

TESIS DOCTORAL

**LOS DOBLES DE DRINFELD DEL PLANO DE JORDAN, DEL SÚPER
PLANO DE JORDAN Y DE SUS VERSIONES RESTRINGIDAS.**

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA, ASTRONOMÍA Y COMPUTACIÓN



HÉCTOR MARTÍN PEÑA POLLASTRI
DIRECTOR: NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH



Este documento está realizado bajo una licencia Creative Commons "Reconocimiento - Compartir Igual 4.0 Internacional.

Resumen

En esta tesis doctoral consideramos álgebras de Hopf naturalmente asociadas al plano de Jordan, al súper plano de Jordan y a sus versiones restringidas en característica impar, esto es los dobles de Drinfeld de sus bosonizaciones. Las describimos de varias maneras y calculamos sus módulos simples.

El plano de Jordan es un álgebra cuadrática bien conocida en geometría no conmutativa y en la teoría de grupos cuánticos. Cibils, Lauda y Witherspoon en 2009 observaron que es un álgebra de Nichols en característica 0, y calcularon el álgebra de Nichols correspondiente en característica positiva, que resulta de dimensión finita y al cual llamaremos *plano de Jordan restringido*. El súper plano de Jordan, introducida por Andruskiewitsch, Angiono y Heckenberger en 2016, es un álgebra con dos generadores, una relación cuadrática y una cúbica; en característica 0 es un álgebra de Nichols. En 2019 los mismos autores calcularon el álgebra de Nichols correspondiente en característica positiva, aún de dimensión finita, al cual llamaremos *súper plano de Jordan restringido*. Estas dos álgebras son importantes en el programa de clasificación de álgebras de Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita.

En el capítulo dos consideramos en primer lugar el plano de Jordan restringido, su bosonización H_J por un grupo cíclico y el correspondiente doble de Drinfeld $D(H_J)$ al cual presentamos por generadores y relaciones. Se sigue de esta presentación que $D(H_J)$ es una extensión abeliana (como álgebra de Hopf) del álgebra envolvente restringida $u(\mathfrak{sl}_2)$ por un álgebra de Hopf local. Esto nos permite concluir que los módulos simples sobre $D(H_J)$ son los mismos que los de $u(\mathfrak{sl}_2)$. Luego construimos un cubrimiento \tilde{D} de $D(H_J)$ de dimensión infinita y probamos que es una extensión abeliana del álgebra envolvente $U(\mathfrak{sl}_2)$ por el álgebra de funciones regulares en un grupo algebraico soluble. Así, obtenemos un diagrama conmutativo de nueve álgebras de Hopf con tres filas exactas y tres columnas exactas cuyas flechas verticales son (una especie de) morfismos de Frobenius cuánticos.

En el capítulo tres obtenemos resultados análogos a partir del súper plano de Jordan restringido, pero relacionados con la categoría de súper espacios vectoriales. En efecto el doble de Drinfeld E así construido resulta una bosonización de una súper álgebra de Hopf \mathcal{E} ; esto es $E \simeq \mathcal{E} \# \mathbb{k}C_2$. Además \mathcal{E} resulta una extensión súper abeliana del álgebra envolvente restringida de la súper álgebra de Lie $\mathfrak{osp}(1|2)$ por una súper álgebra de Hopf local, nos permite concluir que los módulos simples sobre \mathcal{E} son los mismos que los de $u(\mathfrak{osp}(1|2))$. Luego construimos un cubrimiento $\tilde{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} de dimensión infinita, que es una extensión súper abeliana del álgebra envolvente $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ por el álgebra de funciones regulares en un súper grupo algebraico soluble. Así, obtenemos un diagrama conmutativo de nueve súper álgebras de Hopf.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi director, Nicolás Andruskiewitsch, por su guía, dedicación, sabiduría y enseñanzas durante todos estos años.

A mis padres, Héctor y Teresita, por su apoyo durante toda la vida. Sin su soporte esta tesis no existiría.

A mis hermanos, Marcos y Marianela, por su apoyo, amistad y alegría incondicional.

A mis primos, tíos y familiares que siempre estuvieron ahí para darme su cariño y apoyo.

A mis amigos de toda la vida, por siempre hacer mi vida mejor.

A los jurados de esta tesis, Iván Angiono, Giovanna Carnovale y Adrián Andrada, por sus comentarios y correcciones.

A la UNC por haberme brindado educación de grado y posgrado de calidad, laica y gratuita.

A CONICET por el apoyo económico.

Índice

Resumen	2
Agradecimientos	3
1 Preliminares	8
1.1 Notación y convenciones	8
1.2 Álgebras de Hopf	8
1.3 Nociones de Categorías tensoriales trenzadas	11
1.4 Súper espacios vectoriales y súper álgebras	17
1.5 Módulos y súper módulos de Yettern-Drinfeld	19
1.6 Álgebras de Nichols	22
1.7 Doble de Drinfeld	23
2 El plano de Jordan	28
2.1 Introducción	28
2.2 El doble del plano de Jordan restringido	29
2.3 El doble del Plano de Jordan	35
2.4 Álgebras de Pre-Nichols del plano de Jordan restringido	41
2.5 El dual graduado del plano de Jordan	47
3 El súper plano de Jordan	50
3.1 Objetos de interés	51
3.2 El doble del super plano de Jordan	55
3.3 El doble del super plano de Jordan restringido	62

Introducción

En física teórica el estudio de las simetrías de sistemas físicos resulta fundamental debido al teorema demostrado por Emy Noether [N] que las conecta con cantidades conservadas. Resulta de interés estudiar álgebras cuya teoría de representaciones pueda ser usada para modelar simetrías físicas. Estas categorías deben cumplir:

- Dadas las simetrías de dos sistemas A y B , debe ser posible construir la simetría del sistema conjunto $A \otimes B$. Es decir, debe ser posible realizar un producto tensorial.
- Dada la simetría de un sistema A debe ser posible describir la simetría del sistema correspondiente a tomar antipartículas. Es decir debe haber una noción de dual de una representación.

Estas dos propiedades llevan naturalmente a la definición de categoría tensorial. Las categorías de representaciones de álgebras de Hopf son de este tipo. Por lo que la construcción de nuevas álgebras de Hopf con buenas teorías de representaciones da lugar a posibles nuevas teorías físicas.

Los grupos cuánticos de Drinfeld y Jimbo [D], y sus versiones finitas introducidas por Lusztig [L1, L2] son de los primeros ejemplos de álgebras de Hopf que no son conmutativas ni cocommutativas. Resultan ser deformaciones por un parámetro q de álgebras envolventes de álgebras de Lie semisimples. Desde el punto de vista puramente matemático resulta remarkable que cuando q es una raíz de la unidad, la teoría de representaciones de estos grupos cuánticos en característica cero se asemeja a las de grupos algebraicos en característica positiva [L2]. Parte de esta analogía surge del hecho que los grupos cuánticos cuentan con un morfismo de Frobenius. Es por esta observación que surge la idea de definir nuevas álgebras de Hopf en característica cero mirando lo que ocurre en característica positiva.

Los ejemplos anteriores también pueden ser construidos a partir de dobles de Drinfeld de bosonizaciones de un álgebra de Nichols. En ese sentido estudiar dobles de Drinfeld de bosonizaciones de álgebras de Nichols es una generalización del estudio de grupos cuánticos. El objetivo principal es entonces la construcción de nuevas categorías tensoriales y de fusión a partir de las álgebras de Nichols definidas en los últimos años. Los antecedentes más importantes son los siguientes:

- En [AAH1] se clasificó una familia de espacios vectoriales trenzados cuya álgebra de Nichols tiene dimensión de Gelfand-Kirillov finita. La clasificación está codificada en grafos al estilo diagramas generalizados de Cartan pero con *bloques* y *puntos*.
- En [AAH3] se mostró que en característica positiva análogos de las álgebras anteriores tienen cocientes de dimensión finita dando lugar a nuevos ejemplos de álgebras de Hopf punteadas.

De las álgebras de Nichols más sencillas en los trabajos anteriores se encuentran el plano de Jordan, súper Jordan y sus versiones restringidas de dimensión finita. En este trabajo

construimos los dobles \tilde{D} asociados a estas álgebras. Concretamente son los dobles de Drinfeld de las bosonizaciones de las mismas.

Detallamos a continuación de forma resumida la estrategia que seguimos para obtener estas nuevas álgebras. En característica cero, cada uno de los espacios vectoriales trenzados V de la clasificación en [AAH1] da lugar a un álgebra de Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita $\tilde{\mathcal{B}}$. En cambio en característica positiva las álgebras $\tilde{\mathcal{B}}$ resultan ser álgebras de pre-Nichols y tienen un cociente de dimensión finita $\tilde{\mathcal{B}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ descrito en [AAH3]. Si V admite una realización como módulo de Yetter Drinfeld sobre un grupo infinito \tilde{G} , buscamos ahora una realización como módulo de Yetter Drinfeld sobre un grupo finito G en un cuerpo de característica p de forma que $\mathbb{k}\tilde{G} \twoheadrightarrow \mathbb{k}G$. Construimos entonces álgebras de Hopf de dimensión finita de la forma $A := \mathcal{B}\#\mathbb{k}G$ y calculamos su doble de Drinfeld $D(A)$.

Luego buscamos construir un cubrimiento de dimensión de Gelfand-Kirillov finita $\tilde{D} \twoheadrightarrow D(A)$ cuya definición tenga sentido en característica cero. Lo realizamos de la siguiente manera:

- (i) Realizamos el espacio vectorial trenzado dual V^* como módulo de Yetter Drinfeld sobre un álgebra coconmutativa U contenida en el dual de Sweedler de $\mathbb{k}\tilde{G}$.
- (ii) Calculamos el álgebra de Nichols $\tilde{\mathcal{B}}^d$ del espacio trenzado dual V^* en característica cero. Está será un álgebra de pre-Nichols en característica positiva.
- (iii) Construimos un par torcido entre las álgebras $\mathbb{H} = \tilde{\mathcal{B}}\#\mathbb{k}\tilde{G}$ y $\mathbb{K} = \tilde{\mathcal{B}}^d\#U$ inspirado en el par que existe entre las álgebras H y H^* en característica positiva.
- (iv) Usamos ese par torcido para obtener \tilde{D} como una deformación por un 2-cociclo de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ al igual que en [DT].
- (v) Verificar que el álgebra de Hopf \tilde{D} se proyecta en $D(A)$ en característica positiva y que su definición está disponible en característica cero.

Luego procederemos a estudiar los módulos simples y familias de indescomponibles de los dobles. Por construcción ellas admitirán una descomposición triangular

$$\tilde{D} \simeq \tilde{\mathcal{B}} \otimes (\mathbb{k}\tilde{G} \otimes U) \otimes \tilde{\mathcal{B}}^d,$$

por lo que la teoría de módulos de Verma descrita en [V] está disponible. Estos dobles además resultan ser extensiones de álgebras envolventes de álgebras o superálgebras de Lie. Conectando así estos nuevos objetos con teoría clásica.

En el caso del plano de Jordan también estudiamos y clasificamos parcialmente sus álgebras de pre-Nichols en característica positiva.

1 | Preliminares

En este primer capítulo establecemos algunas definiciones y resultados básicos del área. Aprovechando además para introducir notación cuando sea necesario para el resto del trabajo.

1.1 | Notación y convenciones

Si $\ell < n \in \mathbb{N}_0$, entonces denotamos por $\mathbb{I}_{\ell,n} = \{\ell, \ell + 1, \dots, n\}$, $\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_{1,n}$.

Denotaremos siempre por \mathbb{k} un cuerpo algebraicamente cerrado y por \mathbb{F}_p el cuerpo de p elementos donde p es un número primo. La característica de \mathbb{k} se especificará explícitamente según el contexto.

El grupo cíclico de orden n es denotado por C_n y el grupo cíclico infinito por Γ . Siempre los escribimos con notación multiplicativa. El centro de un grupo G es denotado por $Z(G)$; de forma análoga el centro de un álgebra.

Sea A un álgebra. El conjunto de clases de isomorfismo de los módulos simples de dimensión finita de A es denotado por $\text{Irrep } A$. No hacemos distinción entre la clase de un elemento en $\text{Irrep } A$ y uno de sus representantes. Un elemento $x \in A$ es normal si $Ax = xA$. Si B es una subálgebra de A , entonces Ind_B^A denota el functor de inducción $M \mapsto A \otimes_B M$.

El álgebra de funciones regulares de un supergrupo (afín) G la denotamos por $\mathcal{O}(G)$. Esta es por definición una superálgebra de Hopf conmutativa finitamente generada. Ver [M] para las definiciones. Un caso particular es el de los grupos algebraicos afines que usamos la misma notación. Como es usual, \mathbf{G}_a es el grupo algebraico aditivo $(\mathbb{k}, +)$ y \mathbf{G}_m es el grupo algebraico multiplicativo $(\mathbb{k}^\times, \cdot)$.

Sea $V = \mathbb{k}\{X_1, \dots, X_m\}$ un espacio vectorial de dimensión $m \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\Lambda(V) = \Lambda(X_1, \dots, X_m)$ el álgebra exterior de V .

1.2 | Álgebras de Hopf

En esta sección damos brevemente la definición de álgebra de Hopf y fijamos notación. Buenas referencias para el tema son [R] y [Mo].

Definición 1.2.1. Una \mathbb{k} -álgebra asociativa con unidad A es un terna (A, m, u) donde A es un \mathbb{k} -espacio vectorial, $m: A \otimes A \rightarrow A$ y $u: \mathbb{k} \rightarrow A$ son transformaciones \mathbb{k} -lineales llamadas *multiplicación* y *unidad*. Estas son tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \text{id} \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & A \otimes A & \\
 u \otimes \text{id} \nearrow & & \nwarrow \text{id} \otimes u \\
 \mathbb{k} \otimes A & & A \otimes \mathbb{k} \\
 \searrow \cong & m \downarrow & \swarrow \cong \\
 & A &
 \end{array}$$

El diagrama de la izquierda recibe el nombre de *asociatividad*, mientras que el de la derecha es el axioma de *unidad*. Dados $x, y \in A$, escribimos $xy = m(x \otimes y)$ para la multiplicación. Y el elemento $1_A := u(1)$ se llama también unidad del álgebra.

En particular una \mathbb{k} -álgebra es un anillo. Por lo que tenemos la definiciones de ideal y cociente usuales. Además dados x_1, \dots, x_n elementos de un álgebra, el subálgebra generada la denotamos por $\mathbb{k}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, mientras que $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ denota el ideal generado por esos elementos. El producto tensorial $A \otimes B$ de dos álgebras (A, m_A, u_A) y (B, m_B, u_B) es también un álgebra con $m_{A \otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (\text{id} \otimes \tau \circ \text{id})$ y $u_{A \otimes B} = u_A \otimes u_B$. Aquí $\tau: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ es el intercambio de los dos tensores, es decir, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ para todo $a \in A, b \in B$.

Dualmente tenemos la definición de coálgebra.

Definición 1.2.2. Una \mathbb{k} -coálgebra coasociativa con counidad C es un terna (C, Δ, ϵ) donde C es un \mathbb{k} -espacio vectorial, $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ y $\epsilon: C \rightarrow \mathbb{k}$ son transformaciones \mathbb{k} -lineales llamadas *comultiplicación* y *counidad*. Estas son tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C,
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \simeq \swarrow & & \searrow \simeq \\
 \mathbb{k} \otimes C & & C \otimes \mathbb{k} \\
 \epsilon \otimes \text{id} \swarrow & \Delta \downarrow & \searrow \text{id} \otimes \epsilon \\
 & C \otimes C &
 \end{array}
 \tag{1.2.1}$$

El diagrama de la izquierda recibe el nombre de *coasociatividad*, mientras que el de la derecha es el axioma de *counidad*.

Las definiciones de morfismos de álgebra y coálgebra son las naturales que uno esperaría, y no las escribiremos explícitamente aquí.

Aprovechamos para introducir la notación de Sweedler para coálgebras. Si C es una coálgebra y $x \in C$, denotamos al elemento $\Delta(x) = \sum_i x_i \otimes y_i \in C \otimes C$ por $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Es decir, omitimos el signo de sumatoria y tratamos el tensor como si fuera simple. Por el axioma de coasociatividad denotamos por $x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$ al elemento $\Delta \circ (\text{id} \otimes \Delta)(x)$ o $\Delta \circ (\Delta \otimes \text{id})(x)$. El axioma de counidad puede ser escrito de la siguiente forma en la notación de Sweedler

$$\epsilon(x_{(1)})x_{(2)} = x_{(1)}\epsilon(x_{(2)}) = x, \qquad \forall x \in C.$$

Esta notación se extiende a comódulos, cuya definición damos a continuación.

Definición 1.2.3. Sea C una coálgebra sobre \mathbb{k} . Un C -comódulo a izquierda es un par (M, δ) , donde M es un espacio vectorial sobre \mathbb{k} y $\delta: M \rightarrow C \otimes M$ es una transformación lineal tal que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes M & \xleftarrow{\text{id} \otimes \Delta} & C \otimes M \\
 \delta \otimes \text{id} \uparrow & & \uparrow \delta \\
 C \otimes M & \xleftarrow{\delta} & M,
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & C \otimes M & \\
 \epsilon \otimes \text{id} \swarrow & & \searrow \delta \\
 M \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\simeq} & M.
 \end{array}$$

Dado $x \in C$ Denotamos además el elemento $\delta(x) \in C \otimes M$ por $x_{(-1)} \otimes x_{(0)}$.

Damos ahora la definición de biálgebra y álgebra de Hopf.

Definición 1.2.4. Una *biálgebra* A es una 6-upla $(A, m, u, \Delta, \epsilon)$ tal que:

- (i) (A, m, u) es una \mathbb{k} -álgebra asociativa con unidad.
- (ii) (A, Δ, ϵ) es una \mathbb{k} -coálgebra coasociativa con counidad.
- (iii) Δ y ϵ son morfismos de álgebras.

Si además existe $\mathcal{S}: A \rightarrow A$ transformación \mathbb{k} -lineal tal que

$$\mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)} = x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)}) = \epsilon(x)1_A, \quad \forall x \in A,$$

entonces la biálgebra A es una *álgebra de Hopf*. El morfismo \mathcal{S} recibe el nombre de antipoda.

Ejemplo 1.2.5. (i) Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $\mathbb{k}G$ es un álgebra de Hopf con $\Delta(g) = g \otimes g$, $\epsilon(g) = 1$ y $\mathcal{S}(g) = g^{-1}$ para todo $g \in G$.

- (ii) Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. El álgebra universal envolvente $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, $\epsilon(x) = 0$ y $\mathcal{S}(x) = -x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Considerando los ejemplos anteriores, definimos los siguientes elementos destacados en un álgebra de Hopf A .

- (i) Los elementos $g \in A$ tales que $\Delta(g) = g \otimes g$ se dicen de *tipo grupo*. El conjunto de los elementos tipo grupo de A se denota por $G(A)$.
- (ii) Los elementos $x \in A$ tales que $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ se dicen *primitivos*. El conjunto de los elementos primitivos de A se denota por $\mathcal{P}(A)$.
- (iii) Si g, h son elementos tipo grupo, los elementos $x \in A$ tales que $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h$ se dicen (g, h) -primitivos. El conjunto de los elementos (g, h) -primitivos de A se denota por $\mathcal{P}_{g,h}(A)$.

La siguiente familia de álgebras de Hopf será importante también en el trabajo.

Definición 1.2.6. Si A es un álgebra de Hopf, esta se dice *cuasi triangular* si existe un elemento invertible $\mathcal{R} \in A \otimes A$ tal que

- (i) $\mathcal{R}\Delta(x)\mathcal{R}^{-1} = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$ para todo $x \in A$;
- (ii) $(\Delta \otimes \text{id})(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}$;
- (iii) $(\text{id} \otimes \Delta)(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$;

donde $\mathcal{R}_{12} = \phi_{12}(\mathcal{R})$, $\mathcal{R}_{13} = \phi_{13}(\mathcal{R})$ y $\mathcal{R}_{23} = \phi_{23}(\mathcal{R})$. Los morfismos de álgebras $\phi_{12}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes A$, $\phi_{13}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes A$, $\phi_{23}: A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes A$ están determinados por

$$\phi_{12}(x \otimes y) = x \otimes y \otimes 1, \quad \phi_{13}(x \otimes y) = x \otimes 1 \otimes y, \quad \phi_{23}(x \otimes y) = 1 \otimes x \otimes y.$$

El elemento \mathcal{R} recibe el nombre de R -matriz.

Recordamos también la definición de sucesión exacta corta de álgebras de Hopf. Ver por ejemplo [AD, Sch, H].

Definición 1.2.7. Una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf

$$A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B$$

es exacta si las siguientes condiciones son válidas:

- (i) ι is inyectiva. (iii) $\ker \pi = C\iota(A)^+$.
(ii) π is suryectiva. (iv) $\iota(A) = C^{\text{co}}\pi$.

Observación 1.2.8. Si $A \xrightarrow{\iota} C$ es fielmente plana y $\iota(A)$ es estable por la acción adjunta a izquierda de C entonces (i), (ii) y (iii) implican (iv), ver [AD, 1.2.5, 1.2.14], [Sch].

1.3 | Nociones de Categorías tensoriales trenzadas

En esta sección introducimos un poco el lenguaje de categorías tensoriales y categorías tensoriales trenzadas. Damos la conexión con las álgebras de Hopf e introducimos la importante categoría de módulos de Yettern-Drinfeld sobre un álgebra de Hopf. El material de esta sección está principalmente basado en [EGNO]. Asumiremos familiaridad del lector por el lenguaje general de la teoría de Categorías, es decir con la noción de functor, objeto, morfismo, transformación natural y propiedad universal.

1.3.1 | Categorías Aditivas, \mathbb{k} -lineales y Abelianas

Primero damos la definición de categoría aditiva, \mathbb{k} -lineal y abeliana, pues nos será útil para definir categoría tensorial más adelante.

Definición 1.3.1. Una categoría *aditiva* es una categoría \mathcal{C} tal que:

- (i) El conjunto de homomorfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tienen estructura de grupo abeliano de modo tal que la composición $\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ es bilineal.
(ii) Existe un objeto en \mathcal{C} que es inicial y final, que llamaremos objeto nulo, y lo denotamos por 0 .
(iii) Existe un bifunctor $\oplus: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $(X, Y) \mapsto X \oplus Y$ y morfismos

$$\begin{aligned} \iota_X: X &\rightarrow X \oplus Y, & \iota_Y: Y &\rightarrow X \oplus Y, \\ p_X: X \oplus Y &\rightarrow X, & p_Y: X \oplus Y &\rightarrow Y, \end{aligned}$$

que satisfacen $p_X \iota_X = \text{id}_X$, $p_Y \iota_Y = \text{id}_Y$, $\iota_X p_X + \iota_Y p_Y = \text{id}_{X \oplus Y}$.

La categoría \mathcal{C} se dice *\mathbb{k} -lineal* si es aditiva pero en (i) los espacios de homomorfismos tienen la estructura de \mathbb{k} -espacios vectoriales.

Un functor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre categorías \mathbb{k} -lineales se dice *aditivo* (resp. *\mathbb{k} -lineal*) si los mapas

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad X, Y \in \mathcal{C},$$

son morfismos de grupos abelianos (resp. transformaciones \mathbb{k} -lineales).

Definición 1.3.2. Una categoría *abeliana* es una categoría aditiva \mathcal{C} en donde para todo morfismo $\phi: X \rightarrow Y$ hay una secuencia

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C$$

con las siguientes propiedades:

- (i) $j \circ i = \phi$.
- (ii) El par (K, k) es un núcleo de ϕ y (C, c) un conúcleo de ϕ .
- (iii) El par (I, i) es un conúcleo de k y (I, j) es un núcleo para c .

Observación 1.3.3. Hay un famoso teorema de Freyd y Mitchell que dice que la definición anterior de categoría abeliana puede reemplazarse con ser una categoría equivalente a una subcategoría plena de módulos a izquierda sobre una \mathbb{k} -álgebra asociativa con unidad. Por lo que uno puede pensar que está trabajando con una categoría de módulos al trabajar con una categoría abeliana.

Definición 1.3.4. Sea \mathcal{C} una categoría abeliana \mathbb{k} -lineal. Se dice que un objeto X tiene *longitud finita* si existe una filtración

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n = X,$$

tal que X_i/X_{i-1} es simple para todo i , es decir, no posee otros subobjetos que no sea si mismo o el objeto trivial. Una filtración como esta recibe el nombre de *Serie de Jordan-Hölder* de X .

Definición 1.3.5. Una categoría abeliana \mathbb{k} -lineal \mathcal{C} se dice *localmente finita* si cumple:

- los espacios vectoriales de morfismos $\text{Hom}_{\mathcal{C}}$ tienen dimensión finita, y
- todos los objetos de \mathcal{C} tienen longitud finita.

Se dice que \mathcal{C} es *finita* si además:

- todo objeto simple de \mathcal{C} admite una cubierta proyectiva, y
- hay finitas clases de isomorfismo de objetos simples.

1.3.2 | Categorías monoidales

Ahora introducimos la categorificación de la noción de monoide y la noción de duales. Este es un ingrediente clave para la definición de categoría tensorial más adelante.

Definición 1.3.6. Una *categoría monoidal* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ donde

- \mathcal{C} es una categoría y $\mathbf{1}$ es un objeto en \mathcal{C} ;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un bifuntor, llamado *producto tensorial*;
- $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$, $r_X : X \otimes \mathbf{1} \rightarrow X$, y $l_X : \mathbf{1} \otimes X \rightarrow X$ son isomorfismos naturales en $X, Y, Z \in \mathcal{C}$,

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
 ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \xrightarrow{a_{X \otimes Y, Z, W}} & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\
 a_{X, Y, Z} \otimes \text{id}_W \downarrow & & \downarrow a_{X, Y, Z \otimes W} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
 a_{X, Y \otimes Z, W} \searrow & & \swarrow \text{id}_X \otimes a_{Y, Z, W} \\
 & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W), &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y & \xrightarrow{a_{X,\mathbf{1},Y}} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \\
\searrow r_X \otimes \text{id}_Y & & \swarrow \text{id}_X \otimes l_Y \\
& X \otimes Y &
\end{array}$$

A continuación introducimos la noción de functor monoidal.

Definición 1.3.7. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', a', \mathbf{1}', l', r')$ categorías monoidales. Un *functor monoidal* de \mathcal{C} a \mathcal{C}' es una terna (F, F^0, F^2) donde:

- $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un functor;
- $F^0: \mathbf{1}' \rightarrow F(\mathbf{1})$ es un isomorfismo; y
- $F^2: \otimes' \circ (F \times F) \rightarrow F \circ \otimes$ es un isomorfismo natural,

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & \xrightarrow{a'_{F(X),F(Y),F(Z)}} & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \\
\downarrow F_{X,Y}^2 \otimes' \text{id}_{F(Z)} & & \downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes' F_{Y,Z}^2 \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \\
\downarrow F_{X \otimes Y, Z}^2 & \xrightarrow{F(a_{X,Y,Z})} & \downarrow F_{X,Y \otimes Z}^2 \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) & & F(X \otimes (Y \otimes Z)),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{1}' \otimes' F(X) & \xrightarrow{l'_{F(X)}} & F(X) \\
\downarrow F^0 \otimes \text{id}_{F(X)} & & \downarrow F(l_X)^{-1} \\
F(\mathbf{1}) \otimes' F(X) & \xrightarrow{F^2_{\mathbf{1},X}} & F(\mathbf{1} \otimes X),
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F(X) \otimes' \mathbf{1}' & \xrightarrow{r'_{F(X)}} & F(X) \\
\downarrow \text{id}_{F(X)} \otimes u & & \downarrow F(r_X)^{-1} \\
F(X) \otimes' F(\mathbf{1}) & \xrightarrow{F^2_{X,\mathbf{1}}} & F(X \otimes \mathbf{1}).
\end{array}$$

Una *equivalencia de categorías monoidales* es un functor monoidal (F, F^0, F^2) tal que F es una equivalencia de categorías.

Ahora necesitamos definir y describir la noción de duales en una categoría monoidal. Sea \mathcal{C} una categoría monoidal fija. En lo que sigue asumimos que los isomorfismos de la unidad son la identidad para simplificar notación. Sea X un objeto en \mathcal{C} .

Definición 1.3.8. Un *dual a izquierda* de X es una terna $(X^*, \text{ev}_X, \text{coev}_X)$ donde X^* es un objeto en \mathcal{C} , $\text{ev}_X: X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}$ y $\text{coev}_X: \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$ son morfismos en \mathcal{C} tales que las composiciones

$$X \simeq \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{\text{coev}_X \otimes \text{id}_X} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{a_{X,X^*,X}} X \otimes (X^* \otimes X) \xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{ev}_X} X \otimes \mathbf{1} \simeq X,$$

$$X^* \simeq X^* \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\text{id}_{X^*} \otimes \text{coev}_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a_{X^*,X,X^*}^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \xrightarrow{\text{ev}_{X^*} \otimes \text{id}_{X^*}} \mathbf{1} \otimes X^* \simeq X^*.$$

son las identidades de X y X^* respectivamente.

De forma similar, un *dual a derecha* de X es una terna $({}^*X, \text{ev}'_X, \text{coev}'_X)$ donde *X es un objeto en \mathcal{C} , $\text{ev}'_X: X \otimes {}^*X \rightarrow \mathbf{1}$ y $\text{coev}'_X: \mathbf{1} \rightarrow {}^*X \otimes X$ son morfismos en \mathcal{C} tales que las composiciones

$$\begin{aligned} X \simeq X \otimes \mathbf{1} &\xrightarrow{\text{id}_X \otimes \text{coev}'_X} X \otimes ({}^*X \otimes X) \xrightarrow{a_{X, {}^*X, X}^{-1}} (X \otimes {}^*X) \otimes X \xrightarrow{\text{ev}'_X \otimes \text{id}_X} \mathbf{1} \otimes X \simeq X, \\ {}^*X \simeq \mathbf{1} \otimes {}^*X &\xrightarrow{\text{coev}'_X \otimes \text{id}_{{}^*X}} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \xrightarrow{a_{{}^*X, X, {}^*X}} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \xrightarrow{\text{id}_{{}^*X} \otimes \text{ev}'_X} {}^*X \otimes \mathbf{1} \simeq {}^*X. \end{aligned}$$

En general si hay un morfismo $f: X \rightarrow Y$ entre dos objetos con duales a izquierda, entonces se puede definir $f^*: Y^* \rightarrow X^*$ el morfismo dual por la composición

$$f^* = (\text{ev}_Y \otimes \text{id}_{X^*}) \circ (\text{id} \otimes f \otimes \text{id}) \circ (\text{id}_{Y^*} \otimes \text{coev}_X).$$

De forma análoga se puede definir *f para duales a derecha.

Definición 1.3.9. Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto posee duales a derecha e izquierda.

1.3.3 | Categorías tensoriales y tensoriales trenzadas

Finalmente damos la definición de categoría tensorial a continuación.

Definición 1.3.10. Una categoría \mathcal{C} se dice *multitensorial* si

- es abeliana \mathbb{k} -lineal;
- es localmente finital;
- es monoidal rígida;
- el bifunctor $\times: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es bilineal en morfismos.

Si además $\text{end}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \simeq \mathbb{k}$ entonces \mathcal{C} es una *categoría tensorial*.

El siguiente ejemplo es la principal razón por la que el marco de las categorías tensoriales es útil para estudiar álgebras de Hopf.

Ahora ilustramos estas nociones con una serie de ejemplos que serán de vital importancia en este trabajo. Habrá otros ejemplos importantes más adelante que tendrán su propia sección.

Ejemplo 1.3.11. El primer ejemplo de categoría tensorial es la categoría Vec de espacios vectoriales de dimensión finita. Al ser está a categoría de módulos sobre un cuerpo, es claramente una categoría abeliana. Se puede ver fácilmente que también es \mathbb{k} -lineal finita. La estructura monoidal está dada por el producto tensorial sobre \mathbb{k} usual. Los isomorfismos de asociatividad y unidad son los canónicos para el producto tensorial y el objeto unidad es el espacio de dimensión uno que denotamos \mathbb{k} . Describimos ahora los duales. Si X es un espacio de dimensión finita, fijamos una base $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ y una base dual $(x^i)_{i \in \mathbb{I}}$ de $X^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(X, \mathbb{k})$. El morfismo $\text{ev}_X: X^* \otimes X \rightarrow \mathbb{k}$ es la evaluación de funciones, mientras que $\text{coev}: \mathbb{k} \rightarrow X \otimes X^*$ está determinado por $1 \mapsto \sum_i x_i \otimes x^i$.

