



Universidad Nacional de Córdoba

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y  
COMPUTACIÓN

# FLUJOS POR CURVATURA EN DATOS INICIALES PARA LAS ECUACIONES DE EINSTEIN. CONVEXIDAD

*Trabajo Especial de Licenciatura en Física*

Jerónimo Brizuela

Directora: Dra. María Eugenia Gabach Clement



Flujos por curvatura en datos iniciales para las Ecuaciones de Einstein. Convexidad por Jerónimo Brizuela se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).



## Resumen

En este trabajo estudiamos las propiedades de distintos flujos geométricos dependientes de la curvatura media en variedades Riemannianas. Nos concentramos en la preservación de convexidad de superficies que evolucionan bajo este tipo de flujos y mostramos que esta propiedad se cumple, en espacios euclídeos, para una gran clase de los mismos. Hacemos hincapié en el Flujo de Curvatura Media Inversa y mostramos las dificultades que surgen al intentar demostrar la preservación de la convexidad para el caso general en variedades Riemannianas.

## Abstract

In this work we study the properties of different geometric flows dependent on the mean curvature in Riemannian manifolds. We focus on convexity preservation of evolving surfaces by this type of flow and we show that this property holds, in Euclidean spaces, for a large class of these. We study in great detail the Inverse Mean Curvature Flow and show the difficulties that arise when trying to prove convexity preservation for the general case in Riemannian manifolds.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	2
1.2. Resultados previos . . . . .	3
1.3. Objetivos y Organización del trabajo . . . . .	4
<b>2. Superficies en variedades Riemannianas</b>	<b>7</b>
2.1. Definiciones generales . . . . .	7
2.2. Métricas esféricamente simétricas . . . . .	8
2.2.1. Esfera coordenada . . . . .	9
2.2.2. Caso euclídeo . . . . .	11
<b>3. Evolución de superficies por el flujo <math>H^k</math></b>	<b>13</b>
<b>4. Evolución de superficies por el IMCF</b>	<b>17</b>
<b>5. Ecuaciones parabólicas y Principios de Máximo</b>	<b>21</b>
5.1. Ecuaciones parabólicas . . . . .	21
5.2. Principio de máximo tensorial . . . . .	22
5.3. Principio de máximo escalar . . . . .	23
<b>6. Preservación de la convexidad por Flujos <math>H^k</math></b>	<b>25</b>
6.1. $k = 1$ . . . . .	25
6.1.1. Caso euclídeo . . . . .	25
6.1.2. Caso no euclídeo . . . . .	26
6.2. $k > 1$ . . . . .	27
6.2.1. Caso euclídeo . . . . .	27
<b>7. Preservación de la convexidad por el IMCF</b>	<b>29</b>
7.1. Caso euclídeo . . . . .	29
7.2. Caso no euclídeo . . . . .	31
7.2.1. Ejemplo: Dato inicial para Schwarzschild . . . . .	37

**8. Comentarios Finales**

**41**

# Capítulo 1

## Introducción

Los flujos de superficies en datos iniciales para las ecuaciones de Einstein permiten relacionar cantidades físicas y geométricas globales, definidas sobre superficies en el infinito espacial, con cantidades quasilocales, definidas sobre regiones acotadas del espacio. Entre los flujos más estudiados y usados en Relatividad General encontramos al Flujo de Curvatura Media (MCF) y al Flujo de Curvatura Media Inversa (IMCF). Se dice que una familia de superficies evoluciona bajo el MCF (IMCF) si la velocidad normal de un punto en la superficie está dada por la (recíproca de la) curvatura media de la superficie en ese punto.

Estos flujos que involucran la curvatura media se han usado en relatividad principalmente para evolucionar 2-superficies dentro de una variedad Riemanniana en un espacio-tiempo, pero también para evolucionar 3-superficies Riemannianas en un espaciotiempo (ver [10] donde se usa el MCF para probar cotas para la curvatura de las 3-superficies y para la construcción de slices maximales en espaciotiempos asintóticamente planos).

En Relatividad General el IMCF ha probado ser una herramienta importante en el estudio de desigualdades geométricas en espacios físicos arbitrarios. La primera aparición notable fue en [12], donde Geroch propone un argumento para demostrar el teorema de energía positiva usando el IMCF como herramienta de la prueba. De mayor impacto quizás fue la prueba de Huisken & Ilmanen [17] de la desigualdad de Penrose Riemanniana entre el área  $A$  y la masa  $m$  de un agujero negro:

$$m \geq \sqrt{A/16\pi} \tag{1.1}$$

en donde se usa el IMFC para su demostración. Dicho trabajo incluye, a su vez, una prueba del teorema de la energía positiva, usando el argumento propuesto por Geroch.

La desigualdad (1.1) ha sido generalizada (ver [19], [24] y las referencias mencionadas) para el caso en que el agujero negro posee carga eléctrica, pero el problema de agujeros negros con momento angular aún no está satisfactoriamente resuelto debido a que es complicado controlar la curvatura extrínseca de las superficies del flujo, ver [4], [21] por avances en este tema.

En los últimos años ha habido un creciente interés en el estudio de desigualdades geométricas en Relatividad General (ver [9], [20], [1], [19], [22]), para encontrar relaciones

entre los parámetros físicos de agujeros negros y cuerpos compactos materiales. En particular mencionamos el trabajo de Anglada et al. [5], donde se demuestra una relación entre el momento angular asociado a un cuerpo compacto axialmente simétrico  $\Omega$ , su forma, tamaño, una medida de la masa quasilocal que contiene, y la masa ADM del dato inicial. Más precisamente se prueba

$$m \geq m_T + \frac{J^2}{5R_A R_C^2} \quad (1.2)$$

donde  $J$  es el momento angular del cuerpo  $\Omega$ ,  $R_A = \sqrt{A/4\pi}$ ,  $R_C = C/2\pi$  con  $A$  el área de una superficie cerrada  $S_T$  que contiene a  $\Omega$  y  $C$  la longitud del círculo axialmente simétrico más largo en  $S_T$ , además

$$m_T := \frac{1}{16\pi} \int_0^{R_A} d\xi \int_{S_\xi} \bar{R} ds \quad (1.3)$$

donde  $\xi$  corresponde a la coordenada de radio areal,  $\bar{R}$  es la curvatura escalar de la variedad y  $ds$  es el elemento de área en  $S_T$ .

La cota (1.2) tiene validez para la superficie  $S_T$  que contiene a  $\Omega$  y tal que la evolución de  $S_T$  por el IMCF es convexa. Por lo tanto, la cota (1.2) relaciona la masa total del dato inicial con el momento angular del cuerpo y medidas de forma, tamaño y masa de la superficie  $S_T$ . Sabemos, por el trabajo de Huisken & Ilmanen [17], que para  $t$  suficientemente grande, las superficies del flujo son convexas y tienden a esferas en el infinito. Sin embargo, no se sabe exactamente dónde está la primera superficie convexa  $S_T$  ni qué tan lejos del cuerpo  $\Omega$  se encuentra. Si el IMCF preserva la convexidad podemos considerar lo siguiente: elegimos como superficie inicial del flujo  $S_0$  a la superficie que delimita al objeto,  $\partial\Omega$ . Si  $\partial\Omega$  es convexa, entonces  $T = 0$  y la inecuación 1.2 es óptima. Si  $\partial\Omega$  no es convexa, entonces  $S_T$  es la primera superficie convexa del flujo (partiendo de  $S_0 \equiv \partial\Omega$ ). Restaría entonces medir de alguna forma la distancia entre  $S_0$  y  $S_T$  para lograr estimaciones más precisas acerca del cuerpo  $\Omega$ . En [5] se estudian estas cuestiones de manera numérica a partir de algunos casos particulares: se calculan numéricamente los datos iniciales correspondientes a cuerpos materiales compactos con momento angular máximo  $J$  que satisfacen la condición de energía dominante. En estos datos se tiene un borde del cuerpo bien definido y controlado. Se elige una superficie inicial  $S_0$  lo más cercana posible al cuerpo y que contiene al mismo. Luego la ecuación del IMCF se usa para calcular la evolución de  $S_0$ , y se verifica numéricamente la preservación de convexidad. Estos resultados numéricos sugieren que bajo ciertas condiciones, el IMCF preserva la convexidad de superficies, dando robustez a la desigualdad (1.2).

## 1.1. Motivación

El punto clave del trabajo anterior es la existencia de la superficie convexa  $S_T$  tal que la evolución de la misma a través del IMCF preserva la convexidad. Esto permite conectar el cuerpo material compacto  $\Omega$  con las medidas de tamaño, forma y masa de  $S_T$ . Si la superficie  $S_T$  está muy lejos del cuerpo, entonces la cota (1.2) no da información



relevante acerca del cuerpo, incluso si el borde del mismo es convexo. Pero si  $S_T$  coincide con el borde del cuerpo, uno obtendría una cota óptima para la masa ADM en términos del contenido de materia del cuerpo, su momento angular y su forma y tamaño. Por estas consideraciones resulta interesante conocer las propiedades de preservación de la convexidad de superficies a través del IMCF y posiblemente de otros flujos de curvatura.

Este problema ha sido estudiado desde el punto de vista geométrico (no necesariamente ligado a Relatividad General) para diferentes flujos, debido a las relaciones entre cantidades geométricas que permiten obtener, tanto en variedades Riemannianas como Lorentzianas.

## 1.2. Resultados previos

En este trabajo nos concentraremos en  $d$ -superficies  $N$  en variedades Riemannianas  $M$   $(d+1)$ -dimensionales, aunque esencialmente miraremos el caso  $d = 2$ . Un flujo de velocidad  $w$  es una familia suave  $x : N^d \times (0, T) \rightarrow M^{d+1}$  de hipersuperficies  $N_t := x(N, t)$  que satisfacen

$$\partial_t x = wn, \quad x \in N_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.4)$$

donde  $n$  es la normal unitaria exterior a la superficie, y  $\partial_t x$  denota el campo de velocidad normal sobre la superficie  $N_t$ .

Para  $w = -H$  (siendo  $H$  la curvatura media) este flujo es el MCF. En [16], Huisken demuestra que el MCF preserva la convexidad en espacios euclídeos y las superficies se contraen a un punto en un tiempo finito. Además, las superficies tienden a ser cada vez más esféricas en el proceso. Con posterioridad, en [14], demuestra el mismo resultado en variedades Riemannianas. Este comportamiento ha demostrado ser verdadero para distintos valores de  $w$ , y ampliamente estudiado para el caso euclídeo.

Por ejemplo en [27], Tso demuestra la preservación de convexidad en espacios euclídeos, en el caso de velocidad  $w = -K$ , donde  $K$  es la curvatura Gaussiana. Este caso es generalizado por Chow en [7], donde estudia la  $n$ -ésima raíz de la curvatura Gaussiana.

En [28], Urbas estudia el caso euclídeo general, donde  $w$  es una función homogénea, de grado 1, positiva, simétrica y cóncava de los radios principales de curvatura, en espacios euclídeos. En su trabajo demuestra que se preserva la convexidad y que las superficies convergen a esferas en el infinito. En esto está incluido el IMCF ( $w = H^{-1}$ ).

En [26], Shulze estudia el caso donde la velocidad es una potencia positiva de la curvatura media ( $w = -H^k$ ), también demostrando preservación de la convexidad en espacios euclídeos.

En [23], Liu demuestra el caso particular del IMCF con un término de fuerza ( $w = H^{-1} + c$ ) en espacios euclídeos.

### 1.3. Objetivos y Organización del trabajo

Nos interesa estudiar la preservación de la convexidad de superficies bajo flujos cuya velocidad es una función simple de la curvatura media, en la dirección normal a la superficie. En particular, trabajaremos con dos tipos de flujos. Por un lado, flujos contractivos con velocidad en la forma  $H^k$  con  $k$  natural, y por otro lado, el flujo de curvatura media inversa, que es expansivo con velocidad en la forma  $H^{-1}$ . Como mencionamos antes, los casos euclídeos fueron resueltos satisfactoriamente. En variedades Riemannianas sólo fue estudiado el MCF bajo ciertos supuestos sobre la curvatura de la variedad  $M$ . Por esto, con el fin de ganar intuición para abordar el IMCF, analizaremos las similitudes y diferencias entre estos dos tipos de flujos, en cuanto a la preservación de la convexidad de superficies, primero para el caso euclídeo. Además estudiaremos las principales dificultades que aparecen al apartarnos del caso euclídeo y considerar variedades Riemannianas más generales.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 presentamos superficies en una variedad Riemanniana, introducimos las cantidades geométricas más relevantes para el trabajo y calculamos explícitamente sus curvaturas principales. También analizamos en detalle el caso de métricas esféricamente simétricas para ganar intuición acerca de las dificultades inherentes al problema, estudiamos la convexidad de superficies y el comportamiento general de las curvaturas principales en algunos casos particulares.

En el capítulo 3 presentamos los flujos  $H^k$  con  $k$  natural y las ecuaciones de evolución para las cantidades más importantes. Hacemos lo mismo para el IMCF en el capítulo 4.

En el capítulo 5 presentamos algunas características de las ecuaciones parabólicas, y de los principios de máximo escalar y tensorial que se han usado en la literatura para probar la preservación de la convexidad de superficies ante flujos por curvatura media.

En el capítulo 6 estudiamos la preservación de la convexidad para el caso de flujos  $H^k$ , analizamos el caso euclídeo ya resuelto en la literatura e investigamos lo que ocurre al considerar métricas Riemannianas. En este caso está incluido el conocido Flujo de Curvatura Media. En el capítulo 7 hacemos lo mismo para el caso del IMCF, con énfasis en la forma de las ecuaciones de evolución para variedades Riemannianas.

