. B., Mendes, T. S. G., y Dutra, L. V. (2018). Region-based classification of PolSAR data using radial basis kernel functions with stochastic distances. *International Journal of Digital Earth*, page in press.
- Oliver, C. y Quegan, S. (1998). *Understanding Synthetic Aperture Radar Images*. SciTech Publishing Inc.
- Palacio, M. G., Ferrero, S. B., y Frery, A. C. (2017). Information content in SAR images: A classification accuracy viewpoint. In *2017 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS 2017*, pages 5307–5310, Fort Worth, TX, USA.
- Palacio, M. G., Ferrero, S. B., y Frery, A. C. (2019). Revisiting the effect of spatial resolution on information content based on classification results. *International Journal of Remote Sensing*, 40(12):4489–4505.
- Pottier, E. y Ferro-Famil, L. (2012). Polsarpro V5.0: An ESA educational toolbox used for self-education in the field of POLSAR and POL-INSAR data analysis. In *2012 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, pages 7377–7380.

- R Core Team (2018). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Song, W., Li, M., Zhang, P., Wu, Y., Jia, L., y An, L. (2015). The $WG\gamma$ distribution for multilook polarimetric SAR data and its application. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 12(10):2056–2060.
- Strahler, A. H. (1980). The use of prior probabilities in maximum likelihood classification of remotely sensed data. *Remote Sensing of Environment*, 10:135–163.
- Tison, C., Pourthie, N., y Souyris, J. C. (2007). Target recognition in SAR images with support vector machines (SVM). In *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, pages 456–459.
- Ulaby, F. T. y Elachi, C. (1990). *Radar Polarimetry for Geoscience Applications*. Artech House, Norwood.
- Uozumi, J. y Asakura, T. (1980). First-order probability density function of the laser speckle phase. *Optical and Quantum Electronics*, 12(6):477–494.
- Vapnik, V. N. (1995). *The nature of statistical learning theory*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA.
- Wang, Q. (2013). Discussion on the fully developed speckle field. *International Journal for Light and Electron Optics*, 124(17):2948–2950.
- Yueh, S., Kong, J., Jao, J., Shin, R., y Novak, L. (1989). K-distribution and polarimetric terrain radar clutter. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 3(8):747–768.