Observación 1.3.12. En el caso del ejemplo anterior y para fijar notación identificamos los espacios $\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \simeq (\mathcal{V} \otimes \mathcal{V})^*$, donde \mathcal{V} es un espacio vectorial de dimensión finita, por

$$\langle f \otimes f', x \otimes y \rangle = \langle f, x \rangle \langle f', y \rangle, \quad f, f' \in \mathcal{V}^*, x, y \in \mathcal{V}. \quad (1.3.1)$$

Ejemplo 1.3.13. Si A es un álgebra de Hopf, entonces la categoría de los A -módulos a izquierda es tensorial. En efecto dados dos A -módulos X, Y , se define una estructura de A -módulo en $X \otimes Y$ mediante la regla:

$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} \cdot v \otimes h_{(2)} \cdot w, \quad h \in H, v \in X, w \in Y.$$

Los isomorfismos de asociatividad y unidad son los mismos que en Vec , donde la unidad es un A -módulo via la comultiplicación: $h \cdot 1 = \varepsilon(h)$. El dual es X^* es el mismo que para espacios vectoriales con estructura de A -módulo dada por

$$(h \cdot f)(v) = f(\mathcal{S}(h) \cdot v), \quad h \in A, \quad v \in X, \quad f \in X^*.$$

Mientras que los duales a derecha ${}^*X \otimes$ tienen la estructura de módulo dada por

$$(h \cdot f)(v) = f(\mathcal{S}^{-1}(h) \cdot v), \quad h \in A, \quad v \in X, \quad f \in {}^*X \otimes {}^*.$$

Si $\mathcal{S}^2 \neq \text{id}$, esto da un ejemplo de categoría tensorial donde los duales a izquierda y derecha no coinciden.

Ejemplo 1.3.14. Dado un grupo finito G , consideremos la categoría vec_G de espacios vectoriales G -graduados de dimensión finita $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$. Los morfismos son las transformaciones lineales que respetan la graduación. Esta categoría es abeliana \mathbb{k} -lineal localmente finita.

Esta categoría tiene un como producto tensorial el usual de espacios vectoriales más una graduación determinada como sigue: si $X, Y \in \text{vec}_G$ entonces $X \otimes Y$ tiene una G -graduación:

$$(X \otimes Y)_g = \bigoplus_{h \in G} X_h \otimes Y_{h^{-1}g}, \quad g \in G.$$

El espacio vectorial dual X^* también es G -graduado, en efecto la componente $(X^*)_g$ son las funcionales lineales con soporte en $X_{g^{-1}}$. Además vec_G hereda los isomorfismos de asociatividad y unidad de Vec , y así es una categoría tensorial.

En las categorías tensoriales en general no ocurre que $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$ a diferencia de los espacios vectoriales. Resulta de nuestro interés definir y describir la estructura que nos permite intercambiar el orden de los tensores. Esto nos lleva naturalmente a la noción central de la sección.

Definición 1.3.15. Una *categoría monoidal trenzada* es una categoría monoidal \mathcal{C} provista de un isomorfismo natural $c_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, $X, Y \in \mathcal{C}$, tal que:

$$\begin{array}{ccccc} (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}} & X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{c_{X,Y \otimes Z}} & (Y \otimes Z) \otimes X \\ c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z \downarrow & & & & \downarrow a_{Y,Z,X} \\ (Y \otimes X) \otimes Z & \xrightarrow{a_{Y,X,Z}} & Y \otimes (X \otimes Z) & \xrightarrow{\text{id}_Y \otimes c_{X,Z}} & Y \otimes (Z \otimes X), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
X \otimes (Y \otimes Z) & \xrightarrow{a_{X,Y,Z}^{-1}} & (X \otimes Y) \otimes Z & \xrightarrow{c_{X \otimes Y, Z}} & Z \otimes (X \otimes Y) \\
\text{id}_X \otimes c_{Y,Z} \downarrow & & & & \downarrow a_{Z,X,Y}^{-1} \\
X \otimes (Z \otimes Y) & \xrightarrow{a_{X,Z,Y}^{-1}} & (X \otimes Z) \otimes Y & \xrightarrow{c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y} & (Z \otimes X) \otimes Y.
\end{array}$$

Una *categoría tensorial trenzada* es una categoría tensorial cuya estructura monoidal subyacente es trenzada.

Ejemplo 1.3.16. La categoría de espacios vectoriales es tensorial trenzada. La trenza es el mapa que intercambia de lugar los tensorandos. Es decir si X e Y son espacios vectoriales, entonces $\tau_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ esta dado por

$$\tau_{X,Y}(x \otimes y) = y \otimes x, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Ejemplo 1.3.17. Si A es un álgebra de Hopf cuasi triangular con R -matriz $\mathcal{R} = \sum_i a_i \otimes b_i$, entonces la categoría de módulos de dimensión finita sobre A es tensorial trenzada. Dados X e Y dos A -módulos, la trenza $c_{X,Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$ esta dada por

$$c_{X,Y}(x \otimes y) = \sum_i b_i \cdot y \otimes a_i \cdot x, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

La importancia de las categorías tensoriales, es que es posible definir la noción de álgebra, coálgebra y álgebra de Hopf en esas categorías. Damos las definiciones a continuación, pero omitiendo los morfismos de asociatividad para mayor sencillez.

Definición 1.3.18. Sea \mathcal{C} una categoría tensorial. Un *álgebra en \mathcal{C}* es una terna (A, m, u) , donde A es un objeto de \mathcal{C} , y $m: A \otimes A \rightarrow A$, $u: \mathbf{1} \rightarrow A$ son morfismos en \mathcal{C} , tales que

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
\text{id} \otimes m \downarrow & & \downarrow m \\
A \otimes A & \xrightarrow{m} & A,
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& A \otimes A & \\
u \otimes \text{id} \nearrow & \downarrow m & \nwarrow \text{id} \otimes u \\
\mathbf{1} \otimes A & & A \otimes \mathbf{1} \\
\searrow \cong & & \swarrow \cong \\
& A &
\end{array}$$

Una *coálgebra en \mathcal{C}* es una terna (C, ε, Δ) donde C es un objeto de \mathcal{C} , y $\varepsilon: C \rightarrow \mathbf{1}$, $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ son morfismos en \mathcal{C} llamadas *comunidad* y *comultiplicación* respectivamente, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
\Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \text{id} \\
C \otimes C & \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C,
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& C & \\
\cong \swarrow & \downarrow \Delta & \searrow \cong \\
\mathbf{1} \otimes C & & C \otimes \mathbf{1} \\
\varepsilon \otimes \text{id} \swarrow & & \searrow \text{id} \otimes \varepsilon \\
& C \otimes C &
\end{array}$$

Notar que un álgebra sobre un cuerpo \mathbb{k} es exactamente lo mismo que un álgebra en la categoría trenzada de espacios vectoriales sobre \mathbb{k} , donde la trenza es la del Ejemplo 1.3.16.

Observación 1.3.19. Si \mathcal{C} es una categoría monoidal trenzada, la trenza da lugar a una estructura monoidal en la categoría de álgebras en \mathcal{C} . En efecto, si (A, m_A, u_A) y (B, m_B, u_B) son álgebras en \mathcal{C} , entonces $A \otimes B = (A \otimes B, m_{A \otimes B}, u_{A \otimes B})$ también lo es, donde $m_{A \otimes B}$ y $u_{A \otimes B}$ están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\xrightarrow{\cong} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{u_A \otimes u_B} A \otimes B, \text{ y} \\ A \otimes B \otimes A \otimes B &\xrightarrow{\text{id}_A \otimes c_{B,A} \otimes \text{id}_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B. \end{aligned}$$

Dualmente, el producto tensorial de dos coálgebras es una coálgebra.

Definición 1.3.20. Un *biálgebra* en una categoría monoidal trenzada \mathcal{C} es una colección $(R, m, u, \Delta, \varepsilon)$, donde R es un objeto de \mathcal{C} con estructuras (R, m, u) de álgebra en \mathcal{C} y (R, Δ, ε) de coálgebra en \mathcal{C} que son compatibles en el sentido de que

$$\Delta: R \rightarrow R \otimes R \text{ y } \varepsilon: R \rightarrow \mathbf{1} \text{ son morfismos de álgebras en } \mathcal{C}.$$

Si además existe un morfismo $\mathcal{S}: R \rightarrow R$ tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & R \otimes R & \xrightarrow{\mathcal{S} \otimes \text{id}} & R \otimes R & \\ & \Delta \nearrow & & \searrow m & \\ R & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{1} & \xrightarrow{u} & R \\ & \Delta \searrow & & \nearrow m & \\ & R \otimes R & \xrightarrow{\text{id} \otimes \mathcal{S}} & R \otimes R & \end{array},$$

entonces R es un *álgebra de Hopf sobre \mathcal{C}* .

1.4 | Súper espacios vectoriales y súper álgebras

En esta sección aplicaremos los conceptos de la sección anterior a una categoría tensorial trenzada específica, la categoría de súper espacios vectoriales. En esta sección $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$.

Definición 1.4.1. La categoría de los súper espacios vectoriales \mathbf{sVec} consiste en los espacios vectoriales \mathbb{C}_2 -graduados. Si $\mathcal{X} \in \mathbf{sVec}$, entonces $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ y si $x \in \mathcal{X}_i$ entonces escribimos $|x| = i$. Los elementos en \mathcal{X}_0 se llaman *pares* y los de \mathcal{X}_1 *impares*. Denotamos además por $|\mathcal{X}| := \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1$ los elementos homogéneos. La subcategoría de los súper espacios vectoriales de dimensión finita la denotamos por \mathbf{svec} .

Este es un caso particular del Ejemplo 1.3.14 y es por ende \mathbf{svec} es una categoría tensorial. Lo que hace interesante a esta categoría particular es que es tensorial trenzada. Dados dos súper espacios vectoriales \mathcal{X}, \mathcal{Z} , tenemos la trenza $c_{\mathcal{X}, \mathcal{Z}}: \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \otimes \mathcal{X}$ dada en elementos homogéneos por

$$c_{\mathcal{X}, \mathcal{Z}}(x \otimes z) = (-1)^{|x||z|} z \otimes x, \quad x \in |\mathcal{X}|, \quad z \in |\mathcal{Z}|.$$

Utilizando los conceptos de la sección anterior podemos definir los conceptos de álgebras, coálgebras y álgebras de Hopf sobre esta categoría.

Definición 1.4.2. Sea $A \in \mathbf{sVec}$. Si

- es un álgebra sobre \mathbf{sVec} , entonces decimos que es una *superálgebra*;
- si es una coálgebra sobre \mathbf{sVec} , entonces decimos que es una *súper coálgebra*;
- si es un álgebra de Hopf sobre \mathbf{sVec} , entonces decimos que es una *superálgebra de Hopf*.

Además si A es una superálgebra, decimos que esta es *súper conmutativa* si

$$ab = (-1)^{|a||b|}ba, \quad a, b \in A.$$

Tenemos también las nociones de *súper módulo* y *súper comódulos*. Estos son módulos y comódulos donde la acción y la coacción son morfismos en la categoría de súper espacios vectoriales.

1.4.1 | Superálgebras de Lie restringidas

En esta sección damos las definiciones básicas de superálgebras de Lie y superálgebras de Lie restringidas.

Definición 1.4.3. Una superálgebra de Lie \mathfrak{g} es un súper espacio vectorial junto con un mapa bilineal graduado $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ llamado súper conmutador que satisface

- $[x, y] = (-1)^{|x||y|}[y, x]$ para todo $x, y \in |\mathfrak{g}|$.
- $(-1)^{|z||x|}[x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [y, x]] = 0$ para todo $x, y, z \in |\mathfrak{g}|$

Es posible definir el álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ de una superálgebra de Lie \mathfrak{g} como el cociente del álgebra tensorial

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g}) / (x \otimes y - y \otimes x - [x, y]: x, y \in \mathfrak{g}).$$

Esta es una superálgebra de Hopf con la comultiplicación determinada por la condición de que los elementos de \mathfrak{g} son primitivos.

Si la característica del cuerpo es $p > 2$, tenemos el concepto de súper álgebra de Lie restringida.

Definición 1.4.4. Un álgebra de Lie \mathfrak{h} es *restringida* si existe un mapa $x \mapsto x^{[p]}$ llamado p -operación tal que

- $[x^{[p]}, z] = (\text{ad } x)^p(z)$ para todo $x \in \mathfrak{h}$.
- $(tx)^{[p]} = t^p x^{[p]}$ para todo $t \in \mathbb{k}, x \in \mathfrak{h}$.
- $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{s_i(x, y)}{i}$ para todo $x, y \in \mathfrak{h}$, donde $s_i(x, y)$ es el coeficiente de T^{i-1} en la expresión formal $\text{ad}(Tx + y)^{p-1}(x)$.

Una superálgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es *restringida* si \mathfrak{g}_0 es un álgebra de Lie restringida con p -operación $x \mapsto x^{[p]}$ tal que

$$[x^{[p]}, z] = (\text{ad } x)^p(z) \quad \text{for all } x \in \mathfrak{g}_0, z \in \mathfrak{g}.$$

Nos referimos al [BMPZ, Capítulo 3] para una exposición detallada. El *álgebra envolvente restringida* de una superálgebra de Lie restringida \mathfrak{g} está definida como

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g}) / \langle x^{[p]} - x^p : x \in \mathfrak{g}_0 \rangle,$$

donde $U(\mathfrak{g})$ es un álgebra envolvente. Asumimos por simplicidad que $\dim \mathfrak{g} < \infty$ y sea $\{x_1, \dots, x_r\}, \{y_1, \dots, y_k\}$ bases de \mathfrak{g}_0 y \mathfrak{g}_1 respectivamente. Entonces la superálgebra de Hopf $\mathfrak{u}(\mathfrak{g})$ tiene dimensión $p^r 2^k$; de hecho tiene una base PBW

$$\{x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} y_1^{m_1} \cdots y_k^{m_k} : n_1, \dots, n_r \in \mathbb{I}_{0,p-1}, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{I}_{0,1}\}.$$

La superálgebra de Lie ortosimpléctica $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1|2)$

Para nuestros propósitos recordamos su estructura: $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ con generadores de Cartan $\{e, f, h\}$; $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{k}\{\psi_+, \psi_-\}$ es el módulo natural de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$, es decir el corchete es

$$\begin{aligned} [e, \psi_+] &= 0, & [h, \psi_+] &= \psi_+, & [f, \psi_+] &= \psi_-, \\ [e, \psi_-] &= \psi_+, & [h, \psi_-] &= -\psi_-, & [f, \psi_-] &= 0, \\ [\psi_+, \psi_+] &= 2e, & [\psi_-, \psi_-] &= -2f, & [\psi_+, \psi_-] &= -h. \end{aligned}$$

Asumamos ahora que $\text{char } \mathbb{k} = p$. El álgebra \mathfrak{g} tiene una p -estructura dada por

$$e^{[p]} = 0, \quad h^{[p]} = h, \quad f^{[p]} = 0.$$

Vamos a considerar el álgebra envolvente $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ y su versión restringida $\mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))$. Ambas son superálgebras de Hopf con bases PBW.

1.5 | Módulos y súper módulos de Yettern-Drinfeld

En esta subsección, $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Vamos a definir dos categorías monoidales trenzadas de suma importancia para el trabajo, las categorías de módulos y súper módulos de Yettern-Drinfeld. Para más detalles del tema ver [AG] y [AAY]. Sea L un álgebra de Hopf y \mathcal{A} una superálgebra de Hopf.

Definición 1.5.1. La categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre L , denotada por ${}^L_L\mathcal{YD}$, consiste en los espacios vectoriales \mathcal{X} tal que:

- (i) \mathcal{X} es un módulo a izquierda sobre L con acción \rightarrow .
- (ii) \mathcal{X} es un comódulo a izquierda sobre L con coacción δ .
- (iii) Para todo $a \in L$ y $a \in \mathcal{X}$:

$$\delta(a \rightarrow x) = a_{(1)}x_{(-1)}\mathcal{S}(a_{(3)}) \otimes a_{(2)} \rightarrow x_{(0)}.$$

Si $\mathcal{X}, \mathcal{Z} \in {}^L_L\mathcal{YD}$, entonces el espacio vectorial $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z}$ es un objeto en ${}^L_L\mathcal{YD}$ via

$$\begin{aligned} a \rightarrow (x \otimes z) &= a_{(1)} \rightarrow x \otimes a_{(2)} \rightarrow z, \\ \delta(x \otimes z) &= x_{(-1)}z_{(-1)} \otimes (x_{(0)} \otimes z_{(0)}), \quad \forall x \in |\mathcal{X}|, z \in |\mathcal{Z}|. \end{aligned}$$

La trenza $c: \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \otimes \mathcal{X}$ está dada por:

$$c(x \otimes z) = x_{(-1)} \rightarrow z \otimes x_{(0)}. \quad (1.5.1)$$

Tenemos de forma análoga la versión *súper* del concepto.

Definición 1.5.2. La categoría de súper módulos de Yetter-Drinfeld sobre \mathcal{A} , denotada por ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$, consiste en los súper espacios vectoriales \mathcal{X} tal que:

- (i) \mathcal{X} es un súper módulo a izquierda sobre \mathcal{A} con acción \rightarrow .
- (ii) \mathcal{X} es un súper comódulo a izquierda sobre \mathcal{A} con coacción δ .
- (iii) Para todo $a \in |\mathcal{A}|$ y $u \in |\mathcal{X}|$:

$$\delta(a \rightarrow x) = (-1)^{|v_{(-1)}|(|a_{(2)}|+|a_{(3)}|)+|a_{(2)}||a_{(3)}|} a_{(1)} x_{(-1)} \mathcal{S}(a_{(3)}) \otimes a_{(2)} \rightarrow x_{(0)}.$$

Si $\mathcal{X}, \mathcal{Z} \in {}^{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$, entonces el super espacio vectorial $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Z}$ es un objeto en ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$ via

$$\begin{aligned} a \rightarrow (x \otimes z) &= (-1)^{|a_{(2)}||x|} a_{(1)} \rightarrow x \otimes a_{(2)} \rightarrow z, \\ \delta(x \otimes z) &= (-1)^{|x_{(0)}||z_{(-1)}|} x_{(-1)} z_{(-1)} \otimes (x_{(0)} \otimes z_{(0)}), \quad \forall x \in |\mathcal{X}|, z \in |\mathcal{Z}|. \end{aligned}$$

La trenza $c: \mathcal{X} \otimes \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \otimes \mathcal{X}$ está dada por:

$$c(x \otimes z) = (-1)^{|x_{(0)}||z|} x_{(-1)} \rightarrow z \otimes x_{(0)}. \quad (1.5.2)$$

Ejemplo 1.5.3. Sea A un álgebra de Hopf ordinaria. Esta puede ser pensada como una superálgebra de Hopf completamente par. Entonces ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$ es equivalente a la categoría de objetos C_2 -graduados en ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{YD}$.

Hay un functor de incrustamiento de categorías tensoriales trenzadas

$$i: {}^{\mathcal{A}}\mathcal{YDS} \rightarrow {}_{\mathcal{A}\#kC_2}^{\mathcal{A}\#kC_2}\mathcal{YD}, \quad \mathcal{X} \mapsto i(\mathcal{X}) \quad (1.5.3)$$

donde $i(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ como un espacio vectorial, con acción \rightarrow y coacción δ dadas por:

$$\begin{aligned} a\#e^k \rightarrow x &= (-1)^{|x|k} a \rightarrow x, \\ \delta(x) &= x_{(-1)}\#e^{|x_{(0)}|} \otimes x_{(0)}, \quad \forall a \in \mathcal{A}, x \in |\mathcal{X}|, k \in \mathbb{I}_{0,1}. \end{aligned}$$

Observación 1.5.4. La categoría tensorial simétrica \mathbf{svec} está identificada con una subcategoría tensorial plena de ${}_{kC_2}^{kC_2}\mathcal{YD}$. Un objeto $M \in {}_{kC_2}^{kC_2}\mathcal{YD}$ está en \mathbf{sVec} si las dos siguientes condiciones se satisfacen:

- 0. Para todo $a \in M$ tal que $e \rightarrow a = a$, $\delta(a) = 1 \otimes a$ (entonces a es par).
- 1. Para todo $a \in M$ tal que $e \rightarrow a = -a$, $\delta(a) = e \otimes a$ (entonces a es impar).

La bosonización y súper bosonización

Sea R un álgebra de Hopf en ${}^L\mathcal{YD}$ y \mathcal{R} un álgebra de Hopf en ${}^{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$. Es posible obtener a partir de ellas álgebras de Hopf y superálgebras de Hopf ordinarias por procesos llamados bosonización y súper bosonización respectivamente. La comultiplicación en estas álgebras de Hopf trenzadas las escribimos como $\Delta(h) = h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ para h en \mathcal{R} o R .

Definición 1.5.5. El álgebra de Hopf $R\#L$ llamada *bosonización* de R por L es $R \otimes L$ como espacio vectorial con estructura dada por

$$\begin{aligned}(h\#a)(f\#b) &:= h(a_{(1)} \rightharpoonup f)\#a_{(2)}b, \\ \Delta(h\#a) &:= h^{(1)}\#(h^{(2)})_{(-1)}a_{(1)} \otimes (h^{(2)})_{(0)}\#a_{(2)}, \\ \varepsilon(h\#a) &= \varepsilon_R(h)\varepsilon_L(a), \quad 1 := 1_R\#1_L, \\ \mathcal{S}(h\#a) &= (1\#\mathcal{S}_L(h_{(-1)}a))(\mathcal{S}_R(h_{(0)})\#1).\end{aligned}$$

Definición 1.5.6. La superálgebra de Hopf $\mathcal{R} \natural \mathcal{A}$ es $\mathcal{R} \otimes \mathcal{A}$ como un super espacio vectorial con estructura dada por:

$$\begin{aligned}(h \natural a)(f \natural b) &:= (-1)^{|a_{(2)}||f|}h(a_{(1)} \rightharpoonup f) \natural a_{(2)}b, \\ \Delta(h \natural a) &:= (-1)^{|(h^{(2)})_{(0)}||a_{(1)}|}h^{(1)} \natural (h^{(2)})_{(-1)}a_{(1)} \otimes (h^{(2)})_{(0)} \natural a_{(2)}, \\ \varepsilon(h \natural a) &= \varepsilon_{\mathcal{R}}(h)\varepsilon_{\mathcal{A}}(a), \quad 1 := 1_{\mathcal{R}} \natural 1_{\mathcal{A}}, \\ \mathcal{S}(h \natural a) &= (-1)^{|h_{(0)}||a|}(1 \natural \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(h_{(-1)}a))(\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(h_{(0)}) \natural 1).\end{aligned}$$

Observación 1.5.7. Por la Observación 1.5.4 la superálgebra de Hopf $\mathcal{R} \natural \mathcal{A}$ puede ser vista como un álgebra de Hopf en ${}^{\mathbb{k}C_2}_{\mathbb{k}C_2}\mathcal{YD}$. Por ende es posible definir un álgebra de Hopf mediante la bosonización $(\mathcal{R} \natural \mathcal{A})\#\mathbb{k}C_2$. En ese caso hay un isomorfismo canónico $(\mathcal{R} \natural \mathcal{A})\#\mathbb{k}C_2 \simeq i(\mathcal{R})\#(\mathcal{A}\#\mathbb{k}C_2)$.

La bosonización cumple el mismo rol que el producto semi directo para la teoría de grupos. En efecto las aplicaciones lineales

$$\begin{aligned}\pi: R\#L &\rightarrow L, & \iota: L &\rightarrow R\#L, \\ r\#h &\mapsto \varepsilon(r)h, & h &\mapsto 1\#h\end{aligned}$$

resultan morfismos de álgebras de Hopf que satisfacen $\pi\iota = \text{id}_H$. Además se puede probar que $R = \{a \in R\#L: (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}$.

Dadas álgebras de Hopf A y L provistas con morfismos de álgebras de Hopf $\pi: A \rightarrow L$ y $\iota: L \rightarrow A$ tales que $\pi\iota = \text{id}$, la construcción anterior permite recuperar A en términos de \tilde{A} y π , tal como ocurre en la teoría de grupos. En dicho caso A se reconstruye a partir de una acción por automorfismos de L en el núcleo de π . En nuestro contexto el rol del núcleo lo cumple el espacio de coinvariantes

$$R = A^{\text{co}L} = \{a \in L: (\text{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}.$$

Este es un objeto en ${}^L_L\mathcal{YD}$ con acción y coacción dadas por

$$h \cdot r = h_{(1)}r\mathcal{S}(h_{(2)}), \quad (\pi \otimes \text{id})\Delta: R \rightarrow R \otimes L,$$

respectivamente. Más aún, R es un álgebra de Hopf en ${}^L_L\mathcal{YD}$ con la siguiente estructura:

- R hereda de A la estructura de álgebra;
- comultiplicación $\Delta_R(r) = r_{(1)}\pi\mathcal{S}(r_{(2)}) \otimes r_{(3)}$ y counidad heredada de A ;
- antípoda $\mathcal{S}_R(r) = \pi(r_{(1)})\mathcal{S}(r_{(2)})$.

Notablemente, se tiene $A \simeq R\#L$ como álgebras de Hopf.

1.6 | Álgebras de Nichols

En esta sección daremos la definición de álgebra de Nichols de un espacio vectorial trenzado. Este es un objeto combinatorio y un invariante muy importante en el estudio de las álgebras de Hopf. La construcción de un álgebra de Nichols es similar a la construcción del álgebra simétrica de un espacio vectorial. Empezamos primero con la definición de espacio vectorial trenzado.

Definición 1.6.1. Un *espacio vectorial trenzado* es un par (\mathcal{V}, c) donde \mathcal{V} es un espacio vectorial y $c \in GL(\mathcal{V}^{\otimes 2})$ satisface la ecuación de trenzas

$$(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id}) = (\text{id} \otimes c)(c \otimes \text{id})(\text{id} \otimes c).$$

Observación 1.6.2. Si \mathcal{V} es de dimensión finita, entonces el espacio vectorial dual \mathcal{V}^* es trenzado con la trenza transpuesta c^* — recordemos la identificación (1.3.1):

$$\langle c^*(f \otimes f'), x \otimes y \rangle = \langle f \otimes f', c(x \otimes y) \rangle, \quad f, f' \in \mathcal{V}^*, x, y \in \mathcal{V}. \quad (1.6.1)$$

Ejemplo 1.6.3. Si \mathcal{V} es un módulo o súper módulo de Yettern-Drinfeld, entonces $(\mathcal{V}, c_{\mathcal{V}, \mathcal{V}})$ es un espacio vectorial trenzado. Aquí $c_{\mathcal{V}, \mathcal{V}}$ es la trenza categórica correspondiente.

Para entender la importancia de este concepto en la construcción de un álgebra de Nichols, recordamos primero las definiciones del *grupo de trenzas* y su relación con el grupo simétrico.

Para cada entero $n \geq 2$ el grupo simétrico \mathbb{S}_n está presentado por generadores s_1, \dots, s_{n-1} y relaciones

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i, & \text{si } |i - j| > 1, \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j, & \text{si } |i - j| = 1, \\ s_i^2 &= 1. \end{aligned}$$

Obviando el último conjunto de relaciones se obtiene el *grupo de trenzas* \mathbb{B}_n . Más precisamente, \mathbb{B}_n es el grupo presentado por generadores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & \text{si } |i - j| > 1, \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j, & \text{si } |i - j| = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto hay una proyección natural de grupos $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$, $\sigma_i \mapsto s_i$. Esta proyección tiene una sección conjuntista distinguida. La siguiente definición tiene sentido gracias al *teorema de Matsumoto* [Ma].

Definición 1.6.4. La proyección $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{S}_n$ admite una única sección conjuntista $f: \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$ tal que $f(ab) = f(a)f(b)$ para todos $a, b \in \mathbb{S}_n$ con $\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$. Esta recibe el nombre de *sección de Matsumoto* y se denota por $M_n: \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{B}_n$.

Dado (\mathcal{V}, c) un espacio vectorial trenzado, el grupo de trenzas \mathbb{B}_n actúa en $\mathcal{V}^{\otimes n}$ por

$$\tau_i \mapsto \text{id} \otimes \dots \otimes c \otimes \dots \otimes \text{id}, \quad (1.6.2)$$

donde c está en el i -ésimo tensorando. Tenemos entonces la siguiente definición. El álgebra de Nichols $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ del espacio vectorial trenzado \mathcal{V} está definida como sigue.

Definición 1.6.5. El álgebra de Nichols $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ del espacio vectorial trenzado \mathcal{V} es el cociente del álgebra tensorial $T(\mathcal{V})$ por el ideal generado por los elementos en el núcleo de los simetrizadores cuánticos $\Omega_n: \mathcal{V}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{V}^{\otimes n}$. Donde

$$\Omega_n = \sum_{\sigma \in S_n} M_n(\sigma).$$

Donde M es la sección de Matsumoto y la acción del grupo de trenzas en $\mathcal{V}^{\otimes n}$ es dada por (1.6.2). Es decir

$$\mathcal{B}(\mathcal{V}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} T(\mathcal{V}) / \ker(\Omega_n).$$

Donde tomamos como convención que Ω_0 y Ω_1 sean la identidad.

Para más detalles sobre álgebras de Nichols y su definición, invitamos al lector a leer [A]. Es posible conectar el concepto de álgebra de Nichols con el de módulo y súper módulo de Yettern-Drinfeld a través del concepto de realización de un espacio vectorial trenzado.

Definición 1.6.6. Una *realización sobre un álgebra de Hopf* L de un espacio vectorial trenzado (\mathcal{V}, c) es una estructura de L -módulo de Yetter-Drinfeld en \mathcal{V} tal que c coincide con la trenza categórica de ${}^L_L\mathcal{YD}$.

Analogamente una *realización sobre una súper álgebra de Hopf* \mathcal{A} es una estructura de súper módulo de Yetter-Drinfeld en \mathcal{V} tal que c coincide con la trenza categórica de ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$.

Si \mathcal{V} tiene una realización en ${}^L_L\mathcal{YD}$ o ${}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\mathcal{YDS}$, entonces $T(\mathcal{V})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{V})$ son álgebras de Hopf en las categorías correspondientes. La multiplicación correspondiente está determinada por la condición de que los elementos de \mathcal{V} sean primitivos. En ese caso es posible caracterizar al álgebra de Nichols como el cociente del álgebra tensorial $T(\mathcal{V})$ por el ideal generado por los elementos primitivos de grado mayor o igual a 2. Mediante bosonización o súper bosonización es posible obtener álgebras de Hopf o súper álgebras de Hopf a partir de un álgebra de Nichols.

Si (\mathcal{V}, c) admite una realización sobre una superálgebra de Hopf, entonces necesariamente \mathcal{V} es C_2 -graduada y c preserva la graduación de $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$; en este caso decimos que (\mathcal{V}, c) es llamado un super espacio vectorial trenzado. Este concepto ya estaba presente en [KS, (53), p. 1610]. De hecho, hay una correspondencia biyectiva entre los super espacios vectoriales trenzados y las soluciones de la super ecuación de Yang-Baxter, ver *loc. cit.*

1.7 | Doble de Drinfeld

Toda álgebra de Hopf es subálgebra de un álgebra de Hopf cuasi triangular. Esto nos lleva al concepto de doble de Drinfeld de un álgebra de Hopf que detallamos a continuación.

Definición 1.7.1. Sea L un álgebra de Hopf de dimensión finita. El doble de Drinfeld de L , denotado por $D(L)$, es un álgebra de Hopf cuya estructura de coálgebra es $L \otimes L^{*\text{op}}$ y la multiplicación y antípoda están definidas como sigue.

Sea $h \bowtie f := h \otimes f$ en $D(L)$ para todos los $f \in L^{*\text{op}} = L^*$ y $h \in L$. Entonces

$$\begin{aligned} (h \bowtie f)(h' \bowtie f') &= \langle f_{(1)}, h'_{(1)} \rangle \langle f_{(3)}, \mathcal{S}(h'_{(3)}) \rangle (hh'_{(2)} \bowtie f'f_{(2)}), \\ \mathcal{S}_{D(L)}(h \bowtie f) &= (1 \bowtie \mathcal{S}^{-1}(f))(\mathcal{S}(h) \bowtie \varepsilon), \end{aligned}$$

donde $fr = m(f \otimes r)$ es la multiplicación en L^* en vez de en $L^{*\text{op}}$.

Observación 1.7.2. Si $(h_i)_{i \in I}$ es una base de L y $(h^i)_{i \in I}$ una base dual, entonces el elemento $\mathcal{R} = \sum_{i \in I} h_i \bowtie 1 \otimes 1 \bowtie h^i$ es una R -matriz para $D(L)$. Es decir el doble es un álgebra de Hopf cuasi triangular. Además tenemos una inclusión de álgebras de Hopf $L \hookrightarrow D(L)$ dada por $h \mapsto h \bowtie 1$.