Finalmente, en el capítulo 8 discutimos los resultados, problemas y principales dificultades encontrados, como así también los posibles pasos a seguir para resolver las cuestiones planteadas.

## Notación

$M$	variedad Riemanniana de dimensión $d + 1$
$\mu, \nu, \rho, \sigma \dots$	índices griegos van desde 0 hasta $d$
$x^\mu$	coordenadas en $M$
$\bar{g}_{\mu\nu}$	métrica de $M$
$N$	variedad Riemanniana inmersa en $M$ de dimensión $d$
$i, j, k, l \dots$	índices latinos van desde 1 hasta $d$
$y^i$	coordenadas en $N$
$g_{ij} := \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} \bar{g}_{\mu\nu}$	métrica inducida en $N$
$\bar{\nabla}$	conexión de Levi-Civita en $M$
$\nabla$	conexión de Levi-Civita en $N$
$n$	vector normal unitario y exterior a $N$
$h_{ij}$	tensor de curvatura extrínseca de $N$
$\lambda_1, \dots, \lambda_d$	autovalores de $h_{ij}$ con respecto a $g$
$b_j^i$	inversa de $h_j^i$



# Capítulo 2

## Superficies en variedades Riemannianas

En esta sección definimos 2-superficies en una variedad Riemanniana, luego definimos su vector normal, su curvatura extrínseca y sus curvaturas principales. Particularizamos para el caso de métricas esféricamente simétricas y analizamos el significado de convexidad en estos casos, con ayuda de algunos ejemplos.

### 2.1. Definiciones generales

Consideramos una variedad Riemanniana 3-dimensional  $M$ , equipada con una métrica  $\bar{g}$ , y una conexión  $\bar{\nabla}$ . Denotamos con  $\{x^\mu\}$  a las coordenadas en  $M$  donde los índices griegos ( $\mu, \nu, \rho, \dots$ ) van de 0 a 2. Sea  $N$  una superficie 2-dimensional cerrada en  $M$ ,  $\{y^i\}$  las coordenadas en  $N$  y los índices latinos ( $i, j, k, \dots$ ) pueden valer 1 o 2. En general distinguimos a los elementos asociados con  $M$  con una barra:  $\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{\nabla}, \bar{R}^\mu_{\nu\rho\sigma}$  denotan la métrica, la conexión de Levi-Civita y el tensor de Riemann, respectivamente, en  $M$ . Mientras en  $N$  escribimos  $g_{ij}, \nabla, R^i_{jkl}$  para los elementos análogos.

Dada la variedad  $(M, \bar{g})$  con elemento de longitud

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

se puede definir una superficie<sup>1</sup>  $N$  en  $M$  de manera no paramétrica, a través de la ecuación

$$\Phi(x^\mu) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dada de las coordenadas en  $M$ .

La métrica inducida  $g_{ij}$  en  $N$  se calcula como

$$g_{ij} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

donde se entiende a las coordenadas  $x^\mu$  como funciones  $x^\mu = x^\mu(y^i)$ . El elemento de longitud en  $N$  es

$$ds^2 = g_{ij} dy_i dy_j. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Asumimos que esta superficie es suave, conexa, continua y cerrada

El vector normal unitario y exterior a la superficie  $N$ ,  $n^\mu$  está dado por:

$$n^\mu = \begin{cases} |\bar{\nabla}\Phi|^{-1} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\nabla}_\nu \Phi & \text{si } |\bar{\nabla}\Phi| \neq 0 \\ 0 & \text{si } |\bar{\nabla}\Phi| = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Definimos el tensor de curvatura extrínseca,  $h_{ij}$  (ver eq. 3.35 de [25]):

$$h_{ij} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\mu\nu}) \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_n(\bar{g}_{\mu\nu}) = n^\sigma \bar{g}_{\mu\nu,\sigma} + \bar{g}_{\sigma\nu} n_{,\mu}^\sigma + \bar{g}_{\mu\sigma} n_{,\nu}^\sigma \quad (2.7)$$

donde  $\mathcal{L}_n$  es la derivada de Lie con respecto a  $n^\mu$  y  $\partial x^\mu/\partial y^i$  es el elemento  $(\mu, i)$  de la matriz jacobiana de la transformación dada por la ecuación (2.2).

Se define como  $\lambda_i$  a las curvaturas principales, dadas por los autovalores de la matriz  $h_j^i$ . Finalmente, la noción fundamental en este trabajo es el concepto de superficie convexa.

**Definición 2.1.1** (Convexidad). Decimos que una superficie es convexa si los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  del tensor de curvatura extrínseca son ambos definidos positivos.

## 2.2. Métricas esféricamente simétricas

En esta sección particularizamos los cálculos de curvaturas principales para el caso de superficies en una variedad Riemanniana con métrica esféricamente simétrica, de la forma

$$d\bar{s}^2 = \frac{1}{F(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.8)$$

donde  $(r, \theta, \phi)$  son las coordenadas esféricas convencionales y  $F$  es una función continua definida positiva. La condición:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = r - u(\theta) = 0 \quad (2.9)$$

define una superficie espacial axialmente simétrica con 2-métrica  $g_{ij}$  ( $i, j = \theta, \phi$ ), con elemento de longitud:

$$ds^2 = (u^2 + F^{-1}u'^2)d\theta^2 + u^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.10)$$

donde en esta expresión  $F = F(u)$  y  $u' = \frac{du}{d\theta}$ .

Para calcular el tensor de curvatura extrínseca  $h_{ij}$  dado por (2.6), primero calculamos la matriz jacobiana:

$$\left[ \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \right] = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

El vector unitario normal exterior  $n^\mu$  está dado por (2.5), entonces tenemos:

$$\Phi_{,r} = 1 \quad \Phi_{,\theta} = -u' \quad \Phi_{,\phi} = 0 \quad (2.12)$$

$$\Phi^{,r} = F \quad \Phi^{,\theta} = -\frac{u'}{r^2} \quad \Phi^{,\phi} = 0 \quad (2.13)$$

$$|\Phi^{,\mu}| = \sqrt{\Phi^{,\mu} \Phi_{,\mu}} = \sqrt{\bar{g}^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu}} = \sqrt{\bar{g}^{rr} + u'^2 \bar{g}^{\theta\theta}} = \sqrt{F + \frac{u'^2}{r^2}} =: \alpha \quad (2.14)$$

$$\implies \quad n^r = \frac{F}{\alpha} \quad n^\theta = -\frac{u'}{\alpha r^2} \quad n^\phi = 0 \quad (2.15)$$

Ahora podemos calcular la curvatura extrínseca usando (2.6).

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{rr}) = \frac{1}{2\alpha} \left[ \frac{F'}{F} + \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{2u'^2}{r^3} - F' \right) \right] \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{r\theta}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\theta r}) = \frac{u'}{4\alpha} \left[ \frac{4}{r} + \frac{1}{\alpha^2} \left( F' - \frac{2u'^2}{r^3} - \frac{2u''}{r^2} \right) \right] \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\theta\theta}) = \frac{1}{\alpha} \left[ Fr - u'' + \frac{u'^2 u''}{\alpha^2 r^2} \right] \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\phi\phi}) = \frac{1}{\alpha} (Fr \sin^2 \theta - u' \sin \theta \cos \theta) \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\theta\phi}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\phi\theta}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{r\phi}) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n(\bar{g}_{\phi r}) = 0 \quad (2.20)$$

donde  $F' = \frac{dF}{dr}$ . Evaluamos en  $r = u$ :

$$h_{\theta\theta} = \frac{1}{\alpha} \left[ u'^2 \left( \frac{F'}{2F} + \frac{2}{u} \right) + Fu - u'' \right] \quad (2.21)$$

$$h_{\phi\phi} = \frac{1}{\alpha} (Fu \sin^2 \theta - u' \sin \theta \cos \theta) \quad (2.22)$$

$$h_{\theta\phi} = h_{\phi\theta} = 0 \quad (2.23)$$

Particularmente nos interesan las curvaturas principales, que en este caso están dadas por:

$$\lambda_1 = h_\theta^\theta = h_{\theta\theta} g^{\theta\theta} = \frac{F}{u^2 \alpha^3} \left[ \frac{u'^2}{2} \left( \frac{F'}{F} + \frac{4}{u} \right) + Fu - u'' \right] \quad (2.24)$$

$$\lambda_2 = h_\phi^\phi = h_{\phi\phi} g^{\phi\phi} = \frac{1}{\alpha u^2} \left( Fu - u' \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad (2.25)$$

Las condiciones de convexidad para la superficie  $\Phi = 0$  son:

$$\lambda_1 > 0 \implies u'^2 \left( \frac{F'}{2F} + \frac{2}{u} \right) + Fu > u'' \quad (2.26)$$

$$\lambda_2 > 0 \implies Fu > u' \cot \theta \quad (2.27)$$

### 2.2.1. Esfera coordenada

En esta sección analizamos la geometría de una esfera coordenada en una variedad esféricamente simétrica (no necesariamente euclídea).

Para una métrica esféricamente simétrica como en (2.8), asintóticamente plana, con  $F > 0$ , tomamos una superficie  $r = \text{constante}$ .

Consideremos la esfera de radio  $R$  dada por  $u(\theta) = R$  en (2.9). Primero observamos que  $u' = u'' = 0$ , entonces  $\alpha = \sqrt{F(R)}$ . Luego las curvaturas principales quedan:

$$\lambda_1 = \frac{F(R)^2 R}{R^2 \alpha^3} = \frac{\alpha^4}{\alpha^3 R} = \frac{\alpha}{R} = \frac{\sqrt{F(R)}}{R} \quad (2.28)$$

$$\lambda_2 = \frac{RF(R)}{\alpha R^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha R} = \frac{\sqrt{F(R)}}{R} \quad (2.29)$$

entonces  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Notamos inmediatamente que cuando  $F > 0$ , las curvaturas principales son positivas y por ende la superficie es convexa.

Supongamos que existe un valor  $b$  de  $r$  tal que  $F(b) = 0 \wedge (F(r) > 0, \forall r > b)$ , entonces la métrica (2.8) se considera para  $r \in (b, \infty)$ . Se cumple:

$$\lim_{r \rightarrow b} F(r) = 0 \quad (2.30)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = 1 \quad (2.31)$$

donde la última condición es necesaria para espacios asintóticamente planos. Entonces los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  dados por (2.28), (2.29) tienden a cero en  $r = b$  y también en el infinito. Esto implica que existe un valor de  $R \in (b, \infty)$  tal que las curvaturas principales alcanzan un valor máximo. Esto difiere del caso euclídeo ( $F = 1$ ) donde las curvaturas principales son monótonamente decrecientes con  $R$  (las curvaturas principales de una esfera coordinada en el espacio euclídeo tienen la forma  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/R$ ).

Para encontrar ese valor veamos cómo varían los autovalores según  $R$ :

$$\partial_R \lambda_1 = \partial_R \left( \frac{\sqrt{F(R)}}{R} \right) = \frac{1}{R^2 \sqrt{F(R)}} \left( \frac{R}{2} \frac{dF(R)}{dR} - F(R) \right) \quad (2.32)$$

En el caso de una superficie espacial  $t = \text{const}$  en el espaciotiempo de Schwarzschild tenemos  $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$  y la ecuación (2.32) nos queda:

$$\partial_R \lambda_1 = \frac{1}{R^2 \sqrt{F(R)}} \left( \frac{3M}{R} - 1 \right) \quad (2.33)$$

Vemos que para  $R_{\text{fot}} = 3M$  las curvaturas principales alcanzan su valor máximo. Este valor coincide con la esfera de fotones. Recordemos que la esfera de fotones es una subvariedad tal que cualquier geodésica nula que es inicialmente tangente a ella, permanece tangente. Por lo tanto, es un modelo de fotones moviéndose en espiral alrededor del agujero negro central o singularidad desnuda a 'distancia fija' [6].

Análogamente en el espacio-tiempo de Reissner Nordström tenemos  $F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ :

$$\partial_R \lambda_1 = \frac{1}{R^2 \sqrt{F(R)}} \left( -1 + \frac{3M}{R} - \frac{Q^2}{R^2} \right) \quad (2.34)$$

que se hace cero en la esfera de fotones de Reissner Nordström:

$$R_{\text{fot}} = \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}\sqrt{9M^2 - 4Q^2} \quad (2.35)$$

Este comportamiento en las esferas de fotones es importante porque en dicha superficie se pierde la monotonidad de las curvaturas principales.



### 2.2.2. Caso euclídeo

Veamos un ejemplo de superficie en el caso euclídeo, donde el análisis es más simple. El caso euclídeo se puede obtener a partir de lo calculado en la sección 2.2 fijando  $F = 1$  y  $\alpha = \sqrt{1 + \frac{u'^2}{r^2}}$ . Entonces la condición  $r = u(\theta)$  define una superficie de revolución donde  $u$  debe cumplir:

1.  $u > 0$
2.  $u$  continua y diferenciable en  $\theta \in [0, \pi]$
3.  $u'(0) = u'(\pi) = 0$

Las condiciones de convexidad (2.26) y (2.27) en el caso euclídeo son:

$$2\frac{u'^2}{u} + u > u'' \quad (2.36)$$

$$u > u' \cot \theta \quad (2.37)$$

En la Figura 2.1 se muestra el corte  $x = 0$  de una superficie no convexa en el intervalo  $0 \leq \theta \leq \theta_0 (\approx 0,37)$ , donde  $\lambda_2 < 0$ . En esos puntos se observa que los círculos de radio máximo tangentes a la superficie están "por fuera" de la misma.

