



FACULTAD  
DE CIENCIAS  
ECONÓMICAS



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

# REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

## Efectos de diferentes métodos de normalización en el cálculo del Índice de desarrollo humano

Florencia Margara, Sofía V. Harrington, Maximiliano G. Sierra,  
Mariana Funes

Ponencia presentada en XXIX Encuentro Nacional de Docentes en Investigación Operativa y  
XXVII Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa realizado en 2016 en la  
Pontificia Universidad Católica Argentina. Buenos Aires, Argentina



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual  
4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



# EFFECTOS DE DIFERENTES MÉTODOS DE NORMALIZACIÓN EN EL CÁLCULO DEL ÍNDICE DE DESARROLLO HUMANO

FLORENCIA MARGARA – SOFÍA V. HARRINGTON – MAXIMILIANO G. SIERRA – MARIANA FUNES  
Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional de Córdoba  
florenciamargara@gmail.com - sofiharrington@gmail.com - maxisierra@gmail.com - mcfunesl@eco.uncor.edu

**Palabras Clave:** IDH – Procedimientos de normalización – Escalas

## 1. INTRODUCCIÓN

Un Indicador Compuesto (IC) busca resumir un concepto multidimensional en un índice simple sobre la base de un modelo conceptual subyacente, aportando a los evaluadores un panorama claro y representativo de la situación de una unidad en comparación con el resto de las unidades del sistema en estudio, facilitando su seguimiento a lo largo del tiempo.

Dado un conjunto de unidades pertenecientes a un Sistema,  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ), cuyo desempeño depende de un conjunto de subindicadores  $I_j$  ( $j=1, 2,\dots, n$ ), de manera que  $x_{ij}$  representa la evaluación de la unidad  $a_i$  en términos del subindicador  $I_j$ , un Indicador Compuesto busca medir el desempeño de cada unidad como una función de los correspondientes subindicadores. Es decir,  $IC_i = f_j(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ .

En los casos en los que los subindicadores estén expresados en diferentes unidades de medida, a los efectos de permitir la comparación y agregación al construir el IC, será conveniente y en algunos casos, necesario, normalizarlos. Un procedimiento de normalización transforma el vector  $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  de las  $m$  unidades para un subindicador  $j$ , en un vector normalizado  $(r_{1j}, r_{2j}, \dots, r_{mj})$ , cuyos valores se encuentran entre 0 y 1.

En virtud de que la elección del procedimiento de normalización no es un tema menor en la construcción de un Indicador Compuesto (Çelen, 2014), en el presente trabajo analizamos los efectos de cuatro métodos de normalización (fracción del rango, fracción de la suma, fracción del máximo y del vector) en el cálculo del Índice de Desarrollo Humano (IDH) publicado por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD).

## 2. PROCEDIMIENTOS DE NORMALIZACIÓN

La Tabla 1 contiene las fórmulas de cálculo de los valores normalizados para subindicadores de máximo (cuanto más valor del subindicador, mejor) aplicando los cuatro procedimientos de normalización más populares: fracción del rango (FR), fracción del máximo (FM), fracción de la suma (FS) y del vector (V), y el dominio de los valores normalizados  $r_{ij}$  considerando que las evaluaciones de las unidades son estrictamente positivas ( $a_{ij} > 0$ ).

**Tabla 1. Fórmulas de cálculo de los procedimientos de normalización empleados y dominio de los valores normalizados**

	FR	FM	FS	V
Fórmula de cálculo de $r_{ij}$	$r_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{ij}^-}{x_{ij}^+ - x_{ij}^-}$	$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{ij}^+}$	$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$	$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^m x_{ij}^2\right)^{1/2}}$
Dominio	$0 \leq r_{ij} \leq 1$	$0 < r_{ij} \leq 1$	$0 < r_{ij} < 1$	$0 < r_{ij} < 1$

Donde  $x_{ij}^+$  es el máximo  $x_{ij}$  para cada  $j$  y  $x_{ij}^-$  es el mínimo  $x_{ij}$  para cada  $j$