Observación 1.7.3. [DT] Si L no es de dimensión finita, podemos definir su doble con respecto a otra álgebra de Hopf B usando un par torcido, es decir un mapa lineal $\tau: L \otimes B \rightarrow \mathbb{k}$ tal que

$$\begin{aligned} \tau(a\tilde{a} \otimes b) &= \tau(a \otimes b_{(1)})\tau(\tilde{a} \otimes b_{(2)}), & \tau(1 \otimes b) &= \varepsilon(b), & a, \tilde{a} &\in L, \\ \tau(a \otimes \tilde{b}\tilde{b}) &= \tau(a_{(1)} \otimes b)\tau(a_{(2)} \otimes \tilde{b}), & \tau(a \otimes 1) &= \varepsilon(a), & b, \tilde{b} &\in B. \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

Sea $\sigma: (L \otimes B) \otimes (L \otimes B) \rightarrow \mathbb{k}$ el 2-cociclo asociado a τ , donde $L \otimes B$ tiene la estructura del producto tensorial de álgebras de Hopf, esto es

$$\sigma(a \otimes b, \tilde{a} \otimes \tilde{b}) = \varepsilon(a)\varepsilon(\tilde{b})\tau(\tilde{a} \otimes b), \quad a, \tilde{a} \in L, b, \tilde{b} \in B.$$

Entonces el doble de L (con respecto a B y τ) es el álgebra de Hopf $L \otimes B$ torcida por σ , es decir $L \bowtie B =: (L \otimes B)_\sigma$.

1.7.1 | El dual y el doble de una bosonización

En este trabajo estamos interesados en calcular dobles de álgebras de Hopf con ciertas características. Sea L un álgebra de Hopf y $\mathcal{V} \in {}^L\mathcal{YD}$; asumimos que $\dim L < \infty$ y $\dim \mathcal{B}(\mathcal{V}) < \infty$. En esta subsección describimos explícitamente el dual y el doble de Drinfeld de la bosonización $A := \mathcal{B}(\mathcal{V})\#L$. En particular mostramos que $A^* \simeq \mathcal{B}(\mathcal{V}^*)\#L^*$, donde \mathcal{V}^* tiene la trenza transpuesta (1.6.1). Introducimos ahora un poco de notación. Primero, tenemos morfismos de álgebras de Hopf $A \xrightleftharpoons[\iota]{\pi} L$ tal que $\pi\iota = \text{id}$. Ahora fijamos

- una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathcal{V} ; su base dual la denotamos por $\{w_1, \dots, w_n\}$;
- una base $\{h_1, \dots, h_m\}$ de L ; su base dual la denotamos por $\{f_1, \dots, f_m\}$.

Las categorías tensoriales trenzadas ${}^L\mathcal{YD} \simeq {}^{L^*}\mathcal{YD}$ son equivalentes via el functor

$$F: {}^L\mathcal{YD} \longrightarrow {}^{L^*}\mathcal{YD}$$

definido como sigue. Si $\mathcal{X} \in {}^L\mathcal{YD}$, entonces $F(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$ con estructura

$$f \rightharpoonup v = \langle f, \mathcal{S}(v_{(-1)}) \rangle v_{(0)}, \quad \delta(v) = \sum_{i=0}^m \mathcal{S}^{-1}(f_i) \otimes h_i \rightharpoonup v, \quad v \in \mathcal{X}, f \in L^*,$$

ver [AG, Prop. 2.2.1]. Sea $\mathcal{W} := F(\mathcal{V}^*)$.

Lema 1.7.4. [G, Lemma 2.6] Como espacio vectorial trenzado, $\mathcal{W} \in {}^{L^*}\mathcal{YD}$ es isomorfo a (\mathcal{V}^*, c^*) . Luego $\dim \mathcal{B}(\mathcal{W}) = \dim \mathcal{B}(\mathcal{V}) < \infty$.

Prueba. La acción y coacción de \mathcal{W} como módulo de Yetter-Drinfeld está dada por:

$$\delta(w^i) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n \langle w^i, h^\ell \rightharpoonup v^j \rangle f^\ell \otimes w^j,$$

$$f \rightharpoonup w^i = \sum_{j=1}^n \langle f, (v^j)_{(-1)} \rangle \langle w^i, (v^j)_{(0)} \rangle w^j, \quad \forall i \in \mathbb{I}_n, f \in H^*.$$

Luego la trenza es

$$\begin{aligned} c(w^i \otimes w^j) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^m \langle w^i, h^\ell \rightharpoonup v^k \rangle f^\ell \rightharpoonup w^j \otimes w^k \\ &= \sum_{k,t=1}^n \sum_{\ell=1}^m \langle w^i, h^\ell \rightharpoonup v^k \rangle \langle f^\ell, (v^t)_{(-1)} \rangle \langle w^j, (v^t)_{(0)} \rangle w^t \otimes w^k \\ &= \sum_{k,t=1}^n \langle w^i, (v^t)_{(-1)} \rightharpoonup v^k \rangle \langle w^j, (v^t)_{(0)} \rangle w^t \otimes w^k, \quad \forall i, j \in \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

Y esto es exactamente la trenza dual. \square

Proposición 1.7.5. $A^* \simeq \mathcal{B}(\mathcal{W}) \# L^*$.

Prueba. Transponiendo los mapas π y ι de arriba, obtenemos $A^* \xrightleftharpoons[\pi^*]{\iota^*} L^*$ con $\iota^* \pi^* = \text{id}$. Entonces $A^* \simeq \mathcal{R} \# L^*$, donde $\mathcal{R} = (A^*)^{\text{co}\iota^*}$ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^{L^*}\mathcal{YD}$. Como $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ es graduada, también lo son $A^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} (A^*)^n$ y $\mathcal{R} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{R}^n$. Procedemos en tres pasos:

(i) **Encontrar una base de $\mathcal{R}^1 \in {}^{L^*}\mathcal{YD}$.**

Tenemos que $A^1 \simeq \mathcal{V} \otimes L$, $(A^*)^1 \simeq \mathcal{V}^* \otimes L^*$ como espacios vectoriales. Dado $w \in \mathcal{V}^*$ y $f \in L^*$ definimos $w \# f := w \otimes f \in (A^*)^1$ por

$$\langle w \# f, v \# h \rangle = \langle w, v \rangle \langle f, h \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{V}, h \in L.$$

Entonces $\{w_i \# f_j : i \in \mathbb{I}_n, j \in \mathbb{I}_m\}$ es una base de $(A^*)^1$. Sea $\bar{w}_i := w_i \# \varepsilon$, $i \in \mathbb{I}_n$. Afirmamos que $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ es una base de \mathcal{R}^1 . Para probar esto, calculamos

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\bar{w}_i), 1 \# h_\ell \otimes v_j \# h_k \rangle &= \langle w_i, h_\ell \rightharpoonup v_j \rangle \varepsilon(h_k), \\ \langle \Delta(\bar{w}_i), v_j \# h_k \otimes 1 \# h_\ell \rangle &= \varepsilon(h_k h_\ell) \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

para todo $i, j \in \mathbb{I}_n, k, \ell \in \mathbb{I}_m$. Como Δ preserva la graduación, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta(\bar{w}_i) &= \sum_{\ell, k=1}^m \varepsilon(h_k h_\ell) w_i \# f_k \otimes f_\ell + \sum_{\ell, k=1}^m \sum_{j=1}^n \langle w_i, h_\ell \rightharpoonup v_j \rangle \varepsilon(h_k) f_\ell \otimes w_j \# f_k \\ &= \bar{w}_i \otimes 1 + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n \langle w_i, h_\ell \rightharpoonup v_j \rangle f_\ell \otimes \bar{w}_j. \end{aligned}$$

Luego $\bar{w}_i \in \mathcal{R}^1$ porque $\iota^*(\bar{w}_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$. Como los \bar{w}_i son linealmente independientes y $\dim \mathcal{R}^1 = \dim \mathcal{B}(\mathcal{V})^1 = \dim \mathcal{V}$, la afirmación se sigue.

(ii) $\mathcal{R}^1 \simeq \mathcal{W}$ en $L^* \mathcal{YD}$.

Para calcular la acción y coacción de \mathcal{R}^1 necesitamos la multiplicación de elementos de la forma $(w \# f) f'$ y $f'(w \# f)$ para $f, f' \in L^*$, $w \in \mathcal{V}^*$. Como $A^0 \simeq L$, $(A^*)^0 \simeq L^*$, podemos ver que

$$\begin{aligned} \langle (w \# f) f', v \# h \rangle &= \langle w \# f f', v \# h \rangle, \\ \langle f'(w \# f), v \# h \rangle &= \langle f'_{(1)} \rightharpoonup w \# f'_{(2)}, v \# h \rangle \end{aligned}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$, $h \in L$. Entonces

$$f'(w \# f) = f'_{(1)} \rightharpoonup w \# f'_{(2)} f \quad \text{and} \quad (w \# f) f' = w \# f f'$$

para $w \in \mathcal{V}^*$, $f, f' \in L^*$. Así la acción de L^* en \mathcal{R}^1 está dada por

$$\begin{aligned} f \rightharpoonup \bar{w}_i &= f_{(1)}(w_i \# \varepsilon) \mathcal{S}(f_{(2)}) = f_{(1)} \rightharpoonup w_i \# f_{(2)} \mathcal{S}(f_{(3)}) \\ &= f_{(1)} \rightharpoonup w_i \# \varepsilon(f_{(2)}) \varepsilon = f \rightharpoonup w_i \# \varepsilon \\ &= \sum_{j=1}^n \langle f, (v_j)_{(-1)} \rangle \langle w_i, (v_j)_{(0)} \rangle \bar{w}_j, \quad i \in \mathbb{I}_n, f \in L^*. \end{aligned}$$

La fórmula para la coacción se sigue de la fórmula de la comultiplicación arriba:

$$\delta(\bar{w}_i) = (\iota^* \otimes \text{id}) \circ \Delta(\bar{w}_i) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^n \langle w_i, h_\ell \rightharpoonup v_j \rangle f_\ell \otimes \bar{w}_j, \quad i \in \mathbb{I}_n.$$

Entonces $\mathcal{W} \simeq \mathcal{R}^1$ en $L^* \mathcal{YD}$.

(iii) $\mathcal{R} \simeq \mathcal{B}(\mathcal{W}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{V}^*)$

Sea \mathcal{R}' la subálgebra de Hopf trenzada de \mathcal{R} generada por \mathcal{R}^1 . Entonces \mathcal{R}' es una álgebra de pre-Nichols de $\mathcal{R}^1 \simeq \mathcal{W}$. Luego

$$\dim \mathcal{B}(\mathcal{W}) \leq \dim \mathcal{R}' \leq \dim \mathcal{R} = \dim \mathcal{B}(\mathcal{V}) = \dim \mathcal{B}(\mathcal{W});$$

así $\mathcal{R}' = \mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{W})$ y el resultado se sigue de aquí. \square

Fijamos ahora las siguientes presentaciones para $\mathcal{B}(\mathcal{V})$, $\mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}}$ y $D(L)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathcal{V}) &= \mathbb{k}\langle v_1, \dots, v_n | r_1, \dots, r_{n_1} \rangle, \\ \mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}} &= \mathbb{k}\langle w_1, \dots, w_n | r'_1, \dots, r'_{n_2} \rangle, \\ D(L) &= \mathbb{k}\langle s_1, \dots, s_{m_0}, s'_1, \dots, s'_{m_1} | \tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{n_3} \rangle, \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

con s_1, \dots, s_{m_0} y s'_1, \dots, s'_{m_1} generadores de L y $(L^*)^{\text{op}}$ respectivamente. Entonces tenemos la siguiente presentación para $D(A)$.

Proposición 1.7.6. *El álgebra $D(A)$ está presentada por generadores v_1, \dots, v_n , w_1, \dots, w_n , s_1, \dots, s_{m_0} , s'_0, \dots, s'_{m_1} con relaciones (1.7.2) y*

$$\begin{aligned}
s'_i v_j &= \langle (s'_i)_{(1)}, (v_j)_{(-1)} \rangle (v_j)_{(0)} (s'_i)_{(2)}, \quad (i, j) \in \mathbb{I}_{m_1} \times \mathbb{I}_n, \\
w_i s_j &= \sum_{\ell=1}^n \langle w_i, (s_j)_{(1)} \rightharpoonup v_\ell \rangle (s_j)_{(2)} w_\ell, \quad (i, j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_{m_0}, \\
w_i v_j &= \langle w_i, v_j \rangle 1 + \sum_{\ell=1}^n \langle w_i, (v_j)_{(-1)} \rightharpoonup v_\ell \rangle (v_j)_{(0)} w_\ell \\
&+ \sum_{k=1}^m \sum_{\ell, t=1}^n \langle w_i, (v_j)_{(-2)} \rightharpoonup v_\ell \rangle \langle w_\ell, h_k \rightharpoonup v_t \rangle \langle \bar{w}_t, \mathcal{S}((v_j)_{(0)}) \rangle (v_j)_{(-1)} f_k, \\
&(i, j) \in \mathbb{I}_n \times \mathbb{I}_n.
\end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Luego $D(A)$ admite una descomposición triangular

$$D(A) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{V}) \otimes D(L) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}}. \tag{1.7.4}$$

Prueba. Sea A un álgebra presentada por generadores y relaciones como en el enunciado. Por definición de $D(A)$ y las fórmulas arriba, existe un morfismo de álgebras $A \rightarrow D(A)$. Luego $\dim A \geq \dim D(A)$. Por definición de A existe un morfismo

$$\psi_1: \mathcal{B}(\mathcal{V}) \rightarrow A, \quad \psi_2: \mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}} \rightarrow A, \quad \psi_3: D(L) \rightarrow A.$$

Sea $m: A \otimes A \rightarrow A$ la multiplicación. Tenemos entonces un morfismo lineal

$$\phi: \mathcal{B}(\mathcal{V}) \otimes D(L) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}} \xrightarrow{\psi_1 \otimes \psi_2 \otimes \psi_3} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{m \circ (m \otimes \text{id})} A \tag{1.7.5}$$

que es suryectivo por (1.7.3). Como todo producto de los generadores puede ser reescrito para obtener una suma de elementos de la forma abc con $a \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$, $b \in D(L)$ y $c \in \mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}}$ tenemos

$$\dim D(A) = \dim \mathcal{B}(\mathcal{V}) \cdot \dim D(L) \cdot \dim \mathcal{B}(\mathcal{W})^{\text{op}} \geq \dim A.$$

Así $D(A) \simeq A$. Luego (1.7.4), (1.7.5) nos da el isomorfismo deseado. \square

2 | El plano de Jordan

2.1 | Introducción

El plano de Jordan es un ejemplo conocido de álgebra cuadrática. Está definida como el álgebra $\widetilde{\mathcal{B}}$ presentada por dos generadores x, y y relación $yx - xy - \frac{1}{2}x^2$. Es además una piedra angular en el estudio de álgebras de Nichols con dimension de Gelfand-Kirillov finita sobre grupos abelianos [AAH1, AAH2]. Una de las propiedades destacables del plano de Jordan es que posee una base PBW similar al anillo de polinomios de dos variables. En efecto los monomios $(x^i y^j)_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ forman una base para el plano de Jordan.

El grupo cíclico $C_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lo escribimos multiplicativamente con generador g . Además el cuerpo \mathbb{k} es de característica $p > 2$ este capítulo a menos que indiquemos lo contrario.

Sea V_J un módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\mathbb{k}C_p$ con base $\{x, y\}$, acción \rightharpoonup y coacción δ dadas por

$$g \rightharpoonup x = x, \quad g \rightharpoonup y = y + x, \quad \delta(x) = g \otimes x, \quad \delta(y) = g \otimes y. \quad (2.1.1)$$

Entonces V_J es un espacio vectorial trenzado con trenza

$$\begin{aligned} c_{V_J}(x \otimes x) &= x \otimes x, & c_{V_J}(x \otimes y) &= (y + x) \otimes x, \\ c_{V_J}(y \otimes x) &= x \otimes y, & c_{V_J}(y \otimes y) &= (y + x) \otimes y. \end{aligned}$$

Por [CLW, Teorema 3.5], el álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V_J)$ que llamaremos el plano de Jordan restringido es el cociente de $T(V_J)$ por el ideal generado por

$$x^p, \quad y^p, \quad yx - xy + \frac{1}{2}x^2.$$

Es decir, esta álgebra es un cociente de dimensión finita del plano de Jordan. La familia $(x^i y^j)_{0 \leq i, j \leq p-1}$ es una base de $\mathcal{B}(V_J)$. Esta última es un álgebra de dimensión p^2 . Los levantamientos de $\mathcal{B}(V_J)$ fueron calculados en [CLW] y los módulos simples del mismo en [ZC]. El plano de Jordan restringido es el punto de inicio a la descripción de nuevos ejemplos de álgebras de Hopf de dimensión finita [AAH3].

Observación 2.1.1. En característica 0, V_J es además un módulo de Yettern-Drinfeld sobre el grupo cíclico infinito Γ por las mismas fórmulas (2.1.1). En este caso el plano de Jordan $\widetilde{\mathcal{B}}$ es el álgebra de Nichols de V_J .

En este capítulo definimos y estudiamos varias álgebras de Hopf relacionadas a $\mathcal{B}(V_J)$.

1. Sea $D(H_J)$ el doble de Drinfeld de la bosonización $H_J = \mathcal{B}(V_J) \# \mathbb{k}C_p$. Presentaremos $D(H_J)$ por generadores y relaciones. Mostraremos además que encaja en una sucesión exacta $\mathbf{R} \rightarrow D(H_J) \rightarrow \mathbf{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ donde \mathbf{R} se una álgebra de Hopf conmutativa local y $\mathbf{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ es el álgebra envolvente restringida de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$. De aquí deduciremos que los módulos simples de $D(H_J)$ son los mismos que los de $\mathbf{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$. Describiremos explícitamente los mismos como cocientes de módulos de Verma. Ver Proposiciones 3.3.1, 2.2.6, ??, y el Teorema 2.2.8.

2. El plano de Jordan cubre $\mathcal{B}(V_J)$. Definimos un álgebra de Hopf \tilde{D} que cubre el doble de Drinfeld $D(H_J)$. La definición de \tilde{D} tiene sentido en cualquier característica distinta de 2. \tilde{D} puede ser pensado como el doble de Drinfeld del plano de Jordan y el mapa $\tilde{D} \rightarrow D(H_J)$ como un morfismo de Frobenius cuántico. En efecto, consideremos los grupos algebraicos

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m, \quad \mathbf{B} = ((\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m) \times \mathbf{H}_3$$

tomando ciertos productos semidirectos y donde \mathbf{H}_3 es el grupo de Heisenberg de dimensión 3.

3. Ver Observación 2.2.7 y (2.3.5). Luego hay una sucesión exacta de álgebras de Hopf $\mathcal{O}(\mathbf{B}) \hookrightarrow \tilde{D} \rightarrow D(H_J)$ que encajan en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(\mathbf{G}) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{B}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3) \\
 \text{Fr} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}(\mathbf{G}) & \hookrightarrow & \tilde{D} & \twoheadrightarrow & U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{R} & \hookrightarrow & D(H) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))
 \end{array} \tag{2.1.2}$$

donde todas las columnas y las filas son sucesiones exactas. Notar que las secuencias en la fila del medio (\star) también está disponible en característica 0. Ver Propositiones 2.3.3, 2.3.7 y 2.3.8. El álgebra \tilde{D} es de identidad polinomial y un dominio noetheriano, ver proposición 2.3.9.

3. Clasificamos las álgebras de pre-Nichols de dimensión finita intermedias entre el plano de Jordan y el plano de Jordan restringido. Precisamente, estas álgebras son isomorfas (como álgebras de Hopf trenzadas) a

$$\mathcal{G}(k, \ell) := \tilde{\mathcal{B}} / (y^{p^k}, x^{p^\ell})$$

para únicos $k, \ell \in \mathbb{N}$. Ver Teorema 2.4.6. No sabemos si cualquier álgebra de pre-Nichols de dimensión finita de $\mathcal{B}(V_J)$ es de esta forma. Por ejemplo, esta claro que

$$\mathbb{k} \langle x, y | x^p, y^p, (yx - xy + \frac{1}{2}x^2)^{p^n} \rangle$$

es un álgebra de pre-Nichols de $\mathcal{B}(V_J)$ pero no sabemos si tiene dimensión finita o dimensión de Gelfand-Kirillov finita. También damos nuevos ejemplos de álgebras de Hopf con dimensión de GKdim finita por bosonización con $\mathbb{k}C_p$. Ver Corolario 2.4.8.

4. Presentamos por generadores y relaciones el dual graduado \mathcal{E}_J del plano de Jordan. Ver Propositiones 2.5.1. El Teorema 2.4.6 implica que cualquier álgebra de post-Nichols de dimensión finita de $(V_J, c_{V_J}^{-1})$ contiene a \mathcal{E}_J y es isomorfa (como álgebra de Hopf trenzada) a $\mathfrak{G}(k, \ell) = \mathcal{G}(k, \ell)^*$ para únicos $k, \ell \in \mathbb{N}$. También damos una presentación por generadores y relaciones de $\mathfrak{G}(k, \ell)$.

2.2 | El doble del plano de Jordan restringido

2.2.1 | El doble

Aquí presentamos el doble de Drinfeld $D(H_J)$ por generadores y relaciones. Este tiene claramente dimensión p^6 .

La bosonización del plano de Jordan restringido

Remitiendonos a [CLW, Corolario 3.14], la bosonización $H_J = \mathcal{B}(V_J) \# \mathbb{k}C_p$ es una álgebra de Hopf punteada de dimensión p^3 generada por x, y y g con relaciones

$$\begin{aligned} g^p &= 1, & gx &= xg, & gy &= yg + xg, \\ x^p &= 0, & y^p &= 0, & yx &= xy - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

El coproducto esta determinado por

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x, \quad \Delta(y) = y \otimes 1 + g \otimes y. \quad (2.2.2)$$

Necesitaremos las siguientes formulas válidas en H_J :

$$\begin{aligned} g^n y^\ell &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \frac{[-2n]^{[k]}}{2^k} x^k y^{\ell-k} g^n, \\ y^\ell x^n &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \frac{[n]^{[k]}}{2^k} x^{n+k} y^{\ell-k}, \end{aligned} \quad n, \ell \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2.3)$$

donde $[t]^{[k]}$ denota el factorial ascendente $[t]^{[k]} := \prod_{i=1}^k (t + i - 1)$ para $t \in \mathbb{k}$ y $k \in \mathbb{N}_0$. La primera fórmula aparece por primera vez en [CLW] y la segunda es folklore.

Observación 2.2.1. El álgebra H_J es local. El único ideal maximal es $I := \langle x, y, g - 1 \rangle$. Luego la única representación simple de H_J es la trivial. Ver [ZC] para el estudio de las representaciones de H_J y sus levantamientos.

El doble de Drinfeld

Nuestro objetivo es presentar $D(H_J)$; para esto empezamos con $D(\mathbb{k}C_p) = \mathbb{k}C_p \otimes \mathbb{k}^{C_p}$. Necesitamos describir \mathbb{k}^{C_p} adecuadamente. El anillo de polinomios $\mathbb{k}[X]$ es un álgebra de Hopf con X primitivo. Sea $(\delta_k)_{k \in \mathbb{F}_p} \subseteq \mathbb{k}^{C_p}$ la base dual de $(g^k)_{k \in \mathbb{F}_p}$ y

$$\zeta = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} k \delta_k.$$

El siguiente resultado es bien conocido; por supuesto es crucial que $\text{char } \mathbb{k} = p$.

Lema 2.2.2. *El mapa $X \mapsto \zeta$ da un isomorfismo de álgebras de Hopf $\mathbb{k}[X]/(X^p - X) \simeq \mathbb{k}^{C_p}$; y $(\zeta^i)_{i \in \mathbb{I}_{0, p-1}}$ es una base de \mathbb{k}_p^C .* \square

Lema 2.2.3. *El álgebra $D(\mathbb{k}C_p)$ está presentada por generadores g, ζ y relaciones*

$$g^p = 1, \quad \zeta^p = \zeta, \quad g\zeta = \zeta g. \quad (2.2.4)$$

La estructura de álgebra de Hopf esta determinada por

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(\zeta) = \zeta \otimes 1 + 1 \otimes \zeta. \quad (2.2.5)$$

Prueba. Sea A el álgebra generada por $\{\tilde{g}, \tilde{\zeta}\}$ con relaciones (2.2.4). Como ζ y $g \in D(\mathbb{k}C_p)$ satisfacen (2.2.4), tenemos un epimorfismo $A \rightarrow D(\mathbb{k}C_p)$. Pero A esta linealmente generada por $(\tilde{g}^k \tilde{\zeta}^\ell)_{\substack{\ell \in \mathbb{I}_{0, p-1} \\ k \in \mathbb{F}_p}}$, entonces $\dim A \leq p^2 = \dim D(\mathbb{k}C_p)$. \square

Ahora describimos H_J^* . Tenemos morfismos de álgebras de Hopf $H_J \xrightleftharpoons[\iota]{\pi} \mathbb{k}C_p$ tales que $\pi\iota = \text{id}$; dualizando obtenemos $H_J^* \xrightleftharpoons[\pi^*]{\iota^*} \mathbb{k}C_p$ con $\iota^*\pi^* = \text{id}$. Luego $H_J^* \simeq \mathcal{R}\#\mathbb{k}C_p$ donde $\mathcal{R} = (H_J^*)^{\text{co}\iota^*} \simeq \mathcal{B}(W_J)$, ver por ejemplo [B, 2.3]. Aquí $W_J \in \mathbb{k}_{\mathbb{k}^\Gamma}^\Gamma \mathcal{YD}$ es $\simeq V_J^*$.

Lema 2.2.4. $H_J^{*\text{op}}$ esta presentada por generadores u, v y ζ con relaciones

$$\begin{aligned} v^p &= 0, & u^p &= 0, & vu &= uv - \frac{1}{2}u^2, \\ v\zeta &= \zeta v + v, & u\zeta &= \zeta u + u, & \zeta^p &= \zeta. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Una base de $H_J^{*\text{op}}$ es $(\zeta^k u^i v^j)_{i,j,k \in \mathbb{I}_{0,p-1}}$. La comultiplicación esta dada por

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= u \otimes 1 + 1 \otimes u, & \Delta(\zeta) &= \zeta \otimes 1 + 1 \otimes \zeta, \\ \Delta(v) &= v \otimes 1 + 1 \otimes v + \zeta \otimes u. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Prueba. Sea $(e_{i,j,k})_{\substack{i,j \in \mathbb{I}_{0,p-1} \\ k \in \mathbb{F}_p}}$ la base de $H_J^{*\text{op}}$ dual a $(x^i y^j g^k)_{\substack{i,j \in \mathbb{I}_{0,p-1} \\ k \in \mathbb{F}_p}}$. Ahora identificamos $\mathbb{k}C_p$ con una subálgebra de H_J^* , así $\zeta = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} k e_{0,0,k}$. Primero afirmamos que los siguientes elementos son primitivos en \mathcal{R} :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} e_{0,1,k}, \quad v = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} e_{1,0,k}.$$

En efecto, calculamos en H_J^* :

$$\begin{aligned} \Delta(e_{1,0,h}) &= \sum_{i \in \mathbb{F}_p} e_{1,0,i} \otimes e_{0,0,h-i} + e_{0,0,i} \otimes e_{1,0,h-i} + i e_{0,0,i} \otimes e_{0,1,h-i}, \\ \Delta(e_{0,1,h}) &= \sum_{i \in \mathbb{F}_p} e_{0,1,h-i} \otimes e_{0,0,i} + e_{0,0,i} \otimes e_{0,1,h-i}. \end{aligned}$$

Luego (2.2.7) es válida por cálculo directo. Entonces $u, v \in \mathcal{R}$; claramente son primitivos en \mathcal{R} y linealmente independientes. Luego forman una base de W_J . Explícitamente su estructura como módulo de Yetter-Drinfeld esta dada por

$$\zeta \curvearrowright u = u, \quad \zeta \curvearrowright v = v, \quad \delta(u) = 1 \otimes u, \quad \delta(v) = 1 \otimes v + \zeta \otimes u, \quad (2.2.8)$$

Mientras que la trenza c_{W_J} esta determinada por

$$\begin{aligned} c_{W_J}(u \otimes u) &= u \otimes u, & c_{W_J}(u \otimes v) &= v \otimes u, \\ c_{W_J}(v \otimes u) &= u \otimes (v + u), & c_{W_J}(v \otimes v) &= v \otimes (v + u). \end{aligned}$$

Luego tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales trenzados $(V_J, c_{V_J}^{-1}) \rightarrow (W_J, c_{W_J})$ que manda $x \mapsto -u, y \mapsto v$. El álgebra de Nichols $\mathcal{B}(W_J)$ tiene las mismas relaciones que $\mathcal{B}(V_J)$ y es de dimensión finita. Las relaciones (2.2.6) se cumplen en $H_J^{*\text{op}}$, pero $\mathcal{B}(V_J)$ no es isomorfa a $\mathcal{B}(W_J)$ como álgebra de Hopf trenzada porque (V_J, c_{V_J}) y $(V_J, c_{V_J}^{-1})$ no son isomorfos como espacios vectoriales trenzados.

Ahora, sea A el álgebra presentada por generadores $U = \{u, v, \zeta\}$ y relaciones (2.2.6). Por el argumento de arriba tenemos que $A \twoheadrightarrow H_J^{*\text{op}}$, luego $\dim A \geq p^3$. Para que esto sea

un isomorfismo, es suficiente mostrar que A esta linealmente generada por $(\zeta^i u^j v^k)_{i,j,k \in \mathbb{I}_{0,p-1}}$. Definimos un orden total en U declarando $\zeta < u < v$. Por las relaciones definitorias, cualquier producto ab con $a, b \in U$ y $b < a$ puede ser escrito como una combinación lineal de monoómios $c_1 \cdots c_s$ con $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_s \in U$. La afirmación se sigue de esto junto con las relaciones $u^p = 0, v^p = 0, \zeta^p = \zeta$. Entonces $A \simeq H_J^{*\text{op}}$. \square

Proposición 2.2.5. *El álgebra $D(H_J)$ esta presentada por generadores u, v, ζ, g, x, y y relaciones (2.2.1), (2.2.4), (2.2.6) y*

$$\begin{aligned} \zeta y &= y\zeta + y, & \zeta x &= x\zeta + x, & vg &= gv + gu, \\ ug &= gu, & vx &= xv + (1-g) + xu, & ux &= xu, \\ uy &= yu + (1-g) & vy &= yv - g\zeta + yu. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

La comultiplicación y antipoda están determinadas por (2.2.2), (2.2.5) y (2.2.7). La siguiente familia es una base PBW de $D(H_J)$:

$$\left\{ x^n y^r g^m \zeta^k u^i v^j : i, j, k, n, r \in \mathbb{I}_{0,p-1}, m \in \mathbb{F}_p \right\}$$

Prueba. Sea A un álgebra presentada por generadores $U = \{u, v, \zeta, g, x, y\}$ y las relaciones de arriba. Estas relaciones valen en $D(H_J)$, entonces $A \twoheadrightarrow D(H_J)$, y $\dim A \geq p^6$. Afirmamos que $B = (x^n y^r g^m \zeta^k u^i v^j)_{\substack{i,j,k,n,r \in \mathbb{I}_{0,p-1} \\ m \in \mathbb{F}_p}}$ genera A . Definimos un orden total en U por $x < y < g < \zeta < u < v$. Debido a las relaciones, cualquier producto ab con $a, b \in U$ y $b < a$ puede ser escrito como una combinación lineal de monomios $c_1 \cdots c_s$ con $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_s \in U$. La afirmación se sigue de esto junto con las relaciones $x^p = 0, y^p = 0, u^p = 0, v^p = 0, g^p = 1, \zeta^p = \zeta$. Luego $A \simeq D(H_J)$. \square

2.2.2 | Una sucesión exacta

Sean $\{h, e, f\}$ los generadores de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$.

Proposición 2.2.6. *La subálgebra \mathbf{R} de $D(H_J)$ generada por g, x y u es una subálgebra de Hopf normal, local y conmutativa de $D(H_J)$ de dimensión p^3 definida por relaciones*

$$g^p = 1, \quad x^p = 0, \quad u^p = 0. \quad (2.2.10)$$

Da lugar a una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$\mathbf{R} \hookrightarrow D(H_J) \twoheadrightarrow \mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})).$$

Como \mathbf{R} es conmutativa y $\mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ es coconmutativa, $D(H_J)$ da lugar a una extensión abeliana.