La superficie representada en Figura 2.1 está dada por:

$$0 = 1 + u \left[ \sin^2 \theta \left( u^3 \sin^2 \theta - \frac{11}{\sqrt{3}} u^2 \sin \theta + \frac{19}{4} u \right) - \cos \theta \right] \quad \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (2.38)$$

$$u(\theta) = \sqrt{\frac{4}{1 + 3 \sin^2 \theta}} \quad \text{si } \frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.39)$$

$$u(\theta) = 1 \quad \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \quad (2.40)$$

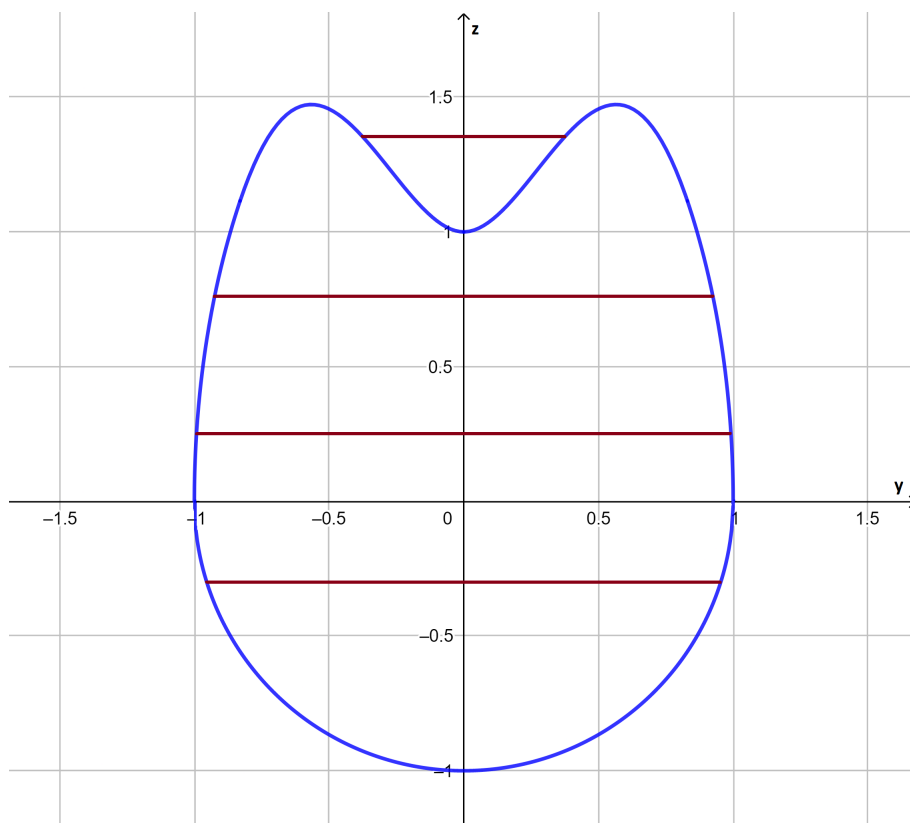


Figura 2.1: Corte  $x = 0$  de una superficie no convexa en  $\mathbb{R}^3$ . Las líneas rectas (rojo oscuro) representan los círculos de radio máximo tangentes a la curva, correspondientes al valor de la curvatura principal  $\lambda_2$ .

# Capítulo 3

## Evolución de superficies por el flujo $H^k$

En este capítulo introducimos un Flujo por potencias positivas de la Curvatura Media. También presentamos varios conceptos básicos sobre flujos de superficies que usamos en el resto del trabajo y las ecuaciones de evolución relevantes para flujos  $H^k$ .

**Definición 3.0.1.** Sea  $M$  una variedad Riemanniana suave de dimensión  $d+1$  con métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . Una solución del Flujo- $H^k$  es una familia suave  $x : N^d \times (0, T) \rightarrow M^{d+1}$  de hipersuperficies  $N_t := x(N, t)$  que satisfacen la ecuación de evolución parabólica

$$\partial_t x = -H^k n \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

donde  $H$ , que se asume positiva, es la curvatura media de  $N_t$  en el punto  $x$ ,  $n$  es la normal unitaria exterior a la superficie, y  $\partial_t x$  denota el campo de velocidad normal a lo largo de la superficie  $N_t$ . Además tomamos  $k$  natural. El signo menos en la ecuación (3.1) indica que las superficies evolucionan en la dirección de  $-n$ , es decir que las superficies se 'contraen'.

Para un valor fijo de  $t$  elegimos un sistema de coordenadas local  $e_0, e_1, \dots, e_d$  en  $M$  tales que restringidos a  $N_t$  tenemos  $e_0 = n, e_i = \partial x / \partial y^i$ . En particular definimos:

$$H = g^{ij} h_{ij} = h_i^i \quad (3.2)$$

$$|A|^2 = g^{ij} g^{kl} h_{ik} h_{jl} = h_{ik} h^{ik} \quad (3.3)$$

Definimos ahora el tensor de Riemann en  $M$  como (ver Wald [29]):

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = -2\partial_{[\mu} \bar{\Gamma}_{\nu]\rho}^\sigma + 2\bar{\Gamma}_{\rho[\mu}^\alpha \bar{\Gamma}_{\nu]\alpha}^\sigma \quad (3.4)$$

donde  $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$  es el símbolo de Christoffel correspondiente a  $\bar{\nabla}$ . También definimos el tensor de Ricci como  $\bar{R}_{\mu\rho} := \bar{R}_{\mu\nu\rho}{}^\nu$  y el escalar de curvatura como  $\bar{R} := \bar{R}_{\mu\rho} \bar{g}^{\mu\rho}$ . Con definiciones análogas denotamos  $R_{ijk}{}^l, R_{ik}$  y  $R$  como el tensor de Riemann, Ricci y la curvatura escalar respectivamente para la hipersuperficie  $N_t$ . La relación entre  $\bar{R}_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$  y  $R_{ijk}{}^l$  está dada por las ecuaciones de Gauss y Codazzi

$$R_{ijkl} = \hat{R}_{ijkl} + h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk} \quad (3.5)$$

$$\hat{R}_{0ijk} = \nabla_k h_{ij} - \nabla_j h_{ik} \quad (3.6)$$

Donde los índices latinos en  $\hat{R}_{ijkl}$  indican un pullback de  $\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  a la superficie  $N_t$ , mientras que el índice 0 se refiere a la componente normal del tensor. Esto se escribe así para simplificar la notación:

$$\hat{R}_{ijkl} \equiv e_i^\mu e_j^\nu e_k^\rho e_l^\sigma \bar{R}_{\sigma\mu\nu\rho} \quad (3.7)$$

$$\hat{R}_{0ijk} \equiv n^\sigma e_i^\mu e_j^\nu e_k^\rho \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.8)$$

$$\hat{R}_{0i0j} \equiv n^\rho n^\sigma e_i^\mu e_j^\nu \bar{R}_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (3.9)$$

$$\hat{R}_{00} \equiv n^\mu n^\nu \bar{R}_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

$$\hat{\nabla}_i \equiv e_i^\mu \bar{\nabla}_\mu \quad (3.11)$$

Como estos son tensores en  $N_t$ , los índices latinos se suben y bajan con la métrica inducida  $g_{ij}$ .

Las ecuaciones de evolución para la métrica, la curvatura extrínseca y la curvatura media son

**Lema 3.0.1.** (*[15]*) *Se cumplen las siguientes ecuaciones de evolución:*

$$(i) \quad \partial_t g_{ij} = -2H^k h_{ij} \quad (3.12)$$

$$(ii) \quad \partial_t g^{ij} = 2H^k h^{ij} \quad (3.13)$$

$$(iii) \quad \partial_t h_{ij} = \nabla_i \nabla_j (H^k) - H^k (h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j}) \quad (3.14)$$

$$(iv) \quad \partial_t H = \Delta (H^k) + H^k (|A|^2 + \hat{R}_{00}) \quad (3.15)$$

*Demostración.* Para simplificar denotamos con  $(\cdot, \cdot)$  al producto en  $M$

$$\begin{aligned} (i) \quad \partial_t g_{ij} &= \partial_t \left( \frac{\partial x}{\partial y^i}, \frac{\partial x}{\partial y^j} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y^i} (-H^k n), \frac{\partial x}{\partial y^j} \right) + \left( \frac{\partial x}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} (-H^k n) \right) \\ &= -H^k \left( \frac{\partial}{\partial y^i} n, \frac{\partial x}{\partial y^j} \right) - H^k \left( \frac{\partial x}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} n \right) \\ &= -2H^k h_{ij} \end{aligned}$$

donde hemos usado que  $h_{ij} = \left( \frac{\partial x}{\partial y^i}, \frac{\partial x}{\partial y^j} n \right) = \left( \frac{\partial}{\partial y^i} n, \frac{\partial x}{\partial y^j} \right)$ .

$$\begin{aligned} (ii) \quad \partial_t g^{ij} &= \partial_t (g^{ik} g^{lj} g_{kl}) \\ &= g^{ik} g^{lj} \partial_t g_{kl} + g_{kl} g^{lj} \partial_t g^{ik} + g_{kl} g^{ik} \partial_t g^{lj} \\ &= -2H^k h_{kl} g^{ik} g^{lj} + \delta_k^j \partial_t g^{ik} + \delta_i^l \partial_t g^{lj} \\ &= -2H^k h^{ij} + 2\partial_t g^{ij} \\ &= 2H^k h^{ij} \end{aligned}$$

El ítem (iii) puede demostrarse usando la definición de  $h_{ij}$  junto con las ecuaciones de Gauss-Codazzi (3.5) y (3.6). La prueba completa se puede encontrar por ejemplo en [2]. El ítem (iv) resulta de contraer (3.14) con  $g^{ij}$  y usar la ecuación de evolución para  $g^{ij}$ .  $\square$

Siguiendo a Huisken en [15] buscamos llevar las ecuaciones de evolución del  $h_{ij}$  a la forma parabólica más conveniente para analizar la preservación de la convexidad.

**Proposición 3.1.** *El tensor  $h_{ij}$  cumple la ecuación de evolución parabólica:*

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} = & kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H - H^k (k+1) h_{il} h_j^l \\ & + kH^{k-1} (|A|^2 + \hat{R}_{00}) h_{ij} + \beta_{ij} \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_{ij} = & kH^{k-1} \left\{ 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} - 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - g^{kl} \hat{\nabla}_l \hat{R}_{0jil} - g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} \\ & + H^k (k-1) \hat{R}_{0i0j} \end{aligned} \quad (3.17)$$

*Demostración.* Introducimos el operador:

$$L_w u = L_w^{ij} \nabla_i \nabla_j u := - \frac{\partial w}{\partial h_{ij}} \nabla_i \nabla_j u \quad (3.18)$$

donde  $\nabla_i$  es la derivada covariante en la superficie  $N_t$ . Entonces para un flujo con velocidad  $w$  se puede escribir  $\partial_t h_{ij}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} = & L_w h_{ij} - \frac{\partial^2 w}{\partial h_{kl} \partial h_{pq}} \nabla_i h_{kl} \nabla_j h_{pq} + \frac{\partial w}{\partial h_{kl}} \left\{ 2h_j^m h_{k[l} h_{m]i} + \right. \\ & 2h_i^m h_{k[j} h_{m]i} - 2\hat{R}_{kim}(h_j^m) + \hat{R}_{mijl} h_k^m + \hat{R}_{mljk} h_i^m + \hat{R}_{0i0j} h_{kl} \\ & \left. - \hat{R}_{0k0l} h_{ij} + \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} + w \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

**Lema 3.1.1.** *Para  $w = -H^k$  se cumple:*

$$\frac{\partial w}{\partial h_{kl}} = -kH^{k-1} g^{kl} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial h_{kl} \partial h_{pq}} = k(k-1)H^{k-2} g^{kl} g^{pq} \quad (3.21)$$

$$L_w = kH^{k-1} \Delta \quad (3.22)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial h_{kl}} &= - \frac{\partial H^k}{\partial h_{kl}} = -kH^{k-1} \frac{\partial H}{\partial h_{kl}} = -kH^{k-1} \frac{\partial (g^{ij} h_{ij})}{\partial h_{kl}} = -kH^{k-1} g^{ij} \delta_i^k \delta_j^l = -kH^{k-1} g^{kl} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial h_{kl} \partial h_{pq}} &= \frac{\partial^2 H^k}{\partial h_{kl} \partial h_{pq}} = - \frac{\partial (kH^{k-1} h^{kl})}{\partial h_{pq}} = -k(k-1)H^{k-2} g^{kl} \frac{\partial H}{\partial h_{pq}} = k(k-1)H^{k-2} g^{kl} g^{pq} \\ L_w h_{ij} &= - \frac{\partial H^k}{\partial h_{ij}} \nabla_i \nabla_j h_{ij} = kH^{k-1} g^{ij} \nabla_i \nabla_j h_{ij} = kH^{k-1} \Delta h_{ij} \end{aligned}$$