Al momento de seleccionar el procedimiento de normalización es importante tener en cuenta que el dominio de  $r_{ij}$  al aplicar FM, FS y V depende de la razón  $x_{ij}^+ / x_{ij}^-$  para  $x_{ij}^- > 0$ . Cuando esta razón disminuye ( $x_{ij}^+ / x_{ij}^- \rightarrow 1$ ), el dominio de  $r_{ij}$  también lo hace ( $r_{ij}^+ - r_{ij}^- \rightarrow 0$ ) y los valores  $r_{ij}^{FM}$  se concentran en un intervalo pequeño cercano a 1, mientras que  $r_{ij}^{FS}$  y  $r_{ij}^V$  cubren un pequeño segmento que puede ubicarse en diferentes partes del intervalo (0,1). Además, el dominio de los valores  $r_{ij}^{FS}$  y  $r_{ij}^V$  depende de la distribución del subindicador  $I_j$ . Cuando aumenta la asimetría positiva de la distribución de  $I_j$ , también lo hace el dominio de  $r_{ij}$  y cuando aumenta la asimetría negativa, disminuye el dominio de  $r_{ij}$ . Por otra parte, el dominio de  $r_{ij}^{FS}$  y  $r_{ij}^V$  también depende del número de unidades analizadas; a medida que aumenta el número de unidades, el dominio de  $r_{ij}$  decrece. (Pavličić, 2001).

Otro aspecto a considerar es el tipo de transformación que el procedimiento de normalización opera sobre la escala del subindicador  $I_j$ . Cuando se aplica el procedimiento FR, la escala de  $I_j$  es transformada aplicando una operación de la forma  $r_{ij} = a + c x_{ij}$ , donde  $c \neq 0$ . Es decir, aplica una transformación afín positiva con  $a = -x_{ij}^- / x_{ij}^+ - x_{ij}^-$  y  $c = 1 / x_{ij}^+ - x_{ij}^-$ , y los  $r_{ij}$  tienen las propiedades de las escalas de intervalos. Cuando se aplican los procedimientos FM, FS y V, la transformación de la escala de  $I_j$  es lineal de la forma  $r_{ij} = b x_{ij}$ ;  $b \neq 0$ , con las propiedades de una escala de razón. Esta cuestión debe ser considerada al momento de manipular los datos, toda vez que el uso de un modelo matemático particular presupone que se ha alcanzado determinado nivel de medición (Funes, 2001).

### 3. ÍNDICE DE DESARROLLO HUMANO (IDH)

El IDH es una medida de los logros promedio de un país en tres dimensiones básicas: Salud, Educación y Nivel de vida, y se calcula como la media geométrica de los Índices parciales de cada una de estas dimensiones. Así,  $IDH = (I_{Salud} \cdot I_{Educación} \cdot I_{Ingreso})^{1/3}$ .

Para medir los logros en salud emplea la Esperanza de vida al nacer (EVN)<sup>1</sup>, para los logros en educación, los Años de escolarización previstos (AEP)<sup>2</sup> y la Media de años de escolaridad (MAE)<sup>3</sup> y para el estándar de vida, el Ingreso Nacional Bruto per cápita de paridad de poder adquisitivo (INBpc)<sup>4</sup>.

Previo a la agregación, las evaluaciones de las alternativas son normalizadas aplicando el procedimiento FR, estableciendo como valores mínimos y máximos para EVN, 20 y 85; para AEP, 0 y 18; para MAE, 0 y 15 y para INBpc, 100 y 75000, respectivamente. En el caso del INBpc, antes de la normalización se transforman los datos aplicando logaritmo natural. Para la

<sup>1</sup> Número de años que un recién nacido podría esperar vivir si los patrones prevalecientes de las tasas de mortalidad específicas por edad en el momento del nacimiento siguieran siendo las mismas durante toda la vida del niño.

<sup>2</sup> Número total de años de vida escolar que un niño en edad de ingreso escolar puede esperar recibir si los patrones prevalecientes de tasas de matriculación por edad persistieran durante toda la vida del niño.