Prueba. Por la Proposición 2.2.5, \mathbf{R} es una subálgebra de Hopf conmutativa de dimensión p^3 y hay un mapa suryectivo del álgebra conmutativa presentada por las relaciones (2.2.10) hacia \mathbf{R} . Por argumentos de dimensionalidad, este mapa es un isomorfismo. Por inspección g, x y u son normales, entonces también lo es \mathbf{R} . Se sigue que $D(H_J)\mathbf{R}^+$ es un ideal de Hopf de $D(H)$ y el cociente $D(H_J)/D(H_J)\mathbf{R}^+$ es isomorfo a $\mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ vía $\zeta \mapsto h, y \mapsto \frac{1}{2}e$ y $v \mapsto f$. \square

Observación 2.2.7. Sea $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m$ el producto semidirecto donde \mathbf{G}_m actúa en $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ por $\lambda \cdot (t_1, t_2) = (t_1, \lambda t_2)$, $\lambda \in \mathbb{k}^\times$, $t_1, t_2 \in \mathbb{k}$. Luego el álgebra de funciones regulares $\mathcal{O}(\mathbf{G})$ es isomorfa a $\mathbb{k}[X_1, X_2, T^{\pm 1}]$ y hay una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf

$$\mathcal{O}(\mathbf{G}) \xleftarrow{\text{Fr}} \mathcal{O}(\mathbf{G}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{R},$$

con $\pi: \mathcal{O}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{R}$ dado por $T \mapsto g$, $X_1 \mapsto u$, $X_2 \mapsto x$. En otras palabras $\text{Spec } \mathbf{R}$ es el núcleo del endomorfismo de Frobenius de \mathbf{G} .

Teorema 2.2.8. *Hay exactamente p clases de isomorfismo de módulos simples de $D(H_J)$ que tienen dimensiones $1, 2, \dots, p$.*

Prueba. El ideal bilátero $D(H_J)\mathbf{R}^+$, generado por x , u y $g - 1$ es nilpotente, entonces está contenido en el radical de Jacobson de $D(H_J)$ y $\text{Irrep } D(H_J) \simeq \text{Irrep } \mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$. Luego el resultado sigue de la conocida clasificación de este último. \square

2.2.3 | Módulos simples

En esta subsección describimos los módulos simples de $D(H_J)$ como cocientes de módulos de Verma reprobando el teorema 2.2.8.

Primero $D(H_J) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} D(H_J)^n$ es \mathbb{Z} -graduada por

$$\deg x = \deg y = -1, \quad \deg u = \deg v = 1, \quad \deg g = \deg \zeta = 0.$$

Gracias a la base PBW, la multiplicación induce un isomorfismo lineal

$$\mathcal{B}(V_J) \otimes D(\mathbb{k}C_p) \otimes \mathcal{B}(W_J) \rightarrow D(H_J)$$

llamada descomposición triangulas de $D(H_J)$. Las subálgebras

$$\mathcal{B}(W_J) =: \mathcal{D}^{>0}, \quad \mathcal{B}(V_J) =: \mathcal{D}^{<0} \quad \text{and } D(\mathbb{k}C_p)$$

son graduadas y cumplen

1. $\mathcal{D}^{>0} \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} D(H_J)^n$, $\mathcal{D}^{<0} \subseteq \bigoplus_{n \in -\mathbb{N}_0} D(H_J)^n$ y $D(\mathbb{k}C_p) \subseteq D(H_J)^0$.
2. $(\mathcal{D}^{>0})^0 = \mathbb{k} = (\mathcal{D}^{<0})^0$.
3. $\mathcal{D}^{\geq 0} := D(\mathbb{k}C_p)\mathcal{D}^{>0}$ y $\mathcal{D}^{\leq 0} := \mathcal{D}^{<0}D(\mathbb{k}C_p)$ son subálgebras de $D(H_J)$.

En este contexto los módulos simples de $D(H_J)$ se obtienen induciendo desde $\mathcal{D}^{\geq 0}$. Los elementos de $\Lambda := \text{Irrep } D(\mathbb{k}C_p)$ son llamados *pesos*. Como $\mathcal{D}^{>0}$ es local, la proyección (homogénea) $\mathcal{D}^{\geq 0} \rightarrow D(\mathbb{k}C_p)$ nos permite identificar $\Lambda \simeq \text{Irrep } \mathcal{D}^{\geq 0}$. El módulo de Verma asociado a $\lambda \in \Lambda$ es

$$M(\lambda) = \text{Ind}_{\mathcal{D}^{\geq 0}}^{D(H_J)} \lambda = D(H_J) \otimes_{\mathcal{D}^{\geq 0}} \lambda.$$

Por un argumento estándar, $M(\lambda)$ es indescomponible. Sea $L(\lambda)$ la cabeza de $M(\lambda)$. El siguiente resultado es bien conocido, ver por ejemplo [V, Teorema 2.1].

Lema 2.2.9. *El mapa $\lambda \mapsto L(\lambda)$ es una biyección, es decir $\Lambda \simeq \text{Irrep } D(H_J)$.* \square

El conjunto Λ es fácil de calcular ya que $D(\mathbb{k}C_p) \simeq \mathbb{k}C_p \otimes \mathbb{k}C_p$ y $\mathbb{k}C_p$ es local. Dado $k \in \mathbb{F}_p$, sea $\lambda_k = \mathbb{k}w_k$ el espacio vectorial unidimensional con acción

$$g \cdot w_k = w_k, \quad \zeta \cdot w_k = kw_k.$$

Lema 2.2.10. *El mapa $k \mapsto \lambda_k$ es una biyección, es decir $\mathbb{F}_p \simeq \Lambda$.* \square .

Fijamos $k \in \mathbb{F}_p$ y calculamos $L(\lambda_k)$. Como $M(\lambda)$ es libre como $\mathcal{D}^{<0}$ -módulo con base $(w_k), (w_k^{(i,j)})_{i,j \in \mathbb{I}_{0,p-1}}$ es una base lineal de $M(\lambda)$, con $w_k^{(i,j)} = x^i y^j \cdot w_k$. Esto provee a $M(\lambda_k)$ de la estructura de módulo graduado por $\deg w_k^{(i,j)} = \deg(x^i y^j) = -i - j$, luego $M(\lambda_k) = \bigoplus_{n \leq 0} M(\lambda_k)_n$ y $M(\lambda_k)_0 = \mathbb{k}w_k$. Cualquier submódulo propio de $M(\lambda_k)$ está necesariamente contenido en $\bigoplus_{n \leq -1} M(\lambda_k)_n$, luego la suma de todos los submódulos propios es propia, y $M(\lambda_k)$ tiene un único cociente simple $L(\lambda_k)$. Cocientamos $M(\lambda_k)$ por submódulos propios hasta obtener uno simple.

Lema 2.2.11. *El submódulo N_k de $M(\lambda_k)$ generado por $w_k^{(1,0)}$ es propio.*

Prueba. La acción de u y v es

$$ux \cdot w_k = xu \cdot w_k = 0, \quad vx \cdot w_k = xv \cdot w_k + (1 - g) \cdot w_k + xu \cdot w_k = 0.$$

Luego $\mathcal{D}^{>0} \cdot w_k^{(1,0)} = 0$. Entonces $N_k = \mathcal{D}^{\leq 0} \cdot w_k^{(1,0)} \subseteq \bigoplus_{n \leq -1} M(\lambda_k)_n$ es propio. \square

Sea $V_k = M(\lambda_k)/N_k$ y sea y_j la clase de $w_k^{(0,j)}$ en V_k .

Lema 2.2.12. *La familia $(y_j)_{j \in \mathbb{I}_{0,p-1}}$ genera linealmente V_k . Además g, u y x actúan trivialmente en V_k .*

Prueba. Primero afirmamos que la clase de $w_k^{(i,j)}$ es cero en V_k si $i \neq 0$: es suficiente mostrar que $w_k^{(1,j)} = 0$ en V_k . Esto se sigue de realizar inducción en j usando (2.2.1). Luego x actúa trivialmente en V_k y $(y_j)_{j \in \mathbb{I}_{0,p-1}}$ genera linealmente V_k . Además g y u actúan trivialmente en estos generadores por inducción en j usando (2.2.9). \square

La acción de $D(H_J)$ en V_k puede ser calculada inductivamente:

$$\begin{aligned} \zeta \cdot y_j &= (k + j)y_j, & v \cdot y_j &= \frac{1}{2}j(1 - 2k - j)y_{j-1}, & y \cdot y_j &= y_{j+1}, \\ x \cdot y_j &= 0, & u \cdot y_j &= 0, & g \cdot y_j &= y_j. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Sea $r \in \mathbb{I}_{0,p-1}$ un representante de $-2k$, i.e. $r \equiv -2k \pmod{p}$. Entonces $\tilde{V}_k := D(H_J)y_{r+1}$ es un submódulo propio de V_k pues $\mathcal{D}^{>0} \cdot y_{r+1} = 0$.

Proposición 2.2.13. *El módulo $L_k = V_k/\tilde{V}_k$ es simple de dimensión $r + 1$.*

Se sigue que $L_k = L(\lambda_k)$ es la cabeza del módulo de Verma $M(\lambda_k)$.

Prueba. Sea z_j la clase de y_j en L_k ; la acción de $D(H_J)$ en los z_j está aún dada por (2.2.11). Luego $(z_j)_{j \in \mathbb{I}_{0,r}}$ es una base de L_k . Para ver que L_k es simple, probamos que todo $0 \neq z \in L_k$ genera L_k . Sea $z = \sum_{j=0}^m c_j z_j$ con $m \leq r$ y $c_m \neq 0$. Luego $v^m \cdot z \in \mathbb{k}^\times z_0$, y $D(H_J) \cdot z = L_k$. \square

2.3 | El doble del Plano de Jordan

2.3.1 | Definiciones

En esta sección definimos un álgebra de Hopf de dimensión infinita \widetilde{D} de forma que $\widetilde{D} \rightarrow D(H_J)$. Primero consideramos dos álgebras de Hopf \widetilde{H}_J y \widetilde{K}_J tal que $\widetilde{H}_J \twoheadrightarrow H_J$ y $\widetilde{K}_J \twoheadrightarrow K_J := (H_J^*)^{\text{op}}$. Entonces $\widetilde{D} := \widetilde{H}_J \bowtie_{\sigma} \widetilde{K}_J$ para un 2-cociclo adecuado σ como en [DT]. El álgebra de Hopf \widetilde{H}_J fue estudiada en [ABFF] (asumiendo $\text{char } \mathbb{k} = 0$).

Recordemos que denotamos por $\Gamma = \langle \mathbf{g} \rangle \simeq \mathbb{Z}$ al grupo cíclico infinito. Sea $R = \mathbb{k}[\zeta]$ el álgebra de polinomios, un álgebra de Hopf con ζ primitivo. Tenemos morfismos de álgebras de Hopf $\mathbb{k}\Gamma \twoheadrightarrow \mathbb{k}C_p$ y $R \twoheadrightarrow \mathbb{k}^{C_p}$. Por las mismas fórmulas que en (2.1.1) y (2.2.8), $V_J \in \mathbb{k}\Gamma \mathcal{YD}$ y $W \in {}^R_R \mathcal{YD}$. Entonces tenemos las siguientes álgebras de Hopf trenzadas y sus bosonizaciones

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{B}} &= T(V_J)/(yx - xy + \frac{1}{2}x^2) \in \mathbb{k}\Gamma \mathcal{YD}, & \widetilde{H}_J &= \widetilde{\mathcal{B}} \# \mathbb{k}\Gamma; \\ \widetilde{\mathcal{B}} &= T(W_J)/(vu - uv - \frac{1}{2}u^2) \in {}^R_R \mathcal{YD}, & \widetilde{K}_J &= (\widetilde{\mathcal{B}} \# R)^{\text{op}}. \end{aligned}$$

Las álgebras $\widetilde{\mathcal{B}}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}$ son isomorfas al plano de Jordan; pero no son isomorfas como coálgebras.

Lema 2.3.1. *Las familias $(x^i y^j \mathbf{g}^k)_{i,j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}}$ y $(\zeta^i u^j v^k)_{i,j,k \in \mathbb{N}_0}$ son bases PBW \widetilde{H}_J y \widetilde{K}_J respectivamente. El álgebra \widetilde{H}_J está presentada por generadores x, y, \mathbf{g}^{\pm} y relaciones*

$$\mathbf{g}x = x\mathbf{g}, \quad \mathbf{g}y = y\mathbf{g} + x\mathbf{g}, \quad yx = xy - \frac{1}{2}x^2, \quad \mathbf{g}^{\pm} \mathbf{g}^{\mp} = 1. \quad (2.3.1)$$

El álgebra \widetilde{K}_J está presentada por generadores u, v, ζ y relaciones

$$v\zeta = \zeta v + v, \quad u\zeta = \zeta u + u, \quad vu = uv - \frac{1}{2}u^2. \quad (2.3.2)$$

Los coproductos de \widetilde{H}_J y \widetilde{K} están determinados por (2.2.2), respectivamente (2.2.7).

Prueba. Es conocido que $(x^i y^j)_{i,j \in \mathbb{N}_0}$, $(v^i u^j)_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ son bases PBW de $\widetilde{\mathcal{B}}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}$ respectivamente. Luego la afirmación se sigue fácilmente (tenga en cuenta el cambio de orden en los monomios de \widetilde{K}). Sean A y B las álgebras presentadas por generadores y relaciones (2.3.1) y (2.3.2) respectivamente. Las relaciones son válidas en \widetilde{H}_J y \widetilde{K} , luego tenemos epimorfismos de álgebras de Hopf $A \twoheadrightarrow \widetilde{H}_J$ y $B \twoheadrightarrow \widetilde{K}_J$. Claramente $(\mathbf{g}^i x^j y^k)_{j,k \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{Z}}$ y $(u^i v^j \zeta^k)_{i,j,k \in \mathbb{N}_0}$ son generadores lineales de A y B respectivamente. Como sus imágenes por los morfismos son linealmente independientes, el resultado se sigue. \square

Para definir \widetilde{D} , necesitamos un par torcido τ entre \widetilde{H}_J y \widetilde{K}_J como en [DT], es decir un mapa lineal $\tau: \widetilde{H}_J \otimes \widetilde{K}_J \rightarrow \mathbb{k}$ que satisface (1.7.1). Luego τ es inversible respecto al producto de convolución con inversa $\tau^{-1}(b, c) = \tau(\mathcal{S}(b), c)$. Por (1.7.1), un par torcido τ es equivalente a un morfismo de álgebras de Hopf φ desde $\widetilde{H}_J^{\text{cop}}$ hacia el dual de Sweedler \widetilde{K}_J° de \widetilde{K}_J .

Lema 2.3.2. *Existe un único par torcido $\tau: \widetilde{H}_J \otimes \widetilde{K}_J \rightarrow \mathbb{k}$ tal que*

$$\begin{aligned} \tau(x \otimes u) &= 0, & \tau(y \otimes u) &= 1, & \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes u) &= 0, \\ \tau(x \otimes v) &= 1, & \tau(y \otimes v) &= 0, & \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes v) &= 0, \\ \tau(x \otimes \zeta) &= 0, & \tau(y \otimes \zeta) &= 0, & \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes \zeta) &= \pm 1. \end{aligned}$$

Prueba. Para el lector. □

Sea $A = \widetilde{H}_J \otimes \widetilde{K}_J$ con la estructura del producto tensorial de álgebras de Hopf. El 2-cociclo $\sigma: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ asociado a τ está dado por

$$\sigma(a \otimes b, c \otimes d) = \varepsilon(a)\varepsilon(d)\tau(c \otimes b), \quad a, b, c, d \in A.$$

Definimos \widetilde{D} como el álgebra de Hopf A torcida por σ , i.e $\widetilde{D} = A_\sigma = \widetilde{H}_J \bowtie_\sigma \widetilde{K}_J$.

Proposición 2.3.3. (i) *El álgebra \widetilde{D} está presentada por generadores $u, v, \zeta, \mathbf{g}^{\pm 1}, x, y$ y relaciones (2.3.1), (2.3.2) y*

$$\begin{aligned} \zeta y &= y\zeta + y, & \zeta x &= x\zeta + x, & v\mathbf{g} &= \mathbf{g}v + \mathbf{g}u, \\ u\mathbf{g} &= \mathbf{g}u, & vx &= xv + (1 - \mathbf{g}) + xu, & ux &= xu, \\ uy &= yu + (1 - \mathbf{g}) & vy &= yv - \mathbf{g}\zeta + yu, & \zeta\mathbf{g} &= \mathbf{g}\zeta. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

El coproducto está determinado por (2.2.2) y (2.2.7).

(ii) *La siguiente familia es una base PBW de \widetilde{D} :*

$$\{x^n y^r \mathbf{g}^m \zeta^k u^i v^j : i, j, k, n, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.3.4)$$

(iii) *Existe un epimorfismo de álgebras de Hopf $\widetilde{D} \rightarrow D(H_J)$.*

Prueba. (ii) Se sigue de la definición. (i): Sea A el álgebra presentada como arriba. Por construcción, las relaciones son válidas en \widetilde{D} y por ende tenemos un epimorfismo $A \rightarrow \widetilde{D}$. Usando las relaciones de conmutación tenemos que A está linealmente generada por (2.3.4). Entonces por (ii), $A \simeq \widetilde{D}$.

(iii) Se sigue de (i) pues las relaciones se cumplen en $D(H_J)$. □

Observación 2.3.4. Si asumimos $\text{char } \mathbb{k} = 0$, entonces la definición de \widetilde{D} tiene sentido y los puntos (i) y (ii) de la Proposición 2.3.3 también son válidos.

Ahora mostraremos que \widetilde{D} es en realidad una extensión de $D(H_J)$ por una subálgebra de Hopf central Z . Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.3.5. *Las siguientes relaciones de conmutación son válidas en \widetilde{D} para $n, m \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} \zeta^n x^m &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} m^{n-\ell} x^m \zeta^\ell, & \zeta^n y^m &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} m^{n-\ell} y^m \zeta^\ell, \\ v^m \zeta^n &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} m^{n-\ell} \zeta^\ell v^m, & u^m \zeta^n &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} m^{n-\ell} \zeta^\ell u^m, \\ \mathbf{g}^n y^\ell &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \frac{[-2n]^{[k]}}{2^k} x^k y^{\ell-k} \mathbf{g}^n, \\ y^\ell x^n &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \frac{[n]^{[k]}}{2^k} x^{n+k} y^{\ell-k}, \\ v^\ell u^n &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \frac{[n]^{[k]}}{2^k} u^{n+k} v^{\ell-k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^\ell \mathbf{g}^n &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \frac{[-2n]^{[k]}}{2^k} \mathbf{g}^n u^k v^{\ell-k}, \\
vx^n &= x^n v + nx^{n-1}(1 - \mathbf{g}) + nx^n u, \\
v^n x &= xv^n + nxuv^{n-1} + \frac{n(n-1)}{4} xu^2 v^{n-2} + nv^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} uv^{n-2} \\
&\quad - n\mathbf{g}v^{n-1} - n(n-1)\mathbf{g}uv^{n-2} - \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)\mathbf{g}u^2 v^{n-3}, \\
v^n y &= yv^n + nyuv^{n-1} - \frac{n(n-1)}{4} yuv^{n-2} - n\mathbf{g}\zeta v^{n-1} - n(n-1)\mathbf{g}\zeta uv^{n-2} \\
&\quad - \frac{1}{4}n(n-1)(n-2)\mathbf{g}\zeta u^2 v^{n-3} - \frac{n(n-1)}{2}\mathbf{g}v^{n-1} - \frac{n(n-1)^2}{2}\mathbf{g}uv^{n-2} \\
&\quad - \frac{1}{8}n(n-1)^2(n-2)\mathbf{g}u^2 v^{n-3}, \\
uy^n &= y^n u + ny^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(k+1)!}{2^k} y^{n-1-k} x^k \mathbf{g}, \\
vy^n &= y^n v + ny^n u + \frac{n(n-1)}{2} y^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(k+1)!}{2^k} y^{n-1-k} x^k \mathbf{g}\zeta \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \frac{(n-1)(k+1)!}{2^k} y^{n-1-k} x^k \mathbf{g}, \\
u^n y &= yu^n + n(1 - \mathbf{g})u^{n-1},
\end{aligned}$$

La comultiplicación cumple que

$$\begin{aligned}
\Delta(x^n) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \mathbf{g}^k \otimes x^k, \\
\Delta(y^n) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^i \frac{[n-k]^{[i]}}{2^i} \mathbf{g}^{n-k} x^i y^{k-i} \otimes y^{n-k}.
\end{aligned}$$

Prueba. La prueba es directa por inducción. \square

Para nuestra siguiente afirmación necesitamos fijar notación. Sea

$$\mathbf{B} = ((\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m) \times \mathbf{H}_3 \quad (2.3.5)$$

el grupo algebraico tal que en el primer factor tiene el producto semidirecto donde \mathbf{G}_m actúa en $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ por $\lambda.(r_1, r_2) = (\lambda r_1, \lambda r_2)$, $\lambda \in \mathbb{k}^\times$, $r_1, r_2 \in \mathbb{k}$ mientras que el segundo factor es el grupo de Heisenberg \mathbf{H}_3 i.e. el grupo de matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. (El primer factor no es el mismo grupo que en la Observación 2.2.7).

Proposición 2.3.6. *Sea Z el subálgebra de \tilde{D} generada por los elementos \mathbf{g}^p , x^p , y^p , u^p , v^p y $\zeta^{(p)} := \prod_{i=1}^p (\zeta + i - 1) = \zeta^p - \zeta$. Entonces*

- (i) Z es una subálgebra de Hopf central de \tilde{D} .
- (ii) \tilde{D} es un Z -módulo libre finitamente generado.

(iii) $Z \xrightarrow{\iota} \widetilde{D} \xrightarrow{\pi} D(H_J)$ es una sucesión exacta corta de álgebras de Hopf.

(iv) $Z \simeq \mathbb{k}[T^\pm] \otimes \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5]$ como álgebras. En particular Z es un dominio.

(v) $Z \simeq \mathcal{O}(\mathbf{B})$ como álgebras de Hopf.

Prueba. (i) Por el Lema 2.3.5 Z es una subálgebra central de \widetilde{D} ; $u^p, \zeta^{(p)} \in \mathcal{P}(\widetilde{D})$ y $\mathbf{g}^p \in G(\widetilde{D})$. Además $\Delta(x^p) = x^p \otimes 1 + \mathbf{g}^p \otimes x^p$ y $\Delta(y^p) = y^p \otimes 1 + \mathbf{g}^p \otimes y^p$. Solo resta mostrar que

$$\Delta(v^p) = v^p \otimes 1 + 1 \otimes v^p + \zeta^{(p)} \otimes u^p. \quad (2.3.6)$$

Como $v \in \widetilde{K}_J = (\widetilde{\mathfrak{B}} \# R)^{\text{op}}$ es suficiente conocer la coacción $\delta(v^p)$ y la multiplicación trenzada de v^p en $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Se puede probar inductivamente que

$$\begin{aligned} \Delta_{\widetilde{\mathfrak{B}}}(v^n) &= v^n \otimes 1 + 1 \otimes v^n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} \frac{[n-k]^{[i]}}{2^i} v^{n-k} \otimes u^i v^{k-i}, \\ \delta(v^n) &= 1 \otimes v^n + \zeta^n \otimes u^n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{t=k}^n \binom{n}{t} \binom{t}{k} \frac{1}{2^{t-k}} \zeta^k \otimes u^t v^{n-t}, \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Como $\zeta^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \zeta^k = \zeta^p - \zeta$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = 0, \quad k = 2, \dots, p-1, \quad \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} = 1, \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = -1. \quad (2.3.7)$$

Luego $\delta(v^p) = 1 \otimes v^p + \zeta^{(p)} \otimes u^p$, $\Delta_{\widetilde{\mathfrak{B}}}(v^p) = v^p \otimes 1 + 1 \otimes v^p$, y (2.3.6) se sigue automáticamente.

(ii) Para probar esto consideramos otra base de \widetilde{D} usando una base diferente para $R = \mathbb{k}[\zeta]$. La familia de polinomios

$$\left\{ (\zeta^{(p)})^k \zeta^j : k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{I}_{0, p-1} \right\}$$

es una base de R . En efecto, estos polinomios son linealmente independientes pues tienen diferentes grados. Probamos ahora que los polinomios ζ^n pueden ser escritos como combinación lineal de ellos por inducción en n . El caso $n = 0$ es obvio. Si $\zeta^n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{p-1} a_{k,j} (\zeta^{(p)})^k \zeta^j$ para algunas constantes $a_{k,j}$ entonces

$$\begin{aligned} \zeta^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{p-1} a_{k,j} (\zeta^{(p)})^k \zeta^{j+1} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{p-1} a_{k,j-1} (\zeta^{(p)})^k \zeta^j + \sum_{k=0}^n a_{k,p-1} (\zeta^{(p)})^{k+1} + \sum_{k=0}^n a_{k,p-1} (\zeta^{(p)})^k \zeta. \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.3.3 (ii), la siguiente es una base lineal de \widetilde{D} :

$$\left\{ x^n y^r \mathbf{g}^m (\zeta^{(p)})^k \zeta^\ell u^i v^j : i, j, k, n, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{I}_{0, p-1} \right\}$$

Luego la siguiente es una base de \widetilde{D} como Z -módulo:

$$\left\{ x^n y^r \mathbf{g}^m \zeta^\ell u^i v^j : i, j, \ell, n, r, m \in \mathbb{I}_{0, p-1} \right\}.$$

(iii) Por las proposiciones 2.3.3 y 2.2.5, $\ker \pi$ es un ideal generado por

$$x^p, \quad y^p, \quad \mathbf{g}^p - 1, \quad u^p, \quad v^p \quad \text{and} \quad \zeta^{(p)}.$$

Este es claramente igual a $\tilde{D}\iota(Z)^+$. Luego la observación 1.2.8, (i) y (ii) se aplican directamente.

(iv) Por la prueba de (ii), la siguiente es una base de Z :

$$\{x^{pn} y^{pr} \mathbf{g}^{pm} (\zeta^{(p)})^k u^{pi} v^{pj} : i, j, k, n, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Luego la siguiente asignación

$$T \mapsto \mathbf{g}^p, \quad X_1 \mapsto x^p, \quad X_2 \mapsto y^p, \quad X_3 \mapsto \zeta^{(p)}, \quad X_4 \mapsto u^p, \quad X_5 \mapsto v^p.$$

es el deseado isomorfismo de álgebras $Z \simeq \mathbb{k}[T^\pm] \otimes \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5]$.

(v) Por (iv) Z es un álgebra de Hopf conmutativa sin elementos nilpotentes. Luego $Z \simeq \mathcal{O}(G)$ para un grupo algebraico $G = \text{Hom}_{\text{alg}}(Z, \mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^5$. La multiplicación de G es inducida por la comultiplicación de Z y para los elementos $\omega = (\lambda, r_1, r_2, t_1, t_2, t_3)$, $\omega' = (\lambda', r'_1, r'_2, t'_1, t'_2, t'_3) \in \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^5$ está dada por

$$\omega \cdot \omega' = (\lambda\lambda', r_1 + \lambda r'_1, r_2 + \lambda r'_2, t_1 + t'_1, t_2 + t'_2, t_3 + t'_3 + t_1 t'_2). \quad (2.3.8)$$

Claramente $G = \mathbf{B}$. □

2.3.2 | Otra sucesión exacta

En esta subsección empezamos asumiendo que $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, i.e. $\text{char } \mathbb{k} = 0$ está permitida. Sea $\{h, e, f\}$ los generadores de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$. Sea $\pi: \tilde{D} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ un morfismo de álgebras de Hopf dado por $x \mapsto 0, y \mapsto \frac{1}{2}e, u \mapsto 0, v \mapsto f, \mathbf{g} \mapsto 1$ y $\zeta \mapsto h$. Sea C el subálgebra de \tilde{D} generada por x, u y \mathbf{g} ; claramente es una subálgebra de Hopf normal. Sea \mathbf{G} el grupo algebraico definido en la Observación 2.2.7.

Proposición 2.3.7. (i) $C \simeq \mathcal{O}(\mathbf{G})$ como álgebras de Hopf.

(ii) Hay una sucesión exacta de álgebras de Hopf

$$\mathcal{O}(\mathbf{G}) \hookrightarrow \tilde{D} \xrightarrow{\pi} U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})).$$

Prueba. (i) se sigue de la definición usando la base PBW.

(ii) Por la normalidad de $\mathcal{O}(G)$, $\ker \pi = \langle x, u, \mathbf{g} - 1 \rangle = \tilde{D}\mathcal{O}(G)^+$. Luego la Observación 1.2.8 aplica directamente: $\mathcal{O}(G)$ es estable por la acción adjunta y \tilde{D} es un módulo libre sobre $\mathcal{O}(G)$ por la base PBW, luego la inclusión es fielmente plana. □

Volvemos a la hipótesis de que $\text{char } \mathbb{k} > 2$. Recordemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(\mathbf{G}) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{B}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3) \\ \text{Fr} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(\mathbf{G}) & \hookrightarrow & \tilde{D} & \twoheadrightarrow & U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R} & \hookrightarrow & D(H_J) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})). \end{array} \quad (2.1.2)$$

Proposición 2.3.8. *Todas las columnas y las filas de (2.1.2) son sucesiones exactas.*

Prueba. La fila del medio es exacta por la proposición anterior y la fila de abajo por la Proposición 2.2.6. Para la columna de la derecha necesitamos probar que la subálgebra de Hopf $Z' = \langle e^p, f^p, h^p - h \rangle$ de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ es $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$. Tomando la base $B = \{f^i(h^p - h)^j h^k e^\ell : i, j, k, \ell \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{I}_{0, p-1}\}$ de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ vemos que la asignación $X_1 \mapsto f^p$, $X_2 \mapsto h^p - h$ y $X_3 \mapsto e^p$ da un isomorfismo de álgebras $Z' \simeq \mathbb{k}[X_1, X_2, X_3] \simeq \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$. Comparando multiplicaciones, el isomorfismo anterior es de álgebras de Hopf. $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ es estable por la acción adjunta de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k}))$ y un módulo libre sobre $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ usando la base B , luego la Observación 1.2.8 se aplica y la columna es exacta.

Ahora describimos explícitamente la fila de arriba. $\phi: \mathcal{O}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{B})$ está dado por $x \mapsto x^p$, $u \mapsto u^p$ y $\mathbf{g} \mapsto \mathbf{g}^p$, y $\psi: \mathcal{O}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ está dado por

$$x^p \mapsto 0, \quad y^p \mapsto \frac{1}{2}e^p, \quad u^p \mapsto 0, \quad v^p \mapsto f^p, \quad \mathbf{g}^p \mapsto 1, \quad \zeta^{(p)} \mapsto h^p - h.$$

Se sigue que ϕ es inyectiva ya que envía una base en un conjunto linealmente independiente y ψ es suryectiva pues la base PBW de $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ pertenece en la imagen. Claramente $\ker \psi \supseteq \mathcal{O}(\mathbf{B})\phi(\mathcal{O}(\mathbf{G}))^+$, la otra inclusión se sigue fácilmente usando la base de $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ dada por

$$\left\{ x^{pn} y^{pr} (\mathbf{g}^p - 1)^m (\zeta^{(p)})^k u^{pi} v^{pj} : i, j, k, n, r, m \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ x^{pn} y^{pr} (\mathbf{g}^{-p} - 1)^m (\zeta^{(p)})^k u^{pi} v^{pj} : i, j, k, n, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

La acción adjunta de $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ es trivial, luego $\phi(\mathcal{O}(\mathbf{G}))$ es invariante. Usando las bases PBW de $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ y $\mathcal{O}(\mathbf{G})$ se sigue fácilmente que ϕ es fielmente plana. Luego la Observación 1.2.8 implica que la fila es exacta.

La columna del medio es exacta por la Proposición 2.3.6. Solo queda por ver la columna izquierda. Sea $\pi: \mathcal{O}(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{R}$ definida como en la Observación 2.2.7, luego $\ker \pi = \langle x^p, u^p, \mathbf{g}^p - 1 \rangle = \mathcal{O}(\mathbf{G})\text{Fr}(\mathcal{O}(\mathbf{G}))^+$. Por 1.2.8, el resultado se sigue fácilmente. \square

2.3.3 | Propiedades del anillo \tilde{D}

Proposición 2.3.9. (i) *El álgebra \tilde{D} admite una filtración ascendente exhaustiva $(\tilde{D}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que $\text{gr } \tilde{D} \simeq \mathbb{k}[T^\pm] \otimes \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5]$.*

(ii) *\tilde{D} es un dominio noetheriano.*

(iii) *\tilde{D} es un álgebra de identidad polinomial.*

Prueba. (i) Sea T el álgebra generada por $\mathbf{g}^{\pm 1}, \zeta, x, y, u, v$ con relaciones $\mathbf{g}^{\pm 1} \cdot \mathbf{g}^{\mp 1} = 1$. Considere el grado de T determinada por

$$\deg \mathbf{g}^{-1} = -1, \quad \deg \mathbf{g} = \deg \zeta = 1, \quad \deg u = \deg x = 2, \quad \deg v = \deg y = 3.$$

La filtración asociadas a esta graduación induce una filtración en \tilde{D} a través del epimorfismo $T \twoheadrightarrow \tilde{D}$. Las relaciones de \tilde{D} implican que las clases de los generadores conmutan en $\text{gr } \tilde{D}$ y $\mathbf{g}\mathbf{g}^{-1} = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{g} = 1$. Concluimos entonces que $\mathbb{k}[T^\pm] \otimes \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5] \twoheadrightarrow \text{gr } \tilde{D}$. Comparando dimensiones en cada grado usando la base PBW, vemos que este mapa es un isomorfismo.