$\square$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación (3.19) tenemos:

$$\begin{aligned}
\partial_t h_{ij} &= kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} g^{kl} g^{pq} \nabla_i h_{kl} \nabla_j h_{pq} - kH^{k-1} g^{kl} \left\{ 2h_j^m h_k [l h_m]_i \right. \\
&\quad + 2h_l^m h_k [j h_m]_i - 2\hat{R}_{kim}(l h_j^m) + \hat{R}_{mijl} h_k^m + \hat{R}_{mljk} h_i^m + \hat{R}_{0i0j} h_{kl} - \hat{R}_{0k0l} h_{ij} \\
&\quad \left. + \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} - H^k \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \\
&= kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H - kH^{k-1} \left\{ 2g^{kl} h_j^m h_k [l h_m]_i \right. \\
&\quad + 2g^{kl} h_l^m h_k [j h_m]_i - 2g^{kl} \hat{R}_{kim}(l h_j^m) + g^{kl} \hat{R}_{mijl} h_k^m + g^{kl} \hat{R}_{mljk} h_i^m + g^{kl} \hat{R}_{0i0j} h_{kl} - \\
&\quad \left. g^{kl} \hat{R}_{0k0l} h_{ij} + g^{kl} \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} - H^k \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \\
&= kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H - kH^{k-1} \left\{ H h_j^m h_{mi} - h_j^m h_m^l h_{li} + h_l^m h_j^l h_{mi} \right. \\
&\quad - h_l^m h_m^l h_{ij} - g^{kl} \hat{R}_{kiml} h_j^m - g^{kl} \hat{R}_{kimj} h_l^m + g^{kl} \hat{R}_{mijl} h_k^m + g^{kl} \hat{R}_{jkml} h_i^m + H \hat{R}_{0i0j} \\
&\quad \left. - \hat{R}_{00} h_{ij} + g^{kl} \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} - H^k \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \\
&= kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H - kH^{k-1} \left\{ -|A|^2 h_{ij} + g^{kl} \hat{R}_{ikml} h_j^m \right. \\
&\quad - \hat{R}_{limj} h^{ml} + \hat{R}_{mijl} h^{ml} + g^{kl} \hat{R}_{jkml} h_i^m + H \hat{R}_{0i0j} - \hat{R}_{00} h_{ij} + g^{kl} \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} \\
&\quad \left. + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} - H^k \left[ (k+1) h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right] \\
&= kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H - H^k (k+1) h_{il} h_j^l + kH^{k-1} (|A|^2 + \hat{R}_{00}) h_{ij} \\
&\quad - kH^{k-1} \left\{ 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} + \hat{\nabla}^l \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} \\
&\quad + H^k (k-1) \hat{R}_{0i0j}
\end{aligned}$$

Entonces obtenemos (3.16). El término  $\beta_{ij}$  en (3.17) depende de contracciones del tensor de curvatura extrínseca con el tensor de Riemann, por lo que es igual a cero en el caso euclídeo. Esto coincide con el trabajo de Shulze [26], que estudia este flujo en espacios euclídeos.  $\square$

# Capítulo 4

## Evolución de superficies por el IMCF

Definimos ahora el Flujo de Curvatura Media Inversa y sus ecuaciones de evolución

**Definición 4.0.1** ([17]). Sea  $M$  una variedad Riemanniana suave de dimensión  $d+1$  con métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . Una solución del IMCF (Inverse Mean Curvature Flow) es una familia suave  $x : N^d \times (0, T) \rightarrow M^{d+1}$  de hipersuperficies  $N_t := x(N, t)$  que satisfacen la ecuación de evolución parabólica:

$$\partial_t x = \frac{1}{H} n \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.1)$$

donde  $H$ , que se asume positiva, es la curvatura media de  $N_t$  en el punto  $x$ ,  $n$  es la normal unitaria exterior a la superficie, y  $\partial_t x$  denota el campo de velocidad normal sobre la superficie  $N_t$ . Notar el signo positivo en el lado derecho de la ecuación (4.1), a diferencia del signo negativo usado en la definición del flujo  $H^k$  (3.1). Esto tiene que ver con el carácter expansivo o contractivo del flujo.

Las ecuaciones de evolución por el IMCF para las cantidades relevantes están dadas en el siguiente lema.

**Lema 4.0.1.** *Se cumplen las siguientes ecuaciones de evolución:*

$$\partial_t g_{ij} = \frac{2}{H} h_{ij} \quad (4.2)$$

$$\partial_t g^{ij} = -\frac{2}{H} h^{ij} \quad (4.3)$$

$$\partial_t h_{ij} = -\nabla_i \nabla_j \left( \frac{1}{H} \right) + \frac{1}{H} (h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j}) \quad (4.4)$$

$$\partial_t H = -\Delta \left( \frac{1}{H} \right) - \frac{1}{H} (|A|^2 + \hat{R}_{00}) \quad (4.5)$$

*Demostración:* La prueba es análoga a la prueba del lema 3.0.1. Ver también [15].  $\square$

**Lema 4.0.2.** *El tensor  $h_{ij}$  cumple la ecuación de evolución parabólica:*

$$\partial_t h_{ij} = \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H + \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} h_{ij} + \beta_{ij} \quad (4.6)$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H^2} \left[ 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} - 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - g^{kl} \hat{\nabla}_l \hat{R}_{0jil} - g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} - 2H \hat{R}_{0i0j} \right] \quad (4.7)$$

*Demostración.* Ahora con  $w = H^{-1}$  en (3.18), análogamente a la sección anterior, tenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial h_{kl}} = -\frac{g^{kl}}{H^2} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial h_{kl} \partial h_{pq}} = \frac{2g^{kl} g^{pq}}{H^3} \quad (4.9)$$

$$L_w = \frac{1}{H^2} \Delta \quad (4.10)$$

Y reemplazando en (3.19) tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} &= \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2g^{kl} g^{pq}}{H^3} \nabla_i h_{kl} \nabla_j h_{pq} - \frac{g^{kl}}{H^2} \left\{ 2h_j^m h_{k[l} h_{m]i} + 2h_l^m h_{k[j} h_{m]i} \right. \\ &\quad \left. - 2\hat{R}_{kim}(l h_j^m) + \hat{R}_{mijl} h_k^m + \hat{R}_{mljk} h_i^m + \hat{R}_{0i0j} h_{kl} - \hat{R}_{0k0l} h_{ij} + \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{H} \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \\ &= \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H - \frac{1}{H^2} \left\{ 2g^{kl} h_j^m h_{k[l} h_{m]i} + 2g^{kl} h_l^m h_{k[j} h_{m]i} \right. \\ &\quad \left. - 2g^{kl} \hat{R}_{kim}(l h_j^m) + g^{kl} \hat{R}_{mijl} h_k^m + g^{kl} \hat{R}_{mljk} h_i^m + g^{kl} \hat{R}_{0i0j} h_{kl} - g^{kl} \hat{R}_{0k0l} h_{ij} \right. \\ &\quad \left. + g^{kl} \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} + \frac{1}{H} \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \\ &= \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H - \frac{1}{H^2} \left\{ H h_j^m h_{mi} - h_j^m h_m^l h_{li} + h_l^m h_j^l h_{mi} \right. \\ &\quad \left. - h_l^m h_m^l h_{ij} - g^{kl} \hat{R}_{kiml} h_j^m - g^{kl} \hat{R}_{kimj} h_l^m + g^{kl} \hat{R}_{mijl} h_k^m + g^{kl} \hat{R}_{jkm l} h_i^m + H \hat{R}_{0i0j} \right. \\ &\quad \left. - \hat{R}_{00} h_{ij} + g^{kl} \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} + \frac{1}{H} \left( h_{ik} h_j^k - \hat{R}_{0i0j} \right) \\ &= \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H - \frac{1}{H^2} \left\{ -h_l^m h_j^l h_{mi} + h_l^m h_j^l h_{mi} \right. \\ &\quad \left. - |A|^2 h_{ij} + g^{kl} \hat{R}_{ikml} h_j^m - \hat{R}_{limj} h^{ml} + \hat{R}_{mijl} h^{ml} + g^{kl} \hat{R}_{jkm l} h_i^m + H \hat{R}_{0i0j} \right. \\ &\quad \left. - \hat{R}_{00} h_{ij} + g^{kl} \hat{\nabla}_k \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} + \frac{1}{H} \left( -\hat{R}_{0i0j} \right) \\ &= \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H + \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} h_{ij} - \frac{2}{H} \hat{R}_{0i0j} \\ &\quad - \frac{1}{H^2} \left\{ 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} + \hat{\nabla}^l \hat{R}_{0jil} + g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} \end{aligned}$$



□

El término  $\beta_{ij}$  en (4.7) depende de contracciones del tensor de curvatura extrínseca con el tensor de Riemann, por lo que es igual a cero en el caso euclídeo. Esto coincide con los trabajos de Urbas [28] y Liu [23], en donde estudian el IMCF en espacios euclídeos.



# Capítulo 5

## Ecuaciones parabólicas y Principios de Máximo

En esta sección presentamos las herramientas básicas más usadas en la prueba de preservación de convexidad ante flujos por curvatura media.

En el estudio de la preservación de la convexidad a lo largo de flujos por curvatura media, como los estudiados en este trabajo, observamos que en general ([16] [28] [23] [18]) se lleva el problema a una ecuación parabólica escalar o tensorial. Luego, se usa algún principio de máximo como punto de partida para completar la prueba de preservación de convexidad.

A continuación presentamos los conceptos básicos de ecuaciones parabólicas y los principios de máximo para este tipo de ecuaciones que utilizamos en este trabajo.

### 5.1. Ecuaciones parabólicas

Denotamos con  $L$  a un operador parabólico en la variedad  $M$ , escrito en coordenadas locales como [11], [30]

$$Lu = \sum_{i,j} a^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.1)$$

donde los coeficientes  $a^{ij}$ ,  $b^i(x,t)$  y  $c(x,t)$  son funciones continuamente diferenciables ( $C^2$ ) de  $x,t$  y  $a^{ij}(x,t)$  se supone definida positiva.  $L$  está definido en un conjunto  $G := V \times (0,T]$ , donde  $V \subseteq N$ . Para un entorno de cada punto de  $V \times (0,T]$ , existen dos constantes positivas  $\Omega$  y  $\Lambda$  tales que se cumplen las desigualdades:

$$\left| \sum_i b^i(x,t) \xi_i \right| \leq \Omega \left( \sum_i \xi_i^2 \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

$$\Lambda^{-1} \sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \Lambda \sum_i \xi_i^2 \quad (5.3)$$

para toda elección de constantes reales  $\xi_1, \dots, \xi_n$ .

A continuación mencionamos algunos resultados básicos de las ecuaciones parabólicas [30].

Sea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Eu := \sum_{i,j} a^{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x^i} + c(x,t)u \quad (5.4)$$

y

$$\Gamma := \{0\} \times V \cup (0, T] \times \partial V \quad (5.5)$$

1. Si  $u$  tiene un mínimo local con respecto a  $x$  en un punto  $(t, x)$ , entonces  $a^{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \geq 0$  en este punto.
2.  $\frac{\partial \omega}{\partial t} > E\omega$  en  $G$ ,  $\omega > 0$  en  $\Gamma$  implica  $\omega > 0$  en  $\bar{G}$ .
3.  $\frac{\partial \omega}{\partial t} \geq E\omega$  en  $G$ ,  $\omega \geq 0$  en  $\Gamma$  y  $\sup_G c(t, x) < \infty$  implica  $\omega \geq 0$  en  $\bar{G}$ .
4.  $\frac{\partial v}{\partial t} \leq Ev$  y  $\frac{\partial \omega}{\partial t} \geq E\omega$  en  $G$ ,  $v \leq \omega$  en  $\Gamma$  implica  $v \leq \omega$  en  $\bar{G}$  si  $\sup_G c(t, x) < \infty$ .

Como estamos interesados en espacios asintóticamente planos, buscamos acotar la curvatura extrínseca (más precisamente, las curvaturas principales) al tiempo  $t$  en términos de sus valores a algún tiempo inicial. Por lo tanto, en lo que sigue enunciamos dos principios de máximo más apropiados a nuestros problemas.

## 5.2. Principio de máximo tensorial

Enunciamos el principio de máximos para tensores como se muestra en [8].

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $(M, g(t))$ ,  $t \in [0, T)$  una variedad con una familia de métricas Riemannianas dependientes de forma suave del parámetro  $t$  y sea  $\alpha(t)$  un 2-tensor simétrico que satisface:*

$$\partial_t \alpha_{ij} \geq \Delta \alpha_{ij} + X^k \nabla_k \alpha_{ij} + N_{ij} \quad (5.6)$$

donde  $X(t)$  es un vector dependiente de  $t$  y  $N = N(\alpha, t)$  es un 2-tensor simétrico, que es una función de  $\alpha$  localmente Lipschitz y es continuo en  $t$ . Suponemos que  $N$  satisface:  $N_{ij} V^i V^j \geq 0$  para todo  $V^i$  autovector nulo de  $\alpha$ . Si  $\alpha(0) \geq 0$ , entonces  $\alpha(t) \geq 0^1$  para todo  $t \in [0, T)$ .

En [16] Huisken usa este teorema como parte de la prueba de preservación de convexidad en el caso del MCF (Ver capítulo 6). Sin embargo, veremos en el capítulo 7 que el mismo razonamiento no se puede aplicar al caso de IMCF.

---

<sup>1</sup>Decimos que  $\alpha \geq 0$  si  $\alpha_{ij} v^i v^j \geq 0 \forall v^i \in M$

### 5.3. Principio de máximo escalar

El uso del principio de máximo escalar lo observamos en los trabajos de Liu [23] y Urbas [28], ambos estudiando casos generales que incluyen al IMCF (en espacios euclídeos). Lo enunciamos como aparece en [3] (teorema 6.4) (ver también [13]).

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $u$  una función  $C^2$  que satisface en  $M \times [0, T]$ :*

$$Lu := \partial_t u - \Delta u - X^i \nabla_i u - F(u, t) \leq 0 \quad (5.7)$$

donde  $X(t)$  es un vector dependiente del tiempo,  $F : \mathbb{R} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , y  $u(x, 0) \leq c$  para todo  $x \in M$ . Sea  $\psi(t)$  la solución a la ODE:

$$\frac{d\psi}{dt} = F(\psi, t), \quad \psi(0) = c \quad (5.8)$$

Entonces

$$u(x, t) \leq \psi(t) \quad (5.9)$$

para todo  $x \in M$  y  $t \in [0, T)$  en el intervalo de existencia de  $\psi$ .