<sup>3</sup> Número promedio de años de educación que reciben las personas de 25 años en adelante, convertido a partir de los niveles educativos utilizando duraciones oficiales de cada nivel.

<sup>4</sup> Ingreso agregado de una economía generado por su producción y su propiedad de factores de producción, menos las rentas pagadas por el uso de factores de producción que posee el resto del mundo, convertido en dólares internacionales utilizando las tasas PPP dividido entre la población a mitad de año.



dimensión Educación, los subindicadores se unifican aplicando la media aritmética.

#### 4. CÁLCULO DEL IDH APLICANDO DIFERENTES PROCEDIMIENTOS DE NORMALIZACIÓN

Para la construcción de los distintos ICs se utilizaron los datos del Informe de Desarrollo Humano 2015 (PNUD, 2015), que construye un indicador de 188 países que permite ordenarlos y clasificarlos en cuatro categorías de desarrollo: bajo, medio, alto y muy alto.

En virtud de la falta de espacio, la tabla con los resultados de los *rankings* de los ICs obtenidos se encuentra disponible en <https://drive.google.com/file/d/0B9pdmwyVpDF5RU5iVkZMZ1FueEk/view?usp=sharing>

Un resumen de los valores máximos y mínimos y de los rangos de variación de los Indicadores parciales de cada dimensión, para las evaluaciones de los países ( $x_{ij}$ ) y los valores normalizados aplicando los cuatro procedimientos de normalización ( $r_{ij}$ ), se presentan en la Tabla 2.

**Tabla 2. Medidas resúmenes de los índices parciales del IDH para los  $x_{ij}$  y  $r_{ij}$  según el procedimiento de normalización**

	Salud	Educación	Ingreso		Salud	Educación	Ingreso
$x_{ij}^-$	49	3,4	6,4				
$x_{ij}^+$	84	15,5	11,2				
$x_{ij}^+ / x_{ij}^-$	1,7	4,5	1,8				
<b>FR</b>				<b>FM</b>			
$r_{ij}^-$	0,446	0,199	0,266	$r_{ij}^-$	0,576	0,199	0,567
$r_{ij}^+$	0,985	0,932	1,000	$r_{ij}^+$	0,988	0,932	1,000
$r_{ij}^+ - r_{ij}^-$	0,538	0,733	0,734	$r_{ij}^+ - r_{ij}^-$	0,412	0,733	0,433
<b>FS</b>				<b>V</b>			
$r_{ij}^-$	0,0037	0,0016	0,0037	$r_{ij}^-$	0,050	0,021	0,050
$r_{ij}^+$	0,0063	0,0080	0,0065	$r_{ij}^+$	0,086	0,104	0,089
$r_{ij}^+ - r_{ij}^-$	0,0026	0,0064	0,0028	$r_{ij}^+ - r_{ij}^-$	0,036	0,083	0,038

Si bien los coeficientes de correlación de Kendall de los *rankings* obtenidos con los diferentes procedimientos de normalización son significativos<sup>5</sup>, se advierten importantes diferencias en las posiciones que ocupan los países al comparar los *rankings* obtenidos aplicando FR con los obtenidos de aplicar FM, FS y V. En la tabla a la que se accede a través del enlace mencionado, destacamos los países que reflejan diferencias de posiciones mayores o iguales a 10. En ocasiones estos cambios de posición modifican la categoría de desarrollo del país, como por ejemplo, en los casos de Kuwait, Belarús, Maldivas, Moldova, Camboya y Kenia.

Estas diferencias se deben a los efectos que produce aplicar sobre una escala de intervalos, un método matemático que es apropiado cuando los datos tienen las propiedades de una escala de razón. Para justificar esta afirmación consideremos las evaluaciones para un país  $a_i$  en  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ ,  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$  y  $x_{i3}$ , respectivamente:

- Si  $r_{ij}$  fue obtenido aplicando los procedimientos FM, FS y V,  $r_{ij} = b_j x_{ij}$ .  $IC_i = (r_{i1} \cdot r_{i2} \cdot r_{i3})^{1/3} = (b_1 x_{i1} \cdot b_2 x_{i2} \cdot b_3 x_{i3})^{1/3} = (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3)^{1/3} \cdot (x_{i1} \cdot x_{i2} \cdot x_{i3})^{1/3}$ . Es decir, el IC

<sup>5</sup> $\tau$  de FR y los demás métodos está en el orden de 0.94 y  $\tau$  de FM, FS y V, en las diferentes combinaciones está en el orden de 0.99.



obtenido respeta la relación de las evaluaciones de los países en términos de los subindicadores considerados.