(ii) se sigue de (i) pues $\mathbb{k}[T^\pm] \otimes \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5]$ es un dominio noetheriano.

(iii) se sigue de la Proposición 2.3.6 y [MR, Corolario 1.13]. \square

El álgebra \widetilde{H}_J es también de identidad polinomial por una razón similar. En característica 0, todos los \widetilde{H}_J -módulos simples de dimensión finita tienen dimensión 1 y son clasificados en [ABFF, §3] usando resultados de [I].

2.4 | Álgebras de Pre-Nichols del plano de Jordan restringido

2.4.1 | Álgebras de pre-Nichols de dimensión finita

Recordemos que un álgebra de pre-Nichols de un espacio vectorial trenzado (\mathcal{V}, c) (o de su álgebra de Nichols) es un álgebra de Hopf trenzada graduada conexa $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{B}^n$ tal que $\mathcal{B}^1 \simeq \mathcal{V}$ (como espacios vectoriales trenzados) y que este genera \mathcal{B} como álgebra.

Así mismo un morfismo de álgebras de pre-Nichols es uno de álgebras de Hopf trenzadas graduadas y conexas, que induce el mapa identidad en \mathcal{V} .

Entonces tenemos por definición de morfismos de álgebras de pre-Nichols $T(\mathcal{V}) \twoheadrightarrow \mathcal{B} \twoheadrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{V})$. Si $\mathcal{V} \in {}^K_K \mathcal{YD}$ para un álgebra de Hopf K , entonces \mathcal{B} es un álgebra de pre-Nichols sobre K si además $\mathcal{B} \in {}^K_K \mathcal{YD}$, esto es el núcleo de $T(\mathcal{V}) \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ es un submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(\mathcal{V})$.

Para el clasificar álgebras de Hopf es importante determinar todas las álgebras de pre-Nichols de dimensión finita del plano de Jordan restringido $\widetilde{\mathcal{B}}(V_J)$. En esta sección clasificamos aquellas que factorizan a través del plano de Jordan $\widetilde{\mathcal{B}}$.

Álgebras de Pre-Nichols

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.4.1. *Las siguientes fórmulas son válidas en $\widetilde{\mathcal{B}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$g \rightharpoonup y^n = y^n + nxy^{n-1} + \frac{1}{4}(n^2 - n)x^2y^{n-2}, \quad (2.4.1)$$

$$\Delta(x^n) = x^n \otimes 1 + 1 \otimes x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} \otimes x^k, \quad (2.4.2)$$

$$\Delta(y^n) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} (-1)^i \frac{[k-n]^{[i]}}{2^i} x^i y^{k-i} \otimes y^{n-k}. \quad (2.4.3)$$

Si $n = p\ell$ con $\ell \geq 1$, la última fórmula se simplifica a

$$\Delta(y^{p\ell}) = y^{p\ell} \otimes 1 + 1 \otimes y^{p\ell} + \sum_{t=1}^{\ell-1} \binom{\ell}{t} y^{pt} \otimes y^{p(\ell-t)}. \quad (2.4.4)$$

Prueba. (2.4.1) se prueba por inducción en n usando (2.2.3). Como x es primitivo y $c(x \otimes x) = x \otimes x$, (2.4.2) se sigue automáticamente. (2.4.3) se prueba por inducción usando (2.4.1) y que $g^k \rightharpoonup y = y + kx$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para probar (2.4.4), notémos que y^p es primitivo pues $\binom{p}{k} = 0$ para $1 \leq k \leq p-1$ y (2.4.3). Por (2.4.1) vale que $c(y^p \otimes y^p) = y^p \otimes y^p$, luego (2.4.4) se sigue fácilmente. \square

Proposición 2.4.2. Sea $k, \ell \in \mathbb{N}$ and $a \in \mathbb{k}$. Las álgebras

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(k, a) &:= \widetilde{\mathcal{B}}/(y^{p^k} - ax^{p^k}), \\ \mathcal{F}(\ell) &:= \widetilde{\mathcal{B}}/(x^{p^\ell}), \\ \mathcal{G}(k, \ell, a) &:= \widetilde{\mathcal{B}}/(y^{p^k} - ax^{p^k}, x^{p^\ell})\end{aligned}$$

son álgebras de pre-Nichols de $\mathcal{B}(V)$ sobre $\mathbb{k}C_p$ que factorizan por $\widetilde{\mathcal{B}}$ y tienen bases PBW dadas por la siguiente tabla.

Álgebra	base PBW
$\mathcal{K}(k, a)$	$\{x^i y^j : i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{I}_{0, p^k-1}\}$
$\mathcal{F}(\ell)$	$\{x^i y^j : i \in \mathbb{I}_{0, p^\ell-1}, j \in \mathbb{N}_0\}$
$\mathcal{G}(k, \ell, a)$	$\{x^i y^j : i \in \mathbb{I}_{0, p^\ell-1}, j \in \mathbb{I}_{0, p^k-1}\}$

Prueba. Los elementos de la forma $f = b_1 x^{p^t} + b_2 y^{p^t}$ con $b_1, b_2 \in \mathbb{k}$ y $t \in \mathbb{N}$ son primitivos, $g \rightharpoonup f = f$ y $c(f \otimes f) = f \otimes f$. Luego las álgebras $\mathcal{K}(k, a)$, $\mathcal{F}(\ell)$ and $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ son de pre-Nichols. Probamos ahora la existencia de las bases PBW usando el lema del diamante. Declaramos $x < y$ y definimos un orden en los monómios con letras x, y de la siguiente forma:

- $X < Y$ si el largo X (el número de letras en el producto X) es menor que el largo de Y .
- Si X e Y tienen el mismo largo, pero el número de letras y en Y es mayor que en X , entonces $X < Y$.
- Si X es una permutación de las letras de Y , pero tiene una menor cantidad de inversiones, entonces $X < Y$.

Aquí, decimos que un monómio $X = x_1 \cdots x_s$ con $x_t \in \{x, y\}$, $t \in \mathbb{I}_{1, s}$ tiene una inversión (i, j) , $1 \leq i < j \leq s$ si $x_i > x_j$. Con este orden, si todas las ambigüedades pueden ser resueltas, las hipótesis del lema del diamante se satisfacen. Luego el conjunto de monómios irreducibles es una base para cada una de las álgebras respectivamente, estas son las bases PBW propuestas. Usando (2.2.3) las resoluciones de ambigüedades son:

- $y^{p^k-1} y y^{p^k-1}$ para $\mathcal{K}(k, a)$ y $\mathcal{G}(k, \ell, a)$:

$$(y^{p^k-1} y) y^{p^k-1} = ax^{p^k} y^{p^k-1} = ay^{p^k-1} x^{p^k} = y^{p^k-1} (y y^{p^k-1}).$$

- $y^{p^k-1} y x$ para $\mathcal{K}(k, a)$ y $\mathcal{G}(k, \ell, a)$:

$$\begin{aligned}(y^{p^k-1} y) x &= y^{p^k} x = ax^{p^k+1}. \\ y^{p^k-1} (y x) &= y^{p^k-1} x y - \frac{1}{2} y^{p^k-1} x^2 = \\ &= \sum_{t=0}^{p^k-1} \binom{p^k-1}{t} \frac{(-1)^t}{2^t} x^{1+t} y^{p^k-t-1} ([1]^{[t]} y - \frac{1}{2} [2]^{[t]} x) \\ &= xy^{p^k} - \frac{(p^k)!}{2^{p^k}} x^{p^k+1} + \sum_{t=1}^{p^k-1} \binom{p^k}{t} (-1)^t \frac{[1]^{[t]}}{2^t} x^{1+t} y^{p^k-t} \\ &= xy^{p^k} = ax^{p^k+1}.\end{aligned}$$

- $x^{p^\ell-1}xx^{p^\ell-1}$ para $\mathcal{F}(\ell)$ y $\mathcal{G}(k, \ell, a)$:

$$(x^{p^\ell-1}x)x^{p^\ell-1} = 0 = x^{p^\ell-1}(xx^{p^\ell-1}).$$

- $yx^{p^\ell-1}$ para $\mathcal{F}(\ell)$ y $\mathcal{G}(k, \ell, a)$:

$$(yx)x^{p^\ell-1} = yxx^{p^\ell-1} - \frac{1}{2}x^{p^\ell+1} = x^{p^\ell}y + \frac{1}{2}x^{p^\ell} = 0 = y(xx^{p^\ell-1}).$$

□

Exhaución

Ahora mostramos que las álgebras $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ son las únicas álgebras de pre-Nichols de dimensión finita de $\mathcal{B}(V)$ que factorizan por $\widetilde{\mathcal{B}}$. Las relaciones de un álgebra de pre-Nichols con grado minimal son primitivas, luego podemos empezar calculando los elementos primitivos de las álgebras $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{K}(k, a)$, $\mathcal{F}(\ell)$ o $\mathcal{G}(k, \ell, a)$. Denotemos cualquiera de estas álgebras por \mathcal{A} y por $\mathcal{P}(\mathcal{A})^n$ el espacio de los elementos primitivos de grado n que es un submódulo de Yetter-Drinfeld sobre C_p de \mathcal{A}^n . Como C_p actúa unipotentemente si $\mathcal{P}(\mathcal{A})^n \neq 0$, existe $0 \neq f \in \mathcal{P}(\mathcal{A})^n$ invariante. Primero calculamos elementos invariantes de \mathcal{A}^n .

Lema 2.4.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$.*

- (i) *Si \mathcal{A} es $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{K}(k, a)$ o $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ con $k \leq \ell$, luego el submódulo $\mathcal{I}^n \subseteq \mathcal{A}^n$ de elementos invariantes de grado n es generado por el conjunto*

$$\left\{ x^{n-p^\ell}y^{p^\ell} : 0 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \right\}.$$

- (ii) *Si \mathcal{A} es $\mathcal{F}(\ell)$ o $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ con $k > \ell$, luego el submódulo $\mathcal{I}^n \subseteq \mathcal{A}^n$ de elementos invariantes de grado n es generado por el conjunto*

$$\begin{aligned} \left\{ x^{p^\ell-1}y^{n+1-p^\ell} \right\} \cup \left\{ x^{n-p^\ell}y^{p^\ell} : 0 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \right\}, & \quad \text{si } n \geq p^\ell - 1, \\ \left\{ x^{n-p^\ell}y^{p^\ell} : 0 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \right\}, & \quad \text{si } n < p^\ell - 1. \end{aligned}$$

Prueba. (i) Consideramos ahora el caso $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{B}}$, todas las otras álgebras tienen bases PBW similares. Por (2.4.1), $x^{n-p^\ell}y^{p^\ell} \in \mathcal{I}^n$ para todo ℓ como arriba.

Sea $f = \sum_{i=0}^n b_i x^i y^{n-i} \in \mathcal{I}^n$. Por (2.4.1) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= g \rightharpoonup f - f = \\ & b_0 n x y^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[b_i (n-i) + \frac{b_{i-1}}{4} ((n-i+1)^2 - (n-i+1)) \right] x^{i+1} y^{n-i-1}. \end{aligned}$$

Y por ende $b_0 = 0$ si $p \nmid n$ y

$$0 = b_i (n-i) + \frac{b_{i-1}}{4} \left((n-i+1)^2 - (n-i+1) \right) \quad \forall i \in \mathbb{I}_{n-1}. \quad (2.4.5)$$

Sea $r_i := n-i$ en \mathbb{F}_p para $i \in \mathbb{I}_{n-1}$. Si $r_i = 0$, entonces (2.4.5) no hay restricciones. Si $r_i \neq 0$, entonces (2.4.5) dice que $b_i = -\frac{1}{4}b_{i-1}(r_i+1)$. Entonces

- Si $r_i = -1$, luego $b_i = 0$.
- Si $r_i \neq -1, 0$ y $b_{i-1} = 0$, luego $b_i = 0$.

Asumamos que $p \nmid n$. Luego $b_0 = 0$. Entonces $r_1 \neq -1$; así o bien $r_1 \neq 0$ implica $b_1 = 0$, o $r_1 = 0$ en cuyo caso $r_2 = -1$ y $b_2 = 0$. Argumentando recursivamente $b_i = 0$ para todo i hasta que $r_i = 0$. Es decir $n - i = p\ell$ para algunos ℓ . Para estos i tenemos $r_{i+1} = -1$, luego $b_{i+1} = 0$ y siguiendo así. Es decir, f es la suma de monómios como los buscados. Finalmente, si $p \mid n$, $r_1 = -1$, luego $b_1 = 0$ y seguimos de forma análoga.

(ii) Si $n < p^\ell - 1$, el mismo argumento recursivo que en (i) vale. Si $n \geq p^\ell - 1$, por (2.4.1) el elemento $x^{p^\ell-1}y^{n+1-p^\ell}$ es invariante. Luego tomando $f \in \mathcal{I}^n$ como una combinación lineal de los elementos restantes de la base PBW nos lleva a un argumento recursivo similar al de (i). \square

Proposición 2.4.4. *Sea \mathcal{A} cualquiera de las subálgebras $\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{K}(k, a)$, $\mathcal{F}(\ell)$ o $\mathcal{G}(k, \ell, a)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A})^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ no es una potencia de } p. \\ \mathbb{k}x^{p^t} + \mathbb{k}y^{p^t} & \text{si } n = p^t \text{ para algunos } t \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Prueba. Procedemos por pasos. Primero mostramos que si $h \in \mathcal{P}(\mathcal{A})^n \cap \mathcal{I}^n$, entonces h es el subespacio lineal generado por $\{x^{n-p^\ell}y^{p^\ell} : 0 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor\}$ para cualquier \mathcal{A} . Si \mathcal{A} es $\mathcal{F}(\ell)$ o $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ con $k > \ell$, y $n \geq p^\ell - 1$, entonces h es de la forma

$$h = bx^{p^\ell-1}y^{n+1-p^\ell} + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} b_\ell x^{n-p^\ell}y^{p^\ell}, \quad b, b_\ell \in \mathbb{k}, \ell \in \mathbb{I}_{0, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}.$$

Como $\Delta(h) - h \otimes 1 - 1 \otimes h = 0$, entonces $bx^{p^\ell-1} \otimes y^{n+1-p^\ell} + \Theta = 0$, donde Θ es una combinación lineal de tensores linealmente independientes a $x^{p^\ell-1} \otimes y^{n+1-p^\ell}$. Luego $b = 0$ y h es de la forma deseada.

Ahora, mostramos que si tenemos un elemento no nulo $r = ax^n + by^n$, $a, b \in \mathbb{k}$, entonces r es primitivo si y solo si $n = p^t$ para algún $t \in \mathbb{N}_0$. Por el teorema de Lucas $\binom{n}{k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{I}_{n-1}$ si y solo si $n = p^t$ para algún $t \in \mathbb{N}_0$. Luego la afirmación para x^n es válida y podemos asumir que $b \neq 0$. En ese caso r nunca es primitivo si $p \nmid n$ y $n \neq 1$, pues $\Delta(y^n)$ tiene como sumando $ny \otimes y^{n-1}$. Si $n = p\ell$, r es primitivo si y solo si $\binom{\ell}{k} = 0$ para todos $k \in \mathbb{I}_{\ell-1}$, y esto ocurre si y solo si ℓ es una potencia de p .

Ahora clasificamos todos los primitivos. Como en la prueba anterior solo trabajamos con $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{B}}$, las otras álgebras tienen argumentos similares. Como la acción de g on $\mathcal{P}(\mathcal{A})^n$ es unipotente, si $\mathcal{P}(\mathcal{A})^n \neq 0$, entonces existe $0 \neq f \in \mathcal{P}(\mathcal{A})^n$ tal que $g \curvearrowright f = f$. Por el Lema 2.4.3 f es de la forma

$$f = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor} c_\ell x^{n-p^\ell}y^{p^\ell} \quad c_\ell \in \mathbb{k} \forall \ell.$$

Como $\Delta(f) - f \otimes 1 - 1 \otimes f = 0$, existe una combinación lineal Ξ_1 de tensores linealmente independientes a $x^{n-p^\ell} \otimes y^{p^\ell}$ y $y^{p^\ell} \otimes x^{n-p^\ell}$ tal que

$$0 = \Xi_1 + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor \\ p\ell \neq n}} c_\ell (x^{n-p^\ell} \otimes y^{p^\ell} + y^{p^\ell} \otimes x^{n-p^\ell}).$$

Luego $c_\ell = 0$ para $1 \leq \ell \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ y $p\ell \neq n$. Si $p \nmid n$, $f = c_0x^n$, pero esto es primitivo si y solo si n es una potencia de p , luego $\mathcal{P}(\mathcal{A})^n = 0$. Si $n = pj$ para $j \in \mathbb{N}$, entonces $f = c_0x^{pj} + c_jy^{pj}$. Este es primitivo si y solo si j es una potencia de p . Tenemos entonces $\mathcal{P}(\mathcal{A})^n = 0$ si n no es una potencia de p . Si $n = p^t$ con $t \in \mathbb{N}_0$, entonces $\mathbb{k}x^n + \mathbb{k}y^n$ son exactamente los primitivos invariantes. Queremos ver que estos son los únicos primitivos en \mathcal{A} . Fijemos $n = p^t$ para $t \in \mathbb{N}_0$. Si $\mathbb{k}x^{p^t} + \mathbb{k}y^{p^t} \subsetneq \mathcal{P}(\mathcal{A})^{p^t}$, la forma canónica de Jordan de g en $\mathcal{P}(\mathcal{A})^{p^t}$ implica la existencia de un primitivo no invariante f tal que $g \rightharpoonup f \stackrel{(*)}{=} f + h$ con $h = a_0x^{p^t} + a_1y^{p^t} \neq 0$ un primitivo invariante. Podemos asumir que f es una solución de la ecuación $(*)$. Si $f = \sum_{i=0}^{p^t-1} \tilde{b}_i x^i y^{n-i}$, entonces tenemos por (2.4.1)

$$\sum_{i=1}^{p^t-1} \left[-i\tilde{b}_i + \frac{\tilde{b}_{i-1}}{4} ((-i+1)^2 - (-i+1)) \right] x^{i+1} y^{p^t-i-1} = a_0x^{p^t} + a_1y^{p^t}.$$

El mismo argumento al final de la prueba del Lema 2.4.3 muestra que $\tilde{b}_i = 0$ para $p \nmid i$ y $i \neq p^t - 1$. Esto es, f es de la forma

$$f = bx^{p^t-1}y + \sum_{\ell=0}^{p^t-1} b_\ell x^{n-p^\ell} y^{p^\ell}, \quad b, b_\ell \in \mathbb{k}, \ell \in \mathbb{I}_{0, p^t-1}.$$

Usando ahora que f es primitivo, tenemos que $bx^{p^t-1} \otimes y + \Xi_2 = 0$, donde Ξ_2 es una combinación lineal de tensores lienalmente independientes a $x^{p^t-1} \otimes y$. Luego $b = 0$ y $\mathcal{P}(\mathcal{A})^{p^t} = \mathbb{k}x^{p^t} + \mathbb{k}y^{p^t}$. □

Lema 2.4.5. $\mathcal{G}(k, \ell, a) \simeq \mathcal{G}(k, \ell, 0)$ como álgebras de Hopf trenzadas.

Prueba. Sea $t \in \mathbb{k}$. El automorfismo de módulos de Yetter-Drinfeld $\psi_t : V \rightarrow V$ dado por $x \mapsto x$, $y \mapsto y + tx$ induce un automorfismo de álgebras de Hopf trenzadas $\Psi_t : T(V) \rightarrow T(V)$ que desciende a $\Psi_t : \widetilde{\mathcal{B}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{B}}$ pues $\Psi(yx - xy + \frac{1}{2}x^2) = yx - xy + \frac{1}{2}x^2$. Tenemos entonces un morfismo de grupos $\mathbf{G}_a \rightarrow \text{Aut } \widetilde{\mathcal{B}}$, $t \mapsto \Psi_t$.

Ahora tomemos $t \in \mathbb{k}$ fijo y solución de la ecuación $(t^p - t)^{p^{k-1}} + a = 0$. Argumentando recursivamente probamos que las siguientes igualdades valen en $\widetilde{\mathcal{B}}$:

$$(y + tx)^n = y^n + t^n x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} (-2)^{i-j} t^i x^j y^{n-j}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $(y + tx)^p = y^p + (t^p - t)x^p$ por (2.3.7). Como x^p conmuta con y^p , tenemos que $(y + tx)^{p^k} = y^{p^k} + (t^p - t)^{p^{k-1}} x^{p^k} = y^{p^k} - ax^{p^k}$. Es decir, Ψ induce un morfismo de álgebras de Hopf trenzadas $\mathcal{G}(k, \ell, 0) \rightarrow \mathcal{G}(k, \ell, a)$. Repitiendo el argumento con Ψ^{-1} concluimos que $\mathcal{G}(k, \ell, a) \simeq \mathcal{G}(k, \ell, 0)$. □

Debido al Lema anterior, introducimos $\mathcal{G}(k, \ell) := \mathcal{G}(k, \ell, 0)$. Ahora enunciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.4.6. Si \mathcal{B} es un álgebra de pre-Nichols de dimensión finita de V que factoriza por $\widetilde{\mathcal{B}}$, entonces $\mathcal{B} \simeq \mathcal{G}(k, \ell)$ para únicos $k, \ell \in \mathbb{N}$.

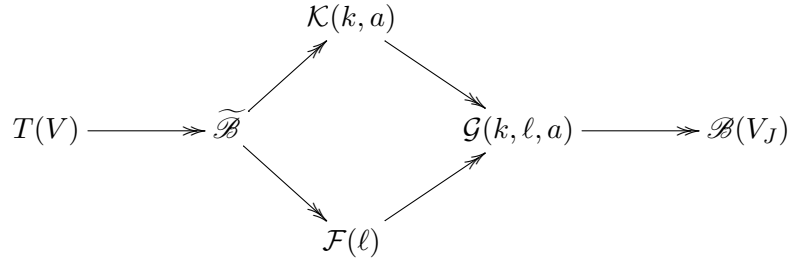
Prueba. Por la hipótesis, hay un morfismo $\pi : \widetilde{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{B}$ de álgebras de pre-Nichols. Como $\dim \widetilde{\mathcal{B}} = \infty$, $\ker \pi \neq 0$. Tomemos $0 \neq f \in \ker \pi$ homogéneo de grado minimal m ; entonces $f \in \mathcal{P}(\widetilde{\mathcal{B}})$. Por la Proposición 2.4.4, $m = p^k$, $k \in \mathbb{N}$, y existe $(b_1, b_2) \in \mathbb{k}^2 - 0$ tal que $f = b_1 x^{p^k} + b_2 y^{p^k}$. Tenemos dos casos, $b_2 \neq 0$ y $b_2 = 0$.

Si $b_2 \neq 0$, tomamos $a = -\frac{b_1}{b_2}$ tenemos un morfismo de álgebras de pre-Nichols $\pi_1 : \mathcal{K}(k, a) \rightarrow \mathcal{B}$. Como $\dim \mathcal{K}(k, a) = \infty$, $\ker \pi_1 \neq 0$. Tomemos ahora $0 \neq f_1 \in \ker \pi_1$ homogéneo de grado minimal m_1 ; luego $f_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{K}(k, a))$. Por la Proposición 2.4.4, $m_1 = p^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, y existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{k}^2 - 0$ tal que $f_1 = c_1 x^{p^\ell} + c_2 y^{p^\ell} \in \ker \pi_1$. Ahora la preimagen de f_1 en $\widetilde{\mathcal{B}}$ pertenece a $\ker \pi$, entonces $\ell \geq k$ por la minimalidad de $m = p^k$. Es decir $f_1 = c_1 x^{p^\ell} + c_2 y^{p^\ell} = (c_1 + c_2 a^{p^{\ell-k}}) x^{p^\ell}$. Luego $0 \neq x^{p^\ell} \in \ker \pi_1$ y tenemos el siguiente morfismo de álgebras de pre-Nichols $\pi_2 : \mathcal{G}(k, \ell, a) \rightarrow \mathcal{B}$ que es en realidad un isomorfismo. De lo contrario tomemos $0 \neq f_2 \in \ker \pi_2$ homogéneo de grado minimal $m_2 = p^h$; entonces $f_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{G}(k, \ell, a))$. Ahora la preimagen de f_2 en $\mathcal{K}(k, a)$ pertenece a $\ker \pi_1$, luego $h \geq \ell \geq k$, pero todos los primitivos en $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ tienen grado $< \max\{p^\ell, p^k\}$. Se sigue entonces que $\mathcal{B} \simeq \mathcal{G}(k, \ell, a) \simeq \mathcal{G}(k, \ell)$ por el Lema 2.4.5.

Si $b_2 = 0$, entonces tenemos un morfismo de álgebras de pre-Nichols $\pi_3 : \mathcal{F}(k) \rightarrow \mathcal{B}$. Como $\dim \mathcal{F}(k) = \infty$, $\ker \pi_3 \neq 0$. Tomemos $0 \neq f_3 \in \ker \pi_3$ homogéneo de grado minimal m_3 ; luego $f_3 \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(k))$, $m_3 = p^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, y existe $(c_1, c_2) \in \mathbb{k}^2 - 0$ tal que $f_3 = c_1 x^{p^\ell} + c_2 y^{p^\ell} \in \ker \pi_3$. Como la preimagen de f_3 en $\widetilde{\mathcal{B}}$ pertenece a $\ker \pi$, $\ell \geq k$. Así $f_3 = c_2 y^{p^\ell}$. Entonces $0 \neq y^{p^\ell} \in \ker \pi_3$ y tenemos un isomorfismo $\pi_4 : \mathcal{G}(\ell, k, 0) \rightarrow \mathcal{B}$ argumentando igual que en el párrafo anterior. \square

El poset

Tenemos el siguiente diagrama del poset de álgebras de pre-Nichols del plano de Jordan restringido:



Para cualquier par de álgebras de pre-Nichols \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 de las familias anteriores, decimos que $\mathcal{R}_1 \geq \mathcal{R}_2$ si y solo si existe un epimorfismo de álgebras de pre-Nichols $\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2$. Este es un poset bien definido pues si $\mathcal{R}_1 \geq \mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$, entonces $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ por sus respectivas bases PBW y porque un morfismo de álgebras de pre-Nichols es la identidad en V_J .

Aunque $\mathcal{G}(k, \ell, a) \simeq \mathcal{G}(k, \ell)$ como álgebras de Hopf trenzadas, son diferentes como álgebras de pre-Nichols si $a \neq 0$ y $k < \ell$. Esto es porque requerimos que los morfismos de álgebras de pre-Nichols sean la identidad en V_J . Reservamos entonces la notación $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ solo para el caso $a \neq 0$ y $k < \ell$.

El objetivo de esta subsección es la descripción completa de este poset.

Lema 2.4.7. *Las siguientes comparaciones en el poset son válidas:*

(i) $\mathcal{G}(k, \ell, a) \geq \mathcal{G}(k', \ell', b)$ si y solo si una de las siguientes condiciones se satisface:

- (a) $\ell \geq \ell', \ell' > k \geq k'$ y $a = b^{p^{k-k'}}$.
 (b) $\ell \geq \ell'$ y $k \geq \ell' > k'$.

(ii) $\mathcal{G}(k, \ell, a) \geq \mathcal{G}(k', \ell')$ si y solo si $\ell \geq \ell', k \geq \ell'$ y $k \geq k'$.

(iii) $\mathcal{G}(k, \ell) \geq \mathcal{G}(k', \ell', a)$ si y solo si $\ell \geq \ell'$ y $k \geq \ell' > k'$.

(iv) $\mathcal{G}(k, \ell) \geq \mathcal{G}(k', \ell')$ si y solo si $\ell \geq \ell'$ y $k \geq k'$.

Prueba. Por simplicidad denotamos por x, y los correspondientes generadores en $\mathcal{G}(k', \ell', a)$ o $\mathcal{G}(k', \ell')$, y por x, y los que correspondientes en $\mathcal{G}(k, \ell, a)$ o $\mathcal{G}(k, \ell)$.

(i) Si cualquiera de las dos condiciones para las constantes ℓ, ℓ', k, k', a, b se cumple, entonces claramente el correspondiente morfismo de álgebras de pre-Nichols existe. Sea $\pi: \mathcal{G}(k, \ell, a) \rightarrow \mathcal{G}(k', \ell', b)$ un morfismo de álgebras de pre-Nichols. Entonces $\pi(x^{p^\ell}) = x^{p^\ell} = 0$, luego $\ell \geq \ell'$. Si $k \geq \ell' > k'$ terminamos, si $\ell' > k \geq k'$, entonces $y^{p^{k'}} - bx^{p^{k'}} = 0$. Luego $y^{p^k} - b^{p^{k-k'}}x^{p^k} = 0$. Así $0 = \pi(y^{p^k} - ax^{p^k}) = y^{p^k} - ax^{p^k} = (b^{p^{k-k'}} - a)x^{p^k}$, esto implica que $b^{p^{k-k'}} = a$. Finalmente si $k < k'$, entonces $\pi(y^{p^k} - ax^{p^k}) = y^{p^k} - ax^{p^k} = 0$, y esto implica que $a = 0$ una contradicción.

(ii) Si $\ell \geq \ell', k \geq \ell'$ y $k \geq k'$, entonces claramente el correspondiente morfismo existe. Sea $\pi: \mathcal{G}(k, \ell, a) \rightarrow \mathcal{G}(k', \ell')$ un morfismo de álgebras de pre-Nichols. El mismo argumento que en (i) muestra que $\ell \geq \ell'$. Si $k < \ell'$ entonces $\pi(y^{p^k} - ax^{p^k}) = 0 = y^{p^k} - ax^{p^k}$, y esto implica que $a = 0$ pues $x^{p^k} \neq 0$, una contradicción. Entonces $k \geq \ell'$ y $\pi(y^{p^k} - ax^{p^k}) = y^{p^k} = 0$ luego $k \geq k'$.

(iii) Si $\ell \geq \ell'$ y $k \geq \ell' > k'$ entonces el correspondiente morfismo existe. Ahora sea $\pi: \mathcal{G}(k, \ell) \rightarrow \mathcal{G}(k', \ell', a)$. Por el mismo argumento que en (i), $\ell \geq \ell'$. Si $k \geq \ell' > k'$ terminamos. Si $\ell' > k \geq k'$, entonces $\pi(y^{p^k}) = 0 = y^{p^k}$. Además $0 = y^{p^{k'}} - ax^{p^{k'}}$ implica que $0 = y^{p^k} - a^{p^{k-k'}}x^{p^k} = a^{p^{k-k'}}x^{p^k}$. Luego $a = 0$, una contradicción. Solo nos queda el caso $k' > k$. Aquí $\pi(y^{p^k}) = 0 = y^{p^k}$, pero $y^{p^k} \neq 0$, una contradicción.

(iv) Si $\ell \geq \ell'$ y $k \geq k'$ entonces el correspondiente morfismo existe. Ahora sea $\pi: \mathcal{G}(k, \ell) \rightarrow \mathcal{G}(k', \ell')$. Por el mismo argumento que en (i), $\ell \geq \ell'$. Ahora como $\pi(y^{p^k}) = 0 = y^{p^k}$ entonces $k \geq k'$. \square

2.4.2 | álgebras de Hopf de dimensión finita

Por bosonización tenemos nuevos ejemplos de álgebras de Hopf.

Corolario 2.4.8. (i) Las álgebras de Hopf $\mathcal{K}(k, a) \# \mathbb{k}C_p$ y $\mathcal{F}(\ell) \# \mathbb{k}C_p$ tienen $\text{GKdim} = 1$.

(ii) Las álgebras de Hopf $H_{k, \ell, a} = \mathcal{G}(k, \ell, a) \# \mathbb{k}C_p$ tienen dimensión $p^{\ell+k+1}$. \square

2.5 | El dual graduado del plano de Jordan

En esta Sección $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Presentamos el dual graduado \mathcal{E}_J del plano de Jordan $\widetilde{\mathcal{B}}$ por generadores y relaciones. En esta sección los duales son calculados en la categoría $\frac{\mathbb{k}\Gamma}{\mathbb{k}\Gamma}\mathcal{YD}$, luego la identificación canónica $(U_1 \otimes U_2)^* \simeq U_2^* \otimes U_1^*$ for $U_1, U_2 \in \frac{\mathbb{k}\Gamma}{\mathbb{k}\Gamma}\mathcal{YD}$ es usada. Sea $(\alpha_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ la base dual de $(x^i y^j)_{i,j \in \mathbb{N}_0}$. Claramente \mathcal{E}_J está linealmente generado por los elementos $\alpha_{i,j}$.