**Corolario 5.4.** Si  $Lu \geq 0$ , y  $u(x, 0) \geq c$ , entonces  $u(x, t) \geq \psi(t)$



# Capítulo 6

## Preservación de la convexidad por Flujos $H^k$

En este capítulo revisamos los argumentos utilizados en la prueba de la preservación de la convexidad por el flujo de curvatura media, MCF probado por Huisken [16]. Además analizamos el caso de flujos  $H^k$ . Miraremos por separado el caso euclídeo que es considerablemente más simple.

En el capítulo 3 encontramos que el tensor de curvatura extrínseca satisface la ecuación parabólica tensorial

$$\begin{aligned} \partial_t h_{ij} = & kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H - H^k (k+1) h_{il} h_j^l \\ & + kH^{k-1} (|A|^2 + \hat{R}_{00}) h_{ij} + \beta_{ij} \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_{ij} = & kH^{k-1} \left\{ 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} - 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - g^{kl} \hat{\nabla}_l \hat{R}_{0jil} - g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} \\ & + H^k (k-1) \hat{R}_{0i0j} \end{aligned} \quad (6.2)$$

### 6.1. $k = 1$

Si  $k = 1$  obtenemos el MCF (Flujo de Curvatura Media) y lo anterior se reduce a

$$\partial_t h_{ij} = \Delta h_{ij} + (|A|^2 + \hat{R}_{00}) h_{ij} - 2H h_{il} h_j^l + \beta_{ij} \quad (6.3)$$

donde

$$\beta_{ij} = \left\{ 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} - 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - g^{kl} \hat{\nabla}_l \hat{R}_{0jil} - g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} \right\} \quad (6.4)$$

#### 6.1.1. Caso euclídeo

En el caso euclídeo tenemos  $\beta_{ij} = 0$  y la siguiente ecuación simple para  $h_{ij}$

$$\partial_t h_{ij} = \Delta h_{ij} + |A|^2 h_{ij} \quad (6.5)$$

Aquí repetimos el argumento de Huisken ([16]) y aplicamos el principio de máximo tensorial, Teorema 5.2.1 con  $\alpha_{ij} = h_{ij}$ ,  $X^k = 0$  y  $N_{ij} = |A|^2 h_{ij}$ . Vemos que claramente,  $N_{ij} V^i V^j \geq 0$  para todo  $V^i$  autovector nulo de  $\alpha$  (de hecho, la contracción es cero). Por lo tanto, concluimos que si  $h_{ij}(0) \geq 0$ , entonces  $h_{ij}(t) \geq 0$  para todo  $t \in [0, T)$ . Esto indica que el tensor de curvatura extrínseca es positivo definido a lo largo de la evolución si es definido positivo en la superficie inicial. Esto prueba la preservación de la convexidad a lo largo del MCF en el caso euclídeo.

### 6.1.2. Caso no euclídeo

En el caso no euclídeo, no es posible aplicar directamente el principio de máximo tensorial debido a la presencia de  $\beta_{ij}$ , que es diferente de cero. Este tensor involucra el tensor de curvatura y sus derivadas primeras, por lo que es necesario imponer condiciones adicionales.

Huisken demuestra en [14] que se preserva la convexidad dadas las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} -K_1 &\leq \sigma_y(P) \leq K_2, & K_1, K_2 &\geq 0 \\ |\bar{\nabla} \bar{R}m|^2 &\leq L^2, & L &\geq 0 \\ i_y(M) &\geq i(M) \geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $\sigma_y(P)$  es la curvatura seccional de un 2-plano en  $y \in M$ ,  $\bar{R}m$  es el tensor de Riemann en  $M$ , y  $i_y(M)$  es el radio de inyectividad de  $M$  en  $y$ .

Además se requiere que en  $N_0$  se satisfaga

$$H h_{ij} > 2K_1 g_{ij} + \frac{4}{H} g_{ij} \quad (6.6)$$

y

$$H > 2\sqrt{K_1} \quad (6.7)$$

La idea básica del argumento es la siguiente. Las condiciones (6.6), (6.7) implican que el tensor

$$M_{ij} = \frac{h_{ij}}{H} - \epsilon g_{ij} - \frac{2(1-2\epsilon)}{H^2} K_1 g_{ij} - \frac{4L}{H^3} g_{ij} \quad (6.8)$$

es definido positivo en  $N_0$  para alguna constante positiva  $\epsilon$ . Además, el tensor  $M_{ij}$  satisface la ecuación de evolución

$$\partial_t M_{ij} = \Delta M_{ij} + \frac{2}{H} (\nabla H, \nabla M_{ij}) + N_{ij} \quad (6.9)$$

donde  $N_{ij}$  satisface  $N_{ij} V^i V^j \geq 0$  para todo autovector nulo de  $h_{ij}$ . Aquí es donde se aplica el principio de máximo tensorial, resultando que el tensor  $M_{ij}$  es definido positivo para todo  $t$  y por lo tanto, el tensor  $h_{ij}$  es definido positivo para todo  $t$ .



## 6.2. $k > 1$

Hay una diferencia crucial entre el caso  $k = 1$  y el caso  $k > 1$ , ya que en este último, el término que involucra el gradiente de la curvatura media no se anula.

Según nuestro entendimiento, no hay resultados en la literatura que prueben la preservación de la convexidad de superficies por flujos  $H^k$  para variedades Riemannianas. Por tanto, sólo presentamos el caso euclídeo.

### 6.2.1. Caso euclídeo

La ecuación para la curvatura extrínseca queda

$$\partial_t h_{ij} = kH^{k-1} \Delta h_{ij} - k(k-1)H^{k-2} \nabla_i H \nabla_j H + N_{ij} \quad (6.10)$$

donde

$$N_{ij} := kH^{k-1} |A|^2 h_{ij} + H^k (k-1) h_{ik} h_{jk} \quad (6.11)$$

satisface la condición  $N_{ij} V^i V^j = 0$  para todo autovector nulo  $V^i$  de  $h_{ij}$ .

Vemos que el primero y el último término tienen la forma deseada para aplicar el principio de máximo tensorial. Sin embargo, el término con el gradiente de  $H$  complica considerablemente el problema. Por este término es conveniente reescribir la ecuación para  $h_{ij}$  en una ecuación de evolución para el mínimo autovalor de  $h_{ij}$ , y estudiar si se mantiene positivo en la evolución.

En [26], Schulze estudia la evolución del mínimo autovalor de  $h_{ij}$ , denotado por  $\lambda_{min}$ . A continuación presentamos las ideas básicas de la prueba de Schulze. Argumentos similares se usan en el capítulo 7 para el IMCF, aplicados al máximo autovalor de  $b_{ij}$  (inversa de  $h_{ij}$ ). Los detalles se expondrán en ese capítulo.

Usando la ecuación de evolución para  $h_{ij}$  y para  $g^{ij}$  se encuentra la cota

$$\partial_t \lambda_{min} \geq kH^{k-1} \Delta \lambda_{min} - (k-1)H^k \lambda_{min}^2 + kH^{k-1} |A|^2 \lambda_{min} \quad (6.12)$$

Notando que:

$$|A|^2 = \lambda_{min}^2 + \lambda_{max}^2 \geq \lambda_{min}^2 + \lambda_{max} \lambda_{min} = H \lambda_{min} \Rightarrow |A|^2 \geq H \lambda_{min} \quad (6.13)$$

podemos escribir:

$$\partial_t \lambda_{min} \geq kH^{k-1} \Delta \lambda_{min} + H^k \lambda_{min}^2 \quad (6.14)$$

Ahora sí, aplicando el principio de máximo escalar 5.3.1 se obtiene el resultado deseado:

$$\lambda_{min}(t) \geq \min_{t=0} \lambda_{min} \quad (6.15)$$

Es decir, el mínimo autovalor de la curvatura extrínseca se mantiene positivo a lo largo del flujo  $H^k$  y por lo tanto, ambas curvaturas principales son positivas a lo largo del flujo.

Mencionamos que el caso  $0 < k < 1$ , que no consideramos en este trabajo, es diferente al caso  $k \geq 1$  porque el término de gradiente de  $H$  cambia de signo y no se puede aplicar el mismo argumento.



# Capítulo 7

## Preservación de la convexidad por el IMCF

En este capítulo presentamos primero la prueba de Urbas y Liu de la preservación de la convexidad a lo largo del IMCF en una variedad euclídea. Esto sienta las bases para el análisis posterior de variedades Riemannianas no euclideas.

En el capítulo 4 vimos que la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca en el caso del Flujo de Curvatura Media Inversa es

$$\partial_t h_{ij} = \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H + \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} h_{ij} + \beta_{ij} \quad (7.1)$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H^2} \left[ 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} - 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - g^{kl} \hat{\nabla}_l \hat{R}_{0jil} - g^{kl} \hat{\nabla}_i \hat{R}_{0ljk} - 2H \hat{R}_{0i0j} \right] \quad (7.2)$$

Analicemos primero el caso euclídeo.

### 7.1. Caso euclídeo

Cuando el tensor de Riemann es cero,  $\beta_{ij} = 0$  y el problema se reduce a

$$\partial_t h_{ij} = \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} - \frac{2}{H^3} \nabla_i H \nabla_j H + \frac{|A|^2}{H^2} h_{ij} \quad (7.3)$$

Vemos que nuevamente tenemos el problema del término que involucra al gradiente de  $H$  y que no permiten reescribir la expresión para  $\partial_t h_{ij}$  de la forma (5.6) ni seguir el razonamiento de Huisken usado para el caso del Flujo de Curvatura Media.

Algunas opciones que podrían seguirse para tratar este término son las siguientes.

- Como este término tiene un signo menos adelante, bastaría con ver que esté acotado para cumplir la desigualdad (5.6), pero en general no es cierto que  $\nabla_i H \nabla_j H \leq c$  para alguna constante  $c$ .

- Otra opción es incluirlo en el término  $X^k \nabla_k h_{ij}$ . Pero a simple vista nos damos cuenta que no se puede hacer, ya ninguno de los índices  $i, j$  del término  $\nabla_i H \nabla_j H$  está contraído con un vector.
- Por último nos queda la opción de incluirlo en  $N_{ij}$ , pero tendría que cumplirse la condición de vector nulo, que en general no se cumple.

Esto nos lleva a considerar modificar las ecuaciones para aplicar el principio de máximo escalar. Siguiendo a Urbas [28] y Liu en [23] vamos a aplicar el principio de máximo escalar de la siguiente manera:

- Escribimos  $\partial_t h_j^i$  a partir de usar (4.3) junto con (4.6) (Lema 7.2.1).
- Definimos la inversa  $b_j^i$  de  $h_j^i$ , que cumple

$$b_l^i h_j^l = \delta_j^i \quad (7.4)$$

- Usando (7.4) escribimos una expresión para  $\partial_t b_j^i$ .
- Escribimos la ecuación de evolución para el máximo autovalor de  $b_j^i$  y aplicamos el principio de máximo escalar (Teorema 7.2.2).

Teniendo en cuenta estas observaciones, en lo que sigue, presentamos brevemente los resultados de Urbas [28] y Liu [23] en el caso euclídeo para enfatizar los cambios que observaremos al pasar al caso no euclídeo. En la sección 7.2 mostramos más detalles de las cuentas, generalizadas al caso no euclídeo.

Las ecuaciones de evolución para la inversa de la curvatura media,  $w = H^{-1}$  y para la curvatura extrínseca son

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{H^2} \Delta w + w \frac{|A|^2}{H^2} \quad (7.5)$$

$$\frac{dh_{ij}}{dt} = \frac{1}{H^2} \Delta h_{ij} + \frac{|A|^2}{H^2} h_{ij} - 2 \frac{\nabla_i H \nabla_j H}{H^3} \quad (7.6)$$

Luego, la ecuación para  $h_j^i$  es (Prop. 2.4 de [23])

$$\frac{dh_j^i}{dt} = \frac{1}{H^2} \Delta h_j^i + \frac{|A|^2}{H^2} h_j^i - \frac{2}{H} h_j^l h_l^i - 2 \frac{\nabla_i H \nabla_j H}{H^3} \quad (7.7)$$

Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los autovalores de  $h_{ij}$  con respecto a  $g_{ij}$ , es decir, los autovalores de  $h_j^i$  con respecto a  $\delta_j^i$ . Para probar que el flujo preserva la convexidad necesitamos mostrar que el mínimo autovalor  $\lambda_{min}$  es positivo durante la evolución. Como el término del gradiente tiene el signo incorrecto en la ecuación de evolución para  $h_j^i$ , necesitamos estimar la inversa de  $h_j^i$ , que denotamos por  $b_j^i$ . Se tiene

$$\frac{db_j^i}{dt} = \frac{1}{H^2} \Delta b_j^i - \frac{|A|^2}{H^2} b_j^i + \frac{2}{H} \delta_j^i + 2 \frac{b_l^i \nabla^l H b_j^m \nabla_m H}{H^3} - \frac{2}{H^2} h_m^l \nabla_p b_l^i \nabla^p b_j^m \quad (7.8)$$

Usando propiedades de los polinomios simétricos elementales se puede verificar que la suma de los dos últimos términos es menor o igual a cero. Luego, si el máximo autovalor

de  $b_j^i$  al tiempo  $t$  se alcanza en  $x_t$  con autovector unitario  $\xi_t$ , por una rotación del sistema  $e_0, e_1, e_2$  en  $x_t$ , podemos asumir que  $\xi_t = e_1$ . Entonces tenemos

$$\frac{db_1^1}{dt} \leq \frac{1}{H^2} \Delta b_1^1 - \frac{|A|^2}{H^2} b_1^1 + \frac{2}{H} \quad (7.9)$$

Luego, como

$$\frac{1}{H} - \frac{|A|^2}{H^2} b_1^1 \leq 0 \quad (7.10)$$

se tiene

$$\frac{db_1^1}{dt} \leq \frac{1}{H^2} \Delta b_1^1 + w \quad (7.11)$$

A partir de la ecuación de evolución de  $w$ , y usando el principio de máximo escalar [13] se tiene

$$0 < w_{min}(0) \leq w(t) \leq e^t w_{max}(0) \quad (7.12)$$

Luego podemos acotar

$$\frac{db_1^1}{dt} \leq \frac{1}{H^2} \Delta b_1^1 + e^t w_{max}(0) \quad (7.13)$$

Aplicando nuevamente el principio de máximo escalar a esta ecuación obtenemos

$$b_{1_{max}}^1(t) \leq e^t w_{max}(0) + b_{1_{max}}^1(0) - w_{max}(0) \quad (7.14)$$

Esto implica que el mínimo autovalor es positivo para todo  $t$ . Esto se puede entender de la siguiente manera. Inicialmente la superficie es convexa, por lo que ambos autovalores de  $h_j^i$  son positivos. Supongamos por absurdo que en algún momento  $t^*$  la superficie deja de ser convexa, es decir que en  $t^*$ , y en algún punto de la superficie, uno de los autovalores se hace cero. Por la notación usada, ese autovalor es  $\lambda_1$ , entonces  $\lambda_1 \rightarrow 0$  a medida que  $t \rightarrow t^*$  para algún punto sobre la superficie. Y por lo tanto  $b_1^1$  diverge cuando  $t \rightarrow t^*$  en ese punto, lo cual es un absurdo porque  $b_1^1$  está acotado para todo tiempo por (7.14). Entonces los dos autovalores son estrictamente positivos para todo tiempo y la convexidad se preserva a lo largo del flujo.