- Si  $r_{ij}$  fue obtenido aplicando FR,  $r_{ij} = a_j + c_j x_{ij}$ .  $IC_i = (r_{i1} \cdot r_{i2} \cdot r_{i3})^{1/3} = [(a_1 + c_1 x_{i1}) \cdot (a_2 + c_2 x_{i2}) \cdot (a_3 + c_3 x_{i3})]^{1/3}$ . Esta expresión es muy distinta a la que se esperaría si el IC mantuviera la transformación afín positiva aplicada a las evaluaciones  $x_{ij}$ . Las constantes  $a_j$  afectan la relación de los países en término de sus evaluaciones. En este sentido, la media geométrica no resultaría un método de agregación apropiado si las evaluaciones son normalizadas con FR.

Los procedimientos FM, FS y V resultarían más apropiados si el IC se determina agregando los datos con media geométrica. Sin embargo, en virtud de que el IDH evalúa un gran número de países (188), FS y V generan ICs con valores muy pequeños (ver  $r_{ij}^{FS}$  y  $r_{ij}^V$  en la Tabla 2) que resultan difíciles de interpretar, por lo que convendría utilizar FM.

Es importante tener presente al momento de construir el IC, además, que cuanto menor es la razón  $x_{ij}^+ / x_{ij}^-$  para  $x_{ij}^- > 0$ , menor es el dominio de  $r_{ij}$ , y los  $r_{ij}$  asumen mayor valor. Esta situación puede observarse en la Tabla 2, al comprar los  $r_{ij}$  de los índices parciales de salud y educación para FM, por citar un ejemplo. La razón  $x_{ij}^+ / x_{ij}^-$  para salud es 1.7 y para educación, 4.5, y los  $r_{ij}$  mínimos y máximos para salud asumen los valores 0.576 y 0.988, respectivamente, cuando para educación estos valores son 0.199 y 0.932, respectivamente.

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo analizamos las implicancias de aplicar cuatro procedimientos de normalización (Fracción del Rango, Fracción del Máximo, Fracción de la Suma y Vector) y examinamos los efectos que los mismos producen en el cálculo del IDH.

Observamos que el procedimiento de normalización Fracción del Rango no resultaría el más apropiado si el método de agregación es la media geométrica y que Fracción del Máximo resultaría más conveniente en este caso.

Al momento de seleccionar un procedimiento de normalización deberán tenerse en cuenta las transformaciones que el mismo produce sobre los datos y escoger el que resulte más apropiado para el problema en estudio en función de las mismas, justificando la elección en cada caso.

#### 5. REFERENCIAS

ÇELEN, A. (2014): "Comparative Analysis of Normalization Procedures in TOPSIS Method: With an Application to Turkish Deposit Banking Market". *Informatica*, Vol. 25, No. 2, PP. 185–208.

FUNES, M. (2001): "Medida, Evaluación y Escalas". *Anales de la XII Escuela de Perfeccionamiento en Investigación Operativa*. Huerta Grande, Córdoba.

PAVLIČIĆ, D. (2001): "Normalisation affects the results of MADM methods". *Yugoslav Journal of Operations Research*, Vol. 11 (2), pp. 251-265.

PNUD (2015): "Informe de Desarrollo Humano 2015". Nueva York, EEUU. Versión obtenida el 10/12/15.

[http://hdr.undp.org/sites/default/files/2015\\_human\\_development\\_report\\_overview - es.pdf](http://hdr.undp.org/sites/default/files/2015_human_development_report_overview_es.pdf)