Proposición 2.5.1. *El álgebra de Hopf trenzada \mathcal{E}_J está presentada por generadores $\mathbf{x}^{[n]}$, $\mathbf{y}^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$, y relaciones*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{[n]}\mathbf{x}^{[m]} &= \binom{n+m}{n} \mathbf{x}^{[n+m]}, & \mathbf{y}^{[n]}\mathbf{y}^{[m]} &= \binom{n+m}{n} \mathbf{y}^{[n+m]}, \\ \mathbf{x}^{[n]}\mathbf{y}^{[m]} &= \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} (-1)^k \frac{[-n]^{[k]}}{2^k} \mathbf{y}^{[m-k]} \mathbf{x}^{[n+k]}, & \mathbf{x}^{[0]} &= \mathbf{y}^{[0]} = 1, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

para todos los $n, m \in \mathbb{N}_0$. La familia $(\mathbf{y}^{[m]}\mathbf{x}^{[n]})_{n,m \in \mathbb{N}_0}$ es una base de \mathcal{E}_J . El coproducto y la trenza están dados por

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{x}^{[n]}) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{x}^{[k]} \otimes \mathbf{x}^{[n-k]}, \\ \Delta(\mathbf{y}^{[n]}) &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{[n-k]^{[i]}}{2^i} \mathbf{y}^{[n-k]} \otimes \mathbf{y}^{[k-i]} \mathbf{x}^{[i]}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$$\begin{aligned} c(\mathbf{y}^{[j]}\mathbf{x}^{[i]} \otimes \mathbf{y}^{[m]}\mathbf{x}^{[n]}) &= \\ \mathbf{y}^{[m]}\mathbf{x}^{[n]} \otimes \sum_{k=0}^j \binom{k+i}{k} (-1)^k \frac{[2(n+m)]^{[k]}}{2^k} \mathbf{y}^{[j-k]} \mathbf{x}^{[k+i]}, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

para todos los $n, m, i, j \in \mathbb{N}_0$.

Prueba. Sea A el álgebra presentada como arriba. Es graduada con $\deg \mathbf{x}^{[n]} = \deg \mathbf{y}^{[n]} = n$ para todo n . Los elementos

$$\mathbf{x}^{[n]} = \alpha_{0,n} \quad \text{and} \quad \mathbf{y}^{[n]} = \alpha_{n,0}, \quad n \in \mathbb{N},$$

de \mathcal{E} satisfacen las relaciones (2.5.1), luego tenemos un epimorfismo graduado $A \rightarrow \mathcal{E}_J$. Contando dimensiones en cada grado esto es un isomorfismo. Un cálculo directo muestra que $\mathbf{y}^{[m]}\mathbf{x}^{[n]} = \alpha_{m,n}$, entonces $(\mathbf{y}^{[m]}\mathbf{x}^{[n]})_{n,m \in \mathbb{N}_0}$ es una base de \mathcal{E}_J . El coproducto y las fórmulas de las trenzas se siguen de manera directa. \square

En la prueba anterior, la siguiente fórmula para el coproducto en $\widetilde{\mathcal{B}}$ es útil para realizar las cuentas. Dado $n \in \mathbb{N}_0$, $\ell \in \mathbb{I}_{0,n}$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta(x^{n-\ell}y^\ell) &= \\ \sum_{k=0}^{n-\ell} \sum_{t=0}^{\ell} \sum_{i=0}^t \binom{n-\ell}{k} \binom{\ell}{t} \binom{t}{i} \frac{(-1)^i}{2^i} [t-\ell-2k]^{[i]} x^{n+i-\ell-k} y^{t-i} \otimes x^k y^{\ell-t}. \end{aligned}$$

Sea $\mathfrak{G}(k, \ell) = \mathcal{G}(k, \ell)^*$; esta es una álgebra de post-Nichols de (W, c) .

Corolario 2.5.2. (i) Si $\text{char } \mathbb{k} = 0$, entonces $\mathcal{E}_J \simeq \widetilde{\mathfrak{B}}$ como álgebras de Hopf trenzadas.

(ii) Si $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$, entonces $\mathcal{E}_J = \bigcup_{k, \ell \in \mathbb{N}} \mathfrak{G}(k, \ell)$.

Prueba. (i) En $\text{char } \mathbb{k} = 0$, $\mathbf{x}^{[n]} = \frac{1}{n!} (\mathbf{x}^{[1]})^n$ y $\mathbf{y}^{[n]} = \frac{1}{n!} (\mathbf{y}^{[1]})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces \mathcal{E}_J está generada como álgebra por los elementos $\mathbf{x}^{[1]}, \mathbf{y}^{[1]}$ con la relación

$$\mathbf{y}^{[1]}\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[1]}\mathbf{y}^{[1]} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^{[1]})^2 = 0.$$

Entonces $\mathcal{E}_J \simeq \widetilde{\mathfrak{B}}$ via el isomorfismo de álgebras dado por $\mathbf{x}^{[1]} \mapsto u$ y $\mathbf{y}^{[1]} \mapsto -v$. Esto es en realidad un isomorfismo de álgebras de Hopf trenzadas pués $\mathbf{x}^{[1]}$ y $\mathbf{y}^{[1]}$ son primitivos en \mathcal{E}_J , y la trenza c entre ellos está dada por

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}^{[1]} \otimes \mathbf{x}^{[1]}) &= \mathbf{x}^{[1]} \otimes \mathbf{x}^{[1]}, & c(\mathbf{x}^{[1]} \otimes \mathbf{y}^{[1]}) &= \mathbf{y}^{[1]} \otimes \mathbf{x}^{[1]}, \\ c(\mathbf{y}^{[1]} \otimes \mathbf{x}^{[1]}) &= \mathbf{x}^{[1]} \otimes (-\mathbf{x}^{[1]} + \mathbf{y}^{[1]}), & c(\mathbf{y}^{[1]} \otimes \mathbf{y}^{[1]}) &= \mathbf{y}^{[1]} \otimes (\mathbf{y}^{[1]} - \mathbf{x}^{[1]}). \end{aligned}$$

Luego la afirmación se sigue directamente.

(ii) Como $\widetilde{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathcal{G}(k, \ell)$, entonces $\mathfrak{G}(k, \ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_J$. Luego $\bigcup \mathfrak{G}(k, \ell) \subseteq \mathcal{E}_J$. Ahora como $\mathcal{E}_J = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}_J^n$, es suficiente mostrar que para cada $N \in \mathbb{N}_0$ hay un $k, \ell \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_J^N \subseteq \mathfrak{G}(k, \ell)$. Fijemos $N \in \mathbb{N}_0$ y tomemos $k, \ell \in \mathbb{N}$ tal que $\min\{p^k, p^\ell\} > N$. Entonces usando la base PBW de $\mathcal{G}(k, \ell)$ y $\widetilde{\mathfrak{B}}$, $\mathcal{G}(k, \ell)^N$ es isomorfo como espacio vectorial a $\widetilde{\mathfrak{B}}^N$ entonces $\mathcal{E}_J^N \simeq \mathfrak{G}(k, \ell)^N \subseteq \mathfrak{G}(k, \ell)$. \square

Corolario 2.5.3. *Sea $k, \ell \in \mathbb{N}$. El algebra de Hopf trenzada $\mathfrak{G}(k, \ell)$ está presentada por generadores $\mathbf{x}^{[n]}$, $\mathbf{y}^{[m]}$, $n \in \mathbb{I}_{0, p^k-1}$, $m \in \mathbb{I}_{0, p^\ell-1}$, y relaciones 2.5.1 para $n \in \mathbb{I}_{0, p^k-1}$, $m \in \mathbb{I}_{0, p^\ell-1}$; la comultiplicación y trenza están dadas por (2.5.2) y (2.5.3); el conjunto $\{\mathbf{y}^{[m]} \mathbf{x}^{[n]} : n \in \mathbb{I}_{0, p^k-1}, m \in \mathbb{I}_{0, p^\ell-1}\}$ es una base de $\mathfrak{G}(k, \ell)$.*

Prueba. La proyección $\pi: \widetilde{\mathfrak{B}} \rightarrow \mathfrak{G}(k, \ell)$ induce $\pi^*: \mathfrak{G}(k, \ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_J$. Sea $\beta_{m,n}$ la base dual de $\{x^m y^n : n \in \mathbb{I}_{0, p^k-1}, m \in \mathbb{I}_{0, p^\ell-1}\}$. Entonces $\pi^*(\beta_{m,n}) = \mathbf{y}^{[m]} \mathbf{x}^{[n]}$ y el resultado se sigue de aquí. \square

3 | El súper plano de Jordan

Introducción

El súper plano de Jordan es el álgebra graduada \mathcal{B} presentada por generadores x_1, x_2 con relaciones

$$x_1^2, \quad x_2x_{21} - x_{21}x_2 - x_1x_{21}, \quad (3.0.1)$$

donde $x_{21} = x_2x_1 + x_1x_2$. Se sabe que \mathcal{B} tiene dimensión de Gelfand-Kirillov 2. El espacio vectorial trenzado (V, c) con base $\{x_1, x_2\}$ y trenza

$$c(x_i \otimes x_1) = -x_1 \otimes x_i, \quad c(x_i \otimes x_2) = (-x_2 + x_1) \otimes x_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.0.2)$$

determina una estructura de álgebra de Hopf trenzada en \mathcal{B} en el sentido de [T].

El plano de Jordan y el súper plano de Jordan juegan un rol central en el estudio de las álgebras de Hopf punteadas sobre grupos abelianos con dimensión de Gelfand-Kirillov finita en [AAH1], asumiendo $\text{char } \mathbb{k} = 0$.

Sea $p > 2$ un primo. Asumimos ahora que $\text{char } \mathbb{k} = p$. Motivados por [CLW] que trabaja con el plano de Jordan restringido, en [AAH3] fueron construidos varios análogos de dimensión finita a las álgebras de Nichos de [AAH1] (ver [ABDF] para ejemplos en característica 2). Entre ellos se encuentra el super plano de Jordan *restringido*, es decir, el álgebra presentada por los generadores x_1, x_2 con relaciones (3.0.1) y

$$x_{21}^p, \quad x_2^{2p}. \quad (3.0.3)$$

En el capítulo pasado hicimos el estudio de los dobles de Drinfeld de (bosonizaciones de) el plano de Jordan y su versión restringida mostrando entre otros resultados que estos encajan en una sucesión exacta relacionando el álgebra envolvente de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$, las álgebras de funciones de algunos grupos algebraicos y sus análogos restringidos. En el presente capítulo realizamos un análisis similar para el super plano de Jordan y su versión restringida. Empezamos presentamos los objetos de nuestro interés: el súper plano de Jordan, su versión restringida y sus duales. Posteriormente trabajamos con diferentes descripciones como bosonización de la misma álgebra de Hopf. Esto nos permite definir alternativamente las superálgebras $\tilde{\mathcal{E}}$ y \mathcal{E} que discutimos abajo.

El doble del super plano de Jordan

Aquí solo necesitamos que $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$. Al igual que en [AAH1] realizamos el espacio vectorial trenzado (V, c) con c dada por (3.0.2) como módulo de Yetter-Drinfeld sobre el álgebra de grupo $\mathbb{k}\mathbb{Z}$, entonces tenemos el álgebra de Hopf $\mathbb{H} := \mathcal{B} \# \mathbb{k}\mathbb{Z}$. Luego consideramos el super plano de Jordan dual \mathcal{B}^d descrito justo antes del Lema 3.1.2. El dual de Sweedler de $\mathbb{k}\mathbb{Z}$ está generado por los caracteres de \mathbb{Z} y el álgebra de Lie del toro de unidimensional. Entonces la menor subálgebra de Hopf realizando \mathcal{B}^d es isomorfa a $\mathbb{k}[\zeta] \otimes \mathbb{k}C_2$. Aquí C_N denota el

grupo cíclico de orden N y ζ es una indeterminada. Podemos entonces considerar $K := \mathcal{B}^d \# (\mathbb{k}[\zeta] \otimes \mathbb{k}C_2)$ y definir $\mathbf{E} = \mathbf{H} \bowtie K^{\text{op}}$ con respecto a un apareamiento adecuado entre \mathbf{H} y K^{op} . Ocurre que existe una superálgebra de Hopf $\tilde{\mathcal{E}}$ tal que $\mathbf{E} \simeq \tilde{\mathcal{E}} \# \mathbb{k}C_2$; esto justifica a posteriori el adjetivo super dado a \mathcal{B} . Luego el estudio de \mathbf{E} se reduce al estudio de $\tilde{\mathcal{E}}$. En la proposición 3.2.3 presentamos las propiedades básicas de $\tilde{\mathcal{E}}$ incluyendo las relaciones definitorias y una base PBW. Luego en el Teorema 3.2.5 mostramos que $\tilde{\mathcal{E}}$ encaja en una sucesión exacta de superálgebras de Hopf $\mathcal{O}(\mathfrak{G}) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow U(\mathfrak{osp}(1|2))$, donde \mathfrak{G} es un supergrupo algebraico explícitamente descripto. Para el siguiente resultado, el Teorema 3.2.7, necesitamos $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$; entonces $\tilde{\mathcal{E}}$ es un módulo libre de rango finito sobre una subálgebra de Hopf central $Z = \mathcal{O}(\mathbf{B})$ donde \mathbf{B} es un grupo algebraico soluble y conexo. Cerramos la sección 3.2 estableciendo algunas propiedades de anillos básicas de $\tilde{\mathcal{E}}$.

El doble del super plano de Jordan restringido

En la Sección 3.3 asumimos que $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$. Realizamos (V, c) con la trenza (3.0.2) en ${}_{\mathbb{k}C_{2p}}^{\mathbb{k}C_{2p}} \mathcal{YD}$. Sea $D(H)$ el doble de Drinfeld de la bosonización $H = \mathcal{B}(V) \# \mathbb{k}C_p$. De nuevo existe una superálgebra de Hopf \mathcal{E} tal que $D(H) \simeq \mathcal{E} \# \mathbb{k}C_2$, luego nos enfocamos en \mathcal{E} . Presentamos algunas propiedades básicas de \mathcal{E} en la Proposición 3.3.4 y mostramos en el Teorema 3.3.6 una sucesión exacta de superálgebras de Hopf $\mathbf{R}_s \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))$ donde \mathbf{R}_s es una superálgebra de Hopf local y conmutativa y $\mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))$ es una álgebra envolvente restringida. Concluimos que los \mathcal{E} -módulos simples son los mismos que los de $\mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))$ y los presentamos como cocientes de módulos de Verma. Ver Teorema 3.3.7 y Proposición 3.3.12.

Las extensiones de superálgebras de Hopf mencionadas arriba encajan en un diagrama conmutativo de 9 términos donde todas las columnas y filas son sucesiones exactas:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}(\mathbf{G}_s) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{L}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}(\mathfrak{G}) & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{E}} & \twoheadrightarrow & U(\mathfrak{osp}(1|2)) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{R}_s & \hookrightarrow & \mathcal{E} & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))
 \end{array} \tag{3.0.4}$$

Ver Teorema 3.3.14. Este es un análogo de (2.1.2) para el súper plano de Jordan.

3.1 | Objetos de interés

En esta sección introducimos los espacios vectoriales trenzados de nuestro interés y sus álgebras de Nichols, cf. [AAH1, AAH3]. También vemos el proceso conocido como cambio de bosonización.

Espacios vectoriales trenzados

Los espacios vectoriales trenzados $(\mathcal{V}(-1, 2), c) =: (V, c_V)$, llamados los -1 -bloques en [AAH1], tienen como base $\{x_1, x_2\}$ y una trenza

$$c(x_i \otimes x_1) = -x_1 \otimes x_i, \quad c(x_i \otimes x_2) = (-x_2 + x_1) \otimes x_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.0.2}$$

Para mayor simplicidad, denotamos $(W, c_W) := (\mathcal{V}(-1, 2)^*, c^*)$, cf. (1.6.1). Sea $\{u_1, u_2\}$ una base de W dada por $\langle u_i, x_j \rangle = 1 - \delta_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{I}_2$. En esta base c_W es

$$c_W(u_1 \otimes u_i) = -u_i \otimes u_1, \quad c_W(u_2 \otimes u_i) = u_i \otimes (u_1 - u_2), \quad i = 1, 2. \quad (3.1.1)$$

Luego $(W, c_W) \simeq (V, c_V^{-1})$ como espacios vectoriales trenzados, via $u_1 \mapsto x_1$, $u_2 \mapsto -x_2$.

El super plano de Jordan

Esta es el álgebra graduada

$$\mathcal{B} = \mathbb{k}\langle x_1, x_2 | x_1^2, x_2x_{21} - x_{21}x_2 - x_1x_{21} \rangle$$

con estructura de álgebra de Hopf trenzada extendiendo la trenza (3.0.2), cf. [T].

Lema 3.1.1. (a) [AAH1] ($\text{char } \mathbb{k} \neq 2$) *Los monómios ordenados*

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} \quad (3.1.2)$$

donde $(n_1, n_{21}, n_2) \in \mathbb{I}_{0,1} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ forman una base de \mathcal{B} y además $\text{GKdim } \mathcal{B} = 2$.

(b) ($\text{char } \mathbb{k} = 0$) [AAH1] \mathcal{B} es isomorfa a $\mathcal{B}(V)$ como álgebras de Hopf trenzadas.

(c) ($\text{char } \mathbb{k} = p$) [?] *El super plano de Jordan restringido $\mathcal{B}/\langle x_{21}^p, x_2^{2p} \rangle$ es isomorfo a $\mathcal{B}(V)$ como álgebras de Hopf trenzadas. Los monómios ordenados (3.1.2) con $(n_1, n_{21}, n_2) \in \mathbb{I}_{0,1} \times \mathbb{I}_{0,p-1} \times \mathbb{I}_{0,2p-1}$ forman una base de $\mathcal{B}(V)$.* \square

Fijemos $u_{21} := u_1u_2 + u_2u_1$. Definimos el *súper plano de Jordan dual* como el álgebra \mathcal{B}^d presentada por los generadores u_1 y u_2 con relaciones

$$u_1^2 = 0, \quad u_2u_{21} = u_{21}u_2 - u_1u_{21}. \quad (3.1.3)$$

Tiene una estructura de álgebra de Hopf trenzada extendiendo la trenza (3.1.1), cf. [T]. Notemos que \mathcal{B}^d no es isomorfa a \mathcal{B} como álgebras de Hopf trenzadas. El *super plano de Jordan restringido dual* es el cociente de \mathcal{B}^d por las relaciones

$$u_2^{2p} = 0, \quad u_{21}^p = 0. \quad (3.1.4)$$

Lema 3.1.2. (a) ($\text{char } \mathbb{k} = 0$) $\mathcal{B}^d \simeq \mathcal{B}(W)$ como álgebras de Hopf trenzadas.

(b) ($\text{char } \mathbb{k} = p$) *El super plano de Jordan restringido dual es isomorfo a $\mathcal{B}(W)$ como álgebras de Hopf trenzadas. Tiene dimensión $4p^2$; de hecho los monómios*

$$u_1^{n_1} u_{21}^{n_{21}} u_2^{n_2} \quad (3.1.5)$$

con $(n_1, n_{21}, n_2) \in \mathbb{I}_{0,1} \times \mathbb{I}_{0,p-1} \times \mathbb{I}_{0,2p-1}$ forman una base de $\mathcal{B}(W)$.

Prueba. Como $\mathcal{B}^d \simeq \mathcal{B}$ como álgebras, los monomios (3.1.5) con $(n_1, n_{21}, n_2) \in \mathbb{I}_{0,1} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ forman una base lineal de \mathcal{B}^d . Es fácil ver que u_1^2 y $u_{21}u_2 - u_2u_{21} + u_1u_{21}$ son primitivos en $T(W)$, entonces \mathcal{B}^d es un álgebra de pre-Nichols de W . Ahora $\mathcal{B}(V)$ y $\mathcal{B}(W)$ tienen la misma dimensión graudada por [G, Lema 2.6]. Luego (a) se sigue. Usando (b) probamos por inducción que

$$\begin{aligned} \Delta(u_{21}^{n_1}) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n_1-\ell} \binom{n_1-\ell}{k} n_1^\ell u_1^\ell u_{21}^{n_1-k-\ell} \otimes u_1^\ell u_{21}^k, \\ \Delta(u_2^{n_2}) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n_2-\ell} \sum_{t=0}^k \binom{n_2-\ell}{k} \binom{k}{t} n_2^\ell [k-n_2+\ell]^{[t]} u_2^{2(n_2-k)-\ell} \otimes u_1^\ell u_{21}^t u_2^{2(k-t)}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Así $u_{21}^p, u_2^{2p} \in \mathcal{P}(\mathcal{B}^d)$ y $\mathcal{B}^d/(u_{21}^p, u_2^{2p})$ son álgebras de pre-Nichols de W ; entonces $\mathcal{B}^d/(u_{21}^p, u_2^{2p}) \simeq \mathcal{B}(W)$ por dimensionalidad. \square

3.1.1 | Cambio de Bosonización

Sea L un álgebra de Hopf y sea \mathbf{C} un grupo junto con un homomorfismo $\mathbf{C} \rightarrow \text{Aut}_{\text{Hopf}}(L)$. Entonces L es un álgebra de Hopf en ${}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{C}}\mathcal{YD}$ (con la coacción trivial) y podemos considerar el producto semidirecto $L \rtimes \mathbf{C} := L \# \mathbf{C}$. Sea $L \rtimes \mathbf{C} \xrightleftharpoons[\iota]{\pi} \mathbf{C}$ la proyección natural y la inclusión. Mostraremos ahora que bajo ciertas condiciones $L \rtimes \mathbf{C}$ puede ser alternativamente descrita como $\mathcal{L}^F \# \mathbf{C}$ para un álgebra de Hopf trenzada genuina (con trenza no trivial) \mathcal{L}^F in ${}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{C}}\mathcal{YD}$.

Supongamos que $L = R \# U$ donde U es un álgebra de Hopf y R es un álgebra de Hopf en ${}^U\mathcal{YD}$. Sea $\text{Aut}_{\text{Hopf}_U}(R)$ el grupo de automorfismos de álgebras de Hopf en ${}^U\mathcal{YD}$, es decir que preservan la multiplicación, comultiplicación, acción y coacción. Hay un morfismo de grupos

$$\text{Aut}_{\text{Hopf}_U}(R) \rightarrow \text{Aut}_{\text{Hopf}}(L), \quad \text{Aut}_{\text{Hopf}_U}(R) \ni \varsigma \mapsto \varsigma \otimes \text{id} \in \text{Aut}_{\text{Hopf}}(L).$$

Fijamos un grupo \mathbf{C} y un morfismo de grupos $\mathbf{C} \rightarrow \text{Aut}_{\text{Hopf}}(L)$ que factoriza por $\text{Aut}_{\text{Hopf}_U}(R)$. Además asumimos que $U = U' \otimes \mathbf{C}$ donde U' es un álgebra de Hopf y \mathbf{C} es un grupo.

Proposición 3.1.3. (a) Dado $F \in \text{Hom}_{\text{gps}}(\mathbf{G}, Z(\mathbf{C}))$, existe un álgebra de Hopf \mathcal{L}^F en ${}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{C}}\mathcal{YD}$ tal que $L \rtimes \mathbf{C} \simeq \mathcal{L}^F \# \mathbf{C}$.

(b) Sea $\varpi^F : \mathbf{G} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ el morfismo de grupos dado por $\varpi^F(\gamma, c) = F(\gamma)c$, $\gamma \in \mathbf{G}$, $c \in \mathbf{C}$, y sea

$$\mathbf{G}^F := \ker \varpi^F = \{(\gamma, F(\gamma)^{-1}) : \gamma \in \mathbf{G}\}.$$

Entonces \mathcal{L}^F se descompone como $\mathcal{L}^F \simeq R^F \# (U' \otimes \mathbf{C}^{\mathbf{G}^F})$ (bosonización trenzada en ${}_{\mathbf{C}}^{\mathbf{C}}\mathcal{YD}$) donde $R^F = R$ como subálgebra y U' -módulo pero con $\mathbf{G}^F \simeq \mathbf{G}$ actuando por

$$\gamma \curvearrowright r = F(\gamma)^{-1} \cdot (\gamma \cdot r), \quad r \in R, \gamma \in \mathbf{G}.$$

(c) Asumamos que

- (i) \mathbf{C} y \mathbf{G} son abelianos, y F tiene una sección $\vartheta \in \text{Hom}_{\text{gps}}(\mathbf{C}, \mathbf{G})$,
- (ii) Para todo $r \in R$ y $c \in \mathbf{C}$, $c \cdot r = \vartheta(c) \cdot r$.

Sea $\mathbb{N}^F := \ker F \times \{e\}$. Entonces la subálgebra $R^F \sharp U' \otimes \mathbb{k}\mathbb{N}^F$ tiene estructura de álgebra de Hopf que denotamos por \mathcal{L}^F de forma que $\mathbb{k}\mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{L}^F \rightarrow \mathcal{L}^F$ es exacta. Además R^F es un álgebra de Hopf en $\frac{U' \otimes \mathbb{k}\mathbb{N}^F}{U' \otimes \mathbb{k}\mathbb{N}^F} \mathcal{YD}$.

Prueba. (a): Sea $\pi^F : L \rtimes \mathbb{k}\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{k}\mathbb{C}$ una proyección de álgebras de Hopf dada por

$$\pi^F(r \# u \otimes \gamma \otimes c) = \varepsilon(r)\varepsilon(u)F(\gamma)c, \quad r \in R, u \in U', \gamma \in \mathbf{G}, c \in \mathbf{C}.$$

Entonces $\pi^F \iota = \text{id}_{\mathbb{k}\mathbb{C}}$ y la afirmación se sigue de [R] tomando la subálgebra

$$\mathcal{L}^F := (L \rtimes \mathbb{k}\mathbb{C})^{\text{co } \pi^F} = R \cdot U' \otimes \mathbb{k}\mathbf{G}^F.$$

(b) Los morfismos de álgebras de Hopf $\mathcal{L}^F \xrightleftharpoons[\iota^F]{p^F} U' \otimes \mathbb{k}\mathbf{G}^F$ dados por

$$\begin{aligned} p^F(r \# u \otimes \gamma F(\gamma)^{-1}) &= \varepsilon(r)\varepsilon(u)(1 \# \gamma F(\gamma)^{-1}), \\ \iota^F(u \otimes \gamma F(\gamma)^{-1}) &= 1 \# u \otimes \gamma F(\gamma)^{-1}, \end{aligned} \quad r \in R, u \in U', \gamma \in \mathbf{G},$$

satisfacen $p^F \iota^F = \text{id}_{\mathbb{k}\mathbf{G}^F}$. Entonces $R^F := (\mathcal{L}^F)^{\text{co } p^F}$ y la afirmación se sigue de aquí.

(c) By (i), $\mathbf{G}^F \simeq \mathbb{N}^F \times \mathbf{C}^\vartheta$ donde $\mathbf{C}^\vartheta = \{(\vartheta(c)^{-1}, c) : c \in \mathbf{C}\}$ y usando además (i), \mathbf{C}^ϑ es central en \mathcal{L}^F . Ahora la multiplicación nos provee de un isomorfismo lineal

$$\mathcal{L}^F \simeq R^F \sharp (U' \otimes \mathbb{k}\mathbf{G}^F) \simeq R^F \sharp (U' \otimes (\mathbb{k}\mathbb{N}^F \times \mathbb{k}\mathbf{C}^\vartheta)) \simeq (R^F \sharp U' \otimes \mathbb{k}\mathbb{N}^F) \otimes \mathbb{k}\mathbf{C}^\vartheta.$$

Luego el cociente $\mathcal{L}^F \simeq \mathcal{L}^F / \mathbb{k}(\mathbf{C}^\vartheta)^+ \mathcal{L}^F$ es isomorfo como álgebra a la subálgebra $R^F \sharp U' \otimes \mathbb{k}\mathbb{N}^F$. El resto es claro desde aquí. \square

La situación que tenemos en mente es cuando $\mathbf{C} = C_N$ y $R = \bigoplus_{i \in C_N} R_i$ tiene una C_N -graduación de álgebras de Hopf en $\frac{U}{U} \mathcal{YD}$. Por ejemplo, sea $\mathcal{V} \in \frac{\mathbb{k}\mathbf{G}}{\mathbb{k}\mathbf{G}} \mathcal{YD}$ C_N -graduada y tomemos $R = \mathcal{B}(\mathcal{V})$ (o cualquier álgebra de pre-Nichols definida por relaciones C_N -homogéneas). Ahora fijamos $\omega \in \mathbb{G}_N$ (esto corresponde a fijar una estructura cuasi-triangular en $\mathbb{k}C_N$) y C_N actúa en R_i por ω^i .

En el resto de esta sección $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, en particular $\text{char } \mathbb{k} = 0$ está permitido. Sea R el álgebra de polinomios $\mathbb{k}[\zeta]$ con la única estructura de álgebra de Hopf tal que $\zeta \in \mathcal{P}(R)$. Sea R_p el cociente de álgebra de Hopf $R/(\zeta^p - \zeta)$. Recordemos además que $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$. Fijamos los generadores

$$C_2 = \langle \epsilon \rangle, \quad \Gamma = \langle \mathbf{g} \rangle. \quad (3.1.7)$$

Ejemplo 3.1.4. Ahora damos una realización de (V, c) , con trenza (3.0.2), en $\frac{\mathbb{k}\Gamma}{\mathbb{k}\Gamma} \mathcal{YD}$ por

$$\mathbf{g} \rightharpoonup x_1 = -x_1, \quad \mathbf{g} \rightharpoonup x_2 = -x_2 + x_1, \quad \delta(x_i) = \mathbf{g} \otimes x_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.1.8)$$

Como el ideal en $T(V)$ generado por las relaciones (3.0.1) pertenece a $\frac{\mathbb{k}\Gamma}{\mathbb{k}\Gamma} \mathcal{YD}$, \mathcal{B} es un álgebra de Hopf en $\frac{\mathbb{k}\Gamma}{\mathbb{k}\Gamma} \mathcal{YD}$ luego tenemos

$$\mathbf{H} := \mathcal{B} \# \mathbb{k}\Gamma. \quad (3.1.9)$$

Ahora si declaramos a V como puramente impar y tomamos $\mathbf{C} = C_2$, $\mathbf{G} = \Gamma$, $L = \mathbf{H}$, $U = \mathbb{k}\Gamma$ y $F : \Gamma \rightarrow C_2$ la proyección estándar, tenemos $\mathbf{H} \rtimes \mathbb{k}C_2 \simeq \tilde{\mathcal{H}} \# \mathbb{k}C_2$ donde

$$\tilde{\mathcal{H}} \simeq \mathcal{B} \natural \mathbb{k}\Gamma, \quad (3.1.10)$$

esto corresponde a la realización de V en $\frac{\mathbb{k}\Gamma}{\mathbb{k}\Gamma} \mathcal{YDS}$ por

$$\mathbf{g} \rightarrow x_1 = x_1, \quad \mathbf{g} \rightarrow x_2 = x_2 - x_1, \quad \delta(x_i) = \mathbf{g} \otimes x_i, \quad |x_i| = 1, \quad i \in \mathbb{I}_2. \quad (3.1.11)$$

Como \mathbf{F} no admite secciones, no hay más descomposiciones posibles.

Ejemplo 3.1.5. Análogamente realizamos (W, c_W) , con trenza (3.1.1), en $\frac{R \otimes \mathbb{k}C_2}{R \otimes \mathbb{k}C_2} \mathcal{YD}$ por

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow u_i = u_i, \quad \epsilon \rightarrow u_i = -u_i, \\ \delta(u_1) = \epsilon \otimes u_1, \quad \delta(u_2) = \epsilon \otimes u_2 - \zeta \epsilon \otimes u_1, \end{aligned} \quad i = 1, 2. \quad (3.1.12)$$

Como antes \mathcal{B}^d es un álgebra de Hopf en $\frac{R \otimes \mathbb{k}C_2}{R \otimes \mathbb{k}C_2} \mathcal{YD}$ donde tenemos

$$\mathbf{K} := \mathcal{B}^d \# (R \otimes \mathbb{k}C_2). \quad (3.1.13)$$

Ahora pensando a W como un super espacio vectorial puramente impar y tomando $\mathbf{C} = C_2 \simeq \mathbf{G}$, $L = \mathbf{K}$, $U = R \otimes \mathbb{k}C_2$ y $F = \text{id}_{C_2}$, tenemos $\mathbf{K} \rtimes \mathbb{k}C_2 \simeq \tilde{\mathcal{K}} \# \mathbb{k}C_2$, donde $\tilde{\mathcal{K}} \simeq \mathcal{B}^d \natural (R \otimes \mathbb{k}C_2)$; además $\mathbb{k}C_2$ es central y

$$\tilde{\mathcal{K}} := \tilde{\mathcal{K}} // \mathbb{k}C_2 \simeq \mathcal{B}^d \natural R. \quad (3.1.14)$$

Aquí esto último corresponde a la realización de W en $\frac{R}{R} \mathcal{YDS}$ por

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow u_i = u_i, \quad |u_i| = 1, \quad i = 1, 2, \\ \delta(u_1) = 1 \otimes u_1, \quad \delta(u_2) = 1 \otimes u_2 - \zeta \otimes u_1. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Las superálgebras $\tilde{\mathcal{H}}$ y $\tilde{\mathcal{K}}$ admiten un apareamiento adecuado de álgebras de Hopf que nos permite una caracterización alternativa de la superálgebra de Hopf $\tilde{\mathcal{E}}$, ver Observación 3.2.4.