## 7.2. Caso no euclídeo

En esta sección presentamos una cota para la evolución del máximo autovalor de la inversa de la curvatura extrínseca, que representa el primer paso para estudiar la preservación de la convexidad de superficies. Muchos de los cálculos que siguen ya se encuentran parcialmente en trabajos mencionados antes para el MCF o el IMCF en variedad euclídea. Aquí los presentamos en más detalle y generalizados al IMCF en variedades Riemannianas.

Seguimos los mismos pasos que para el caso euclídeo. Es decir, primero, a partir de la ecuación de evolución de  $h_{ij}$  escribimos la ecuación de evolución para  $h_j^i$ . Luego para la inversa  $b_j^i$ , y finalmente para el máximo autovalor  $b_1^1$ . Usaremos también la ecuación para la inversa de la curvatura media.

Tenemos entonces los siguientes lemas.

**Lema 7.2.1.** Para la segunda forma fundamental  $h_q^p$  se cumple la ecuación de evolución:

$$\partial_t h_q^p = \frac{1}{H^2} \Delta h_q^p - \frac{2}{H^3} \nabla^p H \nabla_q H + \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} h_q^p - \frac{2}{H} h_l^p h_q^l + \beta_q^p \quad (7.15)$$

*Demostración:*

$$\partial_t h_q^p = \partial_t (h_{lq} g^{lp}) = g^{lp} \partial_t h_{lq} + h_{lq} \partial_t g^{lp} \quad (7.16)$$

usando la ecuación (4.3) para la inversa de la métrica, nos queda

$$\partial_t h_q^p = g^{lp} \partial_t h_{lq} - h_{lq} \frac{2}{H} h_{mn} g^{lm} g^{pn} = g^{lp} \partial_t h_{lq} - \frac{2}{H} h_l^p h_q^l \quad (7.17)$$

Finalmente, combinando esta ecuación con la ecuación de evolución para  $h_{ij}$  obtenemos (7.15) y queda probado el lema.  $\square$

**Lema 7.2.2.** Para  $b_j^i$  se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\partial_t b_j^i = -b_p^i b_j^q \partial_t h_q^p \quad (7.18)$$

$$\nabla_l b_j^i = -b_p^i b_j^q \nabla_l h_q^p \quad (7.19)$$

$$\Delta b_j^i = -b_p^i b_j^q \Delta h_q^p + 2h_m^l \nabla_p b_l^i \nabla^p h_j^m \quad (7.20)$$

*Demostración:* Usando (7.4) demostramos la primera ecuación:

$$0 = \partial_t (\delta_q^i) = \partial_t (b_p^i h_q^p) = b_p^i \partial_t h_q^p + h_q^p \partial_t b_p^i \quad (7.21)$$

y multiplicando por  $b_j^q$ :

$$0 = b_j^q b_p^i \partial_t h_q^p + b_j^q h_q^p \partial_t b_p^i = b_j^q b_p^i \partial_t h_q^p + \delta_j^p \partial_t b_p^i = b_j^q b_p^i \partial_t h_q^p + \partial_t b_j^i \quad (7.22)$$

obtenemos el resultado esperado. La segunda ecuación se demuestra de manera análoga, reemplazando  $\partial_t$  por  $\nabla_l$ . La tercera ecuación es consecuencia directa de la segunda.  $\square$

Usando las ecuaciones del Lema 7.2.2 podemos escribir la evolución de  $b_j^i$  en la forma

$$\partial_t b_j^i = \frac{1}{H^2} \Delta b_j^i - \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} b_j^i + \frac{2}{H} \delta_j^i + 2 \frac{b_l^i \nabla^l H b_j^m \nabla_m H}{H^3} - \frac{2}{H^2} h_m^l \nabla_p b_l^i \nabla^p b_j^m - b_p^i b_j^q \beta_q^p \quad (7.23)$$

Antes de pasar a la forma escalar, vamos a estimar el término del gradiente. Para ello necesitamos introducir los polinomios simétricos elementales.

**Definición 7.2.1.** Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los autovalores de  $h_j^i$  definimos los polinomios simétricos elementales como:

$$S_l(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_l} \quad (7.24)$$

donde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $S_0 = 0$  y  $S_l = 0$  si  $l > n$ .

Estos polinomios están bien estudiados y hay varios autores que demuestran las siguientes propiedades importantes, ver por ejemplo [18].

**Lema 7.2.3.** Sea  $Q_l$  de la forma:

$$Q_l(\lambda) = \frac{S_l(\lambda)}{S_{l-1}(\lambda)} \quad (7.25)$$

entonces  $Q_l(\lambda)$  es cóncava para todo  $l = 1, \dots, n$ .

Los polinomios elementales simétricos son relevantes en este problema porque la inversa de la curvatura media está relacionada con ellos mediante la expresión  $H(\lambda) = [Q_n(\kappa)]^{-1}$ , donde  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  son los radios de curvatura, i.e.  $\kappa_i = (\lambda_i)^{-1}$ .

**Lema 7.2.4.** Para funciones generales  $f, g$  que cumplen  $f(h_j^i) = [g(b_j^i)]^{-1}$  se cumple la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial h_j^i \partial h_q^p} = \frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m b_l^j b_i^k - \frac{\partial f}{\partial h_q^i} b_p^j - \frac{\partial f}{\partial h_j^p} b_i^q \quad (7.26)$$

*Demostración:* Deduzcamos primero una expresión útil para la prueba:

$$0 = \frac{\partial}{\partial h_j^i} = \frac{\partial}{\partial h_j^i} = h_q^p \frac{\partial b_p^k}{\partial h_j^i} + b_p^k \delta_i^p \delta_q^j = b_l^q h_q^p \frac{\partial b_p^k}{\partial h_j^i} + b_l^q b_i^k \delta_q^j = \delta_l^p \frac{\partial b_p^k}{\partial h_j^i} + b_l^j b_i^k = \frac{\partial b_l^k}{\partial h_j^i} + b_l^j b_i^k \quad (7.27)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial b_l^k}{\partial h_j^i} = -b_l^j b_i^k \quad (7.28)$$

Además

$$\frac{\partial g}{\partial h_j^i} = \frac{\partial}{\partial h_j^i} \left( \frac{1}{f} \right) = -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} = \frac{\partial g}{\partial b_l^k} \frac{\partial b_l^k}{\partial h_j^i} = -b_l^j b_i^k \frac{\partial g}{\partial b_l^k} \quad (7.29)$$

Ahora sí calculamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial h_j^i \partial h_q^p} &= \frac{\partial}{\partial h_j^i} \left[ \frac{\partial}{\partial h_q^p} \left( \frac{1}{g} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial h_j^i} \left[ \left( -\frac{1}{g^2} \right) \frac{\partial g}{\partial h_q^p} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial h_j^i} \left( \frac{1}{g^2} \right) \frac{\partial g}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial h_j^i \partial h_q^p} \\
&= \frac{2}{g^3} \frac{\partial g}{\partial h_j^i} \frac{\partial g}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial h_j^i \partial h_q^p} \\
&= 2f^3 \left( -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \right) \left( -\frac{1}{f^2} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} \right) - \frac{1}{g^2} \frac{\partial}{\partial h_j^i} \left( \frac{\partial g}{\partial h_q^p} \right) \\
&= \frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} + \frac{1}{g^2} \left( b_n^q b_p^m \frac{\partial^2 g}{\partial b_l^k \partial b_n^m} \frac{\partial b_l^k}{\partial h_j^i} + b_n^q \frac{\partial g}{\partial b_n^m} \frac{\partial b_p^m}{\partial h_j^i} + b_p^m \frac{\partial g}{\partial b_n^m} \frac{\partial b_n^q}{\partial h_j^i} \right) \\
&= \frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \left( b_n^q b_p^m \frac{\partial^2 g}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_l^j b_i^k + b_n^q \frac{\partial g}{\partial b_n^m} b_p^j b_i^m + b_p^m \frac{\partial g}{\partial b_n^m} b_n^j b_i^q \right) \\
&= \frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m b_l^j b_i^k - \frac{\partial g}{\partial h_q^p} b_p^j - \frac{\partial g}{\partial h_j^i} b_i^q \right) \\
&= \frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m b_l^j b_i^k + \frac{1}{g^2} \left( -\frac{1}{f^2} \right) \frac{\partial f}{\partial h_q^p} b_p^j + \frac{1}{g^2} \left( -\frac{1}{f^2} \right) \frac{\partial f}{\partial h_j^i} b_i^q \\
&= \frac{2}{f} \frac{\partial f}{\partial h_j^i} \frac{\partial f}{\partial h_q^p} - \frac{1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m b_l^j b_i^k - \frac{\partial f}{\partial h_q^p} b_p^j - \frac{\partial f}{\partial h_j^i} b_i^q
\end{aligned}$$

□

Aplicando los lemas anteriores obtenemos el siguiente resultado que será de utilidad para acotar el término del gradiente de la curvatura media en la ecuación de evolución para  $b_j^i$ .

**Lema 7.2.5.** *Para  $b_j^i$  se cumple:*

$$2 \frac{b_l^i \nabla^l H b_j^m \nabla_m H}{H^3} - \frac{2}{H^2} h_m^l \nabla_m b_p^i \nabla^p b_j^m \leq P_j^i \quad (7.30)$$

donde  $P_j^i$  está dado por

$$P_j^i := \frac{2}{H^2} \left[ \hat{R}_{0pqm} (b^{ip} \nabla^q b_j^m + b_j^m \nabla^q b^{ip}) + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \right] \quad (7.31)$$

*Demostración:* Reemplazamos  $f \equiv H$  y  $g \equiv Q_n$  en la ecuación (7.26), notemos primero que:

$$\frac{\partial H}{\partial h_j^i} = \frac{\partial}{\partial h_j^i} (\delta_p^q h_q^p) = \delta_p^q \delta_i^p \delta_q^j = \delta_i^j \Rightarrow \frac{\partial^2 H}{\partial h_j^i \partial h_q^p} = 0$$



entonces la ecuación (7.26) nos queda:

$$0 = \frac{2}{H} \delta_i^j \delta_p^q - H^2 \frac{\partial^2 Q_n}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m b_l^j b_i^k - \delta_i^q b_p^j - \delta_p^j b_i^q \quad (7.32)$$

contraemos con  $\nabla^v h_j^i \nabla_w h_q^p$ :

$$0 = \frac{2}{H} \nabla^v H \nabla_w H - H^2 \frac{\partial^2 Q_n}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m \nabla_w h_q^p b_l^j b_i^k \nabla^v h_j^i - \delta_i^q b_p^j \nabla^v h_j^i \nabla_w h_q^p - \delta_p^j b_i^q \nabla^v h_j^i \nabla_w h_q^p \quad (7.33)$$

entonces

$$\frac{2}{H} \nabla^v H \nabla_w H = H^2 \frac{\partial^2 Q_n}{\partial b_l^k \partial b_n^m} b_n^q b_p^m \nabla_w h_q^p b_l^j b_i^k \nabla^v h_j^i + 2b_p^j \nabla^v h_j^i \nabla_w h_q^p \quad (7.34)$$

Sabiendo que  $Q_n$  es una función cóncava obtenemos:

$$H^{-1} \nabla^v H \nabla_w H \leq b_p^r \nabla^v h_r^q \nabla_w h_q^p \quad (7.35)$$

multiplicando ambos lados por  $b_l^i b_j^m$ :

$$H^{-1} b_l^i \nabla^l H b_j^m \nabla_m H \leq b_l^i b_j^m b_p^r \nabla^l h_j^q \nabla_m h_q^p \quad (7.36)$$