3.2 | El doble del super plano de Jordan

3.2.1 | La definición

Definimos el doble de Drinfeld \mathbf{E} de $\mathbf{H} = \mathcal{B} \# \mathbb{k}\Gamma$, ver (3.1.9), con respecto a un apareamiento adecuado con $\mathbf{K} = \mathcal{B}^d \# (R \otimes \mathbb{k}C_2)$, ver (3.1.13). Luego mostramos que existe una superálgebra de Hopf $\tilde{\mathcal{E}}$ tal que $\mathbf{E} \simeq \tilde{\mathcal{E}} \# \mathbb{k}C_2$. De esta forma $\tilde{\mathcal{E}}$ es fundamental para estudiar el doble de Drinfeld \mathbf{E} ; este último tiene, entre otras características, una descomposición triangular (3.2.14).

Las álgebras de Hopf \mathbf{H} y \mathbf{K} tienen bases PBW, denotadas por $\mathbf{B}_{\mathbf{H}}$, $\mathbf{B}_{\mathbf{K}}$, dadas por los monomios ordenados (3.1.2) o (3.1.5) multiplicadas adecuadamente por elementos de los grupos Γ y C_2 , o potencias de ζ . La comultiplicación de \mathbf{H} , respectivamente \mathbf{K} , satisfacen $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{\mathbf{g},1}(\mathbf{H})$, $u_1 \in \mathcal{P}_{\epsilon,1}(\mathbf{K})$ y

$$\Delta(u_2) = u_2 \otimes 1 + \epsilon \otimes u_2 - \epsilon \zeta \otimes u_1. \quad (3.2.1)$$

Lema 3.2.1. *El álgebra \mathbb{H} está presentada por generadores $x_1, x_2, \mathbf{g}, \mathbf{g}^{-1}$ y relaciones (3.0.1),*

$$\mathbf{g}x_1 = -x_1\mathbf{g}, \quad \mathbf{g}x_2 = -x_2\mathbf{g} + x_1\mathbf{g}, \quad \mathbf{g}^{\pm 1}\mathbf{g}^{\mp 1} = 1. \quad (3.2.2)$$

Además, \mathbb{K} está presentada por generadores $u_1, u_2, \zeta, \epsilon$ and y relaciones (3.0.1) (en los u_i),

$$\epsilon^2 = 1, \quad \epsilon\zeta = \zeta\epsilon, \quad (3.2.3)$$

$$\epsilon u_1 = -u_1\epsilon, \quad \epsilon u_2 = -u_2\epsilon, \quad (3.2.4)$$

$$\zeta u_1 = u_1\zeta + u_1, \quad \zeta u_2 = u_2\zeta + u_2. \quad \square \quad (3.2.5)$$

Definimos el doble de Drinfeld de \mathbb{H} como $\mathbb{E} := \mathbb{H} \bowtie \mathbb{K}^{\text{op}}$, ver Observación 1.7.3, con respecto al único emparejamiento torcido $\tau : \mathbb{H} \otimes \mathbb{K}^{\text{op}} \rightarrow \mathbb{k}$ tal que

$$\begin{aligned} \tau(x_1 \otimes u_1) &= 0, & \tau(x_1 \otimes u_2) &= 1, & \tau(x_1 \otimes \zeta) &= 0, & \tau(x_1 \otimes \epsilon) &= 0, \\ \tau(x_2 \otimes u_1) &= 1, & \tau(x_2 \otimes u_2) &= 0, & \tau(x_2 \otimes \zeta) &= 0, & \tau(x_2 \otimes \epsilon) &= 0, \\ \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes u_1) &= 0, & \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes u_2) &= 0, & \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes \zeta) &= \pm 1, & \tau(\mathbf{g}^{\pm 1} \otimes \epsilon) &= -1. \end{aligned}$$

Proposición 3.2.2. *El álgebra \mathbb{E} está presentada por generadores $x_1, x_2, \zeta, \mathbf{g}, \epsilon, u_1, u_2$ con relaciones (3.0.1) (es los x_i y los u_i), (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4),*

$$u_1\zeta = \zeta u_1 + u_1, \quad u_2\zeta = \zeta u_2 + u_2, \quad (3.2.6)$$

$$\epsilon\mathbf{g} = \mathbf{g}\epsilon, \quad \zeta\mathbf{g} = \mathbf{g}\zeta, \quad (3.2.7)$$

$$\epsilon x_1 = -x_1\epsilon, \quad \epsilon x_2 = -x_2\epsilon, \quad (3.2.8)$$

$$\zeta x_1 = x_1\zeta + x_1, \quad \zeta x_2 = x_2\zeta + x_2, \quad (3.2.9)$$

$$u_2\mathbf{g} = -\mathbf{g}u_2 + \mathbf{g}u_1, \quad u_1\mathbf{g} = -\mathbf{g}u_1, \quad (3.2.10)$$

$$u_1x_1 = -x_1u_1, \quad u_1x_2 = -x_2u_1 + (1 - \mathbf{g}\epsilon), \quad (3.2.11)$$

$$u_2x_2 = -x_2u_2 + \mathbf{g}\epsilon\zeta + x_2u_1, \quad u_2x_1 = -x_1u_2 + (1 - \mathbf{g}\epsilon) + x_1u_1, \quad (3.2.12)$$

La familia $\mathbb{B}_{\mathbb{E}}$ que consiste en los monomios

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \mathbf{g}^n \zeta^m u_1^{m_1} u_2^{m_2} \epsilon^k \quad (3.2.13)$$

con $(k, n_1, m_1, n, n_2, n_{21}, m, m_2, m_{21}) \in \mathbb{I}_{0,1}^3 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0^5$ es una base de \mathbb{E} .

Prueba. Sea A un álgebra presentada como en el enunciado; luego $A \rightarrow \mathbb{E}$. Como $\mathbb{B}_{\mathbb{E}}$ es una base de \mathbb{E} por construcción, los correspondientes monomios son linealmente independientes en A . Sea $S = \{x_1, x_2, \mathbf{g}, \zeta, u_1, u_2, \epsilon\}$ Con x_2 y u_2 como antes, ordenados por $x_1 < x_2 < \mathbf{g} < \zeta < u_1 < u_2 < \epsilon$. De las relaciones tenemos que

$$u_2x_1 = x_1u_2, \quad \epsilon u_2 = u_2\epsilon, \quad u_1x_2 = x_2u_1, \quad \epsilon x_2 = x_2\epsilon,$$

$$u_2x_2 = x_2u_2 + (\mathbf{g}\epsilon + 1)u_1, \quad \zeta x_2 = x_2\zeta + 2x_2,$$

$$u_2x_2 = x_2u_2 - 2x_2u_1 + x_1(\mathbf{g}\epsilon + 1).$$

Si $a > b \in S$, entonces ab es una combinación lineal de monomios $c_1 \cdots c_s$ con $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_s \in S$. Luego los monomios (3.2.13) generan A y $A \simeq \mathbb{E}$. \square

Sea $\tilde{\mathbf{g}} := \mathbf{g}\epsilon$ y $\tilde{\mathcal{E}} := \mathbb{k}\langle x_1, x_2, u_1, u_2, \tilde{\mathbf{g}}, \zeta \rangle \hookrightarrow \mathbb{E}$.

Proposición 3.2.3. (i) Una base de $\tilde{\mathcal{E}}$ está dada por la familia \mathbf{B} que consiste en los monomios

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} \tilde{\mathbf{g}}^n \zeta^m u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2}, \quad (n_1, m_1, n, n_2, n_{21}, m, m_2, m_{21}) \in \mathbb{I}_{0,1}^2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0^5.$$

(ii) $\tilde{\mathcal{E}}$ tiene una descomposición triangular, es decir, hay un isomorfismo lineal inducido por la multiplicación de forma que

$$\tilde{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{B} \otimes (\mathbb{k}\Gamma \otimes R) \otimes (\mathcal{B}^d)^{\text{op}}. \quad (3.2.14)$$

(iii) El álgebra $\tilde{\mathcal{E}}$ está presentada por generadores $x_1, x_2, u_1, u_2, \tilde{\mathbf{g}}^{\pm 1}, \zeta$ con relaciones (3.0.1) (en los x_i y los u_i), (3.2.6), (3.2.9), (3.2.11) (con $\tilde{\mathbf{g}}$ en vez de $\mathbf{g}\epsilon$) y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}^{\pm 1} \tilde{\mathbf{g}}^{\mp 1} &= 1, & \zeta \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{g}} \zeta, & \tilde{\mathbf{g}} x_1 &= x_1 \tilde{\mathbf{g}}, \\ \tilde{\mathbf{g}} x_2 &= x_2 \tilde{\mathbf{g}} - x_1 \tilde{\mathbf{g}}, & u_2 \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{g}} u_2 - \tilde{\mathbf{g}} u_1, & u_1 \tilde{\mathbf{g}} &= \tilde{\mathbf{g}} u_1. \end{aligned}$$

(iv) $\tilde{\mathcal{E}} \# \mathbb{k}C_2 \simeq \mathbf{E}$ como álgebras de Hopf; aquí $\tilde{\mathcal{E}}$ es una superálgebra de Hopf con comultiplicación dada por $\tilde{\mathbf{g}} \in G(\tilde{\mathcal{E}})$, $\zeta, u_1 \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{E}})$, $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathbf{g}},1}(\tilde{\mathcal{E}})$ y

$$\Delta_{\tilde{\mathcal{E}}}(u_2) = u_2 \otimes 1 + 1 \otimes u_2 - \zeta \otimes u_1, \quad (3.2.15)$$

Prueba. (i) Argumentando igual que en la Proposición 3.2.2; además (i) implica (ii).

(iii) Sea A un álgebra como la del enunciado. Using the commutation relations we have a surjective map of algebras $\phi: A \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$. Claramente la familia \mathbf{B}' consistente en los monomios análogos a los de \mathbf{B} generan A y son linealmente independientes pues $\phi(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$. Entonces $A \simeq \tilde{\mathcal{E}}$.

(iv) Identifiquemos $\mathbb{k}C_2$ con la subálgebra de \mathbf{E} generada por $\epsilon \in G(\mathbf{E})$, es decir tenemos un morfismo $\iota: \mathbb{k}C_2 \hookrightarrow \mathbf{E}$. También hay un morfismo de álgebras de Hopf $\pi: \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{k}C_2$ dado por

$$x_1 \mapsto 0, \quad x_2 \mapsto 0, \quad u_1 \mapsto 0, \quad u_2 \mapsto 0, \quad \mathbf{g} \mapsto \epsilon, \quad \zeta \mapsto 0, \quad \epsilon \mapsto \epsilon.$$

Entonces $\pi \iota = \text{id}$ y $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}^{\text{co}\pi} \# \mathbb{k}C_2$. Claramente $\tilde{\mathcal{E}} \subseteq \mathbf{E}^{\text{co}\pi}$ porque todo generador de $\tilde{\mathcal{E}}$ es coinvariante, y $\tilde{\mathcal{E}}$ es un álgebra de Hopf trenzada en $\mathbb{k}C_2 \mathcal{YD}$ con comultiplicación $\Delta_{\tilde{\mathcal{E}}}$ definida igual que en (3.2.15). Como $\tilde{\mathcal{E}} \# \mathbb{k}C_2$ contiene a $\mathbf{B}_{\mathbf{E}}$, tenemos que $\tilde{\mathcal{E}} = \mathbf{E}^{\text{co}\pi}$. Como todo generador de $\tilde{\mathcal{E}}$ es par o impar, $\tilde{\mathcal{E}}$ es una superálgebra de Hopf. \square

Observación 3.2.4. Recordemos las superálgebras de Hopf $\tilde{\mathcal{H}}$ (3.1.10) y $\tilde{\mathcal{K}}$ (3.1.14). Hay morfismos de superálgebras de Hopf $\tilde{\mathcal{H}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ y $\tilde{\mathcal{K}}^{\text{op}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ (por la presentación de $\tilde{\mathcal{E}}$) y $\tilde{\mathcal{E}}$ es isomorfo al doble de $\tilde{\mathcal{H}}$ con respecto a un apareamiento torcido adecuado, ver [GZB].

3.2.2 | El doble como una extensión super abeliana

En esta subsección mostraremos que $\tilde{\mathcal{E}}$ encaja en una sucesión exacta de superálgebras de Hopf $R \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow U$ con R conmutativa y U cocommutativa.

Sea \mathfrak{G} el grupo algebraico tal que su álgebra de funciones es la superálgebra de Hopf conmutativa $\mathcal{O}(\mathfrak{G}) := \mathbb{k}[X_1, X_2, T^{\pm}] \otimes \Lambda(Y_1, Y_2)$ con

$$|X_1| = |X_2| = |T| = 0, \quad |Y_1| = |Y_2| = 1,$$

y comultiplicación

$$\begin{aligned}\Delta(X_1) &= X_1 \otimes 1 + T^2 \otimes X_1 + Y_1 T \otimes Y_1, & \Delta(T) &= T \otimes T, \\ \Delta(X_2) &= X_2 \otimes 1 + 1 \otimes X_2 + Y_2 \otimes Y_2, \\ \Delta(Y_2) &= Y_2 \otimes 1 + 1 \otimes Y_2, & \Delta(Y_1) &= Y_1 \otimes 1 + T \otimes Y_1.\end{aligned}\tag{3.2.16}$$

Teorema 3.2.5. *Hay una sucesión exacta de superálgebras de Hopf*

$$\mathcal{O}(\mathfrak{G}) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow U(\mathfrak{osp}(1|2)).\tag{3.2.17}$$

Prueba. De las relaciones que definen a $\tilde{\mathcal{E}}$ deducimos que

$$\begin{aligned}x_{21}x_1 &= x_1x_{21}, & x_{21}u_1 &= u_1x_{21}, & u_{21}u_1 &= u_1u_{21}, \\ \tilde{\mathfrak{g}}x_{21} &= x_{21}\tilde{\mathfrak{g}}, & x_{21}u_{21} &= u_{21}x_{21}, & \tilde{\mathfrak{g}}u_{21} &= u_{21}\tilde{\mathfrak{g}}.\end{aligned}$$

Entonces el mapa $\iota : \mathcal{O}(\mathfrak{G}) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ dado por

$$Y_1 \mapsto x_1, \quad Y_2 \mapsto u_1, \quad X_1 \mapsto x_{21}, \quad X_2 \mapsto u_{21}, \quad T \mapsto \tilde{\mathfrak{g}}$$

es un monomorfismo de superálgebras de Hopf bien definido. Ahora el mapa $\pi : \tilde{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow U(\mathfrak{osp}(1|2))$ dado por

$$x_1 \mapsto 0, \quad x_2 \mapsto \psi^-, \quad u_1 \mapsto 0, \quad u_2 \mapsto \psi^+, \quad \tilde{\mathfrak{g}} \mapsto 1, \quad \zeta \mapsto -h.$$

es un epimorfismo de superálgebras de Hopf bien definido, pues $\pi(x_{21}) = \pi(u_{21}) = 0$, $\pi(-x_2^2) = f$ y $\pi(u_2^2) = e$. Podemos ver que $\ker \pi = \tilde{\mathcal{E}}\iota(\mathcal{O}(\mathfrak{G}))^+$ usando la base PBW de $\tilde{\mathcal{E}}$. Luego (3.2.17) es exacta. \square

3.2.3 | Una subálgebra de Hopf central

En esta Subsección $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$. Mostraremos que $\tilde{\mathcal{E}}$ tiene una subálgebra de Hopf central $Z = \mathcal{O}(\mathbf{L})$, con \mathbf{L} un grupo algebraico soluble. Primero necesitaremos las siguientes fórmulas de conmutación en $\tilde{\mathcal{E}}$.

Lema 3.2.6. *Las siguientes igualdades son válidas para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$:*

$$\begin{aligned}x_2^{2m}x_{21}^n &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [n]^{[k]} x_{21}^{n+k} x_2^{2(m-k)}, \\ x_2^{2m+1}x_{21}^n &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [n]^{[k+\ell]} x_1^\ell x_{21}^{n+k} x_2^{2(m-k)-\ell+1}, \\ x_2^{2m}x_1 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k [-m]^{[k]} x_1 x_{21}^k x_2^{2(m-k)}, \\ x_2^{2m+1}x_1 &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^m (-1)^{k+\ell} [-m]^{[k]} x_1^\ell x_{21}^{k-\ell+1} x_2^{2(m-k)+\ell} \\ \tilde{\mathfrak{g}}^n x_2^{2m} &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [-n]^{[k]} x_{21}^k x_2^{2(m-k)} \tilde{\mathfrak{g}}^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{g}}^n x_2^{2m+1} &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{n+1} [-n]^{[k+\ell]} x_1^\ell x_{21}^k x_2^{2(m-k)-\ell+1} \tilde{\mathbf{g}}^n, \\
x_2^{2m} x_{21}^n &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [n]^{[k]} x_{21}^{n+k} x_2^{2(m-k)}, \\
x_2^{2m+1} x_{21}^n &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [n]^{[k+\ell]} x_1^\ell x_{21}^{n+k} x_2^{2(m-k)-\ell+1}, \\
\zeta^n x_2^m &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} m^{n-\ell} x_2^m \zeta^\ell, \\
\zeta^n x_{21}^m &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (2m)^{n-\ell} x_{21}^m \zeta^\ell, \\
u_2^{2m} u_1 &= \sum_{k=0}^m (-1)^k [-m]^{[k]} u_1 u_{21}^k u_2^{2(m-k)}, \\
u_2^{2m+1} u_1 &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^m (-1)^{k+\ell} [-m]^{[k]} x_1^\ell u_{21}^{k-\ell+1} u_2^{2(m-k)+\ell}, \\
u_2^{2m} \tilde{\mathbf{g}}^n &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} [-n]^{[k]} \tilde{\mathbf{g}}^n u_{21}^k u_2^{2(m-k)}, \\
u_2^{2m+1} \tilde{\mathbf{g}}^n &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{n+1} [-n]^{[k+\ell]} x_1^\ell \tilde{\mathbf{g}}^n u_{21}^k u_2^{2(m-k)-\ell+1}, \\
u_2^m \zeta^n &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} m^{n-\ell} \zeta^\ell u_2^m, \\
u_{21}^m \zeta^n &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (2m)^{n-\ell} \zeta^\ell u_{21}^m, \\
u_2 x_{21}^n &= x_{21} u_2 - 2n x_{21}^n u_1 + n x_1 x_{21}^{n-1} (1 + \tilde{\mathbf{g}}), \\
u_{21}^n x_2 &= x_2 u_{21}^n + n(\tilde{\mathbf{g}} + 1) u_1 u_{21}^{n-1}, \\
u_2^{2n} x_1 &= x_1 u_2^{2n} - n x_1 u_{21} u_2^{2(n-1)} + n u_1 u_2^{2n-1}, \\
u_2^{2n} x_2 &= x_2 u_2^{2n} - n x_2 u_{21} u_2^{2(n-1)} + n \tilde{\mathbf{g}} u_2^{2n-1} \\
&\quad - n \tilde{\mathbf{g}} u_1 u_2^{2(n-1)} - n(n-1) \tilde{\mathbf{g}} u_{21} u_2^{2(n-1)-1}, \\
u_1 x_2^{2n} &= x_2^{2n} u_1 + n x_2^{2(n-1)} x_1 \tilde{\mathbf{g}} - n(n-1) x_{21} x_2^{2(n-2)} x_1 \tilde{\mathbf{g}}, \\
u_2 x_2^{2n} &= x_2^{2n} u_2 - 2n x_2^{2n} u_1 + n x_2^{2n-1} - n x_2^{2(n-1)} x_1 \tilde{\mathbf{g}} \zeta \\
&\quad + n(n-1) x_{21} x_2^{2(n-2)} x_1 \tilde{\mathbf{g}} \zeta - n(2n-1) x_2^{2(n-1)} x_1 \tilde{\mathbf{g}} \\
&\quad + n(n-1)(2n-1) x_{21} x_2^{2(n-2)} x_1 \tilde{\mathbf{g}}, \\
\tilde{\mathbf{g}}^n x_1 &= x_1 \tilde{\mathbf{g}}^n, & \tilde{\mathbf{g}}^n x_{21}^m &= x_{21}^m \tilde{\mathbf{g}}^n, & x_1 x_{21}^n &= x_{21}^n x_1, \\
u_{21}^n x_1 &= x_1 u_{21}^n, & x_{21}^n u_1 &= u_1 x_{21}^n.
\end{aligned}$$

Prueba. Se siguen fácilmente por inducción. □

Para nuestra siguiente afirmación necesitamos fijar un poco de notación. Sea

$$\mathbf{L} := ((\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m) \times \mathbf{H}_3 \quad (3.2.18)$$

el grupo algebraico que en el primer factor tiene el producto semidirecto donde \mathbf{G}_m actúa en $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ por $\lambda.(r_1, r_2) = (\lambda^2 r_1, \lambda^2 r_2)$, $\lambda \in \mathbb{k}^\times$, $r_1, r_2 \in \mathbb{k}$ mientras que en el segundo factor aparece el grupo de Heisenberg \mathbf{H}_3 , es decir, el grupo de matrices triangulares superiores con unos en la diagonal. Sea $\zeta^{(p)} := \zeta^p - \zeta$ y $Z := \mathbb{k}\langle x_{21}^p, x_2^{2p}, u_{21}^p, u_2^{2p}, \tilde{\mathbf{g}}^p, \zeta^{(p)} \rangle \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}$. Notemos que Z es una subálgebra puramente par.

Teorema 3.2.7. (i) Z es una subálgebra de Hopf central de $\tilde{\mathcal{E}}$.

(ii) $\tilde{\mathcal{E}}$ es un Z -módulo libre finitamente generado.

(iii) $Z \simeq \mathbb{k}[T^\pm, X_1, \dots, X_5]$ como álgebra. En particular Z es un dominio.

(iv) $Z \simeq \mathcal{O}(\mathbf{L})$ como álgebras de Hopf.

Prueba. (i) Por el Lema 3.2.6 Z es una subálgebra central par de $\tilde{\mathcal{E}}$. Necesitamos entonces verificar que es una subcoálgebra y es invariante por la antipoda. Tenemos las siguientes fórmulas de comultiplicación para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Delta(x_{21}^n) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} n^\ell x_1^\ell x_{21}^k \tilde{\mathbf{g}}^{2(n-k)-\ell} \otimes x_1^\ell x_{21}^{n-k-\ell}, \\ \Delta(x_2^{2n}) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n-\ell} \sum_{t=0}^k \binom{n-\ell}{k} \binom{k}{t} n^\ell [k-n+\ell]^{[t]} \\ &\quad x_1^\ell x_{21}^t x_2^{2(k-t)} \tilde{\mathbf{g}}^{2(n-k)-\ell} \otimes x_2^{2(n-k)-\ell}, \\ \Delta(u_{21}^n) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} n^\ell u_1^\ell u_{21}^k \otimes u_1^\ell u_{21}^{n-k-\ell}. \end{aligned}$$

Luego $u_{21}^p, \zeta^{(p)} \in \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{E}})$, x_2^{2p}, x_{21}^p son $(1, \tilde{\mathbf{g}}^{2p})$ -primitivos y $\tilde{\mathbf{g}}^p \in G(\tilde{\mathcal{E}})$. Solo queda calcular $\Delta(u_2^{2p})$. Recordemos la fórmula (3.1.6) y

$$\delta(u_2^{2n}) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{n}{k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} (-1)^k \zeta^j \otimes u_{21}^k u_2^{2(n-k)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

donde $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}$ son los números de Stirling. Como $[\zeta]^{[p]} = \prod_{i=1}^p (\zeta + i - 1) = \sum_{k=0}^p \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} \zeta^k = \zeta^p - \zeta$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} = 0, \quad k = 2, \dots, p-1, \quad \begin{bmatrix} p \\ p \end{bmatrix} = 1, \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = -1. \quad (3.2.19)$$

Finalmente tenemos $\Delta(u_2^{2p}) = u_2^{2p} \otimes 1 + 1 \otimes u_2^{2p} - \zeta^{(p)} \otimes u_{21}^p$.

(ii) Para probar esto consideramos otra base de $\tilde{\mathcal{E}}$ usando una base diferente para $\mathbb{k}[\zeta]$. La familia de polinomios

$$(\zeta^{(p)})^k \zeta^j, \quad k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{I}_{0, p-1},$$

es una base de $\mathbb{k}[\zeta]$, la prueba puede ser consultada en [AP, Prop. 2.6]. Entonces los elementos

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} \tilde{\mathfrak{g}}^n (\zeta^{(p)})^k \zeta^j u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2},$$

con $(n_1, m_1, n, n_2, n_{21}, k, m_2, m_{21}, j) \in \mathbb{I}_{0,1}^2 \times \mathbb{N}_0^6 \times \mathbb{I}_{0,p-1}$ forman una base de $\tilde{\mathcal{E}}$. Luego una base de $\tilde{\mathcal{E}}$ como Z -módulo está dada por

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} \tilde{\mathfrak{g}}^n \zeta^j u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2},$$

con $(n_1, m_1, n_2, m_2, n_{21}, m_{21}, j, n) \in \mathbb{I}_{0,1}^2 \times \mathbb{I}_{0,2p-1}^2 \times \mathbb{I}_{0,p-1}^4$.

(iii) El mapa $\phi: \mathbb{k}[T^\pm, X_1, \dots, X_5] \rightarrow Z$ dado por

$$T \mapsto \tilde{\mathfrak{g}}^p, \quad X_1 \mapsto x_{21}^p, \quad X_2 \mapsto x_2^{2p}, \quad X_3 \mapsto -\zeta^{(p)}, \quad X_4 \mapsto u_{21}^p, \quad X_5 \mapsto u_2^{2p},$$

es el isomorfismo deseado de álgebras.

(iv) Es fácil ver que $\mathcal{O}(\mathbf{L}) \simeq \mathbb{k}[T^\pm, X_1, \dots, X_5]$ con comultiplicación determinada por $T \in G(\mathcal{O}(\mathbf{L}))$, $X_1, X_2 \in \mathcal{P}_{T^{\pm 1}}(\mathcal{O}(\mathbf{L}))$, $X_3, X_5 \in \mathcal{P}(\mathcal{O}(\mathbf{L}))$ and $\Delta(X_5) = X_5 \otimes 1 + 1 \otimes X_5 + X_3 \otimes X_4$. La afirmación se sigue de aquí. \square

3.2.4 | Propiedades del doble como anillo

Proposición 3.2.8. (i) *El álgebra $\tilde{\mathcal{E}}$ admite una filtración exhaustiva ascendente $(\tilde{\mathcal{E}}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que $\text{gr } \tilde{\mathcal{E}} \simeq \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5, T^{\pm 1}] \otimes \Lambda(Y_1, \dots, Y_4)$.*

(ii) *Las álgebras \mathbf{E} y $\tilde{\mathcal{E}}$ son noetherianas.*

(iii) *Si $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$ entonces $\tilde{\mathcal{E}}$ es un álgebra de identidad polinomial.*

Prueba. (i) Sea A el álgebra presentada por generadores $x_1, x_2, u_1, u_2, \zeta, \tilde{\mathfrak{g}}^{\pm 1}$ y $Z_i, i \in \mathbb{I}_4$, con relaciones $\tilde{\mathfrak{g}}^{\pm 1} \tilde{\mathfrak{g}}^{\mp 1} = 1$. El álgebra A es graduada con

$$\begin{aligned} \deg x_1 = \deg u_1 = 3, & & \deg x_2 = \deg u_2 = 4, & & \deg \tilde{\mathfrak{g}}^{\pm 1} = \pm 1, \\ \deg Z_1 = \deg Z_2 = \deg \zeta = 1, & & \deg Z_3 = \deg Z_4 = 2. \end{aligned}$$

La filtración asociada a esta graduación induce una filtración en $\tilde{\mathcal{E}}$ via el epimorfismo $A \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ dado por

$$Z_1 \mapsto x_{21}, \quad Z_2 \mapsto u_{21}, \quad Z_3 \mapsto x_2^2, \quad Z_4 \mapsto u_2^2,$$

y el resto de los generadores son mapeados a sus homónimos. Las relaciones de $\tilde{\mathcal{E}}$ implican que $\text{gr } \tilde{\mathcal{E}}$ es super conmutativa con la misma paridad que $\tilde{\mathcal{E}}$. Entonces $\phi: \mathbb{k}[X_1, \dots, X_5, T^{\pm 1}] \otimes \Lambda(Y_1, \dots, Y_4) \rightarrow \text{gr } \tilde{\mathcal{E}}$ dado por $X_i \mapsto Z_i, i \in \mathbb{I}_4$, y

$$T \mapsto \tilde{\mathfrak{g}}, \quad Y_1 \mapsto x_1, \quad Y_2 \mapsto x_2, \quad Y_3 \mapsto u_1, \quad Y_4 \mapsto u_2, \quad X_5 \mapsto \zeta$$

es un isomorfismo de álgebras por comparación de las series de Hilbert.

(ii) Es bien conocido que $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_5, T^{\pm 1}] \otimes \Lambda(Y_1, \dots, Y_4)$ es noetheriano, entonces también lo es $\tilde{\mathcal{E}}$ por (i) y por ende \mathbf{E} es también noetheriano pues es finitamente generado como $\tilde{\mathcal{E}}$ -módulo. (iii) Se sigue del Teorema 3.2.7, Proposición 3.3.4 y [MR, Corolario 1.13]. \square

3.3 | El doble del super plano de Jordan restringido

En esta sección, $\text{char } \mathbb{k} = p > 2$.

3.3.1 | Las bosonizaciones

Recordemos que $R_p = \mathbb{k}[\zeta]/(\zeta^p - \zeta)$ es un álgebra de Hopf con ζ primitivo. Además de (3.1.7) también fijamos los generadores

$$C_p = \langle g \rangle, \quad C_{2p} = \langle \gamma \rangle. \quad (3.3.1)$$

Es bien conocido que $\mathbb{k}^{C_p} \simeq R_p$, ver por ejemplo [AP, 1.3]. Entonces $\mathbb{k}^{C_{2p}} \simeq R_p \otimes \mathbb{k}C_2$ y el álgebra $\mathbb{k}^{C_{2p}}$ está presentada por los generadores ϵ y ζ con relaciones

$$\epsilon^2 = 1, \quad (3.3.2)$$

$$\zeta^p = \zeta, \quad (3.3.3)$$

$$\epsilon\zeta = \zeta\epsilon. \quad (3.3.4)$$

Consideramos las realizaciones de V en $\mathbb{k}^{C_{2p}} \mathcal{YD}$ y W en $\mathbb{k}^{C_{2p}} \mathcal{YD}$ dadas por

$$\gamma \rightharpoonup x_1 = -x_1, \quad \gamma \rightharpoonup x_2 = -x_2 + x_1, \quad \delta(x_i) = \gamma \otimes x_i, \quad i = 1, 2; \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned} \zeta \rightharpoonup u_i &= u_i, & \epsilon \rightharpoonup u_i &= -u_i, & i &= 1, 2, \\ \delta(u_1) &= \epsilon \otimes u_1, & \delta(u_2) &= \epsilon \otimes u_2 - \zeta \epsilon \otimes u_1, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Entonces tenemos las álgebras de Hopf

$$H := \mathcal{B}(V) \# \mathbb{k}C_{2p}, \quad K := \mathcal{B}(W) \# \mathbb{k}^{C_{2p}}.$$

Estas tienen bases PBW, denotadas por \mathbf{B}_H y \mathbf{B}_K , dadas por los monomios ordenados (3.1.2) o (3.1.5) con $(n_1, n_{21}, n_2) \in \mathbb{I}_{0,1} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, multiplicadas adecuadamente por los elementos de los grupos C_p, C_{2p} , o potencias de ζ . Entonces

$$\dim H = \dim K = 8p^3.$$

La comultiplicación está dada por $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{\gamma,1}(H)$, $u_1 \in \mathcal{P}_{\epsilon,1}(K)$ y $\Delta_K(u_2)$ by (3.2.1) Entonces tenemos los siguientes epimorfismos de álgebras de Hopf

$$\mathbb{H} \twoheadrightarrow H, \quad \mathbb{K} \twoheadrightarrow K.$$

Las propiedades básicas de H y $K \simeq H^*$ se siguen sin dificultades.

3.3.2 | El doble

En esta subsección mostramos que el doble de Drinfeld de H encaja en una sucesión exacta de álgebras de Hopf $\mathbb{k}C_2 \hookrightarrow D(H) \twoheadrightarrow E$.

Primero damos una presentación de $D(H)$; para eso necesitamos una para $D(\mathbb{k}C_{2p})$ que se sigue fácilmente de los isomorfismos $D(\mathbb{k}C_{2p}) \simeq \mathbb{k}C_{2p} \otimes \mathbb{k}^{C_{2p}} \simeq \mathbb{k}C_{2p} \otimes R_p \otimes \mathbb{k}C_2$.

Proposición 3.3.1. $D(H)$ está generada por $x_1, x_2, \zeta, \epsilon, \gamma, u_1, u_2$ con relaciones (3.0.1), (3.0.3), (3.1.4), (3.2.8), (3.2.9), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) y

$$\gamma^{2p} = 1, \quad \epsilon\gamma = \gamma\epsilon, \quad \zeta\gamma = \gamma\zeta, \quad (3.3.7)$$

$$\gamma x_1 = -x_1\gamma, \quad \gamma x_2 = (-x_2 + x_1)\gamma, \quad (3.3.8)$$

$$u_1^2 = 0, \quad u_2 u_{21} = u_{21} u_2 + u_1 u_{21}, \quad (3.3.9)$$

$$u_i \zeta = \zeta u_i + u_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.3.10)$$

$$u_1 x_1 = -x_1 u_1, \quad u_1 x_2 = -x_2 u_1 + (1 - \gamma\epsilon), \quad (3.3.11)$$

$$u_2 x_1 = -x_1 u_2 + (1 - \gamma\epsilon) + x_1 u_1, \quad u_2 x_2 = -x_2 u_2 + \gamma\zeta\epsilon + x_2 u_1, \quad (3.3.12)$$

$$u_1 \gamma = -\gamma u_1, \quad u_2 \gamma = -\gamma u_2 + \gamma u_1. \quad (3.3.13)$$

La comultiplicación está determinada por $\gamma, \epsilon \in G(D(H))$, $\zeta \in \mathcal{P}(D(H))$, $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{\gamma,1}(D(H))$, $u_1 \in \mathcal{P}_{\epsilon,1}(D(H))$ y (3.2.1). Los monomios

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} \gamma^i \epsilon^j \zeta^k u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2}$$

con $(n_1, m_1, j, n_{21}, k, m_{21}, i, n_2, m_2) \in \mathbb{I}_{0,1}^3 \times \mathbb{I}_{0,p-1}^3 \times \mathbb{I}_{0,2p-1}^3$ forman una base PBW de $D(H)$.

Prueba. Es una aplicación directa de la Proposición 1.7.6. \square

Sea $t := \gamma^p \epsilon$ y $g := \gamma^{p+1}$. La subálgebra de Hopf generada por t es isomorfa a $\mathbb{k}C_2$ y the la generada por g a $\mathbb{k}C_p$. Por las relaciones que definen el álgebra, el elemento t es central. Sea $Z_0 = \mathbb{k}\langle t \rangle$ y $E := D(H)/D(H)Z_0^+$. Usamos el mismo simbolo para un elemento en $D(H)$ y para su clase en E .

Proposición 3.3.2. (a) *El álgebra E está generada por $x_1, x_2, g, \zeta, u_1, u_2, \epsilon$ con relaciones (3.0.1), (3.0.3), (3.1.4), (3.2.8), (3.2.9), (3.3.9), (3.3.10), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4)*

$$\zeta g = g\zeta, \quad g^p = 1, \quad (3.3.14)$$

$$g x_1 = x_1 g, \quad g x_2 = (x_2 - x_1)g, \quad (3.3.15)$$

$$u_2 g = g u_2 - g u_1, \quad u_1 g = g u_1, \quad (3.3.16)$$

$$u_1 x_2 = -x_2 u_1 + (1 - g), \quad u_2 x_2 = -x_2 u_2 + g\zeta + x_2 u_1, \quad (3.3.17)$$

$$u_2 x_1 = -x_1 u_2 + (1 - g) + x_1 u_1, \quad u_1 x_1 = -x_1 u_1, \quad (3.3.18)$$

$$\epsilon g = g\epsilon. \quad (3.3.19)$$

(b) *La sucesión de álgebras de Hopf $Z_0 := \mathbb{k}C_2 \hookrightarrow D(H) \twoheadrightarrow E$ es exacta.*

(c) *El álgebra E tiene dimensión $32p^6$ y una base consistente en los monomios*

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} g^n \zeta^m u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2} \epsilon^k$$

$$\text{con } (n_1, m_1, k, n_{21}, m, m_{21}, n, n_2, m_2) \in \mathbb{I}_{0,1}^3 \times \mathbb{I}_{0,p-1}^4 \times \mathbb{I}_{0,2p-1}^2$$

Prueba. (a): Muy similar a la prueba de la Proposición 3.2.2. (b) Las condiciones (i) y (ii) arriba son evidentes, mientras que (iii) se prueba considerando la base de $D(H)$

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} g^n \zeta^m u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2} \epsilon^k (1 - t)^\ell$$

con $(n_1, m_1, \ell, k, n, m, n_{21}, m_{21}, n_2, m_2) \in \mathbb{I}_{0,1}^4 \times \mathbb{I}_{0,p-1}^4 \times \mathbb{I}_{0,2p-1}^2$. Ahora la Observación 1.2.8 nos da (iv) pues Z_0 es central. La prueba de (c) es directa. \square

Observación 3.3.3. Hay una sucesión exacta de álgebras de Hopf $\mathcal{O}(\mathbf{B}) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow E$.

3.3.3 | La superálgebra de Hopf \mathcal{E}

Ahora mostramos que E es la bosonización de una superálgebra de Hopf $\mathcal{E} := \mathbb{k}\langle x_1, x_2, u_1, u_2, g, \zeta \rangle \hookrightarrow E$ y \mathcal{E} resulta el análogo restringido de la superálgebra de Hopf $\tilde{\mathcal{E}}$.

Proposición 3.3.4. (i) Una base PBW de \mathcal{E} está dada por los monomios

$$x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} g^n \zeta^m u_1^{m_1} u_{21}^{m_{21}} u_2^{m_2},$$

$(n_1, m_1, n, m, n_{21}, m_{21}, n_2, m_2) \in \mathbb{I}_{0,1}^2 \times \mathbb{I}_{0,p-1}^4 \times \mathbb{I}_{0,2p-1}^2$. Entonces $\dim \mathcal{E} = 16p^6$.

(ii) \mathcal{E} tiene una descomposición triangular, es decir que hay un isomorfismo lineal inducido por la multiplicación

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{B}(V) \otimes (\mathbb{k}C_p \otimes R_p) \otimes \mathcal{B}(W)^{\text{op}}. \quad (3.3.20)$$

(iii) \mathcal{E} está generada por $x_1, x_2, u_1, u_2, g, \zeta$ con relaciones (3.0.1), (3.0.3), (3.1.4), (3.2.9), (3.3.3), (3.3.15), (3.3.9), (3.3.10), (3.3.14), (3.3.16), (3.3.17), (3.3.18).

(iv) \mathcal{E} es una superálgebra de Hopf con comultiplicación dada por $g \in G(\mathcal{E})$, $\zeta, u_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{g,1}(\mathcal{E})$ y (3.2.15). En efecto $\mathcal{E} \# \mathbb{k}C_2 \simeq E$ como álgebras de Hopf.

(v) Hay una sucesión exacta de superálgebras de Hopf

$$\mathcal{O}(\mathbf{L}) \xhookrightarrow{\iota} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{E}.$$

Prueba. (i), (ii), (iii) son análogos a los de la Proposición 3.2.3. (iv) Siguiendo el mismo esquema que en la Proposición 3.2.3, tenemos que $\mathcal{E} \simeq D^{\text{co}\varpi}$ donde $\varpi: E \rightarrow \mathbb{k}C_2$ está dado por

$$x_1 \mapsto 0, \quad x_2 \mapsto 0, \quad u_1 \mapsto 0, \quad u_2 \mapsto 0, \quad g \mapsto 1, \quad \zeta \mapsto 0, \quad \epsilon \mapsto \epsilon.$$

(v) Por la presentación de $\tilde{\mathcal{E}}$ y \mathcal{E} existe $\pi: \tilde{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ tal que

$$\mathbf{g} \mapsto g, \quad \zeta \mapsto \zeta, \quad x_i \mapsto x_i, \quad u_i \mapsto u_i, \quad i = 1, 2.$$

El morfismo $\iota: \mathcal{O}(\mathbf{L}) \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ está definido como el ϕ en la prueba del Teorema 3.2.7. Claramente $\ker \pi = \tilde{\mathcal{E}}\iota(\mathcal{O}(\mathbf{L}))^+$ por las bases PBW. Como $\iota(\mathcal{O}(\mathbf{L}))$ es central y $\tilde{\mathcal{E}}$ es un módulo libre sobre $\iota(\mathcal{O}(\mathbf{L}))$, la afirmación se sigue de la Observación 1.2.8. \square

Observación 3.3.5. Podemos realizar V en $\frac{\mathbb{k}C_p}{\mathbb{k}C_p} \mathcal{YDS}$ y W en $\frac{R_p}{R_p} \mathcal{YDS}$ por

$$\begin{aligned} g \rightharpoonup x_1 = x_1, \quad g \rightharpoonup x_2 = x_2 - x_1, \quad \delta(x_i) = g \otimes x_i, \quad |x_i| = 1, \quad i = 1, 2; \\ \zeta \rightharpoonup u_i = u_i, \quad |u_i| = 1, \quad i = 1, 2, \\ \delta(u_1) = 1 \otimes u_1, \quad \delta(u_2) = 1 \otimes u_2 - \zeta \otimes u_1. \end{aligned}$$

Tenemos entonces las superálgebras de Hopf $\mathcal{H} := \mathcal{B}(V) \natural \mathbb{k}C_p$, $\mathcal{K} := \mathcal{B}(W) \natural R_p$; claramente $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K} = 4p^3$. Sus comultiplicaciones están determinadas por las condiciones $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{g,1}(\mathcal{H})$, $u_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$, mientras que $\Delta_{\mathcal{K}}(u_2)$ está dado por (3.2.15). Luego hay epimorfismos de álgebras de Hopf $\tilde{\mathcal{H}} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$, $\tilde{\mathcal{K}} \twoheadrightarrow \mathcal{K}$. Las propiedades básicas de \mathcal{H} y \mathcal{K} se siguen automáticamente. Also, there are isomorphisms of Hopf algebras $H \simeq \mathcal{H} \# \mathbb{k}C_2$, $K \simeq \mathcal{K} \# \mathbb{k}C_2$. Finalmente, hay morfismos de superálgebras de Hopf $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{K}^{\text{op}} \hookrightarrow \mathcal{E}$, luego $\mathcal{E} \simeq D(\mathcal{H})$, ver [GZB].

3.3.4 | \mathcal{E} como una extensión

Ahora mostramos que \mathcal{E} encaja en una sucesión exacta de superálgebras de Hopf $\mathbf{R}_s \hookrightarrow \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathfrak{u}$ donde \mathbf{R}_s es superconmutativa y \mathfrak{u} supercoconmutativa. Sea \mathbf{R}_s la superálgebra de Hopf conmutativa

$$\mathbf{R}_s := \mathbb{k}[X_1, X_2, T]/(X_1^p, X_2^p, T^p - 1) \otimes \Lambda(Y_1, Y_2)$$

con $|X_1| = |X_2| = |T| = 0$, $|Y_1| = |Y_2| = 1$ y comultiplicación (3.2.16). Argumentando como en la Proposición 3.2.17, tenemos:

Teorema 3.3.6. *Existen morfismos de superálgebras de Hopf ι y π tal que*

$$\mathbf{R}_s \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2)) \quad (3.3.21)$$

es una sucesión exacta de superálgebras de Hopf. \square

Los \mathcal{E} -supermodulos simples pueden ser determinados del resultado anterior.

Teorema 3.3.7. *Hay exactamente p clases de isomorfismos de \mathcal{E} -módulos simples que tienen dimensiones $1, 3, 5, \dots, 2p - 1$.*

Prueba. El ideal $\mathcal{E}\mathbf{R}_s^+ = \langle x_1, x_{21}, u_1, u_{21}, g - 1 \rangle$ es nilpotente y está contenido en el radical de Jacobson de \mathcal{E} ; luego $\text{Irrep } \mathcal{E} \simeq \text{Irrep } \mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2))$ y [WZ, Prop. 6.3] se aplica directamente. \square

3.3.5 | Módulos simples

Ahora describimos los \mathcal{E} -módulos simples como cocientes de módulos de Verma, dando una prueba alternativa del Teorema 3.3.7. El álgebra $\mathcal{E} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}^n$ es \mathbb{Z} -graduado por

$$\deg x_1 = \deg x_2 = -1, \quad \deg u_1 = \deg u_2 = 1, \quad \deg g = \deg \zeta = 0.$$

Recordemos que $D(\mathbb{k}C_p) \simeq R_p \otimes \mathbb{k}C_p$. Consideremos la descomposición triangular (3.3.20) y las subálgebras graduadas $\mathcal{D}^{>0} := \mathcal{B}(W)^{\text{op}}$, $\mathcal{D}^{<0} := \mathcal{B}(V)$. Entonces

1. $\mathcal{D}^{>0} \subseteq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}^n$, $\mathcal{D}^{<0} \subseteq \bigoplus_{n \in -\mathbb{N}_0} \mathcal{E}^n$ y $D(\mathbb{k}C_p) \subseteq \mathcal{E}^0$.
2. $(\mathcal{D}^{>0})^0 = \mathbb{k} = (\mathcal{D}^{<0})^0$.
3. $\mathcal{D}^{\geq 0} := D(\mathbb{k}C_p)\mathcal{D}^{>0}$ y $\mathcal{D}^{\leq 0} := \mathcal{D}^{<0}D(\mathbb{k}C_p)$ son subálgebras de \mathcal{E} .

En este contexto los módulos simples de \mathcal{E} aparecen induciendo desde $\mathcal{D}^{\geq 0}$. Los elementos $\Lambda := \text{Irrep } D(\mathbb{k}C_p)$ son llamados *pesos*. Como $\mathcal{D}^{>0}$ es local, la proyección (homogenea) $\mathcal{D}^{\geq 0} \twoheadrightarrow D(\mathbb{k}C_p)$ nos permite identificar $\Lambda \simeq \text{Irrep } \mathcal{D}^{\geq 0}$. El módulo de Verma asociado con $\lambda \in \Lambda$ es

$$M(\lambda) = \text{Ind}_{\mathcal{D}^{\geq 0}}^{\mathcal{E}} \lambda = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{D}^{\geq 0}} \lambda.$$

Por un argumento estándar, $M(\lambda)$ es indescomponible. Sea $L(\lambda)$ el máximo cociente semisimple de $M(\lambda)$. El siguiente resultado es conocido, ver por ejemplo [V, Teorema 2.1].

Lema 3.3.8. *El mapa $\lambda \mapsto L(\lambda)$ nos da una biyección $\Lambda \simeq \text{Irrep } \mathcal{E}$.* \square

El conjunto Λ es fácil de calcular pues $D(\mathbb{k}C_p) \simeq \mathbb{k}C_p \otimes R_p$ y $\mathbb{k}C_p$ es local. Dado $k \in \mathbb{F}_p$, sea $\lambda_k = \mathbb{k}w_k$ el espacio vectorial unidimensional con acción

$$g \cdot w_k = w_k, \quad \zeta \cdot w_k = kw_k.$$

Lema 3.3.9. *El mapa $k \mapsto \lambda_k$ nos da una biyección $\mathbb{F}_p \simeq \Lambda$.* \square

Fijamos $k \in \mathbb{F}_p$ y calculamos $L(\lambda_k)$. Como $M(\lambda_k)$ es libre como $\mathcal{D}^{<0}$ -módulo con base w_k , los elementos

$$w_k^{(n_1, n_{21}, n_2)} := x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2} \cdot w_k, \quad n_1 \in \mathbb{I}_{0,1}, n_{21} \in \mathbb{I}_{0,p-1}, n_2 \in \mathbb{I}_{0,2p-1},$$

forman una base lineal de $M(\lambda_k)$. Esto le da a $M(\lambda_k)$ la estructura de un módulo graduado por $\deg w_k^{(n_1, n_{21}, n_2)} = \deg(x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} x_2^{n_2})$, así $M(\lambda_k) = \bigoplus_{n \leq 0} M(\lambda_k)_n$ y $M(\lambda_k)_0 = \mathbb{k}w_k$. Cualquier submódulo propio de $M(\lambda_k)$ está entonces contenido en $\bigoplus_{n \leq -1} M(\lambda_k)_n$. Como $L(\lambda_k)$ es el único cociente simple de $M(\lambda_k)$, dividimos el anterior por submódulos propios hasta obtener uno simple como cociente. Empezamos con el submódulo N_k de $M(\lambda_k)$ generado por $S_k := \{w_k^{(1,0,0)}, w_k^{(0,1,0)}\}$.

Lema 3.3.10. *El submódulo N_k es propio.*

Prueba. La acción de u_1 y u_2 es

$$\begin{aligned} u_1 x_1 \cdot w_k &= -x_1 u_1 \cdot w_k = 0, & u_1 x_{21} \cdot w_k &= x_{21} u_1 \cdot w_k = 0, \\ u_2 x_1 \cdot w_k &= -x_1 u_2 \cdot w_k + (1-g) \cdot w_k + x_1 u_1 \cdot w_k = 0, \\ u_2 x_{21} \cdot w_k &= x_{21} u_2 \cdot w_k - 2x_{21} u_1 \cdot w_k + x_1(1+g) \cdot w_k = 2x_1 \cdot w_k. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{D}^{>0} \cdot S_k \subseteq S_k$. Así $N_k = \mathcal{D}^{\leq 0} \cdot S_k \subseteq \bigoplus_{n \leq -1} M(\lambda_k)_n$ es propio. \square

Sea $V_k = M(\lambda_k)/N_k$ y sea y_j la clase de $w_k^{(0,0,j)}$ en V_k .

Lema 3.3.11. *La familia $(y_j)_{j \in \mathbb{I}_{0,2p-1}}$ genera linealmente V_k y g, u_1, u_{21}, x_1 y x_{21} actúan trivialmente en V_k .*

Prueba. Afirmamos que la clase de $w_k^{(n_1, n_{21}, n_2)} = 0$ en V_k si $(n_1, n_{21}) \neq (0, 0)$. Es suficiente probar que $w_k^{(0,1,n_2)} = 0$ y que $w_k^{(1,0,n_2)} = 0$ en V_k para todo n_2 . La afirmación se sigue por inducción en n_2 usando los análogos para \mathcal{E} de las relaciones en el Lema 3.2.6. Como x_{21} y x_1 conmutan, ambos actúan trivialmente en V_k :

$$\begin{aligned} x_{21} \cdot w_k^{(n_1, n_{21}, n_2)} &= x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} \cdot w_k^{(0,1,n_2)} = 0, \\ x_1 \cdot w_k^{(n_1, n_{21}, n_2)} &= x_1^{n_1} x_{21}^{n_{21}} \cdot w_k^{(1,0,n_2)} = 0. \end{aligned}$$

Entonces $(y_j)_{j \in \mathbb{I}_{0,2p-1}}$ genera linealmente V_k . Además g, u_1 y u_{21} actúan trivialmente en estos generadores por el Lema 3.2.6. \square

Fijemos $y_{-1} = y_{2p} = 0$. La acción de \mathcal{E} en V_k puede ser computada inductivamente:

$$\begin{aligned} \zeta \cdot y_j &= (k-j)y_j, \quad g \cdot y_j = y_j, \quad x_2 \cdot y_j = y_{j+1}, \quad x_1 \cdot y_j = 0, \\ u_1 \cdot y_j &= 0, \quad u_2 \cdot y_j = \begin{cases} \frac{j}{2} y_{j-1} & \text{si } j \text{ es par,} \\ \left(\frac{j-1}{2} - k\right) y_j & \text{si } j \text{ es impar,} \end{cases} \quad j \in \mathbb{I}_{0,2p-1}. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Ahora $\tilde{V}_k := \mathcal{E}y_{2k+1}$ es un submódulo propio de V_k pues $\mathcal{D}^{>0} \cdot y_{2k+1} = 0$.

Proposición 3.3.12. *El módulo $L_k = V_k/\tilde{V}_k$ es simple de dimensión $2k + 1$.*

Se sigue que $L_k = L(\lambda_k)$, el único cociente simple del módulo de Verma $M(\lambda_k)$.

Prueba. Sea z_j la clase de y_j en L_k ; la acción de \mathcal{E} en los z_j está todavía dada por (3.3.22). Entonces $(z_j)_{j \in \mathbb{I}_{0,2k}}$ es una base de L_k . Para ver que L_k es simple, mostramos que todo $0 \neq z \in L_k$ genera L_k . Sea $z = \sum_{j=0}^m c_j z_j$ con $m \leq 2k$ y $c_m \neq 0$. Entonces $u_2^m \cdot z \in \mathbb{k}^\times z_0$, y $\mathcal{E} \cdot z = L_k$. \square

3.3.6 | $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$ como una extensión

Sea $\mathbf{G}_s = (\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a) \rtimes \mathbf{G}_m$ el producto semidirecto donde \mathbf{G}_m actúa en $\mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ por $\lambda \cdot (t_1, t_2) = (\lambda^2 t_1, t_2)$, $\lambda \in \mathbb{k}^\times$, $t_1, t_2 \in \mathbb{k}$ (comparar con el grupo \mathbf{G} de la Observación 2.2.7). Entonces $\mathcal{O}(\mathbf{G}_s)$ es isomorfo a $A := \mathbb{k}[X_1, X_2, T^{\pm 1}]$ con comultiplicación dada por $T \in G(A)$, $X_1 \in \mathcal{P}_{T^2,1}(A)$, $X_2 \in \mathcal{P}(A)$.

Proposición 3.3.13. *Hay una sucesión exacta corta de subálgebras de Hopf*

$$\mathcal{O}(\mathbf{G}_s) \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{O}(\mathfrak{G}) \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}_s, \quad (3.3.23)$$

con morfismos $\iota: \mathcal{O}(\mathbf{G}_s) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathfrak{G})$, $\pi: \mathcal{O}(\mathfrak{G}) \rightarrow \mathbf{R}_s$ dados por

$$\begin{aligned} \iota(X_1) &= X_1^p, & \iota(X_2) &= X_2^p, & \iota(T) &= T^p, \\ \pi(X_1) &= X_1, & \pi(X_2) &= X_2, & \pi(T) &= T, & \pi(Y_1) &= Y_1, & \pi(Y_2) &= Y_2. \end{aligned}$$

Prueba. Claramente π es de subálgebras de Hopf por la definición de la comultiplicación de en $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$ y \mathbf{R}_s . En $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$ tenemos las siguientes fórmulas de comultiplicación

$$\begin{aligned} \Delta(X_1^n) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} n^\ell Y_1^\ell X_1^k T^{2(n-k)-\ell} \otimes Y_1^\ell X_1^{n-k-\ell}, \\ \Delta(X_2^n) &= \sum_{\ell=0}^1 \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} n^\ell Y_2^\ell X_2^k \otimes Y_2^\ell X_2^{n-k-\ell}, \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$. Entonces $X_1^p \in \mathcal{P}_{T^{2p},1}(\mathcal{O}(\mathfrak{G}))$, $X_2^p \in \mathcal{P}(\mathcal{O}(\mathfrak{G}))$ y ι es de subálgebras de Hopf. Se sigue que $\ker \pi = \mathcal{O}(\mathfrak{G})\iota(\mathcal{O}(\mathbf{G}_s))^+$, ι es inyectiva y π es suryectiva, usando las bases PBW. Como $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$ es un $\mathcal{O}(\mathbf{G}_s)$ -módulo libre, la Observación 1.2.8 aplica. \square

3.3.7 | Un cuadrado conmutativo

Resumimos la relación entre las súper algebras de Hopf estudiadas hasta ahora en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(\mathbf{G}_s) & \hookrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{B}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(\mathfrak{G}) & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{E}} & \twoheadrightarrow & U(\mathfrak{osp}(1|2)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}_s & \hookrightarrow & \mathcal{E} & \twoheadrightarrow & \mathfrak{u}(\mathfrak{osp}(1|2)) \end{array} \quad (3.0.4)$$

Proposición 3.3.14. *Todas las columnas y filas en (3.0.4) son sucesiones exactas.*

Prueba. Los Teoremas 3.2.5 y 3.3.6, y las Proposiciones 3.3.4 y 3.3.13 cubren todo excepto la fila superior y la columna lateral derecha.

Para la columna lateral derecha necesitamos probar que la súper subálgebra de Hopf $Z' = \langle e^p, f^p, h^p - h \rangle$ de $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ es $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3) \simeq \mathbb{k}[X_1, X_2, X_3]$. Tomamos la base de $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ que consiste en los monómios

$$f^n (h^p - h)^k h^\ell e^m \psi_+^i \psi_-^j$$

con $(n, m, k, \ell, i, j) \in \mathbb{N}_0^3 \times \mathbb{I}_{0,p-1} \times \mathbb{I}_{0,1}^2$. Vemos entonces que la asignación

$$X_1 \mapsto f^p, \quad X_2 \mapsto h^p - h, \quad X_3 \mapsto e^p,$$

da un isomorfismo de álgebras $Z' \simeq \mathbb{k}[X_1, X_2, X_3] \simeq \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$. Comparando comultiplicaciones, el isomorfismo anterior es de álgebras de Hopf. $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ es estable por la acción adjunta de $U(\mathfrak{osp}(1|2))$ y es un módulo libre sobre $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ usando la base anterior. Luego la Observación 1.2.8 se aplica y la columna es exacta.

A continuación describimos explícitamente la fila superior. $\phi: \mathcal{O}(\mathbf{G}_s) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{B})$ está dado por

$$X_1 \mapsto X_1, \quad X_2 \mapsto X_4, \quad T \mapsto T.$$

Recordemos que $\mathcal{O}(\mathbf{B}) \simeq \mathbb{k}[T^\pm, X_1, \dots, X_5]$ y $\mathcal{O}(\mathbf{G}_s) \simeq \mathbb{k}[X_1, X_2, T^{\pm 1}]$, ver Teorema 3.2.7 y Proposición 3.3.13. Tomemos $\psi: \mathcal{O}(\mathbf{B}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ dada por

$$T \mapsto 1, \quad X_1 \mapsto 0, \quad X_2 \mapsto -f^p, \quad X_3 \mapsto h^p - h, \quad X_4 \mapsto 0, \quad X_5 \mapsto e^p.$$

Ahora ϕ es inyectiva porque mapea una base en un conjunto linealmente independiente, mientras que ψ es suryectiva porque la base PBW de $\mathcal{O}(\mathbf{G}_a^3)$ está en la imagen. Claramente $\ker \psi \supseteq \mathcal{O}(\mathbf{B})\phi(\mathcal{O}(\mathbf{G}_s))^+$, la otra inclusión se sigue de usar la base de $\mathcal{O}(\mathbf{B})$

$$\tau_m X_1^n X_2^r X_3^k X_4^i X_5^j, \quad i, j, k, n, r \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z},$$

donde τ_m está dado por la fórmula $\tau_m = \begin{cases} (T-1)^m & \text{if } m \geq 0, \\ (T^{-1}-1)^{-m} & \text{if } m < 0 \end{cases}$. La acción adjunta de

$\mathcal{O}(\mathbf{B})$ es trivial, luego $\phi(\mathcal{O}(\mathbf{G}_s))$ es invariante. Considerando las base PBW de $\mathcal{O}(\mathbf{B})$ y $\mathcal{O}(\mathbf{G}_s)$, ϕ es fielmente plana. Luego la fila es exacta. \square

Bibliografía

- [A] Andruskiewitsch, N. *An Introduction to Nichols Algebras*. In Quantization, Geometry and Noncommutative Structures in Mathematics and Physics. A. Cardona et al., eds., pp. 135–195, Springer (2017).
- [AAH1] N. Andruskiewitsch, I. Angiono y I. Heckenberger. *On finite GK-dimensional Nichols algebras over abelian groups*. Mem. Amer. Math. Soc., por aparecer próximamente.
- [AAH2] N. Andruskiewitsch, I. Angiono y I. Heckenberger. *Liftings of Jordan and super Jordan planes*. Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser., **61** (3) 661–672 (2018).
- [AAH3] N. Andruskiewitsch, I. Angiono and I. Heckenberger. *Examples of finite-dimensional Nichols algebras over abelian groups in positive characteristic*, Progress in Math., volumen en honor al cumpleaños 60 de N. Reshetikhin, por aparecer próximamente.
- [AAY] N. Andruskiewitsch, I. Angiono y H. Yamane. *On pointed Hopf superalgebras*. Contemp. Math. vol. 544, pp. 123–140, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [ABDF] N. Andruskiewitsch, D. Bagio, S. Della Flora y D. Flores. *Examples of finite-dimensional pointed Hopf algebras in characteristic 2*. [arXiv:2005.08043](https://arxiv.org/abs/2005.08043).
- [ABFF] N. Andruskiewitsch, D. Bagio, S. Della Flora y D. Flores. *On the bosonization of the super Jordan plane*. Sao Paulo J. Math. Sci. **13** 1–26 (2019).
- [AD] N. Andruskiewitsch y J. Devoto. *Extensions of Hopf algebras*. Algebra i Analiz, **7** (1) 22–61 (1995); St. Petersburg Math. J. **7** (1) 17–52 (1995).
- [AG] N. Andruskiewitsch, M. Graña. *Braided Hopf algebras over non-abelian finite groups*. Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba) **63** 45–78 (1999).
- [AP] N. Andruskiewitsch and H. Peña Pollastri, *On the restricted Jordan plane in odd characteristic*. J. Algebra Appl., por aparecer próximamente.
- [B] M. Beattie. *Duals of pointed Hopf algebras*. J. Algebra **262** 54–76 (2003).
- [BMPZ] Y. Bahturin, et al. *Infinite Dimensional Lie Superalgebras*, de Gruyter (1992).
- [CLW] C. Cibils, A. Lauve y S. Witherspoon. *Hopf quivers and Nichols algebras in positive characteristic*. Proc. Amer. Math. Soc. **137** (12) 4029–4041 (2009).
- [D] V. G. Drinfeld. *Quantum groups*. Proc. ICM, Berkeley. pp. 798–820 (1986).
- [DT] Y. Doi y M. Takeuchi. *Multiplication alteration by two-cocycles-The quantum version*. Comm. Algebra **22** (14) 5715–5732 (1994).

- [EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik. *Tensor categories*. Math. Surv. Monog series. Volumen 205, 2015.
- [G] M. Graña. *A freeness theorem for Nichols algebras*. J. Algebra **231** 235-257 (2000).
- [GZB] M.D. Gould, R.B. Zhang y A.J. Bracken. *Quantum Double Construction for Graded Hopf-Algebras*. Bull. Aust. Math. Soc. **47** 353–375 (1993).
- [H] I. Hofstetter. *Extensions of Hopf algebras and their cohomological description*. J. Algebra **164** 264–298 (1994).
- [I] N. Iyudu. *Representation spaces of the Jordan plane*. Comm. Algebra **42** (8), 3507–3540 (2014).
- [KS] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin. *Solutions of the Yang-Baxter equation*. J. Sov. Math. **19**, 1596-1620 (1982).
- [L1] G. Lusztig. *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*. J. Amer. Math. Soc. **3**. pp. 257-296 (1990).
- [L2] G. Lusztig. *Quantum groups at roots of 1*. Geom. Dedicata **35**. pp. 89-114 (1990).
- [M] A. Masuoka. *Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups*. Algebra Symposium Report 2013, Math. Soc. Japan. [arXiv:1311.1261](https://arxiv.org/abs/1311.1261).
- [Ma] Matsumoto, H. *Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés*. C. R. Acad. Sci. Paris, Volume 258, 1964. Páginas 3419-3422.
- [Mo] Montgomery, S. *Hopf algebras and their actions on rings*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc, Volumen 82, 1993.
- [MR] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*. Graduate studies in Mathematics, Volume 30.
- [N] Emmy Noether, *Invariante Variations probleme Nachrichten der Königlich-niglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Math. Phys. Kl, 235 (1918)
- [R] Radford, D. E., *Hopf algebras*, Series on Knots and Everything 49. Hackensack, NJ: World Scientific. xxii, 559 p. (2012).
- [Sch] H.-J. Schneider. *Some remarks on exact sequences of quantum groups*. Comm. Algebra **21** (9) 3337–3358 (1993).
- [T] M. Takeuchi. *Survey of braided Hopf algebras*. Contemp. Math. **267**, 301–324 (2000).
- [V] C. Vay. *On Hopf algebras with triangular decomposition*, Contemp. Math. **728** (2019), 181-199.

- [WZ] W. Wang, L. Zhao. *Representations of Lie Superalgebras in Prime Characteristic I*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) **99** 145–167 (2009).
- [ZC] Y. Zhang y H.-X. Chen. *Representations of Finite Dimensional Pointed Hopf Algebras Over \mathbb{Z}_n* , Comm. Algebra **40** (10) 3801–3821 (2012).