Usamos la ecuación de Codazzi (3.6) para desarrollar el lado derecho:

$$\begin{aligned} & b_l^i b_j^m b_p^r \nabla^l h_r^q \nabla_m h_q^p \\ &= b^{il} b_j^m b^{rp} \nabla_l h_{qr} \nabla_m h_{ps} g^{qs} \\ &= b^{il} b_j^m b^{rp} g^{qs} \left( \nabla_q h_{lr} + \hat{R}_{0rql} \right) \left( \nabla_s h_{pm} + \hat{R}_{0psm} \right) \\ &= b_j^m b^{il} \nabla^q h_{lr} b^{rp} \nabla_q h_{pm} + b_j^m \nabla^q h_{pm} b^{il} b^{rp} \hat{R}_{0rql} + b^{il} \nabla^q h_{lr} b^{rp} b_j^m \hat{R}_{0pqm} + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \\ &= b_j^m h_{lr} \nabla^q b^{il} h_{pm} \nabla_q b^{rp} + b_j^m h_{pm} \nabla^q b^{rp} b^{il} \hat{R}_{0rql} + b^{il} h_{lr} \nabla^q b^{rp} b_j^m \hat{R}_{0pqm} + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \\ &= g_{pj} h_{lr} \nabla^q b^{il} \nabla_q b^{rp} + g_{pj} \nabla^q b^{rp} b^{il} \hat{R}_{0rql} + \delta_r^j \nabla^q b^{rp} b_j^m \hat{R}_{0pqm} + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \\ &= h_{lr} \nabla^q b^{il} \nabla_q b_j^r + \nabla^q b_j^r b^{il} \hat{R}_{0rql} + \nabla^q b^{ip} b_j^m \hat{R}_{0pqm} + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \\ &= h_{lr} \nabla^q b^{ir} \nabla_q b_j^l + \hat{R}_{0pqm} (b^{ip} \nabla^q b_j^m + b_j^m \nabla^q b^{ip}) + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \\ &= h_i^m \nabla^p b_m^i \nabla_p b_j^l + \hat{R}_{0pqm} (b^{ip} \nabla^q b_j^m + b_j^m \nabla^q b^{ip}) + b^{il} b^{rp} b_j^m g^{qs} \hat{R}_{0rql} \hat{R}_{0psm} \end{aligned}$$

□

Notemos que el resultado de este lema implica una diferencia significativa con el resultado análogo del caso euclídeo ya que en el lado derecho de (7.30) aparece un término que involucra  $\hat{R}_{0ijk}$ . Esto hace que no podamos acotar de manera limpia el término del gradiente, como sucede en el caso euclídeo.

Finalmente, sea  $b_1^l$  el máximo autovalor de  $b_j^i$ , tenemos entonces

**Teorema 7.2.6.** *Sea  $b_j^i$  la inversa de  $h_j^i$ . Eligiendo un sistema de coordenadas en donde estos tensores son diagonales, definimos  $b_1^l$  como el máximo autovalor de  $b_j^i$ . Entonces  $b_1^l$  cumple:*

$$\partial_t b_1^1 \leq \frac{1}{H^2} \Delta b_1^1 - \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} b_1^1 + \frac{2}{H} + P_1^1 - (b_1^1)^2 \beta_1^1 \quad (7.37)$$

donde  $P_1^1$  es la componente 1,1 de  $P_j^i$ , ecuación (7.31) y  $\beta_1^1$  es la componente 1,1 de  $g^{pm} \beta_{mq}$ , ecuación (7.2).

Al comparar esta ecuación con la correspondiente al caso euclídeo, donde  $P_1^1 = 0$ ,  $\beta_1^1 = 0$  y  $\hat{R}_{00} = 0$ , vemos que necesitamos otras condiciones sobre la variedad para aplicar el principio de máximo.

La primera diferencia aparece en el término  $|A|^2 + \hat{R}_{00}$ . En [14] se prueba que bajo el MCF, este término se mantiene positivo en la evolución si se satisfacen condiciones de curvatura particulares en la superficie inicial. Sin embargo, la positividad de este término no es necesaria para aplicar el principio de máximo en este caso. Sólo necesitamos que esté acotado, con esa condición (además de condiciones extras por los otros términos de curvatura en la ecuación) obtendríamos que el máximo autovalor  $b_1^1$  está acotado en la evolución.

La segunda diferencia entre (7.37) y la equivalente en el caso euclídeo está en el término  $P_1^1$ , que depende fuertemente de  $\hat{R}_{0ijk}$ . Además, depende no linealmente de  $b_1^1$  y de sus derivadas primeras. En general  $\hat{R}_{0ijk}$  es diferente de cero. Por lo tanto, creemos que es el término más problemático en el caso no euclídeo.

La tercera diferencia es el factor  $\beta_1^1$  que aparece en el término no lineal, con  $(b_1^1)^2$ . Este término también es difícil de acotar. Si  $\beta_1^1 \geq 0$  entonces el término se puede ignorar.

Con respecto a la curvatura media, en el caso del IMCF, es importante controlar su evolución, porque juega un papel predominante en el control del máximo autovalor de  $b_j^i$ .

Reescribimos la ecuación (4.5) para la curvatura media en términos de la recíproca  $w = H^{-1}$  en la forma:

$$\partial_t w = \frac{1}{H^2} \Delta w + \frac{1}{H^2} \left( |A|^2 + \hat{R}_{00} \right) w \quad (7.38)$$

donde vemos que aparece nuevamente el término  $|A|^2 + \hat{R}_{00}$ . Si es positivo a lo largo de la evolución por el IMCF, entonces se puede aplicar el principio de máximo como en el caso euclídeo para obtener cotas inferior y superior a  $w$  en términos de los valores en la superficie inicial

$$0 < w_{min}(0) \leq w(t) \leq e^t w_{max}(0) \quad (7.39)$$

Si el término  $|A|^2 + \hat{R}_{00}$  no es positivo, pero está acotado, se obtendrían cotas similares en términos de los valores en la superficie inicial, pero con otro comportamiento exponencial.

A partir de estos cálculos, no es claro que la convexidad se preserve para una variedad Riemanniana general. De acuerdo a los resultados de [5], se espera que para una familia de datos iniciales que representen cuerpos materiales axialmente simétricos, el IMCF preserve la convexidad. Sin embargo, probarlo en general presenta varios desafíos.

En la próxima sección investigamos un dato inicial para el agujero negro de Schwarzschild, ya que es una métrica no trivial explícita y con alta simetría.

### 7.2.1. Ejemplo: Dato inicial para Schwarzschild

En esta sección estudiamos la evolución, bajo el IMCF, de una superficie suave cerrada, dada por

$$\Phi = r - u(\theta) = 0 \quad (7.40)$$

en un slice  $t = \text{const}$  en el espaciotiempo de Schwarzschild.

La métrica espacial de Schwarzschild es

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{F} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (7.41)$$

donde

$$F = 1 - \frac{2M}{r} \quad (7.42)$$

Las componentes no nulas del tensor de Riemann tridimensional  $\bar{R}_{\mu\nu\sigma\rho}$  son

$$\bar{R}_{r\theta r\theta} = \frac{-M}{Fr} = \bar{R}_{\theta r \theta r} = -\bar{R}_{r\theta\theta r} = -\bar{R}_{\theta r r\theta} \quad (7.43)$$

$$\bar{R}_{r\varphi r\varphi} = \frac{-M \sin^2 \theta}{Fr} = \bar{R}_{\varphi r \varphi r} = -\bar{R}_{r\varphi\varphi r} = -\bar{R}_{\varphi r r\varphi} \quad (7.44)$$

$$\bar{R}_{\theta\varphi\theta\varphi} = -2Mr \sin^2 \theta = \bar{R}_{\varphi\theta\theta\varphi} = -\bar{R}_{\theta\varphi\theta\varphi} = -\bar{R}_{\varphi\theta\varphi\theta} \quad (7.45)$$

La base adaptada a la superficie,  $e_i^\mu$ , es

$$e_\theta^r = \frac{\partial r}{\partial \theta} = u', \quad e_\varphi^r = \frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.46)$$

$$e_\theta^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 1, \quad e_\varphi^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0 \quad (7.47)$$

$$e_\theta^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad e_\varphi^\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1 \quad (7.48)$$

A su vez, la normal  $n^\mu$  es:

$$n^r = \frac{F}{\alpha} \quad n^\theta = -\frac{u'}{\alpha r^2} \quad n^\varphi = 0 \quad (7.49)$$

Finalmente, las componentes no nulas de las proyecciones del Riemann sobre la superficie ( $\hat{R}_{ijkl}$ ,  $\hat{R}_{0jkl}$ ,  $\hat{R}_{0i0j}$ ) están dadas por:

$$\hat{R}_{\theta\varphi\varphi\theta} = M \sin^2 \theta \left( \frac{u'^2}{Fr} - 2r \right) = \hat{R}_{\varphi\theta\theta\varphi} = -\hat{R}_{\varphi\theta\varphi\theta} = -\hat{R}_{\theta\varphi\theta\varphi} \quad (7.50)$$

$$\hat{R}_{0\varphi\theta\varphi} = -\frac{u' M \sin^2 \theta}{r\alpha} = -\hat{R}_{0\varphi\varphi\theta} \quad (7.51)$$

$$\hat{R}_{0\theta\theta\theta} = -\frac{M}{Fr} \left( \frac{F^2}{\alpha^2} + \frac{u'^4}{\alpha^2 r^2} + 2\frac{F u'^2}{\alpha r^2} \right) \quad (7.52)$$

$$\hat{R}_{0\varphi\theta\varphi} = -\frac{M \sin^2 \theta}{Fr} \left( \frac{F^2}{\alpha^2} - 2\frac{u'^2}{\alpha^2 r^2} \right) \quad (7.53)$$

Vemos que para una superficie no esféricamente simétrica,  $\hat{R}_{0ijk}$  es diferente de cero. De hecho, el único caso en el cual es cero, es para una esfera coordenada. Es decir que incluso para Schwarzschild, en general la componente  $P_1^1$  es no nula.

### Esfera coordenada

Veamos a continuación la situación para una esfera coordenada. La convexidad de una esfera coordenada en un dato para Schwarzschild ya fue parcialmente discutida en la sección 2.2.1. En esta sección nos interesa analizar el comportamiento de los diferentes términos de la ecuación (7.37) para esta solución en particular. Y sobre todo, comparar el comportamiento de la ecuación (7.37) con la ecuación que define el flujo.

Consideremos la esfera de radio  $R_0$  en  $t = 0$  dada por  $u(\theta, 0) = R_0$ . Luego  $u = u(t)$  define esferas de radio  $u$  para cada valor de  $t$ . Queremos ver si el flujo preserva la convexidad dada la superficie inicial de radio  $R_0$ . Ya vimos, en la sección 2.2.1 que los autovalores son de la forma

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\sqrt{F}}{u} \quad (7.54)$$

Ambas curvaturas principales son positivas para  $r > 2M$ , pues  $F > 0$  y  $u > 0$ . Calculemos ahora  $\partial_t u$  partiendo de la ecuación (2.2), tenemos:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 = \partial_t \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \partial_t x^\mu \quad (7.55)$$

y usando las ecuaciones (2.5) y (4.1) obtenemos:

$$\partial_t u = \frac{\alpha}{H} = \frac{u}{2} \quad (7.56)$$

Podemos resolver explícitamente  $u$  en función de  $t$ :

$$u(t) = R_0 e^{t/2} \quad (7.57)$$

esto es, las soluciones de (4.1) son esferas cuya coordenada radial aumenta exponencialmente con  $t$ . Esto demuestra la preservación de la convexidad para este caso particular.

Veamos ahora las ecuaciones de evolución para la esfera coordenada. En Schwarzschild tenemos para una superficie  $u(\theta)$ :

$$\bar{R} = 0 \quad (7.58)$$

$$\hat{R}_{00} = n^a n^b \bar{R}_{ab} = \frac{M}{\alpha^2 r^3} \left( \frac{u'^2}{r^2} - 2F \right) \quad (7.59)$$

$$|A|^2 = \frac{1}{u^4 \alpha^6} \left\{ \left[ \frac{u'^2 F'}{2} + \frac{u'^2 F}{u} + F u \alpha^2 - u'' F \right]^2 + \alpha^4 \left( F u - u' \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \right\} \quad (7.60)$$

Para la esfera coordenada:

$$\hat{R}_{\varphi\theta\varphi\theta} = -2Mr \sin^2 \theta \quad (7.61)$$

$$\hat{R}_{0\theta\theta 0} = -\frac{M}{r} \quad (7.62)$$

$$\hat{R}_{0\varphi 0\varphi} = -\frac{M \sin^2 \theta}{r} \quad (7.63)$$

$$\hat{R}_{00} = -\frac{2M}{r^3} \quad (7.64)$$

$$|A|^2 = \frac{2F}{r^2} \quad (7.65)$$

$$H = 2\frac{\sqrt{F}}{r} \quad (7.66)$$

Reescribimos la ecuación (4.5) de la forma:

$$\partial_t w = \frac{1}{H^2} \Delta w + \frac{1}{H^2} (|A|^2 + R_{00}) w \quad (7.67)$$

donde  $w = H^{-1}$ .

Veamos el siguiente término:

$$\frac{1}{H^2} (|A|^2 + R_{00}) = \frac{1}{H^2} \left( \frac{2F}{r^2} - \frac{2M}{r^3} \right) \quad (7.68)$$

$$= \frac{2}{r^2 H^2} \left( F - \frac{M}{r} \right) \quad (7.69)$$

$$= \frac{1}{2F} \left( 1 - \frac{3M}{r} \right) \quad (7.70)$$

Es positivo si  $r > 3M$  (i.e. fuera de la esfera de fotones). Entonces como en el caso euclídeo podemos aplicar el principio de máximos para obtener:

$$w_{min}(0) \leq w(t) \leq e^t w_{max}(0) \quad (7.71)$$

Ahora queremos calcular la componente  $\beta_\varphi^\varphi$  para poder escribir la ecuación de evolución de  $b_\varphi^\varphi$  (como ambos autovalores son iguales da lo mismo usar uno o el otro). Como vimos en la sección anterior,  $\hat{R}_{0ijk} = 0$  en una esfera coordenada de Schwarzschild, entonces tenemos:

$$\beta_{ij} = 2h^{lm} \hat{R}_{iljm} - 2g^{kl} h_{(i}^m \hat{R}_{j)kml} - \frac{2}{H} \hat{R}_{0i0j} \quad (7.72)$$

$$\beta_j^i = g^{ip} \beta_{pj} = 2g^{ip} h^{lm} \hat{R}_{pljm} - g^{kl} h^{mi} \hat{R}_{jkml} - g^{ip} g^{kl} h_j^m \hat{R}_{pkml} - \frac{2}{H} g^{ip} \hat{R}_{0p0j} \quad (7.73)$$

$$\begin{aligned}
\beta_\varphi &= 2g^{\varphi p} h^{lm} \hat{R}_{pl\varphi m} - g^{kl} h^{m\varphi} \hat{R}_{\varphi kml} - g^{\varphi p} g^{kl} h_\varphi^m \hat{R}_{pkml} - \frac{2}{H} g^{\varphi p} \hat{R}_{0p0\varphi} \\
&= 2g^{\varphi\varphi} h^{lm} \hat{R}_{\varphi l\varphi m} - g^{kl} h^{\varphi\varphi} \hat{R}_{\varphi k\varphi l} - g^{\varphi\varphi} g^{kl} h_\varphi^\varphi \hat{R}_{\varphi k\varphi l} - \frac{2}{H} g^{\varphi\varphi} \hat{R}_{0\varphi0\varphi} \\
&= \hat{R}_{\varphi\theta\varphi\theta} (2g^{\varphi\varphi} h^{\theta\theta} - g^{\theta\theta} h^{\varphi\varphi} - g^{\varphi\varphi} g^{\theta\theta} h_\varphi^\varphi) - \frac{2}{H} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( -\frac{M}{r} \sin^2 \theta \right) \\
&= 2\hat{R}_{\varphi\theta\varphi\theta} (g^{\varphi\varphi} h^{\theta\theta} - g^{\theta\theta} h^{\varphi\varphi}) + \frac{2M}{rH} \\
&= 2\hat{R}_{\varphi\theta\varphi\theta} (g^{\varphi\varphi} g^{\theta\theta} \lambda_1 - g^{\theta\theta} g^{\varphi\varphi} \lambda_2) + \frac{2M}{rH}
\end{aligned} \tag{7.74}$$

$$\Rightarrow \beta_\varphi = \frac{2M}{rH} \tag{7.75}$$

Recordando que en este caso  $P_j^i = 0$ , la ecuación (7.37) para  $b_\varphi^\varphi$  nos queda:

$$\partial_t b_\varphi^\varphi \leq \frac{1}{H^2} \Delta b_\varphi^\varphi - \frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} b_\varphi^\varphi + \frac{2}{H} - \frac{2M}{rH} (b_\varphi^\varphi)^2 \tag{7.76}$$

ahora notamos que:

$$-\frac{|A|^2 + \hat{R}_{00}}{H^2} b_\varphi^\varphi \leq 0 \quad \text{si } r \geq 3M \tag{7.77}$$

$$-\frac{2M}{rH} (b_\varphi^\varphi)^2 \leq 0 \tag{7.78}$$

entonces obtenemos:

$$\partial_t b_\varphi^\varphi \leq \frac{1}{H^2} \Delta b_\varphi^\varphi + \frac{2}{H} \tag{7.79}$$

Entonces se puede aplicar el principio de máximo de forma análoga para obtener el resultado deseado.

Notamos que este argumento solo funciona fuera de la esfera de fotones, sin embargo la convexidad se preserva en toda la variedad. Esto enfatiza la problemática de este tipo de argumentos al trabajar con espacios no euclídeos.

# Capítulo 8

## Comentarios Finales

### Esfera de fotones

Hemos visto en la sección 2.2.1 que la esfera de fotones en datos iniciales para agujeros negros como Schwarzschild y Reissner Nördstrom juega un rol importante en la monotonicidad de las curvaturas principales. Esto resulta problemático si uno quisiera estudiar la preservación de la convexidad a través de la monotonicidad de (la inversa de) las curvaturas principales. Sin embargo, en los casos estudiados, las superficies se mantienen convexas a lo largo de flujos de curvatura media como el IMCF (sección 2.2.1). Es decir que la monotonicidad de las curvaturas principales no es un buen criterio para determinar la preservación de la convexidad, salvo que uno se restrinja al exterior de la esfera de fotones.

### Flujos $H^k$

La preservación de la convexidad de superficies por flujos tipo  $H^k$  ya fue probada en la literatura [26], [28]. Nuestro estudio de estos flujos fue esencialmente con el objetivo de comprender las principales diferencias y similitudes con el IMCF. Como mencionamos antes, tomamos  $k \geq 1$ .

Para el MCF ( $k = 1$ ) la preservación de la convexidad se puede probar usando el principio de máximo tensorial. Esto se debe a que el término de gradiente de la curvatura media se hace cero cuando  $k = 1$ . La prueba en el caso euclídeo sale de la aplicación directa del principio de máximo a la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca. El caso no euclídeo es más delicado, en particular es necesario que las derivadas primeras de la curvatura (tensor de Riemann) estén acotadas. Además se precisa controlar la evolución de la curvatura media (mediante el principio de máximo escalar) y luego esto es usado para controlar directamente la curvatura extrínseca.

Para el caso  $k > 1$  el término del gradiente de  $H$  es distinto de cero y es el principal obstáculo en la prueba ya que impide la aplicación del principio de máximo tensorial. En este caso lo que se hace es controlar la positividad del mínimo autovalor de la curvatura extrínseca a través del principio de máximo escalar.

Para el caso no euclídeo de flujos  $H^k$  con  $k > 1$ , sería interesante tratar de adaptar

los cálculos realizados por Huisken en [14] con respecto al tensor  $M_{ij}$  definido en (6.8). La elección de la forma de este tensor no es para nada trivial y debe cumplir tres condiciones importantes. La primera es que debe ser positivo en la superficie inicial  $S_0$ . Además su ecuación de evolución debe ser adecuada para aplicar el principio de máximo, en particular, es relevante la forma del tensor  $N_{ij}$ , que debe satisfacer  $N_{ij}V^iV^j \geq 0$  para todo autovector nulo de  $h_{ij}$ . La tercera condición es que su positividad debe implicar la positividad de  $h_{ij}$ .

## IMCF

En este trabajo notamos que el Flujo de Curvatura Media Inversa es más complicado que los flujos  $H^k$  debido a que el término del gradiente de  $H$  siempre está presente y tiene el signo incorrecto para la prueba.

En el caso euclídeo, la prueba es similar a la del flujo  $H^k$ , pero en lugar de buscar que la curvatura principal mínima permanezca positiva en la evolución, se mira el máximo autovalor de la inversa de la curvatura extrínseca. Este argumento resulta de gran utilidad y según nuestro entendimiento, no es hecho explícito en la literatura. La idea es que la superficie inicial es convexa, entonces ambas curvaturas principales son positivas. En la evolución, si la superficie se deforma de manera tal que tiende a hacerse no convexa, entonces, alguna de las curvaturas principales debe aproximarse a cero desde los positivos. Esto implicaría que el autovalor de la inversa de la curvatura extrínseca debe crecer, lo que contradice el resultado de que el máximo autovalor de la inversa de  $h_{ij}$  está acotado en términos de los valores iniciales y crece exponencialmente con el tiempo.

Es interesante el hecho de que para la esfera coordinada en un dato para Schwarzschild, la ecuación (7.76) es muy similar a la ecuación en el caso euclídeo, excepto por el término proporcional a  $R_{00}$ . Este término es la única manifestación de la no planicidad de la variedad de fondo.

Para el caso no euclídeo, no existen resultados en la literatura que demuestren la preservación de convexidad. En la sección 7 mostramos las dificultades que se encuentran al intentar aplicar el argumento para el caso euclídeo. El término  $P_j^i$  en (7.31) es particularmente problemático para el desarrollo de una prueba siguiendo este argumento, ya que incluye al gradiente de la inversa de  $h_j^i$  y no hay forma clara de acotarlo.

Comparando con el MCF en variedades Riemannianas ([14]), especulamos que los términos que involucran al tensor de Riemann y sus derivadas primeras no deberían ser difíciles de tratar, ya que probablemente pueden ser acotados y descartados imponiendo alguna condición al espacio.

Para un dato inicial asintóticamente plano, los términos  $\beta_j^i$  y  $P_j^i$ , tienden a 0 para tiempos suficientemente grandes, ya que dependen fuertemente del tensor de Riemann. Esto indica que a partir de algún  $t$ , podrían dominar las ecuaciones que gobiernan el caso euclídeo, y por lo tanto la preservación de convexidad.



# Bibliografía

- [1] Andrés Aceña. Constant mean curvature surfaces and area-charge inequality for a spheroidal electrically counterpoised dust spacetime. Phys. Rev. D, 102(10):104046, 2020.
- [2] Ben Andrews. Contraction of convex hypersurfaces in riemannian spaces. Journal of Differential Geometry, 39(2):407–431, 1994.
- [3] Ben Andrews and Christopher Hopper. The Ricci flow in Riemannian geometry: a complete proof of the differentiable 1/4-pinching sphere theorem. springer, 2010.
- [4] Pablo Anglada. Penrose-like inequality with angular momentum for minimal surfaces. Class. Quant. Grav., 35(4):045018, 2018.
- [5] Pablo Anglada, Maria E Gabach-Clement, and Omar E Ortiz. Size, angular momentum and mass for objects. Classical and Quantum Gravity, 34(12):125011, 2017.
- [6] Carla Cederbaum and Gregory J. Galloway. Uniqueness of photon spheres in electrovacuum spacetimes. Class. Quant. Grav., 33:075006, 2016.
- [7] Bennett Chow. Deforming convex hypersurfaces by the  $n$  th root of the gaussian curvature. Journal of Differential Geometry, 22(1):117–138, 1985.
- [8] Bennett Chow, Sun-Chin Chu, David Glickenstein, Christine Guenther, Jim Isenberg, Tom Ivey, Dan Knopf, Peng Lu, Feng Luo, and Lei Ni. The Ricci flow: techniques and applications. American Mathematical Society, 2007.
- [9] Sergio Dain and María Eugenia Gabach-Clement. Geometrical inequalities bounding angular momentum and charges in general relativity. Living reviews in relativity, 21(1):5, 2018.
- [10] K. Ecker. On mean curvature flow of spacelike hypersurfaces in asymptotically flat spacetimes. Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics, 55(1):41–59., 1993.
- [11] Lawrence C Evans. Partial differential equations. Graduate studies in mathematics, 19(4):7, 1998.
- [12] Robert Geroch. Energy extraction. Annals of the New York Academy of Sciences, 224(1):108–117, 1973.

- [13] Richard Hamilton. Four-manifolds with positive curvature operator. J.Differential Geometry, 24:153–179, 1986.
- [14] Gerhard Huisken. Contracting convex hypersurfaces in riemannian-manifolds by their mean-curvature. Inventiones mathematicae, 84(3):463–480, 1986.
- [15] Gerhard Huisken. Evolution of hypersurfaces by their curvature in riemannian manifolds. Documenta Mathematica, pages 349–360, 1998.
- [16] Gerhard Huisken et al. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. Journal of Differential Geometry, 20(1):237–266, 1984.
- [17] Gerhard Huisken, Tom Ilmanen, et al. The inverse mean curvature flow and the riemannian penrose inequality. Journal of Differential Geometry, 59(3):353–437, 2001.
- [18] Gerhard Huisken, Carlo Sinestrari, et al. Convexity estimates for mean curvature flow and singularities of mean convex surfaces. Acta mathematica, 183(1):45–70, 1999.
- [19] Marcus Khuri, Gilbert Weinstein, and Sumio Yamada. The Riemannian Penrose Inequality with Charge for Multiple Black Holes. Contemp. Math., 653:219–226, 2015.
- [20] Jarosław Kopiński and Juan A. Valiente Kroon. New spinorial approach to mass inequalities for black holes in general relativity. Phys. Rev. D, 103(2):024057, 2021.
- [21] Wojciech Kulczycki and Edward Malec. Extensions of the Penrose inequality with angular momentum. Phys. Rev. D, 103(6):064025, 2021.
- [22] Tairan Liang, Wei Tang, and Wei Xu. Entropy relations and bounds of BTZ black hole in gravity’s rainbow. Int. J. Mod. Phys. D, 28(08):1950109, 2019.
- [23] Yannan Liu. Inverse mean curvature flow with forced term. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 410(2):918–931, 2014.
- [24] Stephen McCormick. On the charged Riemannian Penrose inequality with charged matter. Class. Quant. Grav., 37(1):015007, 2020.
- [25] Eric Poisson. A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics. Cambridge university press, 2004.
- [26] Felix Schulze. Evolution of convex hypersurfaces by powers of the mean curvature. Mathematische Zeitschrift, 251(4):721–733, 2005.
- [27] Kaising Tso. Deforming a hypersurface by its gauss-kronecker curvature. Communications on Pure and Applied Mathematics, 38(6):867–882, 1985.
- [28] John IE Urbas et al. An expansion of convex hypersurfaces. Journal of Differential Geometry, 33(1):91–125, 1991.

- [29] Robert M Wald. General relativity. University of Chicago press, 1984.
- [30] Wolfgang Walter. On the strong maximum principle for parabolic differential equations. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 29(1):93–96, 